Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

13. јануар 2018.

Први разред – А категорија

1. За природан број n, нека је $f(n)$ број написан истим цифрама али обратним редоследом (тј. здесна налево) ако n није дељив са 10, а иначе дефинишемо $f(n) = 0$. (На пример, $f(123) = 321$ и $f(30) = 0$.)

a) Ако важи $n = 3f(n)$, доказати да је n дељив са 27.

b) Ако важи $n = 2f(n)$, доказати да је n дељив са 9.

2. Нека је тачка K средиште странице CD правоугаоника $ABCD$. Праве BK и AC су ортогоналне и секу се у тачки H, а тачка G је подножје нормале из D на AC. Доказати:

a) $\measuredangle ACB = \measuredangle DHA$;

b) $GH = \dfrac{1}{3}AC$.

3. Математичка комисија се састоји од $2n$ чланова, $n \geqslant 3$. Познато је да је сваки члан комисије у свађи с тачно једним другим чланом комисије (ова релација је симетрична). На колико начина је могуће поделити комисију у три одбора: један за састављање задатака, један за оцењивање задатака и један за организацију такмичења, тако да сваки одбор има бар два члана и да никоја два члана комисије која су у свађи не буду у истом одбору?

4. Сат има три казаљке које се све окрећу равномерном брзином. Секундна казаљка направи круг за један минут, минутна за један сат, а сатна за 12 сати. У поноћ су све казаљке у истој позицији. Колико ће пута у периоду од 24 часа од тада једна казаљка са сваком од друге две заклапати угао од 30°?

5. Барон Минхаузен живи у земљи Z у којој постоји 2018 градова и неки градови су повезани путевима (путевима је могуће кретати се у оба смера). Барон је установио да постоји град A из ког можемо кренути на путовање, на крају тог путовања се вратити у град A, а да током путовања прођемо свим путевима у тој земљи тачно једном. Он тврди да из те чињенице следи да за било која два пута p и r која иду из истог града постоји путовање из неког града B на крају ког се враћамо у град B, током путовања пролазимо свим путевима тачно једном, и притом путевима p и r пролазимо непосредно једним за другим. Да ли је он праву или по обичају лаже?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

13. јануар 2018.

Други разред – А категорија

1. Решити једначину:
$$\sqrt{17-7\sin 2x}=3\cos x-5\sin x.$$

2. Дат је $\triangle ABC$ чије су странице a, b и c, $a \leqslant b \leqslant c$, а тежишне дужи које њима одговарају су t_a, t_b и t_c, респективно. Доказати:

a) једнакост $a^2+c^2=2b^2$ важи ако и само ако важи $t_a^2+t_c^2=2t_b^2$;

b) једнакост $a^2+c^2=2b^2$ важи ако и само ако је $\triangle ABC$ сличан троуглу чије су странице дужина t_a, t_b и t_c.

3. Наћи све просте бројеве облика $1010101\ldots0101$ (тј. чији децимални запис се састоји од цифре 1 иза које следи блок „01" поновљен произвољан број пута).

4. Наћи сва ненегативна реална решења $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ система једначина
$$x_{i+1}=x_i^2-(x_{i-1}-1)^2,\quad i=1,2,\ldots,n.$$
(Индексе узимамо циклично по модулу n.)

5. Дат је непаран природан број n. Квадрат странице n је подељен на n^2 јединичних квадрата. Странице ових квадрата одређују укупно $2n(n+1)$ јединичних дужи. Неке од ових дужи су обојене црвено, при чему сваки јединични квадрат има бар две црвене странице. Колико најмање дужи може бити обојено?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

13. јануар 2018.

Трећи разред – А категорија

1. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$f(f(xy)) = |x|f(y) + 3f(xy).$$

2. Нека је I центар кружнице уписане у $\triangle ABC$, $AB < AC$. Права AI поново сече његову описану кружницу у тачки D. Кружница описана око $\triangle CDI$ поново сече праву BI у тачки K. Доказати: $BK = CK$.

3. Дат је троугао чије су дужине страница природни бројеви и чија је површина природан број. Једна од његових страница је аритметичка средина друге две, а збир најкраће странице и површине је једнак збиру преостале две странице. Наћи дужине његових страница и његову површину.

4. Дата је табла $(2n+1) \times (2n+1)$ у чијем се ћошку налази паук. Паук у једном потезу може да се помери једно или два поља вертикално или дијагонално, или једно поље хоризонтално. Колико најмање потеза је потребно пауку да обиђе сва поља на табли? (Сматрамо да поље на ком паук стоји на почетку, као и поље на које стигне на крају, јесу поља која је обишао; такође, уколико паук одигра потез у ком се помери за два поља, сматрамо да паук јесте обишао и поље између њих.)

5. Примитивном Питагорином тројком називамо уређену тројку природних бројева (a, b, c), узајамно простих по паровима, за које важи $a^2 + b^2 = c^2$.

a) Доказати да се ниједна примитивна Питагорина тројка не може записати користећи само две различите цифре.

b) Доказати да се бесконачно много примитивних Питагориних тројки може записати помоћу цифара 0, 1 и 5.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

13. јануар 2018.

Четврти разред – А категорија

1. У зависности од ненегативног параметра k одредити граничну вредност:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} kx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

2. Октаедар $ABCDEF$ има за своју основицу квадрат $ABCD$, док је права EF нормална на раван одређену квадратом $ABCD$ и пролази кроз његов центар. Познато је да лопта која додирује све пљосни октаедра и лопта која додирује све бочне ивице (тј. EA, EB, EC, ED, FA, FB, FC и FD) имају исти центар и да лопта која додирује бочне ивице има за 50% већу површину. Наћи однос $\dfrac{EF}{AB}$.

3. Перица стоји на једном од четири спрата зграде. У једном потезу он прелази на суседан спрат (спрат изнад или спрат испод, ако такав постоји). На колико начина Перица може да направи n потеза, где је n задат ненегативан цео број, ако може почети на било ком спрату а мора завршити на последњем?

4. Дата су два проста броја p и q који задовољавају услов $p < q < 2p$. Доказати да постоје два узастопна природна броја таква да је највећи прост делилац једног од њих једнак p, а највећи прост делилац другог једнак q.

5. У јединичном кругу Γ је дато n дужи укупне дужине $2\sqrt{n}$. Доказати да постоји кружница концентрична с кругом Γ која сече бар две дате дужи.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

13. јануар 2018.

Први разред – Б категорија

1. Мерни бројеви углова троугла, изражени у степенима, представљају три проста броја. Наћи све могуће вредности за углове тог троугла.

2. Свака карта с једне стране има број, а с друге стране има слово (две карте које с једне стране имају исто слово не морају нужно с друге стране имати исти број, и обратно). На столу стоје карте које на видљивој страни имају:

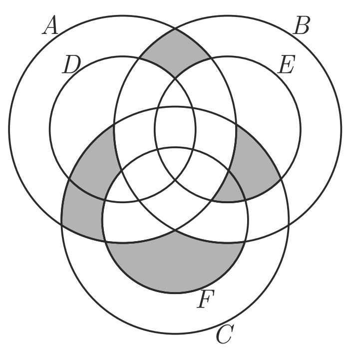
М, А, Т, Е, М, А, Т, И, К, А, 2, 0, 1, 8.

Влада тврди следеће: „Ако је на карти самогласник, онда је с друге стране паран број“. Миљан жели да провери Владино тврђење. Колико најмање карата (и које) треба да окрене да би утврдио тачност тврђења?

3. Да ли постоје узастопни природни бројеви a, b, c и d такви да важи

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{2018}{1301} \quad ?$$

4. На слици је дат Венов дијаграм за шест скупова A, B, C, D, E и F, при чему важи $D \subseteq A$, $E \subseteq B$ и $F \subseteq C$. Написати формулу за скуп који одговара осенченој области.



5. Свако слово у речи *МАШТОВИТ* представља једну цифру из скупа $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Различита слова представљају различите цифре. Број *МАШТОВИТ* је непаран и дељив са 3, а сви сугласници представљају цифре исте парности. Колико има таквих бројева?

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

13. јануар 2018.

Други разред – Б категорија

1. Одредити колико има скупова X који задовољавају оба следећа услова:

- $X \setminus \{1,2,3,4,5\} = \{6,7,8\}$;
- $X \cup \{4,5,6,7,8,9,10\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

2. Ако је полином

$$x^3 + 3ax^2 + 3bx + c$$

дељив полиномом

$$x^2 + 2ax + b,$$

онда је први полином потпун куб, а други потпун квадрат. Доказати.

3. У правоуглом трапезу дужина средње линије је 43. Краћа дијагонала тог трапеза је истовремено симетрала тупог угла тог трапеза, и њена дужина износи 60. Одредити дужине свих страница тог трапеза.

4. Наћи све просте бројеве p такве да су и бројеви $4p^2 + 1$ и $6p^2 + 1$ прости.

5. У скупу реалних бројева решити неједначину:

$$2|x-2| - \left|\frac{3}{|x-3|} - 1\right| \geqslant 1.$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

13. јануар 2018.

Трећи разред – Б категорија

1. Наћи све просте бројеве p, q, r и s такве да важи

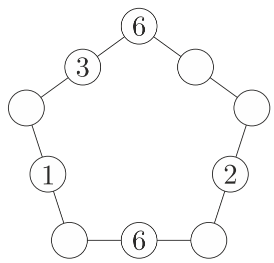
$$6p + 7pq + 8pqr + 9pqrs = 2018.$$

2. Дати су бројеви $a_1 = \log_2(3^x - 1)$, $a_2 = \log_4(9^x - 3^{x+1} + 2)$ и $a_3 = \log_2(3 - 3^x)$.

a) Одредити све реалне вредности x за које су сва 3 броја a_1, a_2 и a_3 дефинисана.

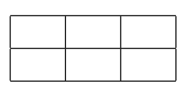
b) Одредити све реалне вредности x за које важи $a_1 + a_3 = 2a_2$.

3. Марко је уписао 5 бројева у 5 кружића на слици.



Марко жели да упише бројеве природне бројеве мање од 100 у остале кружиће, а да при томе збир 3 броја дуж сваке странице петоугла буде исти. На колико различитих начина он може то да уради?

