ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Математичка такмичења средњошколаца 1997/1998.

БЕОГРАД 1998

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Редактори:

др Владимир Драговић и др Павле Младеновић

Обрада:
др Владимир Драговић

Београд 1998.

Републичка комисија за такмичење из математике
за ученике средњих школа
шк. 1997/1998

1. Анић Иван, Математички факултет у Београду
2. Арсеновић др Милош , Математички факултет у Београду
3. Балтић Владимир, Математички факултет у Београду
4. Блажић др Новица, Математички факултет у Београду
5. Вукмировић мр Јован, Математички факултет у Београду
6. Гајић мр Борислав, Математички институт САНУ
7. Дорословачки др Раде, Факултет техничких наука у Новом Саду
8. Достанић др Милутин, Математички факултет у Београду
9. Драговић др Владимир, Математички институт САНУ – **председник**
10. Дугошија др Ђорђе, Математички факултет у Београду
11. Јанковић др Владимир, Математички факултет у Београду
12. Каделбург др Зоран, Математички факултет у Београду
13. Кнежевић Миљан, Математички факултет у Београду
14. Лаудановић Младен, Математички факултет у Београду
15. Младеновић др Павле, Математички факултет у Београду
16. Огњановић мр Срђан, професор Математичке гимназије у Београду
17. Павловић Иван, професор гимназије Вук Караџић, Лозница
18. Петровић др Војислав, Прородно-математички факултет у Новом Саду
19. Радновић мр Милена, Математички институт САНУ
20. Стевановић Драган, Филозофски факултет у Нишу
21. Тодоровић Раде, Математички факултет у Београду
22. Томић Иванка, професор гимназије у Ваљеву
23. Тошић др Ратко, Природно-математички факултет у Новом Саду
24. Црвенковић др Синиша, Природно-математ. факултет у Новом Саду
25. Чукић др Љубомир, Грађевински факултет у Београду

КРАТАК ПРЕГЛЕД ИСТОРИЈЕ ПРВЕ КРАГУЈЕВАЧКЕ ГИМНАЗИЈЕ – ДОМАЋИНА ЧЕТРДЕСЕТОГ РЕПУБЛИЧКОГ ТАКМИЧЕЊА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА СРБИЈЕ

Гимназија у Крагујевцу је најстарија средња школа у Србији у којој се од њеног оснивања настава изводила на матерњем језику.

После петовековног турског ропства, крвавих буна и ратова, њеним оснивањем 1833. године почиње у тек ослобођеној Србији нов период, национални покрет за културни и просветни препород. Крагујевачка гимназија основана је онда када је Крагујевац био престоница Србије, за време владавине неписменог кнеза Милоша, на кога је највећи утицај имао Вук Караџић, који је схватио да је оснивање ,,виших школа" неопходан услов за укључење Србије у токове европске цивилизације. Осетила се потреба за школованим људима, па је при Гимназији у Крагујевцу основан и Лицеј 1838. године који прераста у Велику школу која је претеча Универзитета у Београду.

Ова два датума 1833. и 1838. г. говоре да се ове године навршава 165 година од почетка рада Крагујевачке гимназије и 160 година од оснивања Лицеја, па је то један од разлога што је ове јубиларне године Прва крагујевачка гимназија домаћин Четрдесетог републичког такмичења из математике ученика средњих школа, а град Крагујевац прославља 180 година обновљене српске државе.

У развоју Гимназије у Крагујевцу, одликовало се све оно што се догађало у Србији, све промене династичке и партијске, културне и просветне, значајне за српски народ, а које су се снажно манифестовале и у самој згради Крагујевачке гимназије, међу професорима и ученицима. Једна од највећих трагедија у другом светском рату догодила се 21. октобра 1941. када је стрељано и 300 ђака и професора крагујевачких школа. У борби за ослобођење учествовало је 470 ђака Крагујевачке гимназије, од којих је 177 дало своје животе, а 20 је проглашено за Народне хероје.

У својој дугој историји, Крагујевачка гимназија је дала српском народу позната имена у културном, јавном и политичком животу, а углед који је стекла и њена богата традиција гарантују да ће њени ученици и професори наставити истим путем. Ученици ове шоле својим радом уз еминентне професоре доказују се на свим пољима како друштвених, тако и природних наука. То потврђују и резултати које ученици постижу на свим факултетима, као и на такмичењима од републичког до савезног нивоа и Олимпијаде, посебно у физици, рачунарству, хемији, српском језику и математици.

Данас Прва крагујевачка гимназија има 41 одељење са 1250 ученика, и то: 13 одељења друштвено-језичког смера, 24 одељења природно-математичког смера и 4 одељења обдарених ученика Математичке гимназије. Наставу изводи преко 80 професора и стручних сарадника.

О Крагујевачкој гимназији најбоље говоре њени ђаци широм Србије, Југославије и исписане странице српске историје.

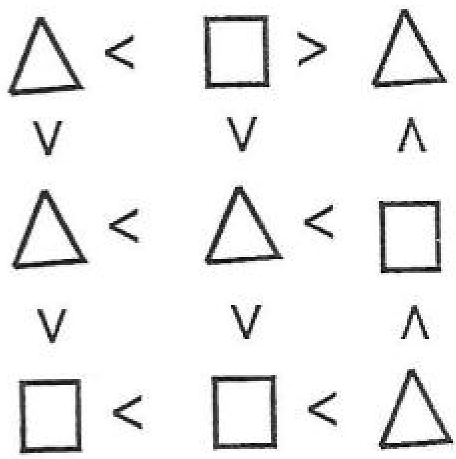
Директор Прве крагујевачке гимназије
Драган Јовановић, проф.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 07.02.1998.

Први разред

1. Колико има троцифрених бројева написаних помоћу цифара $0, 1, 2, 3, 4, 5$ који су дељиви са 15 и код којих:
   а) су све цифре различите; б) цифре могу да се понављају?

2. У троуглове и квадрате приказане на слици, уписати по један од бројева $1, 2, 3, \ldots, 9$ и то у троуглове непарне, а у четвороуглове парне бројеве тако да 12 релација мање-веће буду испуњене. На колико начина се то може учинити?



3. Наћи петоцифрен природан број чија је половина квадрат, а трећина куб неког природног броја.

4. На табли је написано неколико бројева различитих од 0. Сваки је једнак полузбиру осталих. Колико има бројева на табли?

5. Бројеви 1, 2, 3, 4, 5 су подељени у две групе али тако да у свакој групи има бар један елемент. Доказати да се могу наћи два броја из једне групе чија је разлика једнака броју који се налази у тој истој групи.

Други разред

1. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$. Кроз средиште M дијагонале BD повучена је права паралелна са AC. Нека је N тачка у којој та права

сече страницу AB. Доказати да права CN дели четвороугао на два дела једнаких површина.

2. Нека је
$$A = \frac{\left(\frac{\sqrt[4]{bc^3}+\sqrt[4]{a^2bc}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} + \sqrt[4]{bc}\right)^2 + bc + 3}{\sqrt{bc}+3}.$$
Доказати да је $A \leq 1 + \frac{b+c}{2}$.

3. Два различита природна броја M и N имају по 1998 цифара. У декадном запису сваког од њих појављује се цифра 1 – 1500 пута, цифра 2 – 300 пута, цифра 3 – 100 пута и цифра 4 – 98 пута. Да ли може један од та два броја бити делитељ другог?

