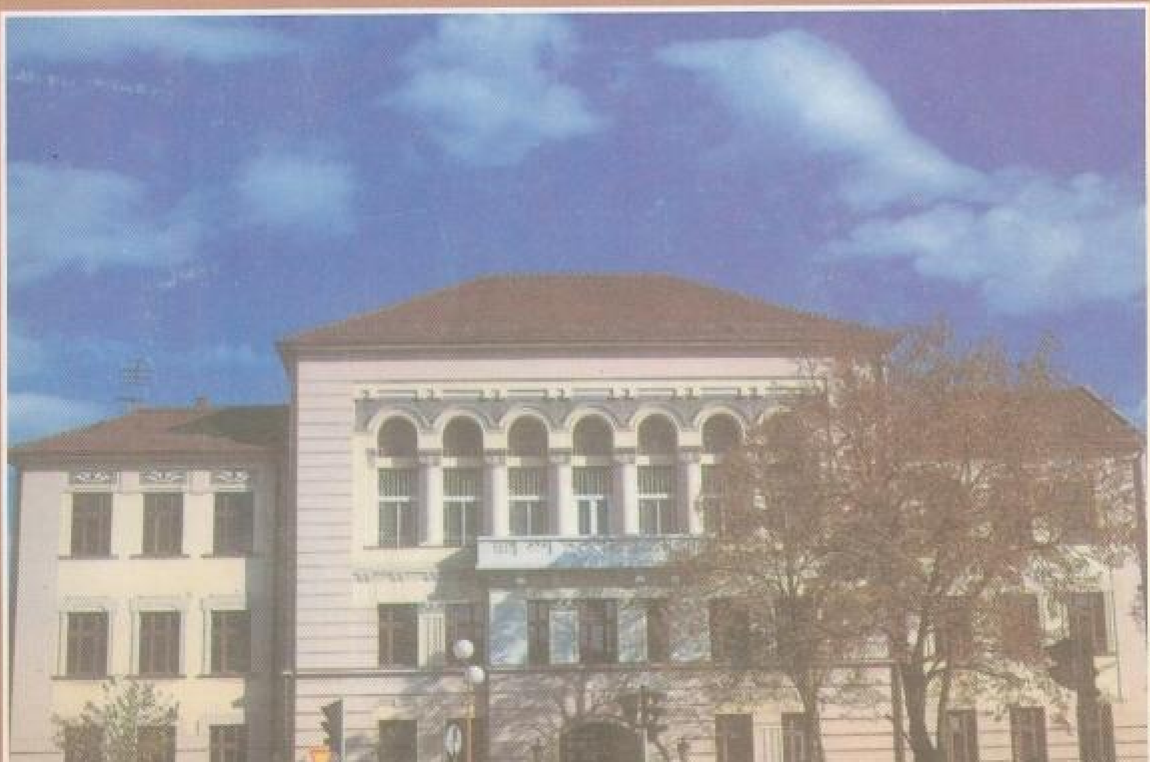
Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА СРЕДЊОШКОЛАЦА 1998/99.



Београд–Чачак 1999.

МИНИСТАРСТВО ПРОСВЕТЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА СРЕДЊОШКОЛАЦА 1998/1999.

Редакција и обрада:

др Владимир Драговић

Београд, Чачак 1999.

РЕПУБЛИЧКА КОМИСИЈА

за такмичења из математике за ученике средњих школа

шк. 1998/1999

1. Анић мр Иван, Математички факултет у Београду
2. Арсеновић др Милош , Математички факултет у Београду
3. Балтић Владимир, Математички факултет у Београду
4. Блажић др Новица, Математички факултет у Београду
5. Вукмировић мр Јован, Математички факултет у Београду
6. Гајић мр Борислав, Математички институт САНУ
7. Дорословачки др Раде, Факултет техничких наука у Новом Саду
8. Достанић др Милутин, Математички факултет у Београду
9. Драговић др Владимир, Математички институт САНУ – **председник**
10. Дугошија др Ђорђе, Математички факултет у Београду
11. Јанковић др Владимир, Математички факултет у Београду
12. Каделбург др Зоран, Математички факултет у Београду
13. Кнежевић Миљан, Математички факултет у Београду
14. Кртинић Ђорђе
15. Лаудановић Младен, Математички факултет у Београду
16. Младеновић др Павле, Математички факултет у Београду
17. Огњановић мр Срђан, професор Математичке гимназије у Београду
18. Павловић Иван, професор гимназије Вук Караџић, Лозница
19. Петровић др Војислав, Прородно-математички факултет у Новом Саду
20. Радновић мр Милена, Математички институт САНУ
21. Стевановић мр Драган, Филозофски факултет у Нишу
22. Тановић др Предраг, Математички институт САНУ
23. Тодоровић мр Раде, Математички факултет у Београду
24. Томић Иванка, професор гимназије у Ваљеву
25. Тошић др Ратко, Природно-математички факултет у Новом Саду
26. Црвенковић др Синиша, Природно-математ. факултет у Новом Саду
27. Чукић др Љубомир, Грађевински факултет у Београду

КРАТАК ПРЕГЛЕД ИСТОРИЈЕ **ЧАЧАНСКЕ ГИМНАЗИЈЕ** – ДОМАЋИНА ЧЕТРДЕСЕТПРВОГ РЕПУБЛИЧКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА СРБИЈЕ

Домаћин такмичења, Чачанска гимназија једна је од три најстарије гимназије у Србији. Већ 165 година на овим просторима, привлачи магнетном снагом најбистрије дечаке и девојчице од Ивањице до Шумадије и из питоме котлине Западне Мораве. 1837. године уписана су само два ђака у први разред "граматикалне класе", а данас са 45 одељења једна је од пет средњих школа у Чачку са највише ученика. Почело се у приватним кућама, покривеним шиндром; прву наменску школску зграду Реалчица је добила пре 105 година, а тачно пре седам деценија ученици су испунили данашње учионице Гимназије.

Први наставници Реалке предавали су српску граматику, земљопис о частима света, немачки језик, краснопис, рачуницу, јестаственицу и моралне поуке, али су поред наставе писали и уџбенике, преводили страну литературу, проучавали историју, географију и геологију чачанског краја. Међу најпознатијим био је Алекса Чварковић, писац Немачке граматике и других уџбеника. Радио је у овој школи четрдесетих година прошлог века и Јован Стерија- Поповић који је у Србију дошао "из прека" са вуковском мисијом ширења просвете у ослобођеној земљи.

Чувени научник др Сима Тројановић почео је, осамдесетих година прошлог века, у Чачку свој научни рад. Уз предавања из ботанике и минералогије открио је праисторијско насеље у Негришорима и определио се да проучава Копаоник. Аћо Станојевић, његов савременик, био је ученик и професор ове гимназије па је, упоредо са предавањем седам предмета, испитао еруптивне стене у Слатини и Рајцу, а поред осталог писао "О Јеличком метеориту" и метеоритима уопште. Божо Кнежевић, као професор и директор у овој школи "Мисли" је своје формулисао, а Гргур Јакшић и Јаша Продановић, рођени у Чачку, били су достојни ученици и професори Чачанске гимназије. Они су уз Андру Николића били зачетници књижевне традиције Чачка која ће прерасти у песништво антологијске вредности. Др Гргур Јакшић, један од најпознатијих историчара, био је први председник Ђачке дружине "Рајић". Такви професори учили су у Чачку Владислава Петковића Диса и Момчила Настасијевића, песнике визионаре који су битно утицали на савремену песничку мисао.

Тако је Чачанска гимназија, ширећи се постепено и прерастајући мукотрпно у осморазредну школу, дала нашој домовини на стотине научника и врсних стручњака из свих области рада. Данас Чачанска гимназија ради у две смене са 45 одељења, распоређених у усмерења: пpородно-математичко и друштвено-језичко.

Школска зграда у којој Гимназија ради пројектована је 1903. подигнута 1924. године, усељена 1929. да би у другом светском рату претрпела већа разарања. Послератни период од 1946. до 1955. био је период рада у коме је ова школа била подељена на мушку и женску гимназију. Од 1955. до данас ради као јединствена школа. Располаже довољним простором за оптималан рад са 30-32 одељења. Садашни "вишак" од 12 одељења, уз то и са више од 36 ученика по одељењу умногоме отежава васпитно-образовни рад.

Ипак, школа успева да одржи традицију високог нивоа, јер њени ђаци и даље по проходности на факултете и по успешности студирања спадају у сам врх српског и југословенског образовања.

Директор Чачанске гимназије
Синиша Милошевић, проф.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 06.02.1999.

Б категорија

Први разред

1. Одредити функцију $f: R \to R$ ако за све $x \in R$ важи

$$2f(x) + f(-x) = 2x - 3.$$

2. Да ли постоје природни бројеви n и m $(m > 1)$ такви да важи

$$n^m = 5000000000050000000005$$

(три петице и између њих по 10 нула)?

3. Колико има петоцифрених бројева формираних од цифара 0, 1, 2, 3, 4, 5 тако да се нула не налази ни на првом ни на последњем месту и да се ниједна цифра не понавља?

4. Колико целих бројева x задовољава неједначину $||x| - 1| \leq 1999$?

5. Испитати да ли је број

$$19000098^2 + 19000098^2 \cdot 19000099^2 + 19000099^2$$

потпун квадрат неког природног броја?

Други разред

1. Дата је једначина $x^2 + (3a - 1)x + a = 0$, $a \in R$. Наћи интервал у коме се мора налазити један од корена да би други био позитиван.

2. Нека су z и u комплексни бројеви, $z \neq i$, $u \neq i$. Доказати да је

$$uzi + u + z \neq i.$$

3. Нека су E и F подножја нормала из тачки B и C на симетралу AD угла CAB троугла ABC (D припада BC). Доказати да је тада

$$AE \cdot DF = AF \cdot DE.$$

4. Нека је $n \in N$ и $m = \left(\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}} - \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} \right)^n$. Одредити све n тако да број m буде рационалан.

5. Нека су x и y реални бројеви већи од 1. Доказати да важи

$$\frac{x+y}{1+xy} < \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y}.$$

Трећи разред

1. У троугао са страницама $a = 20$, $b = 13$, $c = 11$ уписан је полукруг чији је центар на најдужој страници и који додирује преостале две странице. Израчунати дужину полупречника тог полукруга.

2. Паралелограм чије су странице дужине 10 и 18, а површина 90 је основа пирамиде. Висина пирамиде је 6, а њено подножје је пресек дијагонала основе. Израчунати површину омотача пирамиде.

3. Наћи сва реална решења неједначине

$$\sqrt{\pi^2 - x^2}(\log_{\operatorname{tg} x} \sin x + \log_{\operatorname{tg} x} \cos x + 2\log_{\operatorname{tg} x} 2) \geq \log_{\sin x} \operatorname{tg} x + \log_{\sin x} \operatorname{ctg} x.$$

4. У зарубљену купу уписана је сфера полупречника r. Изводница купе нагнута је према равни основе под углом α. Израчунати површину омотача зарубљене купе.

5. Шта је веће $\cos(-2204^0)$ или $\sin 2656^0$?

Четврти разред

1. Одредити реални параметар a тако да полином $x^3 + ax + 1$ има једну двоструку и једну једноструку нулу.

2. У једнакостранични троугао странице a уписан је круг. У тај круг уписан је нови једнакостранични троугао. У тај троугао поново је уписан круг итд. Одредити збир површина свих тих кругова.

3. Одредити област вредности функције

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x^2 - 4x + 3}, \ x \in R, \ x \neq 1, \ x \neq 3.$$

4. Одредити модул и аргумент комплексног броја

$$z = 1 - \cos\frac{10\pi}{9} - i\sin\frac{10\pi}{9}.$$

5. Низ функција $f_n(x)$, $n \in N$ дефинисан је на следећи начин:

$$f_1(x) = \frac{x}{x-1},\ f_2(x) = \frac{1}{1-x},\ f_{n+2}(x) = f_{n+1}(f_n(x)),\ n \in N.$$

Наћи $f_{2000}(x)$.

А категорија

Први разред

1. Колико има релација еквиваленције на скупу од шест елемената тако да свакој класи еквиваленције припадају бар два елемента?

2. Нека су x и y цели бројеви. Ако је $6x + 11y$ дељиво са 31, доказати да је и $x + 7y$ такође дељиво са 31.

