ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА СРЕДЊОШКОЛАЦА
2000/2001.

Београд 2001.

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Грађевински факултет Универзитета у Београду 1846

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА СРЕДЊОШКОЛАЦА
2000/2001.

Редакција и обрада:
мр Милена Радновић

Београд 2001.

РЕПУБЛИЧКА КОМИСИЈА

за такмичења из математике за ученике средњих школа

школска година 2000/2001

1. Анић мр Иван, Математички факултет, Београд
2. Арсеновић др Милош, Математички факултет, Београд
3. Балтић Владимир, Технолошки факултет, Београд
4. Блажић др Новица, Математички факултет, Београд
6. Гајић мр Борислав, Математички институт САНУ
7. Димитријевић др Радослав, Природно-математички факултет, Ниш
8. Дорословачки др Раде, Факултет техничких наука, Нови Сад
9. Достанић др Милутин, Математички факултет, Београд
10. Драговић др Владимир, Математички институт САНУ
11. Дугошија др Ђорђе, Математички факултет, Београд
13. Ивановић Живорад, проф.
14. Икодиновић Небојша, Природно-математички факултет, Крагујевац
15. Јанковић др Владимир, Математички факултет у Београд
16. Каделбург др Зоран, Математички факултет, Београд
17. Кнежевић Миљан, Математички факултет, Београд
18. Кртинић Ђорђе, Математички факултет, Београд
19. Лазовић Небојша, Министарство просвете Србије
20. Лаудановић Младен, Математички факултет, Београд
21. Милићевић Ђорђе, Математички факултет, Београд
22. Младеновић др Павле, Математички факултет, Београд
23. Николић Небојша, Факултет организационих наука, Београд
24. Огњановић мр Срђан, Математичка гимназија, Београд
25. Павловић Иван, Гимназија Вук Караџић, Лозница
26. Петровић др Војислав, Прородно-математички факултет, Нови Сад
27. Поповић др Бранислав, Природно-математички факултет, Крагујевац
28. Радновић мр Милена, Математички институт САНУ – **председник**
29. Тановић др Предраг, Математички институт САНУ
30. Тодоровић мр Раде, Математички факултет, Београд
31. Томић Иванка, Гимназија, Ваљево
32. Тошић др Ратко, Природно-математички факултет, Нови Сад
33. Црвенковић др Синиша, Природно-математички факултет, Нови Сад
34. Чукић др Љубомир, Грађевински факултет, Београд

ОРГАНИЗАЦИОНИ ОДБОР
43. Републичког такмичења из математике

1. Проф. др Бранислав Ђорић, декан Грађевинског факултета у Београду
2. Проф. др Весна Јевремовић, продекан Грађевинског факултета у Београду
3. Проф. др Владимир Мићић, шеф катедре за математику Грађевинског факултета у Београду
4. Срђан Божовић, председник Савеза студената Грађевинског факултета у Београду
5. Мр. Милена Радновић, Математички институт САНУ
6. Педагошки саветник Живорад Ивановић, професор

УЧЕСНИЦИМА РЕПУБЛИЧКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Грађевински факултет основан је 1846. године и представља једну од најстаријих високошколских установа у нашој земљи. Инжењерска школа основана 1846. године је претеча Грађевинског факултета. Студије су трајале три године и предавали су се следећи предмети: практично земљомерје, механика, архитектура, цртање и немачки језик. Оснивањем Министарства грађевина 1862. године постављен је темељ грађевинског законодавства у Србији, а следеће године донет је Закон о оснивању Велике школе са три факултета: Филозофски, Технички и Правни. На Техничком факултету се тада предају: приправно цртање, нацртна геометрија са геометријским цртањем, практична геометрија са топографским цртањем, механика и наука о машинама, наука о грађевини на суву, наука о грађевини на води и грађењу путева, хемијска технологија, физика, минералогија са геологијом, хемија, виша математика, хигијена и француски језик. Велика школа је 1905. године трансформисана у Универзитет. Тада се повећава број студената и 1906/1907. школске године било је уписано 99 студената на смеру за грађевинске инжењере. У периоду од 1918-1941. знатно је повећан број предмета и број обавеза које су студенти имали у току студија. После Другог светског рата Факултет је наставио са радом, а од 1948. постоји као Грађевински факултет при Београдском универзитету. Од тада до данас на Факултету је дипломирало преко 8000 грађевинских и геодетских инжењера, а у периоду између два светска рата око 1000. Од када су уведене последипломске студије, почетком 70-тих, магистарски рад је одбранило око 400 кандидата, а докторску дисертацију око 200 кандидата.