4. Решити систем једначина по $(x, y) \in R^2$, где је a задати реалан број
$$\begin{cases} x^2 = (x-a)y \\ y^2 - xy = 9ax \end{cases}$$

5. Ако је $x, y \in R, xy = 1, x > y$, доказати
$$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{2}(x-y).$$

Трећи разред

1. Доказати неједнакост
$$\log_2 \pi + \log_4 \pi < \frac{5}{2}.$$

2. Нека је $A_1A_2 \dots A_n$ правилни n-тоугао $(n \geq 5)$. Доказати да тачке A_1, A_2, $B_i = A_1A_i \cap A_2A_{i+1} (3 \leq i \leq n-1)$ леже на једном кругу.

3. Одредити све праве кружне ваљке за које не постоји неподударан ваљак исте површине и запремине.

4. У углу шаховске табле $n \times n$ стоји фигура. Два играча наизменично померају фигуру на суседно поље (по једно поље навише, наниже, лево

или десно) али тако да фигура не сме двапут да се нађе на истом пољу. Игру губи играч који не може да одигра следећи потез. У зависности од n испитати да ли неки од играча може тако да игра да побеђује независно од игре другог играча.

5. Нека су α, β, γ углови у неправоуглом троуглу. Посматрајмо систем:

$$\begin{cases} x \cdot \cos\beta + \dfrac{1}{z} \cdot \cos\alpha = 1 \\ y \cdot \cos\gamma + \dfrac{1}{x} \cdot \cos\beta = 1 \\ z \cdot \cos\alpha + \dfrac{1}{y} \cdot \cos\gamma = 1 \end{cases}$$

а) Показати да систем има решење $x = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}, y = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, z = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$.
б) Наћи сва реална решења тог система.

Четврти разред

1. Да ли је функција $f(x) = \cos(x\sqrt{7})\cos x$ периодична?

2. Нека је задат једнакокраки троугао ABC (AB је основица). Над краком AC конструисан је споља квадрат $ADEC$, чији центар је тачка O. Уколико се права паралелна основици AB кроз тачку O, продужетак крака BC и нормала на основицу кроз A секу у једној тачки M, доказати да је $3 \cdot AM = AB$.

3. У равни је дата крива $G : y = px^3 + qx + 4, p \neq 0$. Нека су $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ три различите тачке те криве. Доказати да су A, B и C колинеарне ако и само ако је $x_A + x_B + x_C = 0$.

4. Доказати да аритметичка прогресија $a_k = 1000 + 1998k$ садржи бесконачно много бројева који су потпуни квадрати.

5. Наћи све парове реалних бројева (x, y) тако да: а) $x \geq y \geq 1$ и б) $2x^2 - xy - 5x + y + 4 = 0$.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 21.02.1998.

Први разред

1. Колико трочланих подскупова $\{a, b, c\}$ има скуп $A = \{19, 20, \ldots, 98\}$, таквих да је $a + b + c$ дељиво са 3?

2. Нека су a и b реални бројеви за које важи

$$a^3 - 3ab^2 = 8, \quad b^3 - 3a^2b = \sqrt{61}.$$

Наћи $a^2 + b^2$.

3. Доказати да је тачка S центар уписаног круга троугла ABC ако и само ако је $a\overrightarrow{AS} + b\overrightarrow{BS} + c\overrightarrow{CS} = \vec{0}$, где су a, b и c дужине одговарајућих страница.

4. Наћи све сложене бројеве $n \in N$ који не деле производ свих природних бројева мањих од n.

5. Нека је дат $\triangle ABC$ са угловима $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$, и тачке D и E на страницама AB и BC редом, тако да је $\angle DCA = \angle EAC = 30°$. Одредити $\angle CDE$.

Други разред

1. Нека су $a, b, c \in R, a \neq 0$ такви да су a и $4a + 3b + 2c$ истог знака. Доказати да једначина $ax^2 + bx + c = 0$ не може имати оба корена у интервалу $(1, 2)$.

2. Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао. Из средишта сваке његове странице конструисана је нормала на наспрамну страницу. Доказати да се те четири праве секу у једној тачки.

3. Наћи све природне бројеве n, за које $61 | 5^n - 4^n$.

4. У троуглу ABC важи: $\angle A = 30°, \angle B = 80°$. Дата је тачка M унутар троугла, тако да је $\angle MAC = 10°, \angle MCA = 30°$. Наћи $\angle BMC$.

5. Решити у скупу реалних бројева једначину:

$$\sqrt[3]{x^2 - 1} + \sqrt[3]{3x^2 - 2x - 1} = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1}.$$

Трећи разред

1. Нека је X тачка у унутрашњости правилног петоугла $ABCDE$, таква да је $\angle XAB = 48°$ и $\angle XDC = 42°$. Наћи $\angle BXC$.

2. У праву купу висине H и полупречника основе R уписан је ваљак највеће површине омотача. Наћи висину ваљка h и полупречник основе r.

3. Решити једначину:

$$9\log_{\sin 2x}(4\cos^2 x) + 8\log_{2\cos x}\sin x = 16.$$

4. Доказати неједнакост

$$\frac{x}{7+y^3+z^3} + \frac{y}{7+z^3+x^3} + \frac{z}{7+x^3+y^3} \leq \frac{1}{3},$$

где је $0 \leq x, y, z \leq 1$.

5. Наћи највећи природан број d који је делитељ сваког броја облика $n(n+1)(2n+1996)$ за свако $n \in N$.

Четврти разред

1. Ако су a_1, a_2, a_3 позитивни реални бројеви који задовољавају услов $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, доказати да важи

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2} + \frac{a_2^2}{a_2+a_3} + \frac{a_3^2}{a_3+a_1} \geq \frac{1}{2}.$$

2. Дат је низ $1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \ldots$ у коме је сваки број почев од трећег једнак збиру претходна два. Доказати да сума осам узастопних елемената тог низа није једнака неком елементу тог низа.

3. Доказати да је збир дужина свих ивица конвексног полиедра већи од $3d$, где је d растојање два најудаљенија темена тог полиедра.

4. Наћи све природне бројеве a, b и c, тако да су корени једначина

$$x^2 - 2ax + b = 0$$
$$x^2 - 2bx + c = 0$$
$$x^2 - 2cx + a = 0$$

такође природни бројеви.

5. Доказати да је за $n \in N_0$ број $b = 19 \cdot 8^n + 17$ сложен.

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ
КРАГУЈЕВАЦ — 14. МАРТ 1998.

Први разред

1. а) Раставити на чиниоце израз: $x^4 + x^2y^2 + y^4$.
   б) Испитати да ли је број $9^{1998} + 3^{1998} + 1$ прост.

2. Нека су a, b, c дати различити бројеви из $R \setminus \{0\}$, и нека је дат израз

$$V(x,y) = \frac{1}{(a-x)^2(a-y)^2}\left((a-b)^2(c-x)(c-y) - (c-a)^2(b-x)(b-y)\right)$$

где $x, y \neq a$. Доказати да постоје изрази $f(x)$ и $g(y)$ (тј. такви да f не садржи y, а g не садржи x) тако да се израз $V(x,y)$ може, за свако $x, y \in R$, $x \neq y$, $x, y \neq a$, приказати у облику

$$V(x,y) = \frac{1}{x-y}\left(f(x) - g(y)\right).$$

3. Дат је израз

$$*1 * 3 * 3^2 * 3^3 * \cdots * 3^{1997} * 3^{1998}.$$

Аркадије и Бранислав наизменично замењују по једну звездицу са $+$ или са $-$. Бранислав настоји да број који се добије, после замене и последње звездице, буде дељив са 7. Може ли Аркадије да га спречи у томе ако он први игра?

4. Дат је троугао ABC. Одредити све тачке M у његовој равни, тако да троуглови ABM, BCM и CAM имају једнаке површине.

5. Доказати да осмоугао коме су сви унутрашњи углови једнаки и коме су дужине свих страница рационални бројеви има центар симетрије.