4. Анђелија уписује редом слова С,Р,Б,И,Ј,А у поља таблице:



(по једно слово у свако поље). Прво слово може да упише у било које поље, а свако следеће слово може да упише само у поље суседно пољу у које је написала претходно слово (поља су суседна ако имају бар једну заједничку тачку). На колико различитих начина она може да упише слова у таблицу?

5. Ивице тетраедра $ABCD$ имају дужине 7, 13, 18, 27, 36 и 41 (у неком поретку). Ако је AB дужине 41, одредити дужину ивице CD.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

13. јануар 2018.

Четврти разред – Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину:

$$(x-7)^3 + (x+3)^3 = 278(x-2).$$

2. У зависности од ненегативног параметра a одредити граничну вредност:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{a+2018^x}{2}\right)^{\frac{2018}{x}}.$$

3. Колико има петоцифрених природних бројева који имају тачно две парне цифре?

4. Основа пирамиде је правоугли троугао коме је један од оштрих углова 60°. Бочне ивице имају дужину 2018 и свака од њих заклапа угао од 45° с равни основе. Наћи површину и запремину те пирамиде.

5. За природне бројеве m и n, $m < n$, важи

$$\left(\frac{m}{n}\right)^3 = \overline{0{,}xyzxyzxyz\ldots}$$

где су x, y и z неке цифре (не нужно различите), и блок $\overline{xyz}$ се периодично понавља бесконачно много пута. Одредити све могуће вредности за $\frac{m}{n}$.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Решења задатака

Први разред – А категорија

1. а) Пошто је n дељив са три, следи да је његов збир цифара дељив са три, те је онда и $f(n)$ дељив са 3 јер има исти збир цифара. Одатле, из $n = 3f(n)$ следи да је број n дељив са 9 те је и његов збир цифара дељив са 9, и најзад, пошто је и $f(n)$ дељив са 9 јер има исти збир цифара, из $n = 3f(n)$ следи да је n дељив са 27.

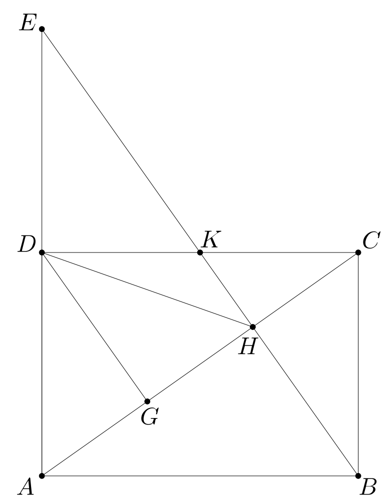
b) Уколико запишемо $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$, једнакост $n = 2f(n)$ се своди на

$$10^k a_k + \cdots + 10a_1 + a_0 = 2(10^k a_0 + \cdots + 10a_{k-1} + a_k).$$

Из констатације $10^i \equiv 1^i = 1 \pmod 9$ следи $a_k + \cdots + a_1 + a_0 \equiv 2(a_0 + \cdots + a_{k-1} + a_k) \pmod 9$, тј. $a_0 + \cdots + a_{k-1} + a_k \equiv 0 \pmod 9$. Дакле, како је збир цифара броја n дељив са 9, следи да је и n дељив са 9.

2. а) Нека права BK сече продужетак странице AD у тачки E. Како су $\triangle BCK$ и $\triangle EDK$ правоугли, K је средиште странице CD и код K имамо унакрсне углове, добијамо $\triangle BCK \cong \triangle EDK$. Одатле имамо $ED = BC = AD$, па како је $\triangle AHE$ правоугли (по услову задатка важи $BK \perp AC$), то је D средиште хипотенузе, па имамо $AD = ED = HD$, тј. $\triangle HAD$ је једнакокраки, одакле следи $\measuredangle DAH = \measuredangle DHA$. Сада из једнакости $\measuredangle DAH = \measuredangle ACB$ (углови са паралелним крацима) добијамо тражену једнакост $\measuredangle ACB = \measuredangle DHA$.

b) Очигледно, $\triangle GAD \cong \triangle HCB$ (имају подударна сва три одговарајућа угла, и $AD = CB$). Одатле следи $AG = CH$, а како су праве DG и EH паралелне и $AD = DE$, из Талесове теореме следи $AG = GH$. Коначно, из $AG = GH = HC$ следи $GH = \frac{1}{3}AC$.



Оп 2018 1А 2

3. Нађимо прво на колико се начина могу одабрати тражени одбори ако изоставимо захтев да сваки одбор мора имати бар два члана. Свака два математичара који су међусобно у свађи можемо на укупно $3 \cdot 2 = 6$ начина распоредити у три одбора (првог математичара ставимо у било који одбор, а за другог бирамо један од преостала два), те је укупан број начина 6^n. Од овог броја треба одузети одабире у којима је број чланова у неком одбору 0 или 1. Приметимо, пре свега, да може постојати највише један такав одбор (ако би два одбора била таква, у трећем бисмо имали бар $2n-2$ чланова комисије, а пошто за $n \geqslant 3$ важи $2n-2 > n$, неки од чланова у том одбору би били међусобно у свађи). Број одабира где је неки одбор без чланова износи $3 \cdot 2^n$ (најпре фиксирамо који од 3 одбора ће бити без чланова, а онда сваки пар математичара у свађи можемо у преостала два одбора распоредити на 2 начина). Број одабира где неки одбор има само једног члана износи $2n \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2^{n-1} = 3n \cdot 2^{n+1}$ (усамљени математичар се може изабрати на $2n$ начина, сместити у један од 3 одбора, особа са којом је у свађи у било који од преостала 2 одбора, а онда се преосталих $2n-2$ математичара може сместити на 2^{n-1} начина). Следи да је решење задатка број $6^n - 3 \cdot 2^n - 3n \cdot 2^{n+1} = 6^n - 3 \cdot 2^n(2n+1)$.

4. Нека је t број секунди протеклих од поноћи, при чему је t ненегативан реалан број. Углови које су за то време прешле секундна, минутна и сатна казаљка, редом, износе $6t$, $\frac{t}{10}$ и $\frac{t}{120}$ (изражени у степенима). Услов да секундна и минутна казаљка заклапају угао од 30° је $6t - \frac{t}{10} = \pm 30 + 360a$, што је еквивалентно са

$$t = \frac{300(\pm 1 + 12a)}{59};$$

услов да секундна и сатна казаљка заклапају угао од 30° је $6t - \frac{t}{120} = \pm 30 + 360b$, што је еквивалентно са

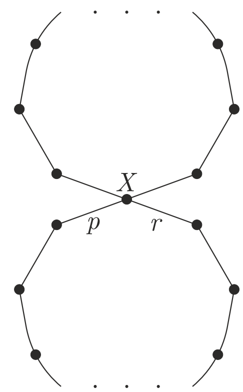
$$t = \frac{3600(\pm 1 + 12b)}{719};$$

услов да минутна и сатна казаљка заклапају угао од 30° је $\frac{t}{10} - \frac{t}{120} = \pm 30 + 360c$, што је еквивалентно са

$$t = \frac{3600(\pm 1 + 12c)}{11}$$

(где су a, b и c неки цели бројеви). По услову задатка, две од ове три једнакости морају да важе. Како су бројеви 11, 59 и 719 узајамно прости по паровима, следи да t мора бити цео број (наиме, именилац броја t мора делити нека два од ова три броја, па следи да именилац мора бити 1). Како важи једна од последње 2 једнакости, а број 3600 је узајамно прост и са 11 и са 719, следи да је t дељив са 3600. Другим речима, услови задатка се могу испунити само кад је прошао целобројан број сати, што значи да и секундна и минутна казаљка тада показују на број 12. Тада, да би се испунио услов задатка, сатна казаљка мора показивати на број 1 или 11. Следи да ће у току двадесетчетворочасовног периода 4 пута бити задовољени услови задатка: у 1.00, 11.00, 13.00 и 23.00.

5. Барон Минхаузен није у праву: из установљене чињенице не следи његов закључак. Као контрапример можемо узети ситуацију у којој из једног града полазе четири пута, а из сваког од преосталих 2017 градова по два пута, на начин који је приказан на слици. Очигледно, у таквој ситуацији јесте испуњена чињеница коју је барон установио. Одаберимо сада за p и r два пута означена на слици. Јасно, да бисмо из „горње половине“ прешли у „доњу“ (или обратно), морамо проћи путем p или r. Међутим, уколико бисмо њима пролазили непосредно једним за другим, очигледно бисмо прво ишли (једним од њих) у смеру ка граду X, а потом (другим од њих) у смеру од града X. Ово значи да смо путовање започели у доњој половини (будући да би евентуални претходни прелазак из горње половине у доњу подразумевао пролазак путем p или r у смеру од града X), но онда, после проласка путевима p и r на описани начин, не постоји више начин да дођемо до горње половине уз поштовање описаних услова путовања. Тиме је задатак решен.



Оп 2018 1А 5

Други разред – А категорија

1. Из $\sin 2x \leqslant 1$ имамо $17 - 7\sin 2x > 0$ за све вредности x, па је корен с леве стране увек дефинисан. Дакле, пре квадрирања једначине треба поставити само услов $3\cos x - 5\sin x > 0$. Након квадрирања остаје $17 - 7\sin 2x = 9\cos^2 x + 25\sin^2 x - 30\sin x\cos x$, тј., замењујући $17 = 17\sin^2 x + 17\cos^2 x$ и пребацујући све на леву страну,

$$8\cos^2 x - 8\sin^2 x + 30\sin x\cos x - 7\sin 2x = 0.$$

Из идентитета $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ и $2\sin x\cos x = \sin 2x$ видимо да је добијена једначина еквивалентна са $8\cos 2x + 8\sin 2x = 0$. Ово даље можемо трансформисати као

$$0 = 8\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right) = 8\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos 2x + \cos\frac{\pi}{4}\sin 2x\right) = 8\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right),$$