3. Природан број облика $4n + 1$ може се представити у облику збира два квадрата ако и само ако се број облика $8n+2$ може представити у облику збира два квадрата. Доказати!

4. У кутију је стављено k мањих кутија. Затим се у неке од мањих кутија ставља по k још мањих кутија и овај процес се понови неколико пута. Ако је на крају међу свим тим кутијама m напуњених, колико има празних (кутија је напуњена ако у њој има нека мања)?

5. Наћи све вредности $a \in R$ за које једначина

$$|x-a| + |a-1| = 1$$

има два решења. Одредити та решења.

Други разред

1. Може ли се круг прекрити са два мања круга?

2. Нека су a, b, $c \in N$, тако да $\dfrac{ab}{a-b} = c$, $(a,b,c) = 1$. Доказати да је $a-b$ потпун квадрат.

3. Наћи реална решења једначине:

$$(16x^{200}+1)(y^{200}+1) = 16(xy)^{100}.$$

4. Нека су a, b, c, d четири различита комплексна броја. Ако је број $\dfrac{a-b}{c-b} \cdot \dfrac{c-d}{a-d}$ реалан, доказати да је и $\dfrac{a-b}{d-b} \cdot \dfrac{d-c}{a-c}$ реалан.

5. Доказати да у произвољном троуглу ABC важи $OH < 3r$, где је H – ортоцентар, O – центар описане кружнице и r – полупречник описане кружнице око тог троугла.

Трећи разред

1. Решити једначину

$$\log_{27}(2\sin x\cos x - \frac{1}{3}\cos x) = \frac{1}{3} + \log_3(-\cos x).$$

2. Шта је веће $\operatorname{tg}\dfrac{3}{\pi}$ или $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{3}$?

3. Наћи све природне бројеве n за које је $N = 2^8 + 2^{11} + 2^n$ квадрат природног броја.

4. Израчунати површину паралелограма чије су дијагонале p и q $(p > q)$ и чији је оштар угао α.

5. У равни је задат конвексан полигон $A_1A_2A_3\ldots A_n$ $(n \geq 3)$ чија страница A_kA_{k+1} има дужину a_k $(A_{n+1} = A_1)$. Ако пројекција тог полигона на праву која садржи страницу A_kA_{k+1} има дужину d_k, доказати да важи

$$\frac{a_1}{d_1} + \cdots + \frac{a_n}{d_n} > 2.$$

Четврти разред

1. Да ли се круг полупречника 5 см може прекрити са три круга полупречника 2 см, 3 см и 4 см?

2. Уколико $\log_2(3^x-1)$, $\log_4(9+9^x-7\cdot 3^x)$ и $\log_2(3-3^x)$ чине узастопне чланове аритметичке прогресије, наћи x.

3. Доказати једнакост:

$$1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=\begin{cases} 2^2+4^2+\cdots+(2\cdot\frac{n}{2})^2 & \text{за } n \text{ парно} \\ 1^2+3^2+\cdots+(2\cdot\frac{n+1}{2}-1)^2 & \text{за } n \text{ непарно}\ . \end{cases}$$

4. Доказати да производ шест узастопних природних бројева није пети степен природног броја.

5. У равни је задат конвексан полигон $A_1A_2A_3\ldots A_n$ $(n\geq 3)$ чија страница A_kA_{k+1} има дужину a_k $(A_{n+1}=A_1)$. Ако пројекција тог полигона на праву која садржи страницу A_kA_{k+1} има дужину d_k, доказати да важи

$$\frac{a_1}{d_1}+\cdots+\frac{a_n}{d_n}>2.$$

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 20.02.1999.

Б категорија

Први разред

1. Ако је n природан број већи од два, доказати да је број

$$\frac{n^{12}-128n^6+4096}{(n^3-4n^2+8n-8)^2}$$

потпун квадрат природног броја.

2. Дат је полином

$$P(x)=x^{2000}-2000x^{1999}+2000x^{1998}-\cdots+2000x^2-2000x+2000.$$

Израчунати $P(1999)$.

3. Нека су тачке K и L редом средишта страница CD, и AD квадрата $ABCD$, а S пресечна тачка дужи BK и CL.
а) Доказати да је четвороугао $ABSL$ тетивни.
б) Доказати да је троугао ASB једнакокраки.

4. Дат је скуп A. Међу његовим подскуповима дефинишемо релацију $\sim$: $X,\ Y \subset A,\ X \sim Y \iff X \cap Y = \emptyset$. Испитати да ли је $\sim$ рефлексивна, симетрична, антисиметрична или транзитивна.

5. Наћи све просте бројеве p такве да су и бројеви $4p^2+1$ и $6p^2+1$ прости.

Други разред

1. Да ли једначина $m^3 - n^3 = 1999$ има решења у скупу целих бројева?

2. Наћи минимум и максимум функције

$$y = -x^2 + 3|x-1| + 2$$

на интервалу $[-2, 2]$.

3. За које вредности реалног параметра p систем неједначина

$$-9 < \frac{3x^2 + px - 6}{x^2 - x + 1} < 6$$

важи за све реалне вредности x?

4. Решити једначину: $\dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x^2-1}$.

5. Нека је AA_1 тежишна дуж троугла ABC. Ако је X тачка дужи BA_1 и t права која садржи X и паралелна је са AA_1, означимо са Y и Z тачке пресека праве t са правама AB и AC редом. Доказати да збир дужина дужи ZX и YX не зависи од избора тачке X.

Трећи разред

1. Решити неједначину:

$$1 \leq |\cos x|^{\sqrt{2x-3}\cdot \log_{|\cos x|}\left(\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)}\right)}$$

2. У праву купу висине h и изводнице s уписан је прав ваљак тако да је површина омотача ваљка једнака површини омотача дела купе изнад ваљка. Одредити висину ваљка.

3. Нека су $\vec{u} = a\vec{x}+b\vec{y}$ и $\vec{v} = c\vec{x}+d\vec{y}$ колинеарни вектори и $ad-bc \neq 0$ (a, b, c, $d \in R$). Доказати да су $\vec{x}$ и $\vec{y}$ такође колинеарни.

4. Ако је $\sin\alpha + \sin\beta = a$, $\cos\alpha + \cos\beta = b$, изразити $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$ помоћу a и b.

5. У зависности од реалних параметра a и b решити систем:

$$\begin{aligned} x + ay + z &= 3 \\ x + 2ay + z &= 4 \\ bx + y + z &= 4. \end{aligned}$$

Четврти разред

1. Решити неједначину:

$$1 \leq |\cos x|^{\sqrt{2x-3}\log_{|\cos x|}\left(\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{3(1-2\cos^2 x)}\right)}$$

2. Нека је $k > 1$ и n паран природан број. Решити неједначину по x:

$$\log_3 x - 2k\log_{3^2} x + 3k^2\log_{3^3} x - \cdots + n(-k)^{n-1}\log_{3^n} x > \frac{1-(-k)^n}{1+k}\log_3(x^2-2).$$

3. P је полином четвртог степена такав да је $P(1) = P(-1)$ и $P(2) = P(-2)$. Доказати да је тада $P : R \to R$ парна функција, тј. да важи $P(x) = P(-x)$ за свако $x \in R$.

4. Наћи све аритметичке прогресије са разликом $d = 2$ код којих односи $S_{5n} : S_n$ збира првих $5n$ и првих n сабирака не зависе од n.

5. У сферу полупречника 3 cm уписана је купа максималне запремине. Наћи висину и полупречник основе купе.

А категорија

Први разред

1. Дат је конвексан петоугао $A_1A_2A_3A_4A_5$. Нека су B_1, B_2, B_3, B_4 средишта страница A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5 редом. Означимо са M и N средишта дужи B_2B_4 и B_1B_3. Одредити однос дужина дужи MN и A_1A_5.

2. Дат је полином

$$P(x) = x^{2000} - 2000x^{1999} + 2000x^{1998} - \cdots + 2000x^2 - 2000x + 2000.$$

Израчунати $P(1999)$.

3. Колико има парова (x, y) рационалних бројева тако да је $2x^2 + 5y^2 = 1$?

4. Дат је скуп A. Међу његовим подскуповима дефинишемо релацију $\sim$: $X,\ Y \subset A,\ X \sim Y \quad \Leftrightarrow \quad X \cap Y \neq \emptyset$. Испитати да ли је $\sim$ рефлексивна, симетрична, антисиметрична или транзитивна.

5. Нека је M унутрашња тачка паралелограма $ABCD$. Доказати да је $MA + MB + MC + MD$ мање од обима паралелограма.

Други разред

1. Решити једначину:

$$8\sqrt{12 + 16x - 16x^2} + 4x - 4x^2 = 33.$$

2. Нека су $a,\ b,\ c \in R$ за које важи $\dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{2} + c = 0$. Доказати да једначина $ax^2 + bx + c = 0$ има бар једно решење у интервалу $(0, 1)$.

3. Нека је $ABCD$ правоугаоник површине S и M тачка унутар њега. Доказати да је $S \leq AM \cdot CM + BM \cdot DM$.

4. Да ли постоје $x,\ y,\ z,\ t \in Q$ тако да важи:

$$(x + y\sqrt{2})^2 + (z + t\sqrt{2})^2 = 5 + 4\sqrt{2}?$$

5. На такмичењу се срело 7 ученика. Сваки од њих говори највише два језика. Доказати да међу њима постоје три тако да сва тројица говоре истим језиком или да никоја два од те тројице не говоре заједничким језиком.

Трећи разред

1. Нека су Ox, Oy, Oz три полуправе у простору са заједничком почетном тачком O. Ако за било који избор тачака A, B, C различитих од O, редом са полуправих Ox, Oy, Oz важи да је троугао ABC оштроугли, доказати да су полуправе међусобно нормалне.

2. Решити неједначину:

$$1 \leq |\cos x|^{\sqrt{2x-3}\cdot\log_{|\cos x|}\left(\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)}\right)}$$

3. P је полином четвртог степена такав да је $P(1) = P(-1)$ и $P(2) = P(-2)$. Доказати да је тада $P : R \to R$ парна функција, тј. да важи $P(x) = P(-x)$ за свако $x \in R$.

4. Задати су позитивни бројеви $x_1, \ldots, x_n$, који чине аритметичку прогресију са разликом d. Доказати да је

$$S = \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} + \frac{d}{x_1x_2} + \frac{d}{x_2x_3} + \cdots + \frac{d}{x_{n-1}x_n} + \\ + \frac{d^2}{x_1x_2x_3} + \cdots + \frac{d^2}{x_{n-2}x_{n-1}x_n} + \cdots + \frac{d^{n-1}}{x_1x_2\ldots x_n} = \frac{n}{x_1},$$

где су узети сви могући производи елемената $x_1, \ldots, x_n$.

5. Дат је троугао ABC са страницама $a > b > c$ и произвољна тачка O у унутрашњости тог троугла. Нека праве AO, BO, CO секу странице троугла ABC у тачкама P, Q и R. Доказати да је $OP + OQ + OR < a$.

Четврти разред

1. Решити неједначину:

$$1 \leq |\cos x|^{\sqrt{2x-3}\cdot\log_{|\cos x|}\left(\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)}\right)}$$

2. Реални полином P четвртог степена има двоструку нулу $x = 1$, а полином $Q(x) = P(x) + 4$ има двоструку нулу $x = -1$. Одредити полином P ако је $Q(0) = -2$.

3. За сваки природан број k постоји природан број n такав да је $n \cdot 2^k + 17$ потпун квадрат. Доказати.

4. На правој је изабрано 1001 различитих тачака $A_1, A_2, \ldots, A_{1001}$. Нека је M скуп средишта свих дужи A_iA_j, $1 \leq i < j \leq 1001$. Колико најмање тачака може да буде у скупу M?

5. Дат је троугао ABC са страницама $a > b > c$ и произвољна тачка O у унутрашњости тога троугла. Нека праве AO, BO, CO секу странице троугла ABC у тачкама P, Q и R. Доказати да је $OP + OQ + OR < a$.

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ 20.03.1999.

Б категорија

Први разред

1. Дат је конвексан шестоугао $ABCDEF$. Свака од дијагонала AD и BE дели шестоугао на два дела једнаких површина. Доказати да је четвороугао $BDEA$ трапез.