Други разред

1. Испитати да ли је рационалан број

$$\sqrt{15-6\sqrt{6}}+2\sqrt{30-8\sqrt{14}}+\sqrt{10-4\sqrt{6}}+\sqrt{105-28\sqrt{14}}.$$

2. Нека су $x_1, \ldots, x_n$ позитивни реални бројеви који испуњавају услов $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. Доказати да за сваки позитиван број a важи неједнакост

$$\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2}+\frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3}+\cdots+\frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1} \geq \frac{n^2}{2}.$$

Када важи знак једнакости?

3. Наћи најмањи природан број a за који постоје цели бројеви b и c тако да квадратни трином $ax^2 + bx + c$ има два различита реална корена који припадају интервалу $(0,1)$.

4. Израчунати површину тетивног осмоугла коме су неке четири странице дужине 3, а преостале четири дужине 2.

5. У једној групи ученика, неки од њих се међусобно познају. При томе, два ученика која имају заједничког познаника увек познају различит број ученика те групе. Доказати да постоји ученик који познаје само једног од преосталих ученика.

Трећи разред

1. Две равни τ, σ се секу по правој a. Нека је α угао диедра који чине те две равни, а β угао између неке праве p равни τ и праве a. Ако је γ угао између праве p и равни σ, доказати:

$$\sin\gamma = \sin\alpha \sin\beta.$$

2. Нека је S непразан скуп тачака у равни и a позитиван број. Скуп S_a дефинишемо на следећи начин: тачка A припада скупу S_a ако и само ако постоји тачка $B \in S$ таква да растојање између тачака A и B није веће од a.
(а) Ако скуп S није конвексан, да ли скуп S_a може бити конвексан?
(б) Ако је скуп S конвексан, да ли скуп S_a мора бити конвексан?

3. Доказати да је
$$\operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ = \operatorname{tg} 80^\circ.$$

4. Две кружнице се секу у тачкама A и B. Нека је C тачка прве кружнице, различита од A, B. Означимо са D тачку пресека праве CA са другом кружницом, различиту од A. Нека су M и N средишта лукова BC и BD, који не садрже тачку A, а K средиште дужи CD. Доказати да је $\angle MKN$ прав.

5. Дата је функција $f : N \to N \cup \{0\}$ за коју важе следеће услови:
(а) $f(mn) = f(m) + f(n)$, за све $m, n \in N$;
(б) $f(n) = 0$ за сваки природан број n чија је цифра јединица у декадном запису једнака 3;
(в) $f(10) = 0$.
Доказати да је $f(n) = 0$ за сваки природан број n.

Четврти разред

1. Решити једначину:
$$\cos^2(x \sin x) = 1 + \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1}.$$

2. Нека је S непразан скуп тачака у равни и a позитиван број. Скуп S_a дефинишемо на следећи начин: тачка A припада скупу S_a ако и само ако постоји тачка $B \in S$ таква да растојање између тачака A и B није веће од a.
(а) Ако скуп S није конвексан, да ли скуп S_a може бити конвексан?
(б) Ако је скуп S конвексан, да ли скуп S_a мора бити конвексан?

3. Доказати да је
$$\operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ = \operatorname{tg} 80^\circ.$$

4. Одредити све тројке (a,b,c) природних бројева за које важи $a<b<c$ и

$$ac=b^2, \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{1998}.$$

5. Дат је низ $a_1=1$ и $a_{n+1}=2a_n+\sqrt{3a_n^2+1}$ за $n\geq 1$. Доказати да је сваки члан низа цео број.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА

Први разред

1.1. а) Ако је задња цифра 0, остале две цифре могу бити: $\{1,2\},\{4,5\},\{2,4\}$ или $\{1,5\}$. Ако је задња цифра 5, остале цифре могу бити: $\{1,0\},\{1,3\}$, $\{3,4\},\{4,0\}$. Дакле, таквих бројева има укупно 14.
б) Осим бројева добијених под а), долазе у обзир и: 300, 333, 555, 225, 255, 525. Укупно има 20 таквих бројева.

1.2. Једини $\triangle$ из кога полазе оба $<$ је обележен са 1. Слично, једини $\triangle$ из кога полазе оба $>$ је означен са 9. Од преостала три $\triangle$, из једног ка осталима полазе два $<$. У њега уписујемо 3. Даље се лако види у који ћемо од преосталих уписати 5, а у који 7. Дакле, задатак има јединствено решење.

1.3. Представимо тражени број у облику производа степена простих бројева: $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \ldots$. Због дељивости броја n са 2 и 3 мора бити $a, b \geq 1$, док су изложиоци осталих простих делилаца броја n ненегативни цели бројеви. Према условима задатка мора бити:

$$(1)\frac{n}{2} = 2^{a-1} \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdots = x^2$$
$$(2)\frac{n}{3} = 2^a \cdot 3^{b-1} \cdot 5^c \cdot 7^d \cdots = y^3$$

Због (1) су бројеви $a-1$, b, c, d, $\ldots$ парни, а због (2) су бројеви a, $b-1$, c, d, $\ldots$ дељиви са 3. Дакле: $a \in \{3, 9, 15, \ldots\}$, $b \in \{4, 10, 16, \ldots\}$, $c, d \in \{0, 6, 12, \ldots\}$. Како већ $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^6$ веће од 100000, то су у факторизацији броја n сви изложиоци почев од c једнаки нули. Дакле, $n = 2^a \cdot 3^b$. Провером се установљава да је тражени број $n = 2^9 \cdot 3^4 = 41472$.

1.4.

$$2a_1 = a_2 + \cdots + a_n$$
$$\vdots$$
$$2a_n = a_1 + \cdots + a_{n-1}$$
$$2(a_1 + \cdots + a_n) = (n-1)(a_1 + \cdots + a_n)$$

$\Rightarrow (n-3)(a_1 + \cdots + a_n) = 0 \Rightarrow n = 3 \vee a_1 + \cdots + a_n = 0, a_1 + \cdots + a_n = 0 \Rightarrow a_i = 0 \Rightarrow n = 3$. Пример: $a_1 = a_2 = a_3 = 2$.

1.5. Ако у оној групи где се налази 1 имамо два узастопна броја $x, x+1$ тада имамо да је $(x+1)-x=1$. Ако то није случај онда у групи са 1 могу бити: $\{1,3,5\}$, $\{1,3\}$, $\{1,5\}$, у другој групи имамо 2 и 4, $4-2=2$; $\{1,4\}$, у другој групи имамо 2, 3 и 5 , $5-3=2$.

Други разред

2.1. Повучемо кроз D праву паралелну са AC. Нека она сече AB у E. $\triangle CAD$ и $\triangle CAE$ имају исте површине (исту основицу AC и једнаке висине), према томе површина четвороугла $CAND$ једнака је површине троугла CEN. Како је M у средишту дијагонале BD, то је и N средиште BE, па је $P_{\triangle CNE} = P_{\triangle CBN}$ и $P_{CNAD} = P_{\triangle CBN}$.

2.2. $A = 1 + \sqrt{bc}$.

2.3. Не. Оба броја су облика $9n+2$, за неки природан број n. Једнакост $N = kM$ није могућа за $k \in \{2,3,4\}$, јер ниједан од бројева 4, 6, 8 није облика $9n+2$. За $k > 4$, број kM или има прву цифру бећу од 4, или има више од 1998 цифара.

2.4. $a=0$ решење $x=y=\alpha \in R$. $a \neq 0 \Rightarrow x \neq a \Rightarrow$

$$y = \frac{x^2}{x-a} \Rightarrow \frac{x^4}{(x-a)^2} - \frac{x^3}{x-a} = 9ax \Rightarrow$$

$$x^4 \mp x^3(x-a) - 9ax(x-a)^2 = 0$$

Решење су $x = 0 \vee x^3 \mp x^2(x-a) - 9a(x-a)^2 = 0$. $x = \frac{3}{2}a \vee x = \frac{3}{4}a$.