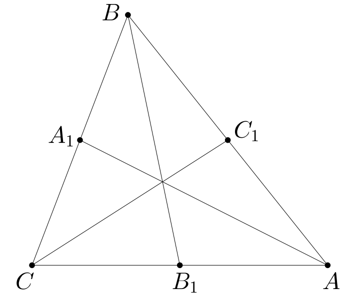
одакле следи $2x + \frac{\pi}{4} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Дакле, решења последње једначине су бројеви облика $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Они се могу поделити у четири класе (где у свакој класи имамо период 2π): $x = -\frac{\pi}{8} + 2k\pi$, $x = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi$, $x = \frac{7\pi}{8} + 2k\pi$, $x = \frac{11\pi}{8} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Решења из друге и треће класе не испуњавају услов $3\cos x - 5\sin x > 0$ (имамо $\cos\frac{3\pi}{8} < \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sin\frac{3\pi}{8} > \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, па $3\cos\frac{3\pi}{8} - 5\sin\frac{3\pi}{8} < -\sqrt{2} < 0$; такође, $\cos\frac{7\pi}{8} < 0$ и $\sin\frac{7\pi}{8} > 0$, па $3\cos\frac{7\pi}{8} - 5\sin\frac{7\pi}{8} < 0$). Решења из прве и четврте класе испуњавају тај услов ($\cos(-\frac{\pi}{8}) > 0$ и $\sin(-\frac{\pi}{8}) < 0$, па $3\cos(-\frac{\pi}{8}) - 5\sin(-\frac{\pi}{8}) > 0$; такође, $\cos\frac{11\pi}{8} > \cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sin\frac{11\pi}{8} < \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, па $3\cos\frac{11\pi}{8} - 5\sin\frac{11\pi}{8} > \sqrt{2} > 0$), па само она чине решења полазне једначине. Другим речима, одговор је:

$$x \in \left\{-\frac{\pi}{8} + 2k\pi, \frac{11\pi}{8} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2. У оба дела задатка користићемо формулу

$$t_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

(и аналогно за остале тежишне дужи). Покажимо како се она изводи. Ако је A_1 средина странице BC, из косинусне теореме примењене на $\triangle AA_1B$ имамо $c^2 = t_a^2 + BA_1^2 - 2t_aBA_1\cos\measuredangle AA_1B$, а из косинусне теореме примењене на $\triangle AA_1C$ добијамо $b^2 = t_a^2 + CA_1^2 - 2t_aCA_1\cos\measuredangle AA_1C$. Сабирањем ове две једнакости, уз примену $BA_1 = CA_1 = \frac{a}{2}$ и $\cos\measuredangle AA_1B = -\cos\measuredangle AA_1C$ (будући да су ова два угла напоредна), добијамо $b^2 + c^2 = 2t_a^2 + \frac{a^2}{2}$, одакле следи жељена формула.



Оп 2018 2А 2

а) Претпоставимо $a^2 + c^2 = 2b^2$. Тада имамо

$$t_a^2 + t_c^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} + \frac{2b^2 + 2a^2 - c^2}{4} = \frac{4b^2 + a^2 + c^2}{4} = \frac{6b^2}{4} = \frac{3b^2}{2}$$

и

$$2t_b^2 = \frac{2a^2+2c^2-b^2}{2} = \frac{4b^2-b^2}{2} = \frac{3b^2}{2},$$

тј. заиста важи $t_a^2+t_c^2=2t_b^2$.

Обратно, уколико претпоставимо $t_a^2+t_c^2=2t_b^2$, ово се своди на

$$\frac{4b^2+a^2+c^2}{4} = \frac{2a^2+2c^2-b^2}{2},$$

одакле (после множења обе стране са 4 и потирања) следи $6b^2=3a^2+3c^2$, тј. $a^2+c^2=2b^2$.

b) Претпоставимо $a^2+c^2=2b^2$. Тада имамо

$$\frac{t_a^2}{t_b^2} = \frac{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}}{\frac{2a^2+2c^2-b^2}{4}} = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{2a^2+2c^2-b^2} = \frac{(a^2+c^2)+2c^2-a^2}{2(2b^2)-b^2} = \frac{3c^2}{3b^2} = \frac{c^2}{b^2},$$

тј. $\frac{t_a}{t_b}=\frac{c}{b}$. Аналогно, $\frac{t_c}{t_b}=\frac{a}{b}$. Дакле, пошто посматрана два троугла имају два пара пропорционалних страница, следи да су они слични.

Обратно, уколико претпоставимо да су та два троугла слична, тада имамо $\frac{t_a}{t_c}=\frac{c}{a}$ (приметимо, из $a\leqslant b\leqslant c$ следи $t_a\geqslant t_b\geqslant t_c$, одакле закључујемо која страница кореспондира којој), тј. $at_a=ct_c$. Ово се даље своди на $a\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}=c\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$, тј. $2a^2b^2+2a^2c^2-a^4=2a^2c^2+2b^2c^2-c^4$. Пребацивањем свега на десну страну једнакости добијамо

$$0=a^4-c^4+2b^2c^2-2a^2b^2=(a^2-c^2)(a^2+c^2)+2b^2(c^2-a^2)=(a^2-c^2)(a^2+c^2-2b^2).$$

Одавде следи $a=c$ или $a^2+c^2=2b^2$. У другом случају задатак је решен. У првом случају, из $a=c$ и $a\leqslant b\leqslant c$ имамо $a=b=c$, па тада опет важи $a^2+c^2=2b^2$. Тиме је доказ завршен.

3. Посматрани бројеви су облика $\frac{10^{2k}-1}{99}$ за неки природан број k. За $k=1$ имамо број 1, што није прост број. За $k=2$ имамо број 101, што јесте прост број. За $k\geqslant 3$ имамо

$$\frac{10^{2k}-1}{99} = \frac{(10^k-1)(10^k+1)}{99} = \frac{\frac{10^k-1}{9}(10^k+1)}{11}.$$

Један од два чиниоца у бројиоцу мора бити дељив са 11 (јер је посматрани број природан). Ако $11\mid 10^k+1$, тада је $\frac{10^k-1}{9}$ фактор посматраног броја (већи од 1 и различит од самог броја), па је посматрани број сложен; ако $11\mid\frac{10^k-1}{9}$, тада је $\frac{10^k-1}{99}$ фактор посматраног броја (већи од 1 и различит од самог броја), па је посматрани број поново сложен.

Дакле, једино решење је број 101.

4. Сабирањем свих n једначина добијамо

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\sum_{i=1}^n x_i + n\right),$$

што се своди на $\sum_{i=1}^n x_i = n$. Претпоставимо, без смањења општости, да је x_1 минималан међу $x_1,x_2,\dots,x_n$. Тада имамо $0\leqslant x_1\leqslant 1$. Међутим, прва једначина даје $x_2=x_1^2-(x_n-1)^2\leqslant x_1^2\leqslant x_1$, па због минималности x_1 мора бити $x_2=x_1=x_1^2$ и $x_n=1$. Одатле следи $x_1=0$ или $x_1=1$. У првом случају на исти начин добијамо $x_3=x_2=0$, $x_4=x_3=0$ итд., тј. $x_2=x_3=\dots=x_n=0$, што није решење. Остаје само случај $x_1=1$ и одатле опет на исти начин добијамо $x_1=x_2=\dots=x_n=1$, па је то једино решење.

5. Јединичних квадрата има n^2, сваки има бар две црвене странице, што значи да парова облика

(јединични квадрат, његова црвена страница)

има бар $2n^2$. Међутим, свака црвена дуж се појављује у највише два таква пара, па црвених дужи има бар n^2.

Претпоставимо да их има тачно n^2. Тада свака од њих лежи у тачно два јединична квадрата, а сваки јединични квадрат има тачно две црвене дужи (јер би у супротном у некој од процена из претходног пасуса важила строга неједнакост, па би број црвених дужи морао бити строго већи од n^2). Обојимо јединичне квадрате црно и бело, попут шаховске табле. Свака црвена дуж је у тачно једном белом квадрату (и једном црном), а пошто сваки бели квадрат има две црвене странице, следи да белих квадрата има $\frac{1}{2}n^2$, што није цео број; контрадикција.

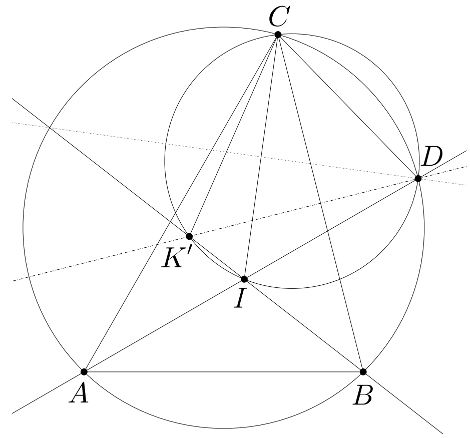
Дакле, црвених дужи има бар n^2+1. Покажимо да је могуће достићи ову вредност. Довољно је обојити све хоризонталне дужи осим оних које су на страницама великог квадрата, а вертикалне јединичне дужи које належу на две хоризонталне странице великог квадрата обојити наизменично (прву, трећу, пету...). Овако је обојено $n(n-1)+\frac{n+1}{2}+\frac{n+1}{2}=n^2+1$ дужи, чиме је доказ завршен.

Трећи разред – А категорија

1. Ако x и y замене места, добијамо $f(f(xy)) = |y|f(x) + 3f(xy)$, што одузимањем од полазне једначине даје $|x|f(y) = |y|f(x)$. За $y = 1$ имамо $f(x) = f(1)|x|$. Затим за $x = y = 1$ у полазној једначини добијамо $f(f(1)) = 4f(1)$, а пошто из формуле из претходне реченице следи $f(f(1)) = f(1)|f(1)|$, спајањем последње две једнакости добијамо $f(1)|f(1)| = 4f(1)$, тј. $f(1)(|f(1)| - 4) = 0$. Одатле следи $f(1) \in \{-4, 0, 4\}$, тј. кандидати за решења су функције $f(x) \equiv 0$, $f(x) = 4|x|$ и $f(x) = -4|x|$. Прва од њих очигледно јесте решење, видимо и да друга јесте решење јер важи $|x|f(y) + 3f(xy) = 4|xy| + 12|xy| = 16|xy| = f(f(xy))$, а слично и $f(x) = -4|x|$ јесте решење.

2. Познато је да важи $DC = DI$. Заиста, ако углове троугла означимо уобичајено са α, β и γ, имамо $\measuredangle ICD = \measuredangle ICB + \measuredangle BCD = \measuredangle ICB + \measuredangle BAD = \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2} = \measuredangle ICA + \measuredangle IAC = \measuredangle DIC$, тј. $DI = DC$.