2. Доказати да не постоји полином $P(x)$ са целобројним коефицијентима за који је $P(a) = b$, $P(b) = c$, $P(c) = a$, где су a, b, c три различита цела броја.

3. Ако су a, b, c дужине страница троугла, доказати да је израз

$$(b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2$$

негативан.

4. Да ли постоје природни бројеви m и n такви да су и $m^2 + n$ и $n^2 + m$ квадрати целих бројева? (Одговор образложити!)

5. Ако је $ad - bc = 1$, доказати да је $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + cd \neq 1$.

Други разред

1. Ако су AA_1, BB_1 и CC_1 висине оштроуглог троугла ABC, а A_2, B_2, C_2 тачке у којима праве AA_1, BB_1, CC_1 секу круг описан око троугла ABC, доказати да је

$$\frac{AA_2}{AA_1}+\frac{BB_2}{BB_1}+\frac{CC_2}{CC_1}=4.$$

2. Нека су $a \geq b \geq c > 0$ реални бројеви, такви да $\sqrt{3a(b-c)}-\sqrt{c(a-b)}=0$. Ако су x, y, z, p реални бројеви, одредити ком од скупова N, $Z \setminus N$, $Q \setminus Z$, $R \setminus Q$ или $C \setminus R$ припада вредност израза:

$$f(x,y,z,p)=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}p-i\sqrt{3}\right)\left(-\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}z-iy\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)(2+ip)\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y-iz\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{y}{2}-ix\right)\right].$$

3. Решити неједначину

$$2\cdot 125^x-3\cdot 50^x-9\cdot 20^x+10\cdot 8^x\leq 0.$$

4. Да ли је број

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+1}{\sqrt{10}-\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$$

рационалан или ирационалан? (Образложити одговор!)

5. Наћи сва решења једначине

$$x^4-x^3-10x^2+2x+4=0.$$

Трећи разред

1. Одредити странице направоуглог троугла чија је површина цео број, а дужине његових страница су три узастопна најмања могућа парна броја.

2. Дата је права купа полупречника основе R и висине $H=2R$. Одредити полупречник основе и висину правог ваљка уписаног у ту купу који има највећу површину омотача.

3. Наћи геометријско место тачака симетричних жижи параболе $y^2 = px$ у односу на све тангенте параболе.

4. Доказати да природан број чији је збир цифара једнак 5 не може бити потпун квадрат.

5. Одредити све вредности параметра $a \in R$ за које су једначине

$$a(2a-1)\sin^3 x + 3\cos^3 x - 2a^2 \sin x = 0$$

и

$$\log_{1/2}(3\operatorname{tg} x - 1) - \log_2(3\operatorname{tg} x + 1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(5 - \operatorname{tg} x) = 1$$

еквивалентне.

Четврти разред

1. Наћи све полиноме P такве да за сваки реалан број x важи

$$P(x^2+1) = P(x)^2 + 1 \text{ и } P(0) = 0.$$

2. Доказати да за $x > 0$ важи: $\operatorname{arctg} x < x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5}$.

3. Дат је низ комплексних бројева $a_1,\ a_2, \dots, a_{3^k}$ који су сви решења једначине $x^3 = 1$. Од датог низа се у сваком кораку формира нови низ $a_1a_2,\ a_2a_3, \dots, a_{3^k}a_1$. Доказати да се после неколико корака овим поступком добија полазни низ.

4. Колико решења у интервалу $[0,1]$ има једначина

$$8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1) = 1?$$

5. Одредити све вредности параметра $a \in R$ за које су једначине

$$a(2a-1)\sin^3 x + 3\cos^3 x - 2a^2 \sin x = 0$$

и

$$\log_{1/2}(3\operatorname{tg} x - 1) - \log_2(3\operatorname{tg} x + 1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(5 - \operatorname{tg} x) = 1$$

еквивалентне.

А категорија

Први разред

1. Дат је конвексан шестоугао $ABCDEF$. Свака од дијагонала AD и BE дели шестоугао на два дела једнаких површина. Доказати да је четвороугао $BDEA$ трапез.

2. Дат је скуп $A \subset \{1, 2, \ldots, 100\}$, који садржи 10 елемената. Доказати да постоје два дисјунктна и непразна подскупа S и T скупа A тако да је збир елемената скупа S једнак збиру елемената скупа T.

3. Нека је m дати цео број. Доказати да постоји бар један пар (x, y) целих бројева тако да важи:

$$2x^2 + 11xy + 12y^2 + 4x + 5y + 6 = 2m.$$

4. У равни су дате кружнице $k_1, \ k_2, \ldots, k_{1999}$. Кружнице k_1 и k_2 се споља додирују у тачки A_1, k_2 и k_3 у тачки A_2, . . . , k_{1999} и k_1 у тачки A_{1999}. Нека је $M_1 \in k_1$ произвољна тачка, M_2 пресечна тачка праве A_1M_1 и k_2, M_3 пресечна тачка праве A_2M_2 и k_3, итд., и M_{2000} пресечна тачка праве $A_{1999}M_{1999}$ и кружнице k_1. Доказати да су тачке M_1 и M_{2000} дијаметрално супротне на k_1.

5. Природан број $n \geq 2$ дели се, редом, свим природним бројевима који су од њега мањи и записују се сви добијени остаци. Наћи све n за које је збир свих различитих остатака једнак n.

Други разред

1. Ако су AA_1, BB_1 и CC_1 висине оштроуглог троугла ABC, а A_2, B_2, C_2 тачке у којима праве AA_1, BB_1, CC_1 секу круг описан око троугла ABC, доказати да је

$$\frac{AA_2}{AA_1} + \frac{BB_2}{BB_1} + \frac{CC_2}{CC_1} = 4.$$

2. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви, $a \geq b \geq c$ тако да важи

$$\sqrt{3a(b-c)} - \sqrt{c(a-b)} = 0.$$

Ако су x, y, z, p реални бројеви, одредити ком од скупова N, $Z \setminus N$, $Q \setminus Z$, $R \setminus Q$ или $C \setminus R$ припада вредност израза:

$$f(x,y,z,p) = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}p - i\sqrt{3}\right)\left(-\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}z - iy\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)(2+ip)\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y - iz\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{y}{2} - ix\right)\right].$$

3. На табли је написан израз $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Два ученика играју следећу игру: први избрише произвољан од параметара a, b и c и замени га неким реалним бројем. Затим други то исто уради са неким од преосталих параметара. На крају први замени последњи параметар реалним бројем. Ако добијени полином нема позитивних корена онда је победио ученик који први игра. У супротном игру добија други ученик. Који од ученика може да победи и како треба да игра?

4. Нека су f и g различити квадратни триноми са најстаријим коефицијентом 1. Ако је $f(20) + f(3) + f(1999) = g(20) + g(3) + g(1999)$, наћи све $x \in R$ за које је $f(x) = g(x)$.

5. Математичар се изгубио у шуми која покрива област облика бесконачне траке ширине 1 km. Доказати да математичар може изабрати такав начин кретања који ће га извести из шуме после највише $2\sqrt{2}$ km пређеног пута.

Трећи разред

1. У тетраедру $ABCD$, ивица AC је нормална на BC, а AD на BD. Доказати да је косинус угла између правих AC и BD мањи од $\frac{CD}{AB}$.

2. Нека су z_1, z_2 комплексни бројеви који задовољавају услове $|z_1 - z_2| = 2$ и $z_1 \cdot z_2 = 1$. Доказати да је четвороугао $ABCD$ чија темена имају комплексне координате -1, z_1, 1, z_2 једнакокраки трапез.

3. Колико се највише једнакокраких крстића површине 5 може изрезати из табле 6×6?

4. У равни је задато n вертикалних и n хоризонталних правих које се секу у n^2 тачака. Праве су обојене плавом, црвеном или зеленом бојом. Нека је пресек две плаве праве плава тачка, две црвене праве црвена тачка, две зелене праве зелена тачка, пресек плаве и црвене праве зелена тачка, црвене и зелене праве плава тачка а зелене и плаве праве црвена тачка. На тај начин је добијено n^2 обојених тачака. Колико различитих бојења n^2 тачака добијамо различитим избором бојења правих?

5. Одредити све вредности параметра $a \in R$ за које су једначине

$$a(2a-1)\sin^3 x + 3\cos^3 x - 2a^2 \sin x = 0$$

и

$$\log_{1/2}(3\operatorname{tg} x - 1) - \log_2(3\operatorname{tg} x + 1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(5 - \operatorname{tg} x) = 1$$

еквивалентне.

Четврти разред

1. Нека је ABC троугао са одговарајућим дужинама страница a, b, c. Доказати да у простору постоји тачка D таква да је $DA = \sqrt{bc}$, $DB = \sqrt{ca}$, $DC = \sqrt{ab}$.

2. Нека $S(n)$ означава збир свих природних делилаца природног броја n (укључујући 1 и n). Нека је n_1, n_2, $n_3, \ldots$ строго растући бесконачан низ природних бројева такав да је за свако $i \in N$: $S(n_i) - n_i = m$. Одредити m.

3. Дат је низ комплексних бројева a_1, $a_2, \ldots, a_{3^k}$ који су сви решења једначине $x^3 = 1$. Од датог низа се у сваком кораку формира нови низ a_1a_2, $a_2a_3, \ldots, a_{3^k}a_1$. Доказати да се после неколико корака овим поступком добија полазни низ.

4. У равни је задато n вертикалних и n хоризонталних правих које се секу у n^2 тачака. Праве су обојене плавом, црвеном или зеленом бојом. Нека је пресек две плаве праве плава тачка, две црвене праве црвена тачка, две зелене праве зелена тачка, пресек плаве и црвене праве зелена тачка, црвене и зелене праве плава тачка а зелене и плаве праве црвена тачка. На тај начин је добијено n^2 обојених тачака. Колико различитих бојења n^2 тачака добијамо различитим избором бојења правих?

5. Колико се највише једнакокраких крстића површине 5 може изрезати из табле 6×6?

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА

Б категорија

Први разред

1.1. Заменом $-x$ уместо x у дату релацију налазимо $2f(-x)+f(x)=-2x-3$. Како је $f(-x)=2x-3-2f(x)$, из $2(2x-3-2f(x))+f(x)=-2x-3$ налазимо $f(x)=2x-1$.

1.2. Дати број је дељив са 3, а није са 9 (слично се закључује и да је дељив са 5, а није са 25) па не може бити m-ти степен неког природног броја n за $m>1$.

1.3. $5\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2-5\cdot4\cdot3\cdot2=480$.

1.4. Из $-1999\le|x|-1\le1999$, тј. $-1998\le|x|\le2000$, односно $-2000\le x\le2000$ се види да дату неједначину задовољава 4001 цео број.

1.5. Означимо 19000098 са a. Тада је дати број може записати

$$\begin{aligned}a^2+a^2(a+1)^2+(a+1)^2&=a^2+a^4+2a^3+a^2+a^2+2a+1\\&=a^4+2a^3+3a^2+2a+1=(a^2+a+1)^2\end{aligned}$$

Други разред

2.1. $x_1+x_2=1-3a$, $x_1x_2=a$; $x_1+x_2=1-3x_1x_2$, $x_1+3x_1x_2=1-x_2$, $x_1(1+3x_2)=1-x_2$, тј. $x_1=\dfrac{1-x_2}{1+3x_2}$ ако је $x_1>0$, то је $x_2\in(-\dfrac{1}{3},1)$.

2.2. Претпоставимо супротно.

$$\begin{aligned}&uzi+u+z-i=0\Leftrightarrow\\&u(zi+1)-i(zi+1)=0\Leftrightarrow\\&(zi+1)(u-i)=0\Leftrightarrow\\&i(z-i)(u-i)=0\Leftrightarrow z=i \text{ или } u=i.\end{aligned}$$

2.3. Из сличности троуглова AFC и AEB имамо $\dfrac{CF}{BE}=\dfrac{AF}{AE}$, а из сличности троуглова FDC и EDB имамо $\dfrac{CF}{BE}=\dfrac{FD}{DE}$, па налазимо $\dfrac{AF}{AE}=\dfrac{FD}{DE}$, тј. $AE\cdot FD=AF\cdot DE$.