2.5. $x^2+y^2 \geq 2\sqrt{2}(x-y) \Leftrightarrow (x-y)^2+2xy \geq 2\sqrt{2}(x-y) \Leftrightarrow (x-y)^2+2 \geq 2\sqrt{2}(x-y) \Leftrightarrow (x-y)^2 - 2\sqrt{2}(x-y)+2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y-\sqrt{2})^2 \geq 0$.

Трећи разред

3.1. $\log_4 \pi = \frac{1}{2}\log_2 \pi$ па се неједнакост своди на $\frac{3}{2}\log_2 \pi < \frac{5}{2}$, тј. $3 \cdot \log_2 \pi < 5$, тј. $\pi^3 < 2^5$. $\pi^3 = \pi^2 \cdot \pi < 3,15^2 \cdot 3,2 < 10 \cdot 3,2 = 32 = 2^5$.

3.2. Многоуглови $A_1A_2\ldots A_i$ и $A_2A_3\ldots A_{i+1}$ су подударни. Следи: $\angle B_iA_1A_2 \cong \angle B_iA_2A_3$, $\angle A_1B_iA_2 = 180° - (\angle B_iA_1A_2 + \angle A_1A_2B_i) = 180° - (\angle B_iA_2A_3 + \angle A_1A_2B_i) = 180° - \angle A_1A_2A_3 = 180° - \frac{(n-2)\cdot 180°}{n} = \frac{360°}{n}$. Дакле, за свако i

је $\angle A_1B_iA_2 = \frac{360^\circ}{n}$, па се све тачке B_i налазе на једном кружном луку са тетивом A_1A_2.

3.3. $r^2\pi h = x^2\pi y$ и $2r^2\pi + 2r\pi h = 2x^2\pi + 2x\pi y$; $r^2h = x^2y \Rightarrow y = \frac{r^2h}{x^2}$.

$$\begin{aligned} r^2 + rh = x^2 + xy \Rightarrow & x^3 - (r^2 + rh)x + r^2h = 0 \\ & \Leftrightarrow (x-r)(x^2 + xr - rh) = 0 \\ & \Rightarrow x_1 = r \vee x_2 = \frac{-r + \sqrt{r^2 + 4rh}}{2} (x_3 < 0) \\ & y_1 = h, \quad y_2 = \frac{r^2h}{x_2^2} = \frac{2rh}{2h + r - \sqrt{r^2 + 4rh}} \\ & x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow 2r \neq h \end{aligned}$$

За праве кружне ваљке код којих је $2r = h$ не постоји неподударан ваљак исте површине и запремине. Уколико је $2r \neq h$, такав ваљак постоји.

3.4. 1) n непарно: табла (сем угаоног поља) може се поплочати доминама 1×2. Други играчпобеђује тако што, када се фигура потезом првог играча нађе на некој домини, помери фигуру на друго поље те домине. 2) n парно: цела табла се може поплочати доминама 1×2; први играч помера фигуру на друго поље домине која садржи угаоно поље и надаље, на сваки потез другог играча помера фигуру на друго поље домине на коју је фигура стављена.

3.5. а)

$$x \cdot \cos\beta + \frac{1}{z} \cdot \cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \cdot \cos\beta + \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \cdot \cos\alpha = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\gamma} = 1.$$

Аналогно се показују и друге две једнакости.
б) Стандардним елиминисањем променљивих x и y добијамо квадратну једначину по z:

$$\cos\alpha \cdot \sin^2\beta \cdot z^2 + (\cos^2\beta + \cos^2\gamma - \cos^2\alpha - 1) \cdot z + \cos\alpha \cdot \sin^2\gamma = 0$$

Под а) смо показали да је $z_1 = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$. Из Вијетових правила имамо да је

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{\cos\alpha \cdot \sin^2\gamma}{\cos\alpha \cdot \sin^2\beta} = \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\beta}$$

па је и друго решење квадратне једначине $z_2 = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$. Слично се показује и да су једина решења под а) за x и y.

Четврти разред

4.1. Не. Ако је број $T > 0$ период функције $f(x)$, онда је $\cos(T\sqrt{7})\cos T = \cos 0 \cos 0 = 1$, па је или $\cos T = \cos T\sqrt{7} = 1$ или $\cos T = \cos T\sqrt{7} = -1$. Ако T задовољава први систем, онда је за неке природне бројеве k и m, $T = 2k\pi$ и $T\sqrt{7} = 2m\pi$, одакле је $\sqrt{7} = \frac{m}{k}$, што је у супротности са ирационалношћу броја $\sqrt{7}$. Аналогно се анализира други случај.

4.2. Повуцимо кроз O праву p паралелну са AC и нека је $P = p \cap AD; Q = p \cap AM$. Означимо $AM = x, AB = y, BM = 4a, PD = b$. Тада $AC = CB = CM = 2a = CE = ED = AD$. $\triangle AMB \sim \triangle AMR \sim \triangle APQ$ и $AP = a, QR = PR = b(\triangle APQ \simeq \triangle OPR)$.

$$\triangle AMB \sim \triangle AMR \Rightarrow \frac{y}{4a} = \frac{x}{a+b} \tag{1}$$

$$\triangle AMB \sim \triangle APQ \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{a}{b} \tag{2}$$

(1), (2) следи $\frac{4a}{a+b} = \frac{a}{b} \Rightarrow a = 3b \Rightarrow y = 3x$.

4.3. A, B, C су колинеарне ако и само ако

$$\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} \Leftrightarrow$$

$$\frac{px_A^3 - px_B^3 + qx_A - qx_B}{x_A - x_B} = \frac{px_B^3 - px_C^3 + qx_B - qx_C}{x_B - x_C}$$

$$x_A^2 + x_A x_B + x_B^2 = x_B^2 + x_B x_C + x_C^2$$

$(x_A - x_C)(x_A + x_B + x_C) = 0 \Leftrightarrow x_A = x_C \vee x_A + x_B + x_C = 0 \Leftrightarrow x_A + x_B + x_C = 0$, јер су A и C различите тачке.

4.4. $a_{500} = 1000000$ је потпун квадрат. С друге стране, ако аритметичка прогресија $a_k = a + dk$, где су a и d природни бројеви, садржи бар један квадрат, садржи их и бесконачно много. Наиме, ако је m^2 члан те прогресије, онда је и $(m+d)^2 = m^2 + 2md + d^2 = m^2 + d(2m+d)$.

4.5. $2x^2 - xy - 5x + y + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 4 + y(1-x) = 0$. Како је $x \geq 1 \Leftrightarrow 1 - x \leq 0$, $x \geq y \Rightarrow x(1-x) \leq y(1-x)$

$$0 = 2x^2 - 5x + 4 + y(1-x) \geq 2x^2 - 5x + 4 + x(1-x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

$(x-2)^2 \leq 0 \Rightarrow x = 2,\ y = 2.$

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА

Први разред

1.1. Разбијмо скуп A на дисјунктне подскупове: A_0 – скуп свих бројева дељивих са 3, A_1 – скуп свих бројева који при дељењу са 3 дају остатак 1, и A_2 – скуп свих бројева који при дељењу са 3 дају остатак 2. Број елемената у овим подскуповима је, редом, 26, 27, 27. Да би збир $a+b+c$ био дељив са 3 морају: (1) сва три сабирка давати при дељењу са 3 исти остатак, тј. сви бити из једног од ових подскупова, или (2) сабирци давати различите остатке при дељењу са 3, тј. из сваког од ових подскупова бити по 1 сабирак. Подскупова прве врсте има $\frac{26\cdot 25\cdot 24}{6} + 2\cdot\frac{27\cdot 26\cdot 25}{6} = m$, а подскупова друге врсте има $26\cdot 27^2 = n$.
Тражени број подскупова је $m+n$.