Нека BI сече симетралу странице BC у тачки K'. Доказаћемо $K' \equiv K$, што је довољно за решење задатка јер по избору тачке K' важи $BK' = CK'$. Како имамо $\measuredangle IK'D = \measuredangle BK'D = \measuredangle CK'D$, тачка D је пресек симетрале $\measuredangle IK'C$ и симетрале дужи IC (подсетимо се, $DI = DC$), а познато је да тај пресек лежи на кружници описаној око $\triangle IK'C$. Дакле, тачке I, K', C и D су концикличне; одатле, K' лежи на кружници описаној око $\triangle CDI$, па следи $K' \equiv K$.



Оп 2018 3А 2

3. Нека су дужине странице тог троугла a, b и c, а његова површина P. Можемо претпоставити, без умањења општости, $a \leqslant b \leqslant c$. Тада је b аритметичка средина a и c, па из $b = \frac{a+c}{2}$ добијамо $c = 2b - a$. Сада из $a + P = b + c$ добијамо $P = b + c - a = b + (2b - a) - a = 3b - 2a$. Изразићемо површину троугла помоћу Херонове формуле. Имамо $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3b}{2}$, $s - a = \frac{3b}{2} - a$, $s - b = \frac{b}{2}$ и $s - c = a - \frac{b}{2}$, па следи

$$3b - 2a = P = \sqrt{\frac{3b}{2}\left(\frac{3b}{2} - a\right)\frac{b}{2}\left(a - \frac{b}{2}\right)} = \frac{b}{4}\sqrt{3(3b - 2a)(2a - b)}.$$

Квадрирањем обе стране добијамо $16(3b-2a)^2 = 3b^2(3b-2a)(2a-b)$, што се своди на $16(3b-2a) = 3b^2(2a-b)$ (можемо скратити са $3b - 2a$ јер из $b \geqslant a$ следи $3b - 2a > 0$), тј. $48b - 32a = 6ab^2 - 3b^3$. Уочавамо да је $3b^3$ паран број (јер су сви остали сабирци парни), па следи да је и b паран број, тј. $b = 2b'$. Последња једнакост се своди на $96b' - 32a = 24ab'^2 - 24b'^3$, тј., после дељења са 8, $12b' - 4a = 3ab'^2 - 3b'^3$. Одавде можемо изразити

$$a = \frac{3b'^3 + 12b'}{3b'^2 + 4} = \frac{3b'^3 + 4b' + 8b'}{3b'^2 + 4} = b' + \frac{8b'}{3b'^2 + 4}.$$

Како је a цео број, добијамо $3b'^2 + 4 \mid 8b'$, а одатле $3b'^2 + 4 \leqslant 8b'$. Једнакост се достиже за $b' = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{6} = \frac{8 \pm 4}{6}$, тј. за $b' = \frac{2}{3}$ и $b' = 2$, па посматрана неједнакост важи за $b' \in [\frac{2}{3}, 2]$. Једини природни бројеви у овом интервалу су $b' = 1$ и $b' = 2$. За $b' = 1$ имамо $a = 1 + \frac{8}{7}$, што није природан број, па се овде не добија решење. За $b' = 2$ имамо $a = 2 + \frac{16}{3 \cdot 4 + 4} = 2 + 1 = 3$, $b = 2b' = 4$, $c = 2b - a = 2 \cdot 4 - 3 = 5$ и $P = 3b - 2a = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 6$, што је јединствено решење задатка.

4. Прво покажимо да је могуће обићи таблу у $n(2n+1) + 2n = 2n^2 + 3n$ потеза. Овај број потеза се може постићи ако паук дуж сваке колоне иде вертикално два поља све док је не обиђе целу, онда се помери хоризонтално једно поље до следеће колоне и понавља поступак до краја табле. Сада покажимо да је ово најмањи могућ број потеза. Обојимо сва поља у непарним врстама у црно. Видимо да у сваком потезу скуп новообиђених поља може садржати највише једно црно поље. Укупан број необиђених црних поља на почетку (дакле, сва црна поља осим почетног) једнак је $(n + 1)(2n + 1) - 1 = 2n^2 + 3n$, те следи да је управо толико минимално потеза потребно пауку да обиђе сва поља.

5. а) Познато је да тројка (a, b, c) чини примитивну Питагорину тројку ако и само ако постоје узајамно прости природни бројеви m и n различите парности такви да важи $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ и $c = m^2 + n^2$ (уз могуће замењене улоге за a и b). Одатле, један од бројева a и b је паран а други непаран, па се они завршавају различитим цифрама. Дакле, под претпоставком да се a, b и c могу записати користећи само две различите цифре, следи да се c мора завршавати истом цифром као један од бројева a или b. Сада из $a^2 + b^2 = c^2$ следи да се неки од бројева a^2, b^2 или c^2 мора завршавати цифром 0, па се одатле и један од бројева a, b или c завршава цифром 0, тј. 0 је једна од две цифре које се (по претпоставци) користе у запису ова три броја. Кад би друга цифра била x, $x > 1$, следило би да су сва три броја дељива са x, те да нису узајамно проста; дакле, те две цифре морају бити 0 и 1.

То значи да можемо записати $a = \sum_{i=1}^{n_1} 10^{a_i}$, $b = \sum_{i=1}^{n_2} 10^{b_i}$ и $c = \sum_{i=1}^{n_3} 10^{c_i}$, где су a_i, b_i и c_i ненегативни цели бројеви, индексирани у растућем поретку. Тада имамо $a^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n_1} 10^{a_i + a_j}$ и аналогно за b^2 и c^2. Најмањи сабирци у бројевима a^2, b^2 и c^2, редом, јесу 10^{2a_1}, 10^{2b_1} и 10^{2c_1}, те, не умањујући општост, морамо имати $a_1 = c_1$. Докажимо индукцијом да за све i важи $a_i = c_i$ (одатле ће следити $a = c$, контрадикција). Базу смо управо показали.

Претпоставимо сада да за све i, $1 \leqslant i \leqslant k$, важи $a_i = c_i$, и докажимо $a_{k+1} = c_{k+1}$. Из претпоставке следи да се сви сабирци у a^2 облика $10^{a_i+a_j}$ за $i, j \leqslant k$ потиру с одговарајућим сабирцима у c^2. Од преосталих сабирака, најмањи у a^2 је $2 \cdot 10^{a_1+a_{k+1}}$, најмањи у b^2 је 10^{2b_1}, а најмањи у c^2 је $2 \cdot 10^{c_1+c_{k+1}}$. Како се 10^{2b_1} појављује само једном у b^2, он сам не може потрети $2 \cdot 10^{c_1+c_{k+1}}$, па остаје $2 \cdot 10^{a_1+a_{k+1}} = 2 \cdot 10^{c_1+c_{k+1}}$, тј. $a_{k+1} = c_{k+1}$, што је и требало доказати.

b) Поново ћемо користити карактеризацију примитивних Питагориних тројки с почетка дела а). У тој карактеризацији узмимо $n = 5l$ и $m = 5l + 1$. Тада добијамо $a = 10l + 1$, $b = 10l(5l + 1)$ и $c = 10l(5l + 1) + 1$. Следи да је довољно наћи l такво да се и l и $l(5l + 1)$ могу исписати цифрама $\{0, 1, 5\}$. Ако узмемо $l = 10^s$ за произвољно $s \in \mathbb{N}$, тада имамо $5l + 1 = 5 \cdot 10^s + 1$, па следи $l(5l + 1) = 5 \cdot 10^{2s} + 10^s$, те се за бесконачно много s може направити жељена Питагорина тројка.

Напомена. Још неки примери примитивних Питагориних тројки које се састоје само од три различите цифре су $(2\underbrace{00\ldots00}_{k-1}1,\ 2\underbrace{00\ldots00}_{k-1}2\underbrace{00\ldots00}_{k},\ 2\underbrace{00\ldots00}_{k-1}2\underbrace{00\ldots00}_{k-1}1)$ и $(\underbrace{33\ldots33}_{k},\ \underbrace{55\ldots55}_{k-1}\underbrace{44\ldots44}_{k},\ \underbrace{55\ldots55}_{k-1}\underbrace{44\ldots44}_{k-1}5)$ за ма које $k \in \mathbb{N}$.

Четврти разред – А категорија

1. *Прво решење.* Пре свега, имамо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} kx}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin kx}{\cos kx}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{k}{\cos kx} = 1\cdot k = k.$$

Даље, имамо и $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty$, па добијамо да за $k > 1$ важи $\lim_{x\to 0}(\frac{\operatorname{tg} kx}{x})^{\frac{1}{x^2}} = \infty$, а за $0 \leqslant k < 1$ важи $\lim_{x\to 0}(\frac{\operatorname{tg} kx}{x})^{\frac{1}{x^2}} = 0$. Преостаје случај $k = 1$. Тада посматрани израз трансформишемо на следећи начин:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{\operatorname{tg} x - x}{x}\right)^{\frac{x}{\operatorname{tg} x - x}\cdot\frac{\operatorname{tg} x - x}{x}\cdot\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(\left(1 + \frac{\operatorname{tg} x - x}{x}\right)^{\frac{x}{\operatorname{tg} x - x}}\right)^{\frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}}.$$

Приметимо да за $x \to 0$ имамо $\frac{\operatorname{tg} x - x}{x} \to 0$ (због виђеног $\frac{\operatorname{tg} x}{x} \to 1$), па је израз у спољним заградама облика $(1+t)^{\frac{1}{t}}$ за $t \to 0$, и његов лимес је e. Према томе, даље можемо рачунати:

$$\lim_{x\to 0}\left(\left(1 + \frac{\operatorname{tg} x - x}{x}\right)^{\frac{x}{\operatorname{tg} x - x}}\right)^{\frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}} = \left(\lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{\operatorname{tg} x - x}{x}\right)^{\frac{x}{\operatorname{tg} x - x}}\right)^{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}},$$

па преостаје још израчунати $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$. Примењујући Лопиталово правило (два пута), добијамо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\cos^{-3} x\cdot(-\sin x)}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos^{-3} x}{6}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{2}{6}\cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

Дакле, решење задатка је:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} kx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \begin{cases} 0, & \text{за } 0 \leqslant k < 1;\\ e^{\frac{1}{3}}, & \text{за } k = 1;\\ \infty, & \text{за } k > 1.\end{cases}$$

Друго решење. Радимо само случај $k = 1$ (остатак иде као у претходном решењу). Можемо записати

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(e^{\ln\frac{\operatorname{tg} x}{x}}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\operatorname{tg} x}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\operatorname{tg} x}{x}},$$