2.4. Уочимо да је $(\sqrt{3} \pm \sqrt{2})^2 = 5 \pm 2\sqrt{6}$. Дакле

$$m = \left(\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \right)^n = \left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2}}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} \right)^n = 2^n (\sqrt{2})^n.$$

Број m је рационалан ако и само ако је n паран број.

2.5. Дата неједнакост је еквивалентна са

$$\frac{x + y}{1 + xy} < \frac{x(1 + y) + y(1 + x)}{(1 + x)(1 + y)}, \text{ тј.}$$

$$(x + y)(1 + x)(1 + y) < (1 + xy)(x + xy + y + xy),$$

односно

$$x + y + x^2 + xy + xy + y^2 + x^2 y + xy^2 < x + y + 2xy + x^2 y + xy^2 + 2x^2 y^2,$$

тј. $x^2 + y^2 < 2x^2 y^2$. Последња неједнакост је тачна јер за $x > 1$, $y > 1$ важи $x^2 < x^2 y^2$ и $y^2 < x^2 y^2$.

Трећи разред

3.1. Површина троугла ABC може се израчунати по Хероновој формули:

$$P = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} = 66.$$

С друге стране, ако је O центар полукруга

$$P = P_{\triangle BOA} + P_{\triangle COA} = \frac{c \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} = 12r,$$

па добијамо $r = \dfrac{P}{12} = \dfrac{11}{2}$.

3.2. Висине основе су $h_1 = \dfrac{90}{10} = 9$ и $h_2 = \dfrac{90}{18} = 5$, а апотеме пирамиде $h_a = \sqrt{H^2 + \left(\dfrac{h_1}{2}\right)^2} = 7,5$ и $h_b = \sqrt{H^2 + \left(\dfrac{h_2}{2}\right)^2} = 6,5$, па је површина омотача $M = 2\left(\dfrac{ah_a}{2} + \dfrac{bh_b}{2}\right) = 192$.

3.3. Неједначина има смисла за $\pi^2-x^2 \geq 0$, $\sin x > 0$, $\cos x > 0$, $\operatorname{tg} x > 0$, $\operatorname{ctg} x > 0$, $\operatorname{tg} x \neq 1$, $\sin x \neq 1$, тј. за $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. За ове x неједначина је еквивалентна са

$$\sqrt{\pi^2 - x^2}\log_{\operatorname{tg} x} 4\sin x\cos x \geq \log_{\sin x} 1 = 0,$$

тј. $\log_{\operatorname{tg} x} 2\sin 2x \geq 0$. Посматрајмо два случаја:

(1) $x \in (0, \frac{\pi}{4})$, $\operatorname{tg} x < 1$, тада из $2\sin 2x \leq 1$ налазимо $0 < 2x \leq \frac{\pi}{6}$, тј. $0 < x \leq \frac{\pi}{12}$.

(2) $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, $\operatorname{tg} x > 1$, из $2\sin 2x \geq 1$ налазимо $\frac{\pi}{6} \leq 2x \leq \frac{5\pi}{6}$, односно $\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{5\pi}{12}$, па су решења у овом случају $\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{5\pi}{12}$.

Дакле, решења дате неједначине су сви реални бројеви за које важи $x \in \left(0, \frac{\pi}{12}\right] \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}\right]$.

3.4. Нека су R_1 и R_2 полупречници основа зарубљене купе. Како је у ту купу уписана сфера, то је четвороугао добијен у осном пресеку тангентни, па важи да су збирови његових наспрамних страница једнаки, тј. $2R_1+2R_2 = 2s$ (s је изводница зарубљене купе). Дакле, $M = (R_1+R_2)\pi s = \pi s^2 = \frac{4\pi r^2}{\sin^2\alpha}$, јер је $s = \frac{2r}{\sin\alpha}$.

3.5.

$$\begin{aligned}\cos(-2204^0) &= \cos 2204^0 = \cos(44^0)\\ \sin(2656^0) &= \sin 136^0 = \sin(180^0 - 136^0)\\ &= \sin 44^0 = \cos 46^0 < \cos 44^0\end{aligned}$$

$\Rightarrow\ \cos(-2204^0) > \sin 2656^0$.

Четврти разред

4.1. Како је $x^3 + ax + 1 = (x-b)(x-c)^2 = x^3 - (b+2c)x^2 + c(2b+c)x - bc^2$, то је $b + 2c = 0$, $c(2b+c) = a$ и $-bc^2 = 1$. Заменом $b = -2c$ у трећу једначину налазимо $2c^3 = 1$, одакле $c = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ и $b = -\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$ $(c,\ b \in R)$, па из друге једначине налазимо $a = -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

4.2. Полупречник првог круга је $r_1 = \frac{a}{6}\sqrt{3}$. Други троугао је сличан првом (коефицијент сличности је $\frac{1}{2}$), па је $r_2 = \frac{1}{2}r_1 = \frac{a}{12}\sqrt{3}$ и, даље: $r_3 = \frac{1}{2}r_2$, $r_4 = \frac{1}{2}r_3, \ldots$. Збир површина свих кругова је

$$r_1^2\pi + r_2^2\pi + r_3^2\pi + \cdots = \pi r_1^2(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots) = \frac{\pi r_1^2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\pi a^2}{9}.$$

4.3. Из $y = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x^2 - 4x + 3}$ добијамо $x^2(y-1) + x(-4y+5) + 3y - 7 = 0$. Дискриминанта ове квадратне једначине по x $(y \neq 1)$ мора бити ненегативна. Из $D = 4y^2 - 3$ налазимо $|y| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Дакле, област вредности дате функције је $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$.

4.4.

$$\begin{aligned}
1 - \cos\frac{10\pi}{9} - i\sin\frac{10\pi}{9} &= 2\sin^2\frac{5\pi}{9} - 2i\sin\frac{5\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9} \\
&= 2\sin\frac{5\pi}{9}(\sin\frac{5\pi}{9} - i\cos\frac{5\pi}{9}) \\
&= 2\sin\frac{5\pi}{9}\left(\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{9}) - i\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{9})\right) \\
&= 2\sin\frac{5\pi}{9}\left(\cos(-\frac{\pi}{18}) - i\sin(-\frac{\pi}{18})\right) \\
&= 2\sin\frac{5\pi}{9}\left(\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18}\right).
\end{aligned}$$

Дакле, $|z| = 2\sin\frac{5\pi}{9}$, $\arg z = \frac{\pi}{18}$.

4.5. Налазимо

$$f_3(x) = f_2(f_1(x)) = 1 - x, \quad f_4(x) = f_3(f_2(x)) = \frac{x}{x-1},$$

$$f_5(x) = f_4(f_3(x)) = \frac{x-1}{x}, \quad f_6(x) = f_5(f_4(x)) = \frac{1}{x},$$

$$f_7(x) = f_6(f_5(x)) = \frac{x}{x-1} = f_1(x), \quad f_8(x) = f_7(f_6(x)) = \frac{1}{1-x} = f_2(x).$$

Закључујемо да је низ $(f_n(x))$ периодичан са периодом шест, па је

$$f_{2000}(x) = f_2(x) = \frac{1}{1-x}.$$

А категорија
Први разред

1.1. Тражимо број разбијања скупа са шест елемената на скупове од бар два елемента. Ово се може извршити на следеће начине:

(а) $2+2+2$: за први двочлани подскуп има $\dfrac{6\cdot 5}{2}=15$ начина, за други још $\dfrac{4\cdot 3}{2}=6$ начина; укупно $15\cdot 6=90$ начина. Пошто су скупови равноправни, број подела је $\dfrac{90}{3!}=\dfrac{90}{6}=15$.

(б) $3+3$: за први трочлани подскуп има $\dfrac{6\cdot 5\cdot 4}{3!}=20$ начина; пошто су скупови равноправни, број подела је $\dfrac{20}{2!}=10$.

(в) $4+2$; двоелементни подскуп се може изабрати на $\dfrac{6\cdot 5}{2}=15$ начина, што је и укупан број начина.

(г) 6; 1 начин.

Укупан број релација еквиваленције је, дакле, $15+10+15+1=41$.

1.2. $6x+11y=6x+42y-31y=6(x+7y)-31y$. $31\mid 6x+11y \Rightarrow 31\mid 6(x+7y) \Rightarrow 31\mid x+7y$ јер је $(31,6)=1$.

1.3. $8n+2=(2x+1)^2+(2y+1)^2 \Rightarrow 4n+1=(x+y+1)^2+(x-y)^2$.

$$4n+1=(2a)^2+(2b+1)^2 \Rightarrow 8n+2=\begin{cases}(2a+2b+1)^2+(2b-2a+1)^2, & b\geq a\\ (2a+2b+1)^2+(2a-2b+1)^2, & b<a.\end{cases}$$

1.4. Укупан број кутија је $mk+1$ (овде је за сваку од напуњених мањих кутија рачунато по k кутија стављених у њу и једна, прва кутија од које се пошло). Ако је m кутија напуњено, празних има $mk+1-m$ кутија.

1.5. 1) $a<1$, $x\geq a$, $x-a+(1-a)=1$, $x=2a$. Ако је $x<a$, тада $a-x+(1-a)=1$, $x=0$. Дакле мора бити $2a\geq a$ и $0<a$ и $0\neq 2a$. Значи $a\in(0,1)$.

2) $a\geq 1$, $x\geq a$, $(x-a)+(a-1)=1$, $x=2$. Ако је $a>x$, тада $a-x+a-1=1$, $2a-2=x$, па у овом случају једначина има два решења за $a\in[1,2)$.

Други разред

2.1. Не може. Ван једног мањег круга остају бар две дијаметрално супротне тачке већег круга. Њих је немогуће прекрити другим мањим кругом.

2.2. Нека је $p^{2k-1} \mid a-b$, $p^{2k} \nmid a-b$, p-прост. Тада $p^k \mid a$ или $p^k \mid b$ (јер $a-b \mid ab$).
1) $p^k \mid a \Rightarrow p^k \mid a-(a-b)=b \Rightarrow p \mid c \Rightarrow (a,b,c) \neq 1$. Контрадикција.
2) $p^k \mid b \Rightarrow p^k \mid b+(a-b)=a \Rightarrow p \mid c \Rightarrow (a,b,c) \neq 1$. Контрадикција.

2.3.
$$\left(4x^{100}+\frac{1}{4x^{100}}\right)\cdot\left(y^{100}+\frac{1}{y^{100}}\right)=4.$$
Како је $a+\frac{1}{a} \geq 2$ и $a+\frac{1}{a}=2 \Leftrightarrow a=1$ важи да је $4x^{100}+\frac{1}{4x^{100}}=2$ и $y^{100}+\frac{1}{y^{100}}=2$. $x^{100}=\frac{1}{4}$ и $y^{100}=1$. $x=\pm\frac{1}{\sqrt[50]{2}}$ и $y=\pm1$ (укупно 4 решења).

2.4. Нека је X први, а Y други број. Лако се види да је $\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}=1$, па тврђење важи.

2.5. Познато је да тачке O, T, H припадају правој која се назива Ојлеровом правом троугла, и да при томе важи $OH=3\cdot OT$. Међутим, тежиште T троугла припада унутрашњости тог троугла, а самим тим и унутрашњости круга описаног око тог троугла. Дакле, $OT<r$. Следи да је $OH=3\cdot OT<3r$.

Трећи разред

3.1. Имамо
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\log_3((2\sin x-\frac{1}{3})\cos x)=\frac{1}{3}+\log_3(-\cos x)\\
&\frac{1}{3}\log_3(-\cos x)+\frac{1}{3}\log_3(\frac{1}{3}-2\sin x)=\frac{1}{3}+\log_3(-\cos x)\\
&\log_3(\frac{1}{3}-2\sin x)=1+2\log_3(-\cos x)\\
&\log_3(\frac{1}{3}-2\sin x)=\log_3 3\cos^2 x,
\end{aligned}$$
уз услове $\frac{1}{3}-2\sin x>0$, $\cos x<0$. Дакле из једначине $\frac{1}{3}-2\sin x=3(1-\sin^2 x)$ сменом $\sin x=t$ добијамо $t_{1,2}=\frac{6\pm6\cdot3}{18}$. Из услова $|\sin x| \leq$

1 закључујемо: $t_1 = -\frac{2}{3}$. С обзиром на постављене услове имамо $x = -\arcsin(-\frac{2}{3}) + (2n+1)\pi$, односно $x = \arcsin(\frac{2}{3}) + (2n+1)\pi$, $n \in Z$.