1.2. $(a^2+b^2)^3 = a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 + b^6 - 6a^2b^4 + 9b^2a^4 = (a^3-3ab^2)^2 + (b^3-3ba^2)^2 = 8^2 + \sqrt{61}^2 = 125.$ $a^2+b^2 = \sqrt[3]{125} = 5.$

1.3. Означимо са A_1, B_1, C_1 пресечне тачке симетрала углова са наспрамним страницама. Тада имамо

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC} + \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BB_1} = \frac{a}{a+c}\overrightarrow{BA} + \frac{c}{a+c}\overrightarrow{BC}.$$

Означимо са S центар уписаног круга : $\{S\} = AA_1 \cap BB_1, \overrightarrow{AS} = \lambda\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BS} = \mu\overrightarrow{BB_1}$. Из $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS}$ добијамо

$$\lambda = \frac{b+c}{a+b+c} \quad \mu = \frac{a+c}{a+b+c}.$$

Одатле се добија $a\overrightarrow{AS} + b\overrightarrow{BS} + c\overrightarrow{CS} = \vec{0}$. Нека је S_1 нека тачка за коју важи

$$a\overrightarrow{AS_1} + b\overrightarrow{BS_1} + c\overrightarrow{CS_1} = \vec{0}.$$

Имамо $(a+b+c)\overrightarrow{SS_1} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{SS_1} = \vec{0} \Rightarrow S_1 = S$.

1.4. То је 4. За $n > 4$ и $n = ab$ имамо: $a \neq b$ или $n = a^2, a > 2$.

1.5. Обележимо са K пресек AE и CD. Троугао AKC је једнакокраки (јер је $\angle KCA = \angle KAC = 30°$), па је $AK = KC$ и $\angle AKC = 120°$. Како је $\angle AKC$ два пута већи од $\angle ABC$ добијамо да је K центар описаног круга око $\triangle ABC$ (централни угао над тетивом AC је два пута већи од периферијског), па је $AK = KB = KC$. $\triangle AKB$ је једнакокраки ($AK = KB$) $\Rightarrow \angle KAB = \angle KBD = 50° - 30° = 20°$. $\angle DKE = \angle AKC = 120°$ (унакрсни углови), следи да је четвороугао $DBEK$ тетивни, па је $\angle KDE = \angle KBE$ (периферијски углови над истом тетивом). $\angle KDE = \angle KBE = 60° - 20° = 40°$. Значи $\angle CDE = 40°$.

Други разред

2.1. $\frac{4a+3b+2c}{a} \geq 0 \Leftrightarrow 4 + 3\frac{b}{a} + 2\frac{c}{a} \geq 0 \Leftrightarrow 2x_1x_2 - 3(x_1+x_2) + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x_1-1)(x_2-2) + (x_1-2)(x_2-1) \geq 0$. Ако би и x_1 и x_2 били у $(1,2)$ оба сабирка би била негативна, што је немогуће.

2.2. Означимо са M_1, M_2, M_3, M_4 редом средишта страница AB, BC, CD, AD, са O центар описаног круга, и са T_1 и T_2 пресеке норамала из M_1 и M_3, односно M_2 и M_4. Лако се види да су $M_1T_1M_3O$ и $M_2T_2M_4O$ паралелограми. Дужи M_1M_3 и M_2M_4 имају заједничко средиште S. Дакле, тачке T_1 и T_2 се поклапају, јер су обе централно-симетричне тачки O у односу на S.

2.3. Како је $5^3 = 125 \equiv 64 = 4^3 (\bmod 61)$ имамо да је $5^3 \equiv 4^3 (\bmod 61)$, тј. $5^{3k} \equiv 4^{3k} (\bmod 61)$. Како важи $5 \not\equiv 4 (\bmod 61)$ и $5^2 = 25 \not\equiv 16 = 4^2 (\bmod 61)$, то имамо да важи $5^{3k+1} \not\equiv 4^{3k+1} (\bmod 61)$ и $5^{3k+2} \not\equiv 4^{3k+2} (\bmod 61)$. На основу свега изложеног добијамо да $61 | 5^n - 4^n$ само за бројеве облика $n = 3k$.

2.4. Конструишимо из темена C полуправу, која заклапа са страницом AC угао од $10°$, и означимо са O пресек те полуправе са AM. Троугао AOC је једнакокраки ($\angle OAC = \angle OCA = 10°$), па је $AO = OC$, и $\angle AOC = 180° - 10° - 10° = 160°$. Како је $\angle AOC$ два пута већи од $\angle ABC$ и $OA = OC$, O је центар описаног круга око $\triangle ABC$ (угао AOC је централни, а $\angle ABC$ периферијски над тетивом AC), па је $OA = OC = OB$. Одатле добијамо да је $\triangle AOB$ једнакокраки, па је $\angle OAB = \angle OBA = 30° - 10° = 20°$. $\angle OBC = 80° - 20° = 60°$, што значи да је $\triangle OBC$ једнакостранични. Пошто је $\angle MCO = 30° - 10° = 20°$ и $\angle MOC = 180° - 160° = 20°$, MB је симетрала угла OBC, што значи да је $\angle MBC = 30°$. Коначно је $\angle BMC = 180° - \angle MBC - \angle MCB = 180° - 30° - (70° - 30°) = 110°$. $\angle BMC = 110°$.

2.5. Одмах се види да је $x=1$ једно решење. Дељење са $\sqrt[3]{x-1}$ добијамо:

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}.$$

Степеновањем са 3 добијамо:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{3x+1}\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}\right)&=-(x+1)\\ \Rightarrow \sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{3x+1}\sqrt[3]{x-1}&=-(x+1)\\ \Leftrightarrow (x+1)(3x+1)(x-1)&=-(x+1)^3\end{aligned}$$

Решење последње једначине су -1 и 0. Провером добијамо да су решења полазне једначине 1 и -1.

Трећи разред

3.1. Очигледно је $\angle AED=108°, \angle XAE=60°, \angle XDE=66°, \angle ADE=36°, \angle XDA=30°, \angle AXD=126°$. У троуглу AXD : $\frac{AX}{\sin 30°}=\frac{AD}{\sin 126°}$ па је $AD=2AX\sin 54°$. Како је $AE=ED$ то је $\sin 54°=\frac{AD/2}{AE}\Rightarrow AD=2AE\sin 54°$. Закључујемо да је $AX=AE$, дакле $\triangle AXE$ је једнакокрак и CX је оса симетрије петоугла. Дакле, $\angle BXC=84°$.

3.2. $M=2\pi rh=\frac{2R\pi}{H}(Hh-h^2)$. $h_{\max}=\frac{H}{2}$, $r_{\max}=\frac{R}{2}$.

3.3. Дата једначина је еквивалентна са:

$$18\log_{2\sin x\cos x}2\cos x+8\log_{2\cos x}\sin x=16,$$

уз услове $\sin x>0, \cos x>0, \cos x\neq\frac{1}{2}, \sin 2x\neq 1$. Уводећи смену $t=\log_{2\cos x}\sin x$, долазимо до једначине $4t^2-4t+1=0$ са решењима $t_1=t_2=\frac{1}{2}$. Из $\log_{2\cos x}\sin x=\frac{1}{2}$, добијамо $\cos x=-1\pm\sqrt{2}$. Једино има смисла $\cos x=-1+\sqrt{2}$, што даје две серије:

$$x=\arccos(-1+\sqrt{2})+2k\pi, \quad \text{или } x=-\arccos(-1+\sqrt{2})+2k\pi, \quad k\in Z.$$

Због услова $\sin x>0$, добијамо да су решења $x=\arccos(-1+\sqrt{2})+2k\pi$, $k\in Z$.