па је довољно израчунати $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\operatorname{tg} x}{x}$. Ово спроводимо на следећи начин (примењујемо Лопиталово правило свугде где је назначено $\overset{\text{Л. п.}}{=}$):

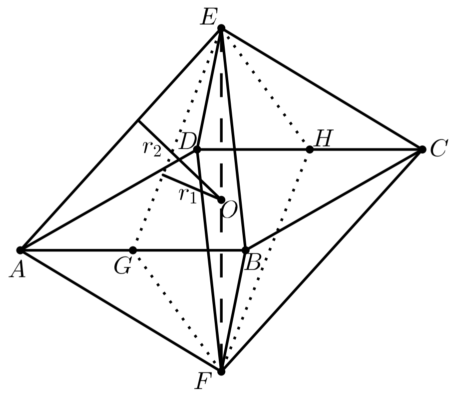
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\operatorname{tg} x}{x}}{x^2} \overset{\text{Л. п.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{\frac{1}{\cos^2 x}x - \operatorname{tg} x}{x^2}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x}{2x^2\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{2x^2\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x\cos x}{2x^2\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{1}{2}\sin 2x}{x^2\sin 2x}$$

$$\overset{\text{Л. п.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos 2x}{2x\sin 2x + 2x^2\cos 2x} \overset{\text{Л. п.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2\sin 2x + 4x\cos 2x + 4x\cos 2x - 4x^2\sin 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 2x + 4x\cos 2x - 2x^2\sin 2x} \overset{\text{Л. п.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{2\cos 2x + 4\cos 2x - 8x\sin 2x - 4x\sin 2x - 4x^2\cos 2x} = \frac{2}{2+4} = \frac{1}{3},$$

па добијамо исти резултат као у претходном решењу.

2. Нека су G и H средишта страница AB и CD, и O центар квадрата $ABCD$. Нека су r_1 и r_2 полупречници две лопте. Тада су r_1 и r_2, респективно, полупречници кружница уписаних у четвороуглове $FGEH$ и $FAEC$. Обележимо $OG = a$, $OA = a' = a\sqrt{2}$, $OE = b$ и $OF = b'$. Заједнички центар S две посматране лопте се налази на дужи EF, и притом је GS симетрала $\measuredangle EGF$, а AS симетрала $\measuredangle EAF$ (јер је S уједно центар кружница уписаних у $FGEH$ и $FAEC$). Одатле следи $\frac{EG}{FG} = \frac{ES}{FS} = \frac{EA}{FA}$, одакле добијамо $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b'^2}} = \frac{\sqrt{a'^2+b^2}}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$, а што се (унакрсним множењем) своди на $\sqrt{a'^2a^2 + a'^2b'^2 + b^2a^2 + b^2b'^2} = \sqrt{a'^2a^2 + a'^2b^2 + b'^2a^2 + b'^2b^2}$, тј. $a'^2b'^2 + b^2a^2 = a'^2b^2 + b'^2a^2$, а ово је еквивалентно са $(a'^2 - a^2)(b'^2 - b^2) = 0$. Како важи $a' \neq a$, из претходне једнакости следи $b' = b$, а одатле добијамо $S \equiv O$. Сада имамо $r_1 = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $r_2 = \frac{a'b}{\sqrt{a'^2+b^2}} = \frac{\sqrt{2}ab}{\sqrt{2a^2+b^2}}$ (што смо добили рачунајући висине из O у $\triangle EOG$ и $\triangle EOA$ с правим углом у темену O). Из услова задатка имамо $\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, тј. $\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2a^2+b^2}} = \sqrt{\frac{2+2(\frac{b}{a})^2}{2+(\frac{b}{a})^2}}$, а одавде добијамо $6 + 3(\frac{b}{a})^2 = 4 + 4(\frac{b}{a})^2$, тј. коначно $\frac{EF}{AB} = \frac{b}{a} = \sqrt{6-4} = \sqrt{2}$.



Оп 2018 4А 2

3. Означимо са $A_i(n)$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, број начина да Перица крене са i-тог спрата, направи n корака и заврши на последњем спрату. Тражени број је $B_n = \sum_{i=1}^4 A_i(n)$. Директно израчунавамо $B_0 = \sum_{i=1}^4 A_i(0) = 0 + 0 + 0 + 1 = 1$ и $B_1 = \sum_{i=1}^4 A_i(1) = 0 + 0 + 1 + 0 = 1$. Даље, јасно је да за свако $n > 1$ важи

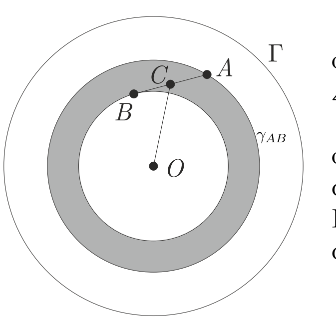
$$\begin{aligned}
A_1(n) &= A_2(n-1),\\
A_2(n) &= A_1(n-1) + A_3(n-1),\\
A_3(n) &= A_2(n-1) + A_4(n-1),\\
A_4(n) &= A_3(n-1),
\end{aligned}$$

па добијамо

$$\begin{aligned}
B_n = \sum_{i=1}^4 A_i(n) &= A_2(n-1) + (A_1(n-1) + A_3(n-1)) + (A_2(n-1) + A_4(n-1)) + A_3(n-1)\\
&= A_2(n-1) + A_3(n-1) + \sum_{i=1}^4 A_i(n-1)\\
&= (A_1(n-2) + A_3(n-2)) + (A_2(n-2) + A_4(n-2)) + \sum_{i=1}^4 A_i(n-1)\\
&= \sum_{i=1}^4 A_i(n-1) + \sum_{i=1}^4 A_i(n-2) = B_{n-1} + B_{n-2}.
\end{aligned}$$

Дакле, из $B_0 = 1 = F_1$, $B_1 = 1 = F_2$ и одговарајуће рекурентне везе за Фибоначијеве бројеве, имамо $B_n = F_{n+1}$.

4. Бројеви ap за $-\frac{q-1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{q-1}{2}$ дају различите остатке при дељењу са q, па један од њих даје остатак 1: нека је то $ap = bq + 1$. Бројеви $|ap|$ и $|bq|$ су узастопни и мањи од $\frac{1}{2}pq < p^2$ (а тиме и од q^2), па су њихови највећи прости делиоци управо p и q, редом.



Оп 2018 4А 5

5. Нека је AB једна од датих дужи d. При ротацији око центра O круга Γ, дуж AB описује кружни прстен γ_{AB}. Нека је C средина дужи AB и узмимо, без смањења општости, $\measuredangle OCA \geqslant 90°$. Тада имамо $OA^2 - OC^2 \geqslant AC^2 = \frac{1}{4}AB^2$, па је површина прстена γ_{AB} бар $\frac{1}{4}AB^2\pi$.

Ако су дужине датих дужи $d_1, d_2, \ldots, d_n$, из претходног следи да збир површина њима одговарајућих прстена није мањи од $\frac{\pi}{4}(d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2) \geqslant \frac{\pi}{4n}(d_1 + \cdots + d_n)^2 = \pi$ (користили смо неједнакост између квадратне и аритметичке средине), што је површина круга Γ. Према томе, бар два прстена се секу, што значи да постоји кружница с центром O која сече њима кореспондентне две дужи.

Први разред – Б категорија

1. Како су мерни бројеви углова три проста броја, а њихов збир је $180°$, не могу сва три броја бити непарна, па следи да један угао мора износити $2°$. Сада за средњи по величини угао испробавамо просте бројеве, редом, и испитујемо када ће и вредност преосталог угла бити прост број. Налазимо следећа решења: $\{2°, 5°, 173°\}$, $\{2°, 11°, 167°\}$, $\{2°, 29°, 149°\}$, $\{2°, 41°, 137°\}$, $\{2°, 47°, 131°\}$, $\{2°, 71°, 107°\}$ и $\{2°, 89°, 89°\}$.

2. Миљан треба да окрене карте на којима су самогласници: *А*, *Е*, *А*, *И*, *А*, и увери се да је с друге стране паран број. Такође треба да окрене и карту на којој је број *1* и увери се да је с друге стране сугласник (ако би с друге стране био самогласник, та карта би представљала контрапример за Владино тврђење). Дакле, треба да окрене најмање 6 карата.

3. Приметимо да важи $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{12+6+4+3}{12}=\frac{25}{12}\neq\frac{2018}{1301}$. Дакле, посматрани бројеви нису $1,2,3,4$, па имамо $a,b,c,d\geqslant 2$. Но, тада важи

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{30+20+15+12}{60}=\frac{77}{60}=\frac{1925}{1500}<\frac{2013}{1301}.$$

Дакле, такви бројеви a, b, c и d не постоје.

4. Тражени скуп записаћемо као унију четири повезана осенчена дела. Тиме добијамо решење:

$$\Big((A\cap B)\setminus(D\cup E\cup C)\Big)\cup\Big(((A\cap C)\setminus(B\cup F)\Big)\cup\Big((E\cap C)\setminus A\Big)\cup\Big(F\setminus(A\cup B)\Big).$$

5. У речи *МАШТОВИТ* свако слово сем *Т* се јавља тачно једном (*Т* се јавља 2 пута) и представља једну од цифара из скупа $\{1,2,3,4,5,6,7\}$, па је збир цифара броја *МАШТОВИТ* једнак $1+2+3+4+5+6+7+T=28+T$. Даље, како је број *МАШТОВИТ* непаран, *Т* мора бити непарна цифра, а како је број *МАШТОВИТ* дељив са 3, и његов збир цифара $28+T$ мора бити дељив са 3, па следи $T=5$.

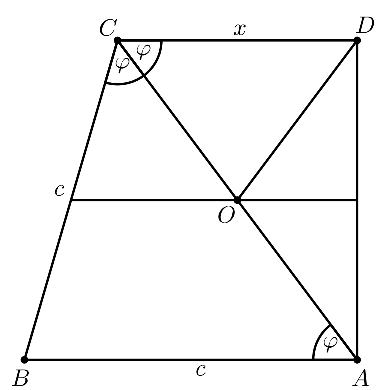
Сви сугласници представљају цифре исте парности, па добијамо да су и *М*, *Ш* и *В* непарне цифре (јер је $T=5$ непарна цифра), тј. $M,Ш,B\in\{1,3,7\}$, а како смо утрошили све непарне цифре, онда самогласници представљају парне цифре, тј. $A,O,И\in\{2,4,6\}$. Како различита слова представљају различите цифре, то $M,Ш,B$ можемо одредити из скупа $\{1,3,7\}$ на $3!=6$ начина, као и $A,O,И$ из скупа $\{2,4,6\}$ такође на $3!=6$ начина, па укупно таквих бројева има $6\cdot 6=36$.