3.2. $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$, $\frac{3}{\pi} > \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 18 > \pi^2$. Дакле, $\operatorname{tg}\frac{3}{\pi} > \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$.

3.3. 1) $n \leq 8$, $N = 2^8 + 2^{11} + 2^n = 2^n(1 + 2^{8-n} + 2^{11-n})$ овај број је производ парног и непарног броја и да би био потпун квадрат, n треба да буде парно. $n = 2, 4, 6, 8$ не задовољавају услове.

2) $n = 9$, $N = 2^8(1 + 2^3 + 2) = 2^8 \cdot 11$ – није квадрат.

3) $n \geq 10$, $N = 2^8(1 + 2^3 + 2^{n-8}) = 2^8(9 + 2^{n-8}) = (2^4)^2(9 + 2^{n-8})$. $9 + 2^{n-8}$ мора бити квадрат и то непарног броја, рецимо $2k+1$. $9+2^{n-8} = 4k^2+4k+1$, $k \in N$.

$$2^{n-8} = 4(k^2 + k - 2) = 2^2(k-1)(k+2)$$
$$2^{n-10} = (k-1)(k+2)$$

$k-1$, $k+2$ су различите парности па је $k - 1 = 1$, тј. $k = 2$. $2^{n-10} = 4$ и $n = 12$.

3.4. $p^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$, $q^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$. $p^2 - q^2 = 4ab\cos\alpha$, $\frac{p^2-q^2}{4} = ab\cos\alpha/\operatorname{tg}\alpha$, $\frac{p^2-q^2}{4}\operatorname{tg}\alpha = ab\sin\alpha = S$.

3.5. Дужина пројекције тог полигона на праву која садржи страницу a_k је строго мања од полуобима тог полигона p. Закључујемо сада,

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{d_1} + \cdots + \frac{a_n}{d_n} &> \frac{a_1}{p} + \cdots + \frac{a_n}{p} = \frac{1}{p}(a_1 + \cdots + a_n)\\ &= \frac{2}{a_1 + \cdots + a_n}(a_1 + \cdots + a_n) = 2.\end{aligned}$$

Четврти разред

4.1. Круг полупречника 4 см може да прекрије највише лук над тетивом дужине 8 см највећег круга. Слично, круг полупречника 3 см може да прекрије највише лук над тетивом дужине 6 см. Одатле добијамо да дијаметар фигуре коју треба да прекрије круг полупречника 2 см износи 10 см.

4.2. Како су то три узастопна члана аритметичке прогресије важи

$$\log_2(3^x - 1) + \log_2(3 - 3^x) = 2\log_4(9 + 9^x - 7 \cdot 3^x)$$

уз услове $x > 0,\ x < 1,\ 9 + 9^x - 7 \cdot 3^x > 0$.

$$\begin{aligned} \log_2(3^x - 1)(3 - 3^x) &= \log_2(9 + 9^x - 7 \cdot 3^x), \quad 0 < x < 1, \\ (3^x - 1)(3 - 3^x) &= (9 + 9^x - 7 \cdot 3^x), \quad 0 < x < 1. \end{aligned}$$

$3^x = t,\ 2t^2 - 11t + 12 = 0,\ t_1 = 4,\ t_2 = \dfrac{3}{2}$. $3^x = 4$ или $3^x = \dfrac{3}{2}$. Лако се провери да је $x = \log_3 \frac{3}{2} = 1 - \log_3 2$ једино решење задатка.

4.3. Доказ иде математичком индукцијом са кораком 2.

1) За $n = 1,\ 1 = 1^2$, за $n = 2,\ 1 + 3 = 4 = 2^2$.

2) Претпоставимо да важи за $n = 2k$

$$1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{2k(2k+1)}{2} = 2^2 + 4^2 + \cdots + (2k)^2.$$

3) $n = 2k \Rightarrow\ n = 2k + 2$.

$$\begin{aligned} &1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{2k(2k+1)}{2} + \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} + \frac{(2k+2)(2k+3)}{2} \\ &= (2^2 + 4^2 + \cdots + (2k)^2) + 4k^2 + 8k + 4 \\ &= 2^2 + 4^2 + \cdots + (2k)^2 + (2k+2)^2 \end{aligned}$$

За $n = 2k - 1$

$$1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{(2k-1)2k}{2} = 1^2 + 3^2 + \cdots + (2k-1)^2.$$

$n = 2k - 1\ \Rightarrow\ n = 2k + 1$

$$\begin{aligned} &1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{(2k-1)2k}{2} + \frac{2k(2k+1)}{2} + \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} \\ &= (1^2 + 3^2 + \cdots + (2k-1)^2) + 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 1^2 + 3^2 + \cdots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 \end{aligned}$$

4.4. Покажимо да је бар један од 6 узастопних природних бројева узајамно прост са осталима: ту се налазе 3 непарна броја, од којих је тачно један

дељив са 3 и највише један дељив са 5. Дакле постоји број који није дељив са 2, 3 и 5. Он је узајамно прост са осталима (уколико би имао заједнички са неким од уочених бројева, тај заједнички би морао да дели и њихову разлику која није већа од 5. Контрадикција.)
Нека су уочени бројеви $x-2,\ x-1,\ x,\ x+1,\ x+2,\ x+3,\ x \geq 3$. Онај узајамно прост са осталим мора да буде пети степен, а такође и производ преосталих 5 мора да буде пети степен. Производ тих 5 бројева је бар

$$(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2) = P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x^2 + 4x,$$

а највише је

$$Q(x) = (x-1)x(x+1)(x+2)(x+3) = x^5 + 5x^4 + 5x^3 + x^2 - 6x.$$

Како за $x \geq 3$ важи

$$(x+1)^5 > Q(x) > P(x) > (x-1)^5$$

то тај производ мора да буде x^5 да би био пети степен што је немогуће.

4.5. Види решење задатка 3.5.

Означимо са a број 1999. Тада је

$$\begin{aligned} P(1999) = P(a) &= a^{2000} - (a+1)a^{1999} + \cdots - (a+1)a + a + 1 \\ &= a^{2000} - a^{2000} - a^{1999} + a^{1999} + \cdots + a^2 - a^2 - a + a + 1 = 1. \end{aligned}$$

1.3. а) $\triangle BKC \cong \triangle CLD, \Rightarrow \angle BSL = \angle CSK = 180^0 - \angle SCK - \angle SKC = 180^0 - \angle LCD - \angle DLC = 90^0$. $\angle BAL + \angle BSL = 180^0$.
б) $\angle ASB = \angle ALB$ (јер је четвороугао $ABSL$ тетивни) $\angle ALB = \angle CKB = \angle KBA$. Следи $AS = AB$.

1.4. 1) $A = \emptyset$. Тада је $\sim$ рефлексивна, симетрична, антисиметрична и транзитивна.
2) $A \neq \emptyset$. Тада $\sim$ није ни рефлексивна, ни антисиметрична, ни транзитивна, а јесте симетрична.

1.5. Једино решење је $p = 5$. $p = 5k \pm 1,\ 5 \mid 4p^2 + 1$. $p = 5k \pm 2,\ 5 \mid 6p^2 + 1$.

Други разред

2.1. Прво приметимо да је 1999 прост број. Ако за неке целе бројеве m и n важи $m^3 - n^3 = 1999$, онда је

$$m - n = 1,\ m^2 + mn + n^2 = 1999 \text{ или}$$
$$m - n = 1999,\ m^2 + mn + n^2 = 1.$$

Приметимо да случај $m - n = -1,\ m^2 + mn + n^2 = -1999$ и $m - n = -1999,\ m^2 + mn + n^2 = -1$ нису могући јер $m^3 > n^3 \Leftrightarrow m > n$.
У првом случају добијамо $m = n+1$ и $(n+1)^2 + (n+1)n + n^2 = 1999$ одакле следи $n^2 + n - 666 = 0$, што је контрадикција јер се лако доказује да добијена квадратна једначина нема целих решења. Слично се проверава да и други случај доводи до контрадикције.

2.2. Разликујемо два случаја: 1) $1 \leq x \leq 2: \ \ y = -x^2 + 3x - 1$. На овом интервалу функција достиже максимум у $x_0 = \dfrac{3}{2}$ и износи $y_{max} = \dfrac{5}{4}$, а минимум за $x = 1$ и $x = 2$ износи $y_{min} = 1$.
2) $-2 \leq x \leq 1: \ \ y = -x^2 - 3x + 5$. Максимум се достиже за $x_0 = -\dfrac{3}{2}$ и износи $y_{max} = \dfrac{29}{4}$. Минимум је мања од вредности у крајевима, дакле за $x = 1$, и износи $y_{min} = 1$.
Одговор. Максимум функције на $[-2, 2]$ износи $\dfrac{29}{4}$, а минимум 1.

2.3. За свако $x \in R$ важи: $x^2 - x + 1 > 0$. $-9x^2 + 9x - 9 < 3x^2 + px - 6 < 6x^2 - 6x + 6$.
(1) $-12x^2 + (9-p)x - 3 < 0,\ D = (21-p)(-3-p) < 0,\ -3 < p < 21$.
(2) $3x^2 + (-6-p)x + 12 > 0,\ D = (-6+p)(p+18),\ -18 < p < 6$.
Одговор. $-3 < p < 6$.

2.4. $x^2 - 1 \geq 0,\ x > 0 \ \Rightarrow\ x > 1$. Квадрирамо:

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 4x(x^2 - 1)$$
$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1 = 0$$
$$(x^2 - 2x - 1)^2 = 0$$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$, због $x > 0$ решење је $x = 1 + \sqrt{2}$.

2.5. Из сличности троуглова CZX и CAA_1 имамо: $ZX : AA_1 = CX : CA_1$. Слично, из сличности троуглова BXY и BA_1A имамо: $XY : AA_1 = BX :$

BA_1. Из услова задатка знамо и $BA_1 = A_1C$ и $BX + XC = BC$.

$$ZX + XY = AA_1 \cdot \frac{CX}{CA_1} + AA_1 \cdot \frac{BX}{BA_1} = \frac{AA_1}{BA_1}(CX + XB)$$
$$= AA_1 \cdot \frac{BC}{BA_1} = 2AA_1.$$

Трећи разред

3.1. Услови су $|\cos x| > 0$, $|\cos x| \neq 1$, $2x - 3 \geq 0$, $1 - 2\cos^2 x > 0$. Дакле $x \geq \frac{3}{2}$ и $0 < |\cos x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Тада је неједначина еквивалентна услову

$$\sqrt{2x-3} \cdot \log_{|\cos x|}\left(\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)}\right) \leq 0.$$

Приметимо да је $x = \frac{3}{2}$ једно решење. За $x > \frac{3}{2}$, $0 < |\cos x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$, једначина се своди на

$$\log_{|\cos x|}\left(\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)}\right) \leq 0,$$

односно $\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)} \geq 1$. Како је $1-2\cos^2 x > 0$ имамо $1+2\sqrt{3}|\sin x| \geq 8 - 16\cos^2 x$. Уз смену $|\sin x| = z$, долазимо до неједначине $16z^2 - 2\sqrt{3}z - 9 \leq 0$. Из последње релације добијамо $-\frac{3\sqrt{3}}{8} \leq |\sin x| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, тј. $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Заједно са условом $0 < |\cos x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ добијамо коначно решење: $x = \frac{3}{2}$; $\frac{\pi}{4} + \pi k < x \leq \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in N$; $\frac{2\pi}{3} + \pi l \leq x < \frac{3\pi}{4} + \pi l$, $l \in N_0$.

3.2. Означимо са B врх купе. Нека је M пресек изводнице BA и горње основе ваљка. Означимо са D и H пројекције тачке B на горњу основу ваљка и на основу купе. Нека је P пројекција тачке M на основу купе. $\pi MB \cdot MD = 2\pi MD \cdot MP \;\Rightarrow\; BM = 2MP$ $(s_1 = 2h_1)$. $BM = \frac{BD \cdot s}{BH}$, $MP = h_1$, $BH = h$, $BD = h - h_1$. $\frac{(h-h_1)s}{h} = 2h_1 \;\Rightarrow\; h_1 = \frac{hs}{s+2h}$.