3.4. Из $0 \leq x, y, z \leq 1$ следи:

$$
\begin{aligned}
&\frac{x}{7+y^3+z^3}+\frac{y}{7+z^3+x^3}+\frac{z}{7+x^3+y^3} \leq \\
&\leq \frac{x}{6+x^3+y^3+z^3}+\frac{y}{6+x^3+y^3+z^3}+\frac{z}{6+x^3+y^3+z^3} \\
&= \frac{x+y+z}{6+x^3+y^3+z^3}
\end{aligned}
$$

и да би доказали неједнакост потребно је да докажемо да је $3(x+y+z) \leq 6+x^3+y^3+z^3$. Ово лако следи ако приметимо да за $0 \leq t \leq 1$ важи $t^3-3t+2=(t+2)(t-1)^2 \geq 0$.

3.5. Нека је $f(n)=n(n+1)(2n+1996)$, $f(1)=2 \cdot 1998=2^2 \cdot 3^3 \cdot 37$. Дакле $d=2^x \cdot 3^y \cdot 37^z$ и $x \leq 2, y \leq 3, z \leq 1$. $f(2)=12000=2^5 \cdot 3 \cdot 5^3$ па је d дељив само простим бројевима 2 и 3 тј. $d=2^\alpha \cdot 3^\beta$ и $\alpha \leq 2, \beta \leq 1$. Лако се доказује да је $f(n)$ дељиво са 4 и 3 па је $d=12$.

Четврти разред

4.1. Нека је

$$A=\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\frac{a_3^2}{a_3+a_1}$$

и

$$B=\frac{a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_3^2}{a_2+a_3}+\frac{a_1^2}{a_3+a_1}.$$

Тада је

$$A-B=\frac{a_1^2-a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2-a_3^2}{a_2+a_3}+\frac{a_3^2-a_1^2}{a_3+a_1}=0 \Rightarrow A=B.$$

Сада имамо

$$
\begin{aligned}
2A=A+B &= \frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2+a_3^2}{a_2+a_3}+\frac{a_3^2+a_1^2}{a_2+a_3} \\
&\geq \frac{\frac{1}{2}(a_1+a_2)^2}{a_1+a_2}+\frac{\frac{1}{2}(a_2+a_3)^2}{a_2+a_3}+\frac{\frac{1}{2}(a_3+a_1)^2}{a_3+a_1} \\
&= \frac{1}{2}(a_1+a_2+a_2+a_3+a_3+a_1)=a_1+a_2+a_3=1
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow A \geq \frac{1}{2}$.

4.2.
$$S = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + a_{n+5} + a_{n+6} + a_{n+7} =$$
$$= a_{n+2} + a_{n+4} + a_{n+6} + a_{n+8}.$$

Како су сви чланови низа позитивни бројеви то је $S > a_{n+8}$. Са друге стране имамо следеће неједнакости: $a_{n+2} < a_{n+3}$ (јер је низ растући)

$$a_{n+2} + a_{n+4} < a_{n+3} + a_{n+4} = a_{n+5}$$
$$a_{n+2} + a_{n+4} + a_{n+6} < a_{n+5} + a_{n+6} = a_{n+7}$$
$$S = a_{n+2} + a_{n+4} + a_{n+6} + a_{n+8} < a_{n+7} + a_{n+8} = a_{n+9}$$

па имамо $a_{n+8} < S < a_{n+9}$ па како је S између два члана низа, а низ је растући добијамо да S не може бити једнак неком члану тог низа.

4.3. Нека су A и B два најудаљенија темена датог полиедра, а $AB = d$. Пројектујмо све ивице датог полиедра на праву која садржи A и B. Лако је доказати да се свака ивица пројектује на део дужи AB. Наиме, ако би постојало неко теме C за које је, рецимо, $A - B - C'$, где је C' пројекција тачке C, онда би било $AC \geq AC' > AB = d$, што је немогуће. Показаћемо да је свака тачка M дужи AB пројекција бар трију тачака које припадају ивицама полиедра. Нека је α раван која садржи тачку M и нормална је на AB. Пресек равни α и датог полиедра је конвексан многоугао који има бар три темена, па α сече полиедар по бар три његове ивице. Све пресечне тачке пројектују се у M. Збир дужина свих ивица већи је од збира дужина њихових (нормалних) пројекција, а овај је већи или једнак $3d$.

4.4. Да би корени ових једначина били природни бројеви, дискриминанте $4(a^2 - b), 4(b^2 - c), 4(c^2 - a)$ морају бити потпуни квадрати, а самим тим и вредности $a^2 - b, b^2 - c, c^2 - a$. Нека је a најмањи од ових бројева. Тада је $c^2 > c^2 - a \geq c^2 - c \geq c^2 - 2c + 1 = (c-1)^2$, па мора бити $c^2 - a = (c-1)^2$, односно $a = c = 1$. Но тада је и $b = 1$, јер је $a^2 - b \geq 0$. Провером за $a = b = c = 1$ добијамо да задовољавају услове задатка.

4.5. Имамо три различита случаја: а) $n = 2k$, б) $n = 4k+1$, в) $n = 4k+3$. а) $n = 2k$. $8 \equiv -1 (\operatorname{mod} 9), 8^n = 8^{2k} \equiv 1 (\operatorname{mod} 9), b \equiv 19 + 17 (\operatorname{mod} 9)$, тј.$9|b$. б) $n = 4k+1$. $8 \equiv -5 (\operatorname{mod} 13), 8^2 \equiv -1 (\operatorname{mod} 13), 8^{4k} \equiv 1 (\operatorname{mod} 13), 8^{4k+1} \equiv -5 (\operatorname{mod} 13), b = 19 \cdot 8^{4k+1} + 17 \equiv 19 \cdot (-5) + 17 \equiv 6 \cdot (-5) + 4 = -26 \equiv 0 (\operatorname{mod} 13)$, тј. $13|b$. в) $n = 4k+3$. $8 \equiv 3 (\operatorname{mod} 5), 8^2 \equiv -1 (\operatorname{mod} 5), 8^{4k} \equiv 1 (\operatorname{mod} 5), 8^{4k+3} \equiv$

$-3 \pmod 5$, $b = 19 \cdot 8^{4k+3} + 17 \equiv 19 \cdot (-3) + 17 = -57 + 17 = -40 \equiv 0 \pmod 5$, тј. $5|b$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА РЕПУБЛИЧКОГ ТАКМИЧЕЊА

Први разред

1.1. а) $x^4 + x^2y^2 + y^4 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$.
б) Нека је $a = 3^{999}$. Дати број је $a^4+a^2+1 = a^4+2a^2+1-a^2 = (a^2+1)^2-a^2 = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$. Како је $3^{1998} + 3^{999} + 1 > 1$ и $3^{1998} - 3^{999} + 1 > 1$, то је дати број сложен.

1.2. У изразу $G(x,y) = (x-y)V(x,y)$ заменимо $y = 0$ и добијемо

$$f(x) = \frac{x}{a^2(a-x)^2}\left((a-b)^2(c-x)c - (c-a)^2(b-x)b\right).$$

Слично, заменом $x = 0$ добијамо $g(y) = f(y)$. Провером се утврђује да заиста важи за свако $x, y \in R \setminus \{0\}$, $x \neq y$, $V(x,y) = \frac{1}{x-y}(f(x) - f(y))$.