Други разред – Б категорија

1. Из другог услова следи да је X подскуп скупа $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Из првог услова следи да он мора садржати бројеве 6, 7 и 8, као и да не сме садржати бројеве 9 и 10. Из другог услова следи да он мора садржати бројеве 1, 2 и 3. Дакле, преостају још бројеви 4 и 5, за које можемо произвољно одабрати да ли да буду или да не буду у скупу X. Према томе, постоје четири таква скупа: $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $\{1,2,3,5,6,7,8\}$, $\{1,2,3,4,6,7,8\}$ и $\{1,2,3,6,7,8\}$.

2. Дељењем задата два полинома добијамо количник $x+a$ и остатак $2x(b-a^2)+(c-ab)$. Како остатак мора бити 0 (јер је први полином дељив другим), следи $b-a^2=0$ и $c-ab=0$, тј. $b=a^2$ и $c=ab=a^3$. Дакле, први полином износи $x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$, тј. $(x+a)^3$, а други $x^2+2ax+a^2$, тј. $(x+a)^2$.

3. Нека су у A и D прави углови тог трапеза, AB већа основица, CD мања. По услову задатка имамо $\measuredangle ACB=\measuredangle ACD=\varphi$, а одатле следи $\measuredangle CAB=\measuredangle ACD=\varphi$, као наизменични углови. Дакле, $\triangle ABC$ је једнакокрак, тј. $AB=BC=c$. Нека је O пресек средње линије трапеза са дијагоналом AC; дакле, O је средиште AC. Како је $\triangle ADC$ правоугли, то имамо $OD=OA=OC=\frac{AC}{2}=30$. Пошто је и $\triangle OCD$ једнакокрак са углом на основици φ, имамо $\triangle ABC\sim\triangle DOC$. Ако означимо $CD=x$, добијамо пропорцију $\frac{60}{c}=\frac{x}{30}$, одакле следи $cx=1800$. Даље, имамо и $c+x=AB+CD=2\cdot 43=86$, па важи $c=86-x$, и уврштавањем овога у претходну једначину добијамо $(86-x)x=1800$, тј. $x^2-86x+1800=0$. Решавањем ове једначине израчунавамо $x_{1/2}=\frac{86\pm\sqrt{86^2-4\cdot 1800}}{2}=\frac{86\pm\sqrt{196}}{2}=\frac{86\pm 14}{2}$, тј. $x=36$ и $c=86-x=50$ (одбацујемо друго решење: $x=50$ и $c=36$, јер треба да важи $c>x$). Дакле, имамо $AB=BC=50$, $CD=x=36$, и из Питагорине теореме рачунамо $AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{60^2-36^2}=\sqrt{3600-1296}=\sqrt{2304}=48$.



Оп 2018 2Б 3

4. За $p=5$ имамо $4p^2+1=101$ и $6p^2+1=151$, и ови бројеви су заиста прости. Претпоставимо сада $p\neq 5$. Тада имамо $p\equiv\pm1\pmod 5$ или $p\equiv\pm2\pmod 5$. У првом случају добијамо $4p^2+1\equiv 4\cdot(\pm1)^2+1=5\equiv 0\pmod 5$, тј. број $4p^2+1$ је дељив са 5, а како је он очигледно већи од 5, мора бити сложен. У другом случају добијамо $6p^2+1\equiv 6\cdot(\pm2)^2+1=25\equiv 0\pmod 5$, па је тада број $6p^2+1$ сложен. Дакле, једино решење је $p=5$.

5. Пре свега, имамо услов $x\neq 3$, јер лева страна није дефинисана за $x=3$.

За $x > 3$ израз $\frac{3}{|x-3|} - 1$ се своди на $\frac{3}{x-3} - 1$, што је негативно за $x - 3 > 3$, тј. $x > 6$, а ненегативно за $3 < x \leqslant 6$. За $x < 3$ израз $\frac{3}{|x-3|} - 1$ се своди на $\frac{3}{3-x} - 1$, што је негативно за $3 - x > 3$, тј. $x < 0$, а ненегативно за $0 \leqslant x < 3$. Имајући још у виду да, због израза $|x-2|$, морамо разликовати случајеве $x \geqslant 2$ и $x < 2$, решавање делимо на следећих пет случајева:

- $x > 6$:
  Постављена неједначина се своди на $2(x-2) - (1 - \frac{3}{x-3}) \geqslant 1$, тј. $2x - 6 + \frac{3}{x-3} \geqslant 0$, а што се другачије може записати као $\frac{2(x-3)^2+3}{x-3} \geqslant 0$, и очигледно је испуњено увек.
- $3 < x \leqslant 6$:
  Постављена неједначина се своди на $2(x-2) - (\frac{3}{x-3} - 1) \geqslant 1$, тј. $2x - 4 - \frac{3}{x-3} \geqslant 0$, а што се другачије може записати као $\frac{2x^2-10x+9}{x-3} \geqslant 0$. Функција $2x^2 - 10x + 9$ има нуле у тачкама $x_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-72}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$, па је ненегативна за $x \leqslant \frac{5-\sqrt{7}}{2}$ и $x \geqslant \frac{5+\sqrt{7}}{2}$. У пресеку с условом $3 < x \leqslant 6$, овде добијамо решења $x \in [\frac{5+\sqrt{7}}{2}, 6]$.
- $2 \leqslant x < 3$:
  Постављена неједначина се своди на $2(x-2) - (\frac{3}{3-x} - 1) \geqslant 1$, тј. $2x - 4 - \frac{3}{3-x} \geqslant 0$, а што се другачије може записати као $\frac{-2x^2+10x-15}{3-x} \geqslant 0$. Функција $-2x^2 + 10x - 15$ има негативну дискриминанту $(100 - 120 = -20 < 0)$, а како је коефицијент уз водећи члан негативан, овде нема решења.
- $0 \leqslant x < 2$:
  Постављена неједначина се своди на $2(2-x) - (\frac{3}{3-x} - 1) \geqslant 1$, тј. $4 - 2x - \frac{3}{3-x} \geqslant 0$, а што се другачије може записати као $\frac{2x^2-10x+9}{3-x} \geqslant 0$. Функција $2x^2 - 10x + 9$ је ненегативна (како је већ виђено) за $x \leqslant \frac{5-\sqrt{7}}{2}$ и $x \geqslant \frac{5+\sqrt{7}}{2}$. У пресеку с условом $0 \leqslant x < 2$, овде добијамо решења $x \in [0, \frac{5-\sqrt{7}}{2}]$.
- $x < 0$:
  Постављена неједначина се своди на $2(2-x) - (1 - \frac{3}{3-x}) \geqslant 1$, тј. $2 - 2x + \frac{3}{3-x} \geqslant 0$, а што се другачије може записати као $\frac{2x^2-8x+9}{3-x} \geqslant 0$, тј. $\frac{2(x-2)^2+1}{3-x} \geqslant 0$, и очигледно је испуњено увек.

Дакле, сумирајући све, решење неједначине је:

$$x \in \left(-\infty, \frac{5-\sqrt{7}}{2}\right] \cup \left[\frac{5+\sqrt{7}}{2}, \infty\right).$$

Трећи разред – Б категорија

1. Факторишимо број 2018 на просте чиниоце: $2018 = 2 \cdot 1009$. Како је израз на левој страни постављене једначине једнак $p(6+7q+8qr+9qrs)$, и како је p прост број, могуће је $p = 2$ или $p = 1009$. Други случај отпада, јер би тада израз у загради морао бити једнак 2, а он је очигледно већи од 2. Дакле, остаје $p = 2$. Тада имамо $6+7q+8qr+9qrs = 1009$, што се своди на $q(7 + 8r + 9rs) = 1003 = 17 \cdot 59$. Одавде следи $q = 17$ (немогуће је $q = 59$ јер је израз у загради већи од 17). Даље добијамо $7 + 8r + 9rs = 59$, што се своди на $r(8 + 9s) = 52 = 2^2 \cdot 13$. Одавде следи $r = 2$ (немогуће је $r = 13$ јер је израз у загради већи од 4). Коначно, преостаје $8 + 9s = 26$, што се своди на $9s = 18$, па добијамо $s = 2$.

Дакле, једино решење је: $(p, q, r, s) = (2, 17, 2, 2)$.

2. a) Да би сва три логаритма била дефинисана, морају важити услови $3^x - 1 > 0$, $9^x - 3^{x+1} + 2 > 0$ и $3 - 3^x > 0$. Прва неједначина се своди на $3^x > 1$, тј. $x > 0$; трећа неједначина се своди на $3^x < 3$, тј. $x < 1$. Да бисмо решили другу, уведимо смену $3^x = t$. Тада се друга неједначина своди на $t^2 - 3t + 2 > 0$, тј. $(t-1)(t-2) > 0$, и њено решење је $t \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$, а враћањем смене $t = 3^x$ добијамо $x \in (-\infty, 0) \cup (\log_3 2, \infty)$. Узимајући пресек сва три добијена услова за x закључујемо да су сва три логаритма дефинисана за $x \in (\log_3 2, 1)$.

b) Постављена једначина се своди на

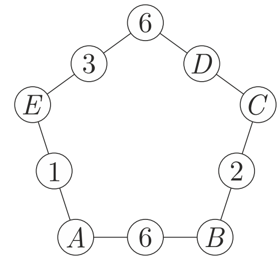
$$\log_2(3^x - 1) + \log_2(3 - 3^x) = 2\log_4(9^x - 3^{x+1} + 2),$$

тј.

$$\log_2((3^x - 1)(3 - 3^x)) = \log_{2^2}(9^x - 3^{x+1} + 2)^2.$$

Десна страна једнакости је заправо $\log_2(9^x - 3^{x+1} + 2)$, па након ослобађања од логаритама и увођења смене $t = 3^x$ преостаје још решити једначину $(t-1)(3-t) = (t-1)(t-2)$, где смо за десну страну искористили факторизацију раније добијену у делу под а). Ово се даље своди на $0 = (t-1)((t-2) - (3-t)) = (t-1)(2t-5)$, што има решења $t = 1$ и $t = \frac{5}{2}$. Прво решење даје $x = 0$, што одбацујемо јер не припада области дефинисаности. Друго решење даје $x = \log_3 \frac{5}{2}$, и ова вредност заиста испуњава добијена ограничења ($\log_3 2 < \log_3 \frac{5}{2} < 1$), па је то и једино решење постављене једначине.