3.3. $\vec{u}\times\vec{v}=(a\vec{x}+b\vec{y})\times(c\vec{x}+d\vec{y})=ad\vec{x}\times\vec{y}-bc\vec{x}\times\vec{y}=(ad-bc)(\vec{x}\times\vec{y})$.

3.4.

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}&=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}\\&=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\\&=\frac{4(\sin\alpha+\sin\beta)}{4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}+2(\cos\alpha+\cos\beta)}=\frac{4a}{a^2+b^2+2b},\end{aligned}$$

jep je $a^2+b^2=2+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=2+2\cos(\alpha-\beta)=4\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

3.5. $D=a(1-b),\ D_x=1-2a,\ D_y=1-b,\ D_z=4a-2ab-1$.

1) $a\neq 0,\ b\neq 1$ јединствено : $x=\dfrac{D_x}{D},\ y=\dfrac{D_y}{D},\ z=\dfrac{D_z}{D}$.

2) $a=0$ нема решења.

3) $b=1,\ a\neq\dfrac{1}{2}$ нема решења.

4) $b=1,\ a=\dfrac{1}{2}$, решење $(2-\alpha,2,\alpha)$ $\alpha\in R$.

Четврти разред

4.1. Види решење задатка 3.1.

4.2.

$$\log_3 x(1-k+k^2-\cdots+(-k)^{n-1})>\frac{1-k^n}{1+k}\log_3(x^2-2)$$
$$\log_3 x<\log_3(x^2-2)$$

$x<x^2-2,\ x^2-x-2>0,\ x<-1$ или $x>2$.

Одговор: $x>2$.

4.3. $P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$.

$$P(1)=a+b+c+d+e=P(-1)=a-b+c-d+e$$
$$P(2)=16a+8b+4c+2d+e=P(-2)=16a-8b+4c-2d+e$$

$$\begin{cases} P(1) - P(-1) = 2b + 2d = 0 \\ P(2) - P(-2) = 16b + 4d = 0 \end{cases}$$

Решење система је $b = d = 0$ па је $P(x) = ax^4 + cx^2 + e = a(-x)^4 + c(-x)^2 + e = P(-x)$ за свако x па је парна.

4.4.
$$\frac{S_{5n}}{S_n} = \frac{\frac{5n}{2}(2a_1 + (5n-1)\cdot 2)}{\frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)\cdot 2)} = \frac{5(5n + a_1 - 1)}{n + a_1 - 1} = c.$$

$5^2n + 5a_1 - 5 = cn + ca_1 - c$, $c = 25$, $5(a_1 - 1) = 25(a_1 - 1)$. $\Rightarrow a_1 = 1$. Низ: 1, 3, 5, 7, ... $\dfrac{S_{5n}}{S_n} = \dfrac{25n^2}{n^2} = 25$.

4.5. $r^2 + (H-3)^2 = 3^2 \;\Rightarrow\; r^2 = 6H - H^2$. $V(H) = \dfrac{1}{3}r^2\pi H = \dfrac{\pi}{3}(6H^2 - H^3)$. $V'(H) = \dfrac{\pi}{3}(12H - 3H^2) = \pi H(4 - H)$. $H > 4$, $V'(H) < 0; H < 4$, $V'(H) > 0$ V_{max} је за $H = 4\ cm$, $r = \sqrt{8}\ cm$.

А категорија

Први разред

1.1. Нека је P средиште дужи A_1A_4. Тада је $B_1PB_3B_2$ паралелограм, па је N средиште дужи PB_2; MN је средња линија троугла B_2PB_4, тј. $MN = \dfrac{1}{2}PB_4$. Како је PB_4 средња линија троугла $A_1A_4A_5$, следи да је $MN = \dfrac{a}{4}$.

1.2. Види решење задатка 1.2. Б категорије.

1.3. Нека су p_1, p_2, $q \in Z$ и НЗД$(p_1, p_2, q) = 1$, такви да је $2\left(\dfrac{p_1}{q}\right)^2 + 5\left(\dfrac{p_2}{q}\right)^2 = 1$. Тада је $2p_1^2 + 5p_2^2 = q^2$, односно $q^2 \equiv 2p_1^2 (\bmod 5)$. Значи $5 \mid q$ и $5 \mid p_1$, па $25 \mid 5p_2^2$. Дакле $5 \mid p_2$. То је контрадикција са претпоставком НЗД$(p_1, p_2, q) = 1$.

1.4. 1) $A = \emptyset$. Тада је $\sim$ симетрична, антисиметрична и транзитивна, а није рефлексивна.
2) A има тачно један елемент. Тада $\sim$ није рефлексивна, а јесте симетрична, антисиметрична и транзитивна.

3) Ако A има бар два елемента, тада $\sim$ није ни рефлексивна, ни антисиметрична, ни транзитивна, а јесте симетрична.

1.5. Нека права која пролази кроз M и паралелна је са BC сече AB и DC у тачкама P и R, а права која садржи M и паралелна је AB нека сече AD и BC у тачкама S и Q. Тада је $MA < AP + MP = AS + AP$. Слично $MB < PB + QB$, $MC < CQ + RC$, $MD < DR + DS$ и сабирањем добијемо тврђење.

Други разред

2.1. Уведимо смену $y = \sqrt{3 + 4x - 4x^2}$. Решавамо једначину $-36 + 16y + y^2 = 0$, $y \geq 0$. Због услова, одбацујемо решење $y_2 = -18$. За $y_1 = 2$ добијамо $x = \frac{1}{2}$.

2.2. 1) $a = 0$, $b \neq 0$, $x_0 = -\frac{c}{b}$, $\frac{c}{b} = -\frac{1}{2}$. Следи $x_0 = \frac{1}{2} \in (0,1)$. $a = 0$, $b = 0$ $\Rightarrow$ $c = 0$ и свако $x \in R$ је решење.
2) $a \neq 0$. Довољно је разматрати случај $a > 0$ (за $a < 0$ аналогно). $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = \frac{a}{4} - \frac{a}{3} = -\frac{a}{12} < 0.$$

1^0 $f(0) = c > 0$. Следи да постоји решење у интервалу $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

2^0 $c \leq 0$. $f(1) = a + b + c = 2(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}) = 2(\frac{a}{2} + \frac{c}{2} - \frac{a}{3} - c) = 2(\frac{a}{6} - \frac{c}{2}) > 0$. Следи да постоји решење у интервалу $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

2.3. Нека права кроз тачку M паралелна са AB сече странице AD и BC у тачкама X и Y. Имамо

$$S = S_{ABYX} + S_{XYCD} = 2S_{\triangle ABM} + 2S_{\triangle DCM}.$$

Нека је N тачка ван правоугаоника $ABCD$, тако да је $AN \cong CM$ и $BN \cong DM$. Сада имамо:

$$\begin{aligned} S &= 2(S_{\triangle ABM} + S_{\triangle ABN}) = 2S_{ANBM} = 2S_{\triangle ANM} + 2S_{\triangle BMN} \\ &\leq AM \cdot AN + BM \cdot BN = AM \cdot CM + BM \cdot DM. \end{aligned}$$

2.4. За рационалне бројеве $x,\ y,\ z,\ t$ важи

$$(x+y\sqrt{2})^2+(z+t\sqrt{2})^2=5+4\sqrt{2} \Leftrightarrow$$
$$(x-y\sqrt{2})^2+(z-t\sqrt{2})^2=5-4\sqrt{2}.$$

Како је $5-4\sqrt{2}<0$, долазимо до контрадикције.

2.5. Посматрајмо произвољног ученика A. Ако постоје два од преосталих ученика који говоре истим језиком као и A, тада имамо тројку ученика који сви говоре истим језиком. Ако, пак, за сваки од највише 2 језика које говори ученик A постоји највише 1 ученик који такође говори тај језик, тада бар 4 ученика не разумеју ученика A. Посматрајмо међу тим ученицима произвољног ученика B. Ако постоје два од преосталих ученика који говоре истим језиком као и B, тада имамо тројку ученика који сви говоре истим језиком. Ако, пак, међу ученицима који не разумеју ученика A за сваки од највише 2 језика које говори ученик B постоји највише 1 ученик који такође говори тај језик, тада бар један ученик (означимо га C) не разуме ученика B. Тада од тројице ученика $A,\ B,\ C$ никоја два не говоре истим језиком.

Трећи разред

3.1. $OA=a,\ OB=b,\ OC=c,\ \angle AOB=\gamma,\ \angle AOC=\beta,\ \angle BOC=\alpha$

$$AB^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$
$$BC^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$
$$CA^2=c^2+a^2-2ac\cos\beta$$

$AB^2+BC^2-CA^2>0 \Rightarrow 2b^2-2ab\cos\gamma+2c(-b\cos\alpha+a\cos\beta)$. Фиксирамо $a,\ b$. Следи $-b\cos\alpha+a\cos\beta\geq 0$ за произвољне a и b. Следи $\cos\alpha\leq 0,\ \cos\beta\geq 0$. Слично $\cos\beta\leq 0,\ \cos\gamma\geq 0$ и $\cos\gamma\leq 0,\ \cos\alpha\geq 0$ следи $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=0 \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=90^0$.

3.2. Види решење задатке 3.1. Б категорије.

3.3. Види решење задатка 4.4. Б категорије.

3.4. Лако се види да је

$$d \cdot S + 1 = \left(1 + \frac{d}{x_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{d}{x_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{d}{x_n}\right) =$$
$$= \frac{x_1 + d}{x_1} \cdot \frac{x_2 + d}{x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n + d}{x_n} = \frac{x_n + d}{x_1} = \frac{x_1 + nd}{x_1}$$

Одатле добијамо $d \cdot S = \dfrac{nd}{x_1}$ па је $S = \dfrac{n}{x_1}$.

3.5. Дуж која спаја теме троугла са неком тачком на наспрамној страници зваћемо *чевијана* троугла. Јасно је да је чевијана краћа од бар једне странице троугла која садржи теме из кога је повучена чевијана. Следи да је најдужа страница троугла дужа од свих чевијана. Дакле, $a > AP$, $a > BQ$, $a > CR$.
Дужи OX и OY паралелне редом страницама AB и AC, где су X и Y тачке на страници a, образују троугао OXY сличан троуглу ABC. Како је $a = BC$ најдужа страница троугла ABC, то је одговарајућа страница XY – најдужа страница у троуглу OXY. Зато је $XY > OP$.
Нека су XS и YT дужи паралелне редом дужима CR и BQ, где су S и T редом тачке на страницама c и b. Тада је троугао BXS сличан троуглу BCR. Како је BC најдужа страница у троуглу BCR, то је одговарајућа страница BX – најдужа у троуглу BXS. Према томе, $BX > SX = OR$ (из паралелограма $RSXO$). Аналогно је $YC > YT = OQ$, па сабирајући добијамо

$$OP + OQ + OR < XY + YC + BX = BC.$$

Четврти разред

4.1. Види решење задатка 3.2. Б категорије.

4.2. $P(x) = (x-1)^2(ax^2+bx+c) = (x^2-2x+1)(ax^2+bx+c)$.

$$P(x) = ax^4 + (b-2a)x^3 + (a-2b+c)x^2 + (b-2c)x + c$$
$$Q(x) = ax^4 + (b-2a)x^3 + (a-2b+c)x^2 + (b-2c)x + c + 4$$

$Q(0) = -2 = c + 4 \;\Rightarrow\; c = -6.$

$$Q(x) = ax^4 + (b-2a)x^3 + (a-2b-6)x^2 + (b+12)x - 2$$
$$Q'(x) = 4ax^3 + 3(b-2a)x^2 + 2(a-2b-6)x + (b+12)$$

Како је $x = -1$ двострука нула полинома $Q(x)$ то је $Q(-1) = Q'(-1) = 0$.

$$\begin{aligned} Q(-1) &= a - (b - 2a) + (a - 2b - 6) - (b + 12) - 2 = 0 \\ Q'(-1) &= -4a + 3(b - 2a) - 2(a - 2b - 6) + (b + 12) = 0 \end{aligned}$$

тј. добијамо систем

$$\begin{aligned} 4a - 4b - 20 &= 0 \\ -12a + 8b + 24 &= 0 \end{aligned}$$

$a - b = 5$, $3a - 2b = 6 \Rightarrow a = -4$, $b = -9$. Значи $P(x) = -4x^4 - x^3 + 8x^2 + 3x - 6$.