1.3. Да. Приметимо да је $1 + 3^3 = 4 \cdot 7$, одакле следи да је сваки број облика $3^n + 3^{n+3}$, где је n ненегативан цео број, дељив са 7. Првим потезом Аркадије замењује прву звездицу (испред броја 1) знаком $+$. Затим групише преосталих 1998 чланова у 333 шесторке узастопних степена, а у оквиру сваке шесторке формира три пара облика

$$(3^{6k+1}, 3^{6k+4}), (3^{6k+2}, 3^{6k+5}), (3^{6k+3}, 3^{6k+6}),$$

$(k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 333)$. Кад Бранислав замени звездицу неким знаком, Аркадије замењује звездицу истим знаком испред другог броја из истог пара. Добијени број, очигледно, при дељењу са 7 даје остатак 1.

1.4 Тачка M се не може налазити на некој од правих AB, AC, BC. Према томе, имамо следиће случајеве:
(1) M је унутар $\triangle ABC$. Тада је $P(\triangle ABM) = P(\triangle BCM) = P(\triangle CAM) = \frac{1}{3}P(\triangle ABC)$. Ако би се M налазила унутар неког неког од троуглова ABT, BCT, CAT (T је тежиште $\triangle ABC$), рецимо унутар $\triangle ABT$, имали бисмо $P(\triangle ABM) < P(\triangle ABT) = \frac{1}{3}P(\triangle ABC)$. Дакле, мора бити $M = T$.
(2) Неко теме троугла ABC се налази се налази унутар троугла одређеног тачком M и са остала два темена. Нека је то теме A. Тада је

$P(\triangle BCM) = P(\triangle ACM) + P(\triangle ABM) + P(\triangle ABC)$, па оваква тачка M не задовољава тражени услов.

(3) Тачке A, B, C, M су темена конвексног четвороугла. Ако је S пресек његових дијагонала (нпр. $\{S\} = AB \cap CM$), имамо $P(\triangle ACM) = P(\triangle BCM)$ $\Rightarrow h_A = h_B$, где су h_A и h_B растојања тачака A, B од праве CM редом, па је $AS = SB$. $P(\triangle ACM) = P(\triangle ABM) \Rightarrow P(\triangle ACS) = P(\triangle BMS) \Rightarrow CS = SM$. Дакле, дијагонале четвороугла $ABCM$ се полове.

Према томе, постоје укупно 4 тражене тачке M: тежиште $\triangle ABC$, и три тачке симетричне теменима троугла у односу на средишта наспрамних страница.

1.5. Нека је $A_1A_2 \ldots A_8$ осмоугао као у задатку и нека су $a_1, a_2, \ldots, a_8$ дужине његових страница. Докажимо да је четвороугао $A_1A_2A_5A_6$ паралелограм. Нека су p, q, r, s праве које садрже темена A_1 и A_2, A_3 и A_4, A_5 и A_6, A_7 и A_8, редом, а P, Q, R, S пресечне тачке правих p и q, q и r, r и s, s и p, редом. Лако је доказати да је четвороугао $PQRS$ правоугаоник чије су странице $PS = a_8 \cdot \sqrt{2}/2 + a_1 + a_2 \cdot \sqrt{2}/2$ и $RQ = a_4 \cdot \sqrt{2}/2 + a_5 + a_6 \cdot \sqrt{2}/2$. Како је $PS = RQ$ добијамо:

$$a_1 - a_5 = (a_4 + a_6 - a_8 - a_2) \cdot \sqrt{2}/2.$$

Пошто су дужине страница рационални бројеви добија се $a_1 - a_5 = 0$. Дакле, четвороугао $A_1A_2A_5A_6$ је паралелограм јер има две паралелне и једнаке странице. Његове дијагонале A_1A_5 и A_2A_6 секу се у тачки O. Слично се може доказати да су и остали четвороуглови образовани паровима наспрамних страница осмоугла паралелограми и да је тачка O заједнички центар симетрије тих четвороуглова, а тиме и датог осмоугла.

Други разред

2.1. Израз је једнак:

$$\begin{aligned}&= \sqrt{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{8(\sqrt{8}-\sqrt{7})^2} + \sqrt{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{7(\sqrt{8}-\sqrt{7})^2} = \\ &= (\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{8}+\sqrt{7})(\sqrt{8}-\sqrt{7}) = 2\end{aligned}$$

Дакле број је рационалан.

2.2. Ако израз са леве стране неједнакости означимо са A, тада имамо на основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине

$$A \geq n \cdot \sqrt[n]{\frac{a^{x_1-x_2} \dots a^{x_n-x_1}}{(x_1+x_2)\dots(x_n+x_1)}} = \frac{1}{\sqrt[n]{(x_1+x_2)\dots(x_n+x_1)}} \geq$$
$$\geq \frac{n}{\frac{(x_1+x_2)+\dots+(x_n+x_1)}{n}} = \frac{n^2}{2}.$$

Знак једнакости важи за $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ за свако a. Ако је $a = 1$ и $n = 2k$, једнакост важи и ако је $x_1 = x_3 = \dots = x_{2k-1}$ и $x_2 = x_4 = \dots = x_{2k}$.

2.3. Ако са $f(x) = ax^2 + bx + c$ означимо поменуту квадратну функцију, из услова задатка добијамо $f(0) \cdot f(1) \geq 1$. Ако су x_1 и x_2 корени квадратне функције тада ова неједнакост постаје $a^2 x_1(1-x_1)x_2(1-x_2) \geq 1$ јер је $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$. Међутим како за свако $x \in R$ $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ при чему једнакост важи акко $x = \frac{1}{2}$ добијамо $x_1(1-x_1)x_2(1-x_2) < \frac{1}{16}$ јер су x_1 и x_2 различити. Како на основу услова задатка $x_1, x_2 \in (0,1)$, то је лева страна последње неједнакости позитивна. Сада лако добијамо $a > 4$, тј. $a \geq 5$. За $a = 5$ квадратна функција $5x^2 - 5x + 1$ има два реална различита корена из интервала $(0,1)$.

2.4. Нека је $AB = 3, BC = 2$. Нека је O центар круга и $OA = R$. Тада ако ставимо $\angle COB = \alpha$ и $\angle BOA = \beta$ важи $4\alpha + 4\beta = 360°$, јер је толики збир централних углова око тачке O. Дакле $\angle AOC = 90°$ и $\angle ABC = 135°$ $AC^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$. Ако је X подножје нормале из тачке C на праву AB, тада је $CX = \sqrt{2}, BX = \sqrt{2}$, па је

$$AC^2 = 2R^2 = AX^2 + XC^2 = (3+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 13 + 6\sqrt{2}.$$
$$P_{OABC} = \frac{R^2}{2} + \frac{AB \cdot XC}{2} = \frac{R^2 + 3\sqrt{2}}{2}$$
$$P_{ABCDEFGH} = 4P_{OABC} = 2R^2 + 6\sqrt{2} = 13 + 12\sqrt{2}.$$

2.5. Посматрајмо оног ученика који има највећи број познаника. Нека је тај број n. Његових n познаника морају познавати различит број ученика — тај број је већи или једнак од 1 (јер сви познају првог ученика), и није већи од n. Према томе, један од њих мора познавати само једног ученика.

Трећи разред

3.1. Нека је $\{D\} = p \cap a$, и $A \in p, A \neq D$. Ако је C подножје нормале из A на раван σ, а B подножје нормале из A на праву a, имаћемо: $\alpha = \angle ABC$, $\beta = \angle ADB$, $\gamma = \angle ADC$. Имамо: $AB = AD \sin\beta$ из $\triangle ABD$, $AC = AB \sin\alpha$ из $\triangle ABC$ и $AC = AD \sin\gamma$ из $\triangle ADC$. Следи да је $\sin\gamma = \sin\alpha \sin\beta$.