3. Означимо са A, B, C, D и E преосталих пет бројева које Марко треба да упише, као на слици.



Оп 2018 3Б 3

Како збирови на свакој страници петоугла треба да су једнаки, имамо да важи:

$$A+6+B = B+2+C = C+D+6 = 6+3+E = A+1+E,$$

где $A, B, C, D, E \in \{1, 2, 3, \ldots, 99\}$. Из једнакости $6+3+E = A+1+E$ добијамо $A = 8$. Из једнакости $A+6+B = B+2+C$ добијамо $C = A+4 = 12$. Преостаје још $B+2+C = C+D+6 = 6+3+E$, што се своди на $14+B = 18+D = 9+E$, одакле добијамо $B = D+4$ и $E = D+9$. Дакле, одабиром броја D јединствено су одређени и B и E, а из $1 \leqslant D < B < E \leqslant 99$ следи $1 \leqslant D \leqslant 90$ и било коју од ових вредности можемо одабрати за D. Дакле, Марко може попунити бројеве на 90 начина.

4. Обележимо поља уређеним паровима (i, j), $1 \leqslant i \leqslant 3$, $1 \leqslant j \leqslant 2$, где нумеришемо слева надесно и одоздо нагоре (дакле, доње лево поље има координате $(1, 1)$, а горње десно $(3, 2)$).

Претпоставимо прво да је Анђелија уписала слово С у поље $(2, 1)$. Приметимо сада: уколико би уписала слово Р у поље $(2, 2)$, и потом слово Б уписала у једно од два поља лево, тада слово И мора уписати у друго од та два поља лево, но онда остаје без могућности за слово Ј, тј. не може успешно попунити таблицу; аналогно закључујемо и ако слово Б упише у једно од два поља десно. Дакле, уколико упише слово Р у поље $(2, 2)$, тада никако не може попунити таблицу до краја. Претпоставимо сада да је уписала слово Р у једно од поља $(1, 1)$ или $(1, 2)$ (две могућности). Тада за слово Б има избор између другог од та два поља или пак поља $(2, 2)$. У другом случају примећујемо да, без обзира на то где упише слово И, не може попунити таблицу до краја. Према томе, слово Б мора уписати у преостало од поља $(1, 1)$ или $(1, 2)$ (једнозначно одређено), а затим и за слово И остаје слободно само поље $(2, 2)$, и коначно, за слова Ј и А може бирати којим ће редоследом искористити поља $(3, 1)$ и $(3, 2)$ (две могућности). Дакле, закључимо, уколико упише слово Р у једно од поља $(1, 1)$ или $(1, 2)$, има укупно 4 начина да попуни таблицу. Аналогно, уколико упише слово Р у једно од поља $(3, 1)$ или $(3, 2)$, има укупно 4 начина да попуни таблицу. Све заједно, израчунали смо следеће: уколико Анђелија упише слово С у поље $(2, 1)$, има укупно 8 начина да попуни таблицу.

Аналогно, уколико Анђелија упише слово С у поље $(2, 2)$, има укупно 8 начина да попуни таблицу.

Претпоставимо сада да је Анђелија уписала слово С у поље $(1, 1)$. Уколико слово Р упише у поље $(1, 2)$, тада слово Б мора уписати у једно од два поља у средњој колони, а преостала три поља може искористити произвољним редоследом; то укупно даје $2 \cdot 3! = 12$ начина. Претпоставимо сада да је Анђелија слово Р уписала у једно од поља $(2, 1)$ или $(2, 2)$ (две могућности). Тада, уколико слово Б упише у друго од та два поља, примећујемо да, без обзира на то где упише слово И, не може попунити таблицу до краја. Дакле, слово Б може да упише или у поље $(1, 2)$, или у једно од два поља у десној колони. У првом случају за слово И има једнозначно одређено поље у средњој колони, и коначно, за слова Ј и А може бирати којим ће редоследом искористити поља $(3, 1)$ и $(3, 2)$ (две могућности); у другом случају (Б у једно од два поља у десној колони – две могућности) заправо примећујемо да постоји јединствен начин да се таблица попуни до краја (редослед: преостало поље у десној колони, преостало поље у средњој колони, преостало поље у левој колони). Дакле, има укупно $2 + 2 = 4$ могућности да доврши попуњавање таблице од слова Б надаље, тј. укупно $2 \cdot 4 = 8$ могућности да попуни таблицу уколико је слово Р на једном од поља $(2, 1)$ или $(2, 2)$. Све заједно, израчунали смо следеће: уколико Анђелија упише слово С у поље $(1, 1)$, има укупно $12 + 8 = 20$ начина да попуни таблицу.

Аналогно, уколико Анђелија упише слово С у неко од преостала три угаона поља, има 20 начина да попуни таблицу. Према томе, укупан резултат је: $2 \cdot 8 + 4 \cdot 20 = 96$ начина.

5. Свака страна тетраедра је троугао, и дужине страница сваког од тих троуглова морају испуњавати неједнакост троугла. То значи $AC + CB > AB = 41$ и $AD + DB > AB = 41$. Одатле добијамо $AC + CB + AD + DB > 82$. Ово значи да обе ивице 27 и 36 морају бити међу AC, CB, AD или DB (заиста, ако то не би било испуњено, тада би збир $AC+CB+AD+DB$ износио $7+13+18+27$ или $7+13+18+36$, тј. 65 или 74, што није веће од 82). Притом, не могу обе те ивице истовремено бити странице $\triangle ABC$ односно $\triangle ABD$, јер би тада у другом троуглу страница $AB = 41$ морала бити мања од збира друге две, а тај збир би износио највише $13 + 18 = 31$, контрадикција. Дакле, у, без умањења оштости, $\triangle ABC$ једна страница има дужину 27, и нека је то, поново без умањења општости, AC, а тада у $\triangle ABD$ једна страница има дужину 36. У $\triangle ABC$ мора важити $BC > AB - AC = 41 - 27 = 14$, па је једина преостала могућност $BC = 18$. Сада, уколико би важило $BD = 36$, из $\triangle BCD$ имали бисмо $CD > BD - BC = 36 - 18 = 18$, а ово је немогуће јер нема више „слободних“ ивица дужине веће од 18. Дакле, у $\triangle ABD$ не може страница BD имати дужину 36, па остаје $AD = 36$. Коначно, из $\triangle ACD$ добијамо $CD > AD - AC = 36 - 27 = 9$, па је једина преостала могућност $CD = 13$.

Четврти разред – Б категорија

1. На основу идентитета $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ можемо факторисати леву страну, и тиме нам остаје једначина
$$(2x-4)((x-7)^2-(x-7)(x+3)+(x+3)^2)=278(x-2).$$
Једно решење је очигледно $x_1=2$. Остала решења потражићемо после скраћивања обе стране са $2(x-2)$: на левој страни тада остаје $(x^2-14x+49)-(x^2-4x-21)+(x^2+6x+9)=x^2-4x+79$, а на десној остаје 139. Дакле, треба још решити квадратну једначину $x^2-4x-60=0$, а њена решења су $x_{2/3}=\frac{4\pm\sqrt{16+240}}{2}=\frac{4\pm16}{2}=2\pm8$, тј. $x_2=-6$ и $x_3=10$.

2. Приметимо да за $x\to0^+$ имамо $\frac{2018}{x}\to\infty$. Како за $0\leqslant a<1$ израз $\frac{a+2018^x}{2}$ у околини тачке $x=0$ узима вредности из интервала $(0,1)$, из тога и претходне реченице имамо да је тада тражени лимес једнак 0; слично, за $a>1$ израз $\frac{a+2018^x}{2}$ у околини тачке $x=0$ узима вредности веће од 1, па је тада тражени лимес једнак ∞. Остаје једино случај $a=1$. Тада имамо:
$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1+2018^x}{2}\right)^{\frac{2018}{x}}=\lim_{x\to0^+}\left(e^{\ln\frac{1+2018^x}{2}}\right)^{\frac{2018}{x}}=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{2018(\ln(1+2018^x)-\ln2)}{x}}=e^{2018\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+2018^x)-\ln2}{x}},$$
па преостаје још израчунати $\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+2018^x)-\ln2}{x}$. Применом Лопиталовог правила добијамо
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+2018^x)-\ln2}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+2018^x}(2018^x\ln2018)}{1}=\frac{\ln2018}{2}.$$

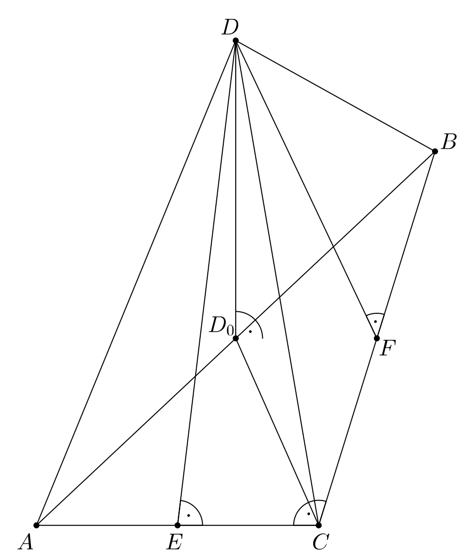
Дакле, решење задатка је:
$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{a+2018^x}{2}\right)^{\frac{2018}{x}}=\begin{cases}0, & \text{за } 0\leqslant a<1;\\ e^{\frac{2018\ln2018}{2}}, & \text{за } a=1;\\ \infty, & \text{за } a>1.\end{cases}$$

3. Претпоставимо најпре да је прва цифра непарна. Тада за две парне цифре треба одабрати две позиције од $2,3,4,5$ (гледано слева надесно), што се може учинити на $\frac{4\cdot3}{2}=6$ начина. Затим, након што смо одабрали на којим ће позицијама бити парне цифре а на којим непарне, за сваку цифру имамо избор између 5 могућности (за парне цифре између $0,2,4,6,8$, а за непарне цифре између $1,3,5,7,9$). То даје $5^5=3125$ бројева за сваку од могућности с фиксираним позицијама парних цифара, тј. $6\cdot3125=18750$ бројева укупно у случају када је прва цифра непарна.