4.3. За $k = 1$ добијамо $4 \cdot 2 + 17 = 5^2$, за $k = 2$ добијамо $2 \cdot 2^2 + 17 = 5^2$, за $k = 3$ добијамо $1 \cdot 2^3 + 17 = 5^2$. Претпоставимо да за неко $k \geq 3$ и неки природан број n важи $n \cdot 2^k + 17 = x^2$, $x \in N$. Очигледно је x непаран број. Ако је $n = 2m$, онда $m \cdot 2^{k+1} + 17 = x^2$, $x \in N$. Ако је $n = 2m + 1$, онда је

$$(x + y)^2 = x^2 + y(2x + y) = (2m + 1) \cdot 2^k + 17 + y(2x + y),$$

па за $y = 2^{k-1}$ добијамо

$$\begin{aligned} (x + y)^2 &= (2m + 1) \cdot 2^k + 17 + 2^{k-1}(2x + 2^{k-1}) \\ &= \underbrace{(2m + 1 + x + 2^{k-2})}_{2s} \cdot 2^k + 17 \\ &= s \cdot 2^{k+1} + 17. \end{aligned}$$

4.4. Решићемо задатак у општем случају кад уместо 1001 фигурише било који природан број n.
Ако је $A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = A_{n-1}A_n$, скуп M састоји се од тачака A_2, A_3, ..., A_{n-1} и средишта дужи A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$. У том случају M садржи $2n - 3$ тачке.
Индукцијом ћемо доказати да M не може да садржи мање од $2n - 3$ тачке. За $n = 2$ то је очигледно. Претпоставимо да је тврђење доказано за k тачака и посматрајмо на правој $k + 1$ тачака A_1, A_2, ..., A_{k+1}. Без умањивања општости можемо узети да је права хоризонтална и да су тачке нумерисане слева надесно. По претпоставци индукције, скуп M_1 средишта дужи са крајевима у тачкама A_1, $A_2, \ldots$, A_k садржи бар $2k - 3$ тачака. Лако се види да се средишта дужи $A_{k-1}A_{k+1}$ и A_kA_{k+1} не поклапају и да леже десно од свих тачака из M_1. Дакле, скуп M, поред тачака из M_1 садржи бар још две тачке, тј. има бар $(2k-3)+2 = 2(k+1)-3$ тачака.

У нашем случају је $n = 1001$, скуп M садржи бар 1999 тачака.

4.5. Види решење задатка 3.5.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА РЕПУБЛИЧКОГ ТАКМИЧЕЊА

Б категорија

Први разред

1.1. $P_{ABCD} = P_{BCDE}(= \frac{1}{2}P_{ABCDEF})$. $P_{\triangle ABD} + P_{\triangle DBC} = P_{\triangle EBD} + P_{\triangle DBC}$. $P_{\triangle ABD} = P_{\triangle EBD}$. Следи да $AE \parallel BD$.

1.2.

$$\begin{aligned}
P(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\
P(a) &= a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \cdots + a_1 a + a_0 \\
P(b) &= a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0 \\
P(a) - P(b) &= a_n(a^n - b^n) + a_{n-1}(a^{n-1} - b^{n-1}) + \cdots + a_1(a - b)
\end{aligned}$$

па како $(a-b) \mid (a^k - b^k)$ то $(a-b) \mid (P(a) - P(b)) = b - c$. Слично се добије $(b-c) \mid (P(b) - P(c)) = c - a$ и $(c-a) \mid (P(c) - P(a)) = a - b$. Како $(a-b) \mid (b-c) \mid (c-a) \mid (a-b)$. Следи $|a-b| = |b-c| = |c-a|$. Ако је $a-b = b-c$ онда је $c-a = (c-b)-(a-b) = -2(a-b)$ а како је $|a-b| = |c-a|$ следи $a-b = c-a = 0$ што је контрадикција са чињеницом да су a, b, c различити бројеви. Ако је $a-b = -(b-c) = c-b \;\Rightarrow\; a = c$ и опет контрадикција.

1.3.

$$\begin{aligned}
I &= (b^2 + c^2 - a^2 - 2bc)(b^2 + c^2 - a^2 + 2bc) = ((b-c)^2 - a^2)((b+c)^2 + a^2) \\
&= (b-c-a)(b-c+a)(b+c+a)(b+c-a) < 0
\end{aligned}$$

јер је први чинилац негативан, а остала три су позитивна.

1.4. Нека је $m \geq n$. Тада важи $m^2 < m^2 + n \leq m^2 + m < (m+1)^2$, па $m^2 + n$ није потпун квадрат.

1.5. Претпоставимо да je

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + cd = 1.$$

Дакле,

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 + 2ab + 2cd = 2(ad - bc)$$
$$(a+b)^2 + (c+d)^2 + (a-d)^2 + (b+c)^2 = 0$$

$a + b = c + d = a - dt + 10 \leq 0,\ (2t-5)(t+2)(t-1) \leq 0$. Како je $t + 2 > 0$ имамо $1 \leq t \leq \frac{5}{2},\ 1 \leq \left(\frac{5}{2}\right)^x \leq \frac{5}{2}$. $x \in [0,1]$.

2.4.

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+1}{\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)+\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{5}+\sqrt{3}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}.$$

Ако je $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = r \in Q$ тада $\sqrt{2} = \frac{1+r}{r} \in Q$, па je $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ ирационалан.

2.5. Прво поделимо са x^2, а после уводимо смену $x - \frac{2}{x} = t$

$$x^2 + \frac{4}{x^2} = t^2 + 4.$$

$t^2 + 4 - t - 10 = 0,\ t_1 = 3,\ t_2 = -2.\ x - \frac{2}{x} = 3,\ x^2 - 3x - 2 = 0,\ x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$. $x - \frac{2}{x} = -2,\ x^2 + 2x - 2 = 0,\ x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{3}$.

Трећи разред

3.1. $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\ a = 2n-2,\ b = 2n,\ c = 2n+2, s = 3n,\ P = n\sqrt{3n^2-12}$. $3n^2 - 12 = A^2,\ 3n^2 = A^2 + 12 \ \Rightarrow\ 3 \mid A,\ A = 3k,\ 3n^2 = 9k^2 + 12,\ n^2 = 3k^2 + 4,\ k = 0, 1, 2, \ldots, 30, \ldots$. За $k = 2\ :\ 3k^2 + 4 = 16$ – правоугли троугао 6, 8, 10 . . . За $k = 30,\ 3k^2 + 4 = 52^2$. $n = 52\ :\ a = 102,\ b = 104,\ c = 106,\ P = 4680$.

3.2. $M = 2r\pi h$. $\frac{H}{H-h} = \frac{R}{r},\ r = \frac{R}{H}(H-h)$. $M = 2\pi\frac{R}{H}(H-h)h$. M_{max} за $H - h = h\ \Rightarrow\ h = \frac{H}{2}$ и $r = \frac{R}{2}$.

3.3. $t: y = kx + \frac{p}{2k}$ $(k \neq 0)$. $n:$ $y = -\frac{1}{k}\left(x - \frac{p}{2}\right)$. $n \cap t = \{S\}$, $S\left(0, \frac{p}{2k}\right)$. $F'\left(-\frac{p}{2}, \frac{p}{k}\right)$. Геометријско место тачака је директриса $x = -\frac{p}{2}$.

3.4. Збир цифара броја a је 5, па је a облика $9k + 5$ $(k \in Z)$, дакле $a = 3l + 2$, $l \in Z$. Међутим квадрати целих бројева су облика $3l$ или $3l + 1$ $(l \in Z)$.

3.5. Ако је x решење друге једначине, тада важи

$$(3\operatorname{tg} x - 1)(3\operatorname{tg} x + 1) = \frac{(5 - \operatorname{tg} x)^2}{2},$$

односно $\operatorname{tg} x = 1$ или $\operatorname{tg} x = -\frac{27}{17}$. Решења једначине $\operatorname{tg} x = -\frac{27}{17}$ нису решења друге једначине, за разлику од $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$ која се добијају из $\operatorname{tg} x = 1$. Заменом добијених вредности у прву једначину имамо $2a^2 + a - 3 = 0$, односно $a_1 = 1$ и $a_2 = -\frac{3}{2}$. Провера показује да је $a_1 = 1$ тражена вредност параметра. (У случају $a = -\frac{3}{2}$ решења прве једначине су и решења једначине $\operatorname{tg} x = -2$).

Четврти разред

4.1. Нека је $a_0 = 0$ и $a_n = a_{n-1}^2 + 1$. Низ a_n је неограничен и важи да је $P(a_n) = a_n$. Доказ: математичка индукција : 1) $P(0) = 0$; 2) Ако је $P(a_{n-1}) = a_{n-1} \Rightarrow P(a_n) = P(a_{n-1}^2 + 1) = P(a_{n-1})^2 + 1 = a_{n-1}^2 + 1 = a_n$. Сада за полином $Q(x) = P(x) - x$ важи да је $Q(a_n) = 0$, тј. Q се анулира у бесконачно много тачака па је $Q \equiv 0$, тј. $P(x) = x$.

4.2. Нека је $f(x) = \operatorname{arctg} x - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}$. Тада је

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - 1 + x^2 - x^4 = -\frac{x^6}{1 + x^2} < 0.$$

Како је $f(0) = 0$ имамо $f(x) < 0$ за $x > 0$.

4.3. Доказујемо индукцијом по $p \in N$ да се после 3^p корака од полазног низа $a_1, a_2, \ldots, a_{3^k}$ добија низ $a_1 a_{3^p+1}, a_2 a_{3^p+2}, \ldots, a_{3^k} a_{3^p}$.

$$p = 1 \;: a_1 a_2 \ldots a_{3^k} \;\rightarrow\; a_1 a_2, a_2 a_3, \ldots, a_{3^k} a_1$$
$$\rightarrow\; a_1 a_2^2 a_3, a_2 a_3^2 a_4, \ldots, a_{3^k} a_1^2 a_2 \;\rightarrow\; a_1 a_2^3 a_3^3 a_4, a_2 a_3^3 a_4^3 a_5, \ldots, a_{3^k} a_1^3 a_2^3 a_3$$

тј. $a_1a_4, a_2a_5, \dots, a_{3^k}a_3$ јер је $a_i^3 = 1$.
$p \to p+1$

$$\begin{aligned} &a_1, a_2, \dots, a_{3^k} \to a_1a_{3^p+1}, a_2a_{3^p+2}, \dots, a_{3^k3^p} \\ &\to a_1a_{3^p+1}^2a_{2\cdot 3^p+1}, a_2a_{3^p+2}^2a_{2\cdot 3^p+2}, \dots, a_{3^k}a_{3^p}^2a_{2\cdot 3^p} \\ &\to a_1a_{3^p+1}^3a_{2\cdot 3^p+1}^3a_{3\cdot 3^p+1}, a_2a_{3^p+2}^3a_{2\cdot 3^p+2}^3a_{3\cdot 3^p+2}, \dots, a_{3^k}a_{3^p}^3a_{2\cdot 3^p}^3a_{3\cdot 3^p} \end{aligned}$$

што је низ $a_1a_{3^{p+1}+1}, a_2a_{3^{p+1}+2}, \dots, a_{3^k}a_{3^{p+1}}$. После 3^k корака, дакле, добија се низ $a_1^2, a_2^2, \dots, a_{3^k}^2$, а после $2 \cdot 3^k$ корака – низ $a_1^4, a_2^4, \dots, a_{3^k}^4$, тј. $a_1, a_2, \dots, a_{3^k}$.

4.4. Уведимо смену $x = \cos t$, $t \in [0, \pi/2]$. Једначина се своди на

$$8\cos t(2\cos^2 t - 1)(8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1) = 1,$$

односно $8\cos t \cos 2t \cos 4t = 1$. Множећи са $\sin t$ добијамо $\sin 8t = \sin t$. Дакле $t = \dfrac{2k\pi}{7}$, $k \in Z$ или $t = \dfrac{2l+1}{9}\pi$, $l \in Z$. Интервалу $[0, \pi/2]$ припадају 0, $\dfrac{\pi}{9}$, $\dfrac{2\pi}{7}$ и $\dfrac{\pi}{3}$. Решења су $\cos\dfrac{\pi}{9}$, $\cos\dfrac{2\pi}{7}$ и $\cos\dfrac{\pi}{3}$. Значи једначина има 3 решења.