3.2. а) Може. Нека је, на пример K круг полупречника r, са центром O. Тада је $S = K \setminus \{O\}$ неконвексан, и за позитиван број a имамо да је S_a круг са центром O, полупречника $r + a$, дакле конвексан скуп.
б) Мора. Размотримо прво случај када је V дуж XY. Тада је V_a фигура која се добија када се над страницама AB и CD правоугаоника $ABCD$, код кога је X средиште AB и Y средиште CD, и дужина странице AB једнака $2a$, као над пречницима, споља конструишу полукругови (приметимо да ова фигура подсећа на стадион). Дакле, V_a је конвексан скуп.
Нека је сада S произвољан конвексан скуп. Докажимо да је S_a конвексан. Уочимо произвољне тачке X', Y' из S_a. Тада постоје тачке X, Y из S, тако да одстојања од X до X' и одстојања од Y до Y' нису већа од a. Тада X', Y' припадају V_a који је подскуп S_a. Како је V_a конвексан цела дуж $X'Y'$ припада V_a, а тиме и скупу S_a.

3.3. Нека је $\operatorname{tg} 10^\circ = \beta$. Тада је

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ &= \frac{\sqrt{3}-\beta}{1+\beta\sqrt{3}} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}+\beta}{1-\beta\sqrt{3}} = \\
&= \sqrt{3} + \frac{(\sqrt{3}-\beta)(1-\beta\sqrt{3}) + (\sqrt{3}+\beta)(1+\beta\sqrt{3})}{(1+\beta\sqrt{3})(1-\beta sqrt3)} = \\
&= \sqrt{3} + \sqrt{3}\frac{2+2\beta^2}{1-3\beta^2} = \sqrt{3}\left(1 + 2\frac{1+\beta^2}{1-3\beta^2}\right) = \\
&= \sqrt{3}\frac{(1-3\beta^2)+2(1+\beta^2)}{1-3\beta^2} = \sqrt{3}\frac{3-\beta^2}{1-3\beta^2}.
\end{aligned}$$

Дакле

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 10^\circ}{1 - \operatorname{tg} 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 20^\circ} &= \frac{\frac{2\operatorname{tg} 10^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 10^\circ} + \operatorname{tg} 10^\circ}{1 - \operatorname{tg} 10^\circ \frac{2\operatorname{tg} 10^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 10^\circ}} = \\
&= \frac{2\beta + \beta(1-\beta^2)}{1-\beta^2-2\beta^2} = \frac{3\beta-\beta^3}{1-3\beta^2} = \beta\frac{3-\beta^2}{1-3\beta^2},
\end{aligned}$$

одакле је

$$\operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ = \sqrt{3}\frac{3-\beta^2}{1-3\beta^2} = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\operatorname{tg} 10^\circ} = \operatorname{tg} 80^\circ.$$

3.4. Нека је N_1 тачка симетрична са N у односу на K. Доказаћемо да је $\triangle MCN_1 \cong \triangle MBN$. Имамо $MB = MC$ и $CN_1 = DN = BN$ (јер $\triangle KCN_1 \cong \triangle KND$) Имамо:

$$\angle MBN = 360^\circ - (180^\circ - \angle ADN) - (180^\circ - \angle MCA) = \angle MCA + \angle KCN_1.$$

Заиста је $\triangle MCN_1 \cong \triangle MBN$ одакле је $MN = MN_1$ и троугао MNN_1 је једнакокраки. K је средиште основице NN_1 па је $MK \perp NN_1$, тј. $\angle MKN = 90^\circ$.

3.5. $f(10) = f(5) + f(2) = 0$, а како су $f(5) \geq 0$ и $f(2) \geq 0$ то је $f(2) = f(5) = 0$. Сваки природан број може да се представи у облику $n = 2^k \cdot 5^l \cdot b$, где $(b, 10) = 1$, b је облика $b = 10m \pm 1$ или $b = 10m \pm 3$. Стога је b^2 облика $b^2 = 10m_1 \pm 1$, а $b^4 = 10m_2 + 1$. Имамо да је последња цифра од $3b^4$ једнака 3 па је $f(3b^4) = 0$. Из услова 1) имамо $0 = f(3b^4) = f(3) + 4f(b)$ па слично као на почетку добијемо $f(b) = 0$. Сада имамо $f(n) = f(2^k \cdot 5^l \cdot b) = k \cdot f(2) + l \cdot f(5) + f(b) = 0$.

Четврти разред

4.1. За свако x важи $\cos^2(x \sin x) \leq 1$ и $1 + \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1} \geq 1$. Решења $x = 0$ и $x = -1$ једначине $1 + \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1} = 1$ заменимо у: $\cos^2(x \sin x) = 1$. Решење је $x = 0$.

4.2. Види решење задатка 2. за трећи разред.

4.3. Види решење задатка 3. за трећи разред.

4.4. Из $ac = b^2$ добијамо да је $\frac{c}{b} = \frac{b}{a} = r \in Q$. Нека је $r = \frac{p}{q}$, где су p и q узајамно прости природни бројеви. Приметимо да је $1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$. Једнакост $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{1998}$ прима облик

$$\frac{1}{1998} = \frac{1}{a} + \frac{q}{pa} + \frac{q^2}{p^2 a},$$

тј. $p^2 a = 1998(p^2 + pq + q^2)$. Број $p^2 + pq + q^2$ је узајамно прост са p. Зато је $p^2 | 1998$, тј. $p = 3$ и $a = 222(9 + 3q + q^2)$. Како је $c = r^2 a = \frac{p^2 a}{q^2}$, а p и q су узајамно прости то следи да је број a дељив са q^2, тј.

$$\text{(1)} \qquad \frac{a}{q^2} = 222 + \frac{2 \cdot 3^3 \cdot 37(q+3)}{q^2} \in N$$

Осим тога важи $\frac{p}{q} = r = \frac{b}{a} > 1$, па је $p > q$. Према томе, $q = 1$ или $q = 2$. За $q = 2$ не важи (1), а за $q = 1$ добијамо $a = 222 \cdot 13 = 2886$, $b = 3a$, $c = 9a$.

4.5.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 2a_n &= \sqrt{3a_n^2 + 1} \\ a_{n+1}^2 - 4a_{n+1}a_n + 4a_n^2 &= 3a_n^2 + 1 \\ a_{n+1}^2 - 4a_{n+1}a_n + a_n^2 &= 1 \end{aligned}$$

Сада напишемо исту једначину, али нижег степена $a_n^2 - 4a_n a_{n-1} + a_{n-1}^2 = 1$ и ову одузмемо од претходне:

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - 4a_{n+1}a_n + 4a_n a_{n-1} - a_{n-1}^2 &= 0 \\ (a_{n+1} - a_{n-1})(a_{n+1} - 4a_n + a_{n-1}) &= 0. \end{aligned}$$

Како је низ a_n растући ($a_{n+1} > 2a_n > a_n > 0$) то је $a_{n+1} > a_{n-1}$ па је $a_{n+1} - a_{n-1} > 0$, тј. $a_{n+1} - a_{n-1} \neq 0$, па је $a_{n+1} - 4a_n + a_{n_1} = 0$ рекурентна веза за овај низ, тј. $a_{n+1} - 4a_n + a_{n-1} = 0, a_1 = 1, a_2 = 4$, па индукцијом добијамо да су елементи низа целобројни.

РАСПОРЕД ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ ЗА ШКОЛСКУ 1998/1999. ГОДИНУ

Општинско такмичење .... 06.02.1999.

Окружно такмичење .... 20.02.1999.

Републичко такмичење .... 20.03.1999.

Савезно такмичење .... 17.04.1999.

САДРЖАЈ