Претпоставимо сада да је прва цифра парна. Тада за преосталу парну цифру треба одабрати једну од позиција $2,3,4,5$, што се може учинити на 4 начина. Затим, након што смо то одабрали, за прву цифру имамо избор између 4 могућности ($2,4,6,8$, тј. прва цифра не може бити 0), а за све остале цифре између 5 могућности. То даје $4\cdot5^4=2500$ бројева за сваку од могућности с фиксираном позицијом друге парне цифре, тј. $4\cdot2500=10000$ бројева укупно у случају када је прва цифра парна.

Према томе, укупно постоји $18750+10000=28750$ таквих бројева.

4. Нека је $\triangle ABC$ основа те пирамиде, $\measuredangle A=60^\circ$, $\measuredangle C=90^\circ$, и нека је D четврто теме пирамиде. Нека је D_0 подножје нормале из темена D на раван основе. Тада су праве AD_0, BD_0, CD_0 ортогоналне пројекције правих AD, BD, CD, редом, па су $\measuredangle DAD_0$, $\measuredangle DBD_0$ и $\measuredangle DCD_0$ управо углови које ивице AD, BD и CD граде с основом пирамиде, и по услову задатка, сви ови углови износе по 45°. Одатле су $\triangle ADD_0$, $\triangle BDD_0$ и $\triangle CDD_0$ једнакокрако-правоугли троуглови и притом међусобно подударни (јер имају заједничку катету DD_0). Дакле, важи $AD_0=BD_0=CD_0=DD_0=2018\frac{\sqrt2}{2}=1009\sqrt2$. Уједно, из $AD_0=BD_0=CD_0$ добијамо да се D_0 налази управо на средини хипотенузе AB. Даље можемо израчунати $AB=AD_0+BD_0=2018\sqrt2$, $AC=\frac{AB}{2}=1009\sqrt2$ и $BC=AC\sqrt3=1009\sqrt6$. Одатле се лако израчунава запремина посматране пирамиде:
$$V=\frac13P(\triangle ABC)DD_0=\frac13\cdot\frac{1009\sqrt2\cdot1009\sqrt6}{2}\cdot1009\sqrt2=\frac{1009^3\sqrt6}{3}.$$



Оп 2018 4Б 4

Како је D_0 на средини AB, следи да је DD_0 уједно и висина на AB у $\triangle ABD$. Нека су E и F подножја нормала из D на AC и BC у $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$, редом.

Како су ови троуглови једнакокраки с основицама AC и BC, из Питагорине теореме рачунамо

$$DE = \sqrt{DC^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{2018^2 - \frac{1009^2}{2}} = 1009\sqrt{\frac{7}{2}}$$

и

$$DF = \sqrt{DC^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{2018^2 - \frac{3 \cdot 1009^2}{2}} = 1009\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Дакле, површина пирамиде износи:

$$\begin{aligned} P &= P(\triangle ABC) + P(\triangle ABD) + P(\triangle ACD) + P(\triangle BCD) \\ &= \frac{1009\sqrt{2} \cdot 1009\sqrt{6}}{2} + \frac{2018\sqrt{2} \cdot 1009\sqrt{2}}{2} + \frac{1009\sqrt{2} \cdot 1009\sqrt{\frac{7}{2}}}{2} + \frac{1009\sqrt{6} \cdot 1009\sqrt{\frac{5}{2}}}{2} \\ &= 1009^2\left(\sqrt{3} + 2 + \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}\right). \end{aligned}$$

5. Приметимо:

$$1000\left(\frac{m}{n}\right)^3 = \overline{xyz{,}xyzxyzxyz\ldots} = \overline{xyz} + \overline{0{,}xyzxyzxyz\ldots} = \overline{xyz} + \left(\frac{m}{n}\right)^3,$$

па добијамо $999(\frac{m}{n})^3 = \overline{xyz}$, тј. $999m^3 = \overline{xyz} \cdot n^3$. Јасно, можемо претпоставити да су m и n узајамно прости. Одатле следи $n^3 \mid 999 = 3^3 \cdot 37$. Како важи $n > 1$ (због $m < n$), једина могућност је $n = 3$. Тада може бити $m = 1$ или $m = 2$. У првом случају добијамо $\overline{xyz} = \frac{999}{27} = 37 = \overline{037}$, а у другом $\overline{xyz} = \frac{999 \cdot 8}{27} = 296$. Дакле, обе могућности за m заиста дају решења задатка, па следи да $\frac{m}{n}$ може бити $\frac{1}{3}$ или $\frac{2}{3}$.

	ПРВИ РАЗРЕД ПРЕЗИМЕ И ИМЕ	ШКОЛА	ЗАДАЦИ					З Б И Р	ПЛАСМАН
			1	2	3	4	5		
1	Милтеновић Филип	Гимназија "Урош Предић"	18	0	20	20	20	78	I
2	Јанковић Даница	Гимназија "Урош Предић"	15	0	20	20	20	75	II
3	Огњен Ђукић	ЕШ "Никола Тесла"	13	20	0	15	17	65	III
4	Алексић Андреа	Гимназија "Урош Предић"	20	0	0	20	20	60	III
5	Станковић Филип	Гимназија "Урош Предић"	5	0	20	20	10	55	похвала
6	Чакован Наталија	Гимназија "Урош Предић"	20	0	0	15	20	55	похвала
7	Косановић Маша	Гимназија "Урош Предић"	15	0	0	20	20	55	похвала
8	Ракић Светлана	Гимназија "Урош Предић"	15	0	10	18	10	53	похвала
9	Ђуретановић Давид	Гимназија "Урош Предић"	10	0	0	15	20	45	
10	Јарослав Весели	ЕШ "Никола Тесла"	15	0	20	5	0	40	
11	Бојана Слепчевић	ЕШ "Никола Тесла"	20	0	0	0	15	35	
12	Никола Ђунисић	ЕШ "Никола Тесла"	0	0	20	0	15	35	
13	Михајло Станковић	ЕШ "Никола Тесла"	0	0	0	0	5	5	
14	Милан Младеновић	ЕШ "Никола Тесла"	0	0	0	0	0	0	
15	Стефан Нешковић	ЕШ "Никола Тесла"	0	0	0	0	0	0	
23									
24									
25									
26									
27									
28									

	ДРУГИ РАЗРЕД ПРЕЗИМЕ И ИМЕ	ШКОЛА	ЗАДАЦИ					З Б И Р	ПЛАСМАН
			1	2	3	4	5		
1	Едвард Габријел Етински	Гимназија "Урош Предић"	20	20	2	2	10	54	I
2	Грујичић Теодора	Гимназија "Урош Предић"	15	10	15	7	5	52	II
3	Вукасовић Сергеј	Гимназија "Урош Предић"	20	15	2	3	2	42	III
4	Месарош Давид	ЕШ "Никола Тесла"	20	0	15	7	0	42	III
5	Секуловић Милош	Гимназија "Урош Предић"	20	2	2	17	0	41	похвала
6	Милановић Јован	ЕШ "Никола Тесла"	20	5	0	1	15	41	похвала
7	Станковић Огњен	Гимназија "Урош Предић"	20	15	0	0	5	40	похвала
8	Бакурски Аранђел	Гимназија "Урош Предић"	20	10	2	0	5	37	
9	Гојсовић Ивана	Гимназија "Урош Предић"	20	10	2	2	0	34	
10	Петров Анђела	Гимназија "Урош Предић"	20	5	0	2	0	27	
11	Глишовић Данијела	ЕШ "Никола Тесла"	20	0	0	0	5	25	
12	Ђурђевић Марко	Гимназија "Урош Предић"	20	0	0	1	2	23	
13	Мршић Урош	ЕШ "Никола Тесла"	0	0	0	0	2	2	

	ТРЕЋИ РАЗРЕД ПРЕЗИМЕ И ИМЕ	ШКОЛА	ЗАДАЦИ					З Б И Р	ПЛАСМАН
			1	**2**	**3**	**4**	**5**		
1	Зечевић Данило	Гимназија "Урош Предић"	20	20	5	20	20	85	I
2	Миловановић Игор	Гимназија "Урош Предић"	20	20	20	1	20	81	II
3	Пешић Иван	Гимназија "Урош Предић"	20	15	20	2	20	77	II
4	Благојевић Вељко	ЕШ "Никола Тесла"	20	2	20	15	20	77	II
5	Јакшић Тијана	Гимназија "Урош Предић"	20	0	20	5	20	65	III
6	Зарев Доротеја	Гимназија "Урош Предић"	20	15	20	0	5	60	III
7	Станковић Николија	Гимназија "Урош Предић"	2	0	15	13	20	50	похвала
8	Марјановић Михило	Гимназија "Урош Предић"	0	0	20	15	0	35	
9	Вари Јован	Гимназија "Урош Предић"	2	10	0	5	5	22	
10	Шебешћен Матија	ЕШ "Никола Тесла"	0	7	5	7	0	19	
11	Паулић Лука	ЕШ "Никола Тесла"	0	0	5	0	0	5	
12	Урошев Милош	ЕШ "Никола Тесла"	0	0	0	5	0	5	

	ЧЕТВРТИ РАЗРЕД ПРЕЗИМЕ И ИМЕ	ШКОЛА	ЗАДАЦИ					З Б И Р	ПЛАСМАН
			1	2	3	4	5		
1	Дебоговић Марина	Гимназија "Урош Предић"	20	10	20	20	15	85	I
2	Тирнанић Михајло	Гимназија "Урош Предић"	20	5	20	20	15	80	II
3	Бадрљица Милош	Гимназија "Урош Предић"	20	0	20	18	15	73	II
4	Ћосић Ивана.	Гимназија "Урош Предић"	20	10	10	20	0	60	III
5	Врачар Алекса	Гимназија "Урош Предић"	10	0	0	20	15	45	похвала
6	Бербић Дамир	Гимназија "Урош Предић"	20	0	10	0	10	40	похвала
7	Велимиров Лука	Гимназија "Урош Предић"	20	10	0	0	0	30	
8	Марић Ђорђе	Гимназија "Урош Предић"	0	0	15	10	5	30	
9	Цвејић Лазар	Гимназија "Урош Предић"	20	0	0	10	0	30	
10								0	
11								0	