4.5. Види решење задатка 3.5 Б категорије

А категорија

Први разред

1.1. Видети решење задатка 1.1 Б категорије.

1.2. Постоји $2^{10} - 1 = 1023$ непразних подскупова скупа A, док је број могућих збирова за све подскупове A једнак 955 (од 1 до $91 + 92 + \cdots + 100$). По Дирихлеовом принципу, постоје два различита подскупа B и C са једнаким збировима елемената. Нека је $D = B \cap C$ и $S = B \setminus D$, $T = C \setminus D$. Тада су подскупови S и T дисјунктни са једнаким збировима елемената. Уз то су и непразни, јер ако $S = \emptyset$, тада $B = B \cap C$ па је B прави подскуп од C, што је немогуће јер имају једнаке збирове елемената.

1.3. Напишимо једначину у облику $(2x+3y)(x+4y)+4x+5y+6 = 2m$ и узмимо да је $3y = -2x$, тј. $y = -\dfrac{2}{3}x$. Заменом добијамо да је $4x+5\cdot\left(-\dfrac{2}{3}x\right)+6 = 2m$ или $2x-\dfrac{5}{3}x+3 = m$, $6x-5x+9 = 3m$, $x = 3m-9$, $y = 6-2m$ за $m \in Z$, x, $y \in Z$.

1.4. Нека су $O_1,\ldots,O_{1999}$ центри кружница $k_1,\ldots,k_{1999}$. Лако се види да су вектори $\overrightarrow{O_1M_2}$ и $\overrightarrow{O_2M_2}$ паралелни и супротно оријентисани, и да исто важи за парове $\overrightarrow{O_2M_2}$ и $\overrightarrow{O_3M_3}$, . . . , $\overrightarrow{O_{1999}M_{1999}}$ и $\overrightarrow{O_1M_{2000}}$. Одатле су $\overrightarrow{O_1M_1}$ и $\overrightarrow{O_1M_{2000}}$ истог правца и супротног смера, па тврђење следи.

1.5. $n = 10$. (1) $n = 2k$. При дељењу броја n са $n-1,\ldots,k+1$ добиће се остаци 1, 2, ..., $k-1$ чији је збир $\dfrac{k(k-1)}{2}$. Како се при дељењу осталим бројевима мањим од n $(k,\ldots,1)$ могу добити само остаци мањи од k, то је збир свих различитих остатака управо $\dfrac{k(k-1)}{2}$. Зато је $\dfrac{k(k-1)}{2} = 2k$, тј. $k=5$ па је $n=10$.
(2) $n = 2k+1$. При дељењу броја n бројевима $2k$, $2k-1,\ldots,k+1$ добиће се остаци $1,\ldots,k$ чији је збир $\dfrac{k(k+1)}{2}$. Како су и ово сви могући остаци, то је потребно да буде $\dfrac{k(k+1)}{2} = 2k+1$, тј. $k(k-3)=2$. Како ова једначина нема целобројних решења то не постоји непаран број са траженим својством.

Други разред

2.1. Тачке A_2, B_2 и C_2 су симетричне ортоцентру H троугла ABC у односу на праве BC, CA и AB. Користећи ту чињеницу имамо

$$\frac{AA_2}{AA_1}+\frac{BB_2}{BB_1}+\frac{CC_2}{CC_1} = 1+\frac{A_1A_2}{AA_1}+1+\frac{B_1B_2}{BB_1}+1+\frac{C_1C_2}{CC_1}$$
$$= 3+\frac{P_{\triangle BCH}}{P_{\triangle ABC}}+\frac{P_{\triangle CAH}}{P_{\triangle ABC}}+\frac{P_{\triangle ABH}}{P_{\triangle ABC}} = 4.$$

2.2. Из услова добијамо $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right) = \left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)$. Одатле добијамо

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right) = \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) \text{ па}$$

$$f(x,y,z) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}p-i\sqrt{3}\right)\left(-\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}z-iy\right)+\right.$$
$$\left.+(2+ip)\left(\frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y-iz\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(-\frac{y}{2}+ix\right)\right)\right]$$

$$f(x,y,z) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\cdot 0 = 0.$$

2.3. Може да победи играч I ако у првом потезу игра $c = 1$. Затим, ако II бира b, I игра $a = \frac{b^2}{4}$. Ако II игра a, I бира $b = \frac{a^2}{4}$. У првом случају добије се полином

$$x^3 + \frac{b^2}{4}x^2 + bx + 1 = x^3 + \left(\frac{b}{2}x + 1\right)^2$$

а у другом

$$x^3 + ax^2 + \frac{a^2}{4}x + 1 = x\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + 1$$

који очигледно немају позитивни корен.

2.4. $f(x) = x^2 + A_1x + B_1$, $g(x) = x^2 + A_2x + B_2$. $f(x) = g(x) \Rightarrow (A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2) = 0$. $f(20) + f(3) + f(1999) = g(20) + g(3) + g(1999) \Rightarrow 2022(A_1 - A_2) + 3(B_1 - B_2) = 0 \Rightarrow 674(A_1 - A_2) + (B_1 - B_2) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x)$ за $x = 674$. Ако је $f(x) = g(x)$ за неко $x \neq 674$, $f(x) - g(x)$ је линеарна функција која у две различите тачке узима вредност 0. Следи да за свако $x \in R$ $f(x) = g(x)$, што је контрадикција. Дакле, једино решење је $x = 674$.

2.5. Математичар треба да се, полазећи из произвољне тачке A, креће праволинијски у произвољном смеру $\sqrt{2}\ km$, до неке тачке B, затим да скрене под правим углом и креће се праволинијски $\sqrt{2}\ km$, до тачке C. Сад се лако показује да бар једна од три тачке A, B, C није у шуми. Претпоставимо супротно, тј. да се тачке A, B и C налазе у унутрашњости траке. Висина BB_1 из темена B правоуглог троугла ABC има дужину $1\ km$. Посматрајмо нормалу из B на граничне праве траке. Нека она сече хипотенузу AC у тачке B', а граничне праве траке у тачкама P и Q. Тада је $1 = |BB_1| \leq |BB'| < |PQ|$, тј. $1 < |PQ|$, што је контрадикција.

Трећи разред

3.1. Допунимо $\triangle ABC$ до правоугаоника $AEBC$. Ако је O средиште AB, онда тачке A, B, C, D, E леже на сфери са центром у O и полупречником $R = \frac{AB}{2}$. Приметимо да је онда $\triangle CDE$ такође правоугли и да је $\frac{CD}{AB} = \frac{CD}{CE} = \cos\angle DCE$, а да је $\angle(AC, BD) = \angle DBE$. Стога је неједнакост $\cos\angle(AC, BD) < \frac{CD}{AB}$ еквивалентна са $\cos\angle DBE < \cos\angle DCE$, тј.

са $\angle DBE > \angle DCE$. Ово се може доказати користећи синусну теорему: Из $\triangle DCE$ имамо $\dfrac{DE}{\sin\angle DCE} = 2R$ и $\dfrac{DE}{\sin\angle DBE} = 2r$, где је r полупречник описаног круга око $\triangle DBE$, $r < R$ (будући да троугао DBE не лежи у равни која пролази кроз центар O сфере). Дакле, $\dfrac{DE}{\sin\angle DCE} > \dfrac{DE}{\sin\angle DBE}$, односно $\sin\angle DCE < \sin\angle DBE$, па, узевши у обзир да је $\angle DCE$ оштар, ако је и $\angle DBE$ оштар, тврђење следи из дате неједнакости синуса, а ако је прав или туп – следи непосредно.

3.2. Пошто је $|z_1 - z_2| = 2 = |AC| = |BD|$, довољно је доказати да је $ABCD$ тетивни. Приметимо да је

$$\frac{z_2-(-1)}{1-(-1)} : \frac{z_2 - z_1}{1 - z_1} = \frac{1 - z_1 + z_2 - z_1 z_2}{2(z_2 - z_1)} = \frac{1}{2} \in R.$$

Бројеви $\dfrac{z_2+1}{2}$ и $\dfrac{z_2-z_1}{1-z_1}$ имају исте аргументе, тј. $\angle DAC = \angle DBC$, па је $ABCD$ тетиван.

3.3. Лако се нађе 4 крстића који могу да се изрежу. Покажимо да више од четири не може. Обојимо таблу у пет боја, означених од 1 до 5 редом. Тада су сва угаона поља означена са 1. Како крстић не може да покрије ниједно од ових поља, можемо да их искључимо из даљег разматрања. Сваки крстић покрива поља означена свим бојама. Како су преостале на табли само 4 јединице, видимо да не може да се изреже више од четири крстића.

3.4. Различитих бојења правих имамо 3^{2n}. Доказаћемо да тачно три бојења правих задају исто бојење n^2 тачака. Посматрајмо пресликавања f и g на скупу обојених правих, која су дефинисана са:

$$f(\text{п}) = \text{ц}; \quad f(\text{ц}) = \text{з}; \quad f(\text{з}) = \text{п};$$
$$g(\text{п}) = \text{з}; \quad g(\text{ц}) = \text{п}; \quad g(\text{з}) = \text{ц}.$$

Нека нам је задато бојење правих. Лако се уочава да се добијено бојење n^2 тачака не мења, уколико на n вертикалних правих применимо пресликавања f, а на n хоризонталних правих применимо пресликавање g, или уколико на n вертикалних правих применимо пресликавање g, а на n хоризонталних пресликавање f. Још остаје да се докаже да задатом бојењу n^2 тачака не одговара више од три бојења правих. Приметимо да, уколико нам је задато бојење n^2 тачака, задавањем једне фиксиране праве једнозначно одређујемо осталих $2n-1$ правих. Фиксирану праву можемо изабрати на три начина, па се задато бојење тачака добија од тачно три бојења правих. Дакле, различитих бојења n^2 тачака има $\frac{3^{2n}}{3} = 3^{2n-1}$.

3.5. Види решење задатка 3.5 Б категорије.

Четврти разред

4.1. Пошто је $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}>\sqrt{c}$ (слично остале три), постоји троугао са страницама $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$. Како важи $(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2=a+b>(\sqrt{c})^2$ онда је тај троугао оштроугли. Зато постоји тетраедар $DA_1B_1C_1$ такав да је $DA_1=B_1C_1=\sqrt{a}$, $DB_1=A_1C_1=\sqrt{b}$, $DC_1=B_1A_1=\sqrt{c}$. Одаберимо сада тачке A_0, B_0, C_0 на полуправама DA_1, DB_1, DC_1 редом, такве да је $DA_0=\sqrt{bc}$, $DB_0=\sqrt{ca}$, $DC_0=\sqrt{ab}$. Пошто је $\dfrac{DB_1}{DA_1}=\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{bc}}{\sqrt{ac}}=\dfrac{DA_0}{DB_0}$, то су троуглови DA_1B_1 и DB_0A_0 слични и тада важи $\dfrac{A_0B_0}{A_1B_1}=\dfrac{DA_0}{DB_1}=\dfrac{\sqrt{bc}}{\sqrt{b}}=\sqrt{c}$ па је $A_0B_0=c$ слично $B_0C_0=a$ и $C_0A_0=b$. Дакле постојаће таква тачка D.

4.2. Одговор: $m=1$.
(1) Ако је n прост онда је $S(n)-n=n+1-n=1$.
(2) Ако је n сложен онда је бар један његов делилац $d\geq\sqrt{n}>1$ па је $S(n)-n\geq n+\sqrt{n}+1-n>\sqrt{n}$.
Ако су сви бројеви датог низа прости онда је $m=1$. Ако је у датом низу бар један сложен, онда су сви сложени због (2). Тада је могуће наћи n_i такав да је $S(n_i)-n_i>\sqrt{n_i}>m$ за свако $m\in N$. Дакле мора бити $m=1$.

4.3. Види решење задатка 4.3 Б категорије.

4.4. Види решење задатка 3.4 А категорије.

4.5. Види решење задатка 3.3 А категорије.

РАСПОРЕД ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ ЗА ШКОЛСКУ 1999/2000. ГОДИНУ

Општинско такмичење .... 05.02.2000.

Окружно такмичење .... 19.02.2000.

Републичко такмичење .... 18.03.2000.

Савезно такмичење .... 15.04.2000.

САДРЖАЈ