Велики је број грађевина у земљи и у свету у чијем су пројектовању и грађењу учествовали инжењери, наставници и сарадници нашег Факултета: зграда у којој се Факултет и данас налази, зграда Народног музеја, хангари аеродрома "Београд", Музеј ваздухопловства на аеродрому "Београд", мостови на прузи Београд-Бар, мост Газела, многобројне бране, хидроелектрана и бродске преводнице, фабрика авиона "Утва" у Панчеву,...

Студије на грађевинском факултету трају 5 година, а дипломирани студенти имају титулу грађевинског или геодетског инжењера. Прве две године студија су заједничке за студенте свих смерова, а од треће године студенти се опредељују за геодетски, или један од грађевинских одсека: конструктивни одсек, хидротехнички одсек, одсек за путеве и железнице и одсек за планирање и грађење насеља. Настава на факултету се, у складу са могућностима, стално усавршава и осавремењава. Примењују се савремене технике у грађевинарству и геодезији, уз коришћење рачунара (нпр. коришћење програма AutoCAD, и сличних, дигитализација геодетских планова, развијање метода геодетске астрономије,...)

У оквиру редовне и последипломске наставе студенти раде у факултетским лабораторијама и рачунском центру. На факултету постоје две рачунарске лабораторије са по 30 рачунара за обуку студената у оквиру редовне наставе, за израду стручних научних и истраживачких радова. При Савезу студената Грађевинског факултета је и Интернет сервис намењен студентима.

Учесницима Републичког такмичења из математике желимо пуно успеха и на такмичењу и у даљем школовању, а било би нам драго да се неко од учесника определи за наставак школовања на нашем факултету.

У Београду 24. 03. 2001.

Продекан за наставу

проф. др Весна Јевремовић

Декан

проф. др Бранислав Ћорић

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ, 3. фебруар 2001.

Први разред – А категорија

1. Нека су $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ дати реални бројеви. Наћи све реалне бројеве x за које је израз: $|x-a_1|+|x-a_2|+\cdots+|x-a_n|$ најмањи.

2. Наћи све тројке међусобно различитих декадних цифара $a, b, c > 0$ тако да разломци $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}$ и $\frac{a}{c}$ имају исту вредност.

3. У трапезу $ABCD$, збир углова на основици AB је $90°$. Доказати да је дуж која спаја средишта основица тог трапеза једнака полуразлици основица.

4. У одељењу је 30 ученика. Сваког дана троје њих имају обавезу дежурства у школској кухињи. Доказати да није могуће тако направити распоред дежурства да сваки пар ученика тачно једном буде заједно на дежурству.

5. Да ли је могуће, користећи само слова А и Б, направити скуп са: 3 речи од по 4 слова, 10 речи од по 5 слова, 30 речи од по 6 слова и 5 речи од по 7 слова, уз услов да почетак ни једне речи из скупа не сме и сам да буде реч из скупа ?

Други разред – А категорија

1. Ако су са t_a, t_b и t_c означене дужине тежишних дужи које одговарају страницама a, b, c датог троугла, и ако је $t = \frac{t_a+t_b+t_c}{2}$, доказати да се површина S овог троугла може израчунати формулом:

$$S = \frac{4}{3}\sqrt{t(t-t_a)(t-t_b)(t-t_c)}.$$

2. Ако су a, b, c странице троугла и s његов полуобим, доказати неједнакост:

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c} \geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

3. Доказати да је $\operatorname{tg} 9° - \operatorname{tg} 27° - \operatorname{tg} 63° + \operatorname{tg} 81° = 4$.

4. Наћи она решења система једначина:

$$\begin{aligned} y+2 &= (3-x)^2 \\ (2z-y)(y+2) &= 9+4y \\ x^2+z^2 &= 4x \end{aligned}$$

која задовољавају услов $z \geq 0$.

5. Доказати да је $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ ирационалан број.

Трећи разред – А категорија

1. За какве реалне бројеве p систем једначина:

$$\begin{aligned} 2x-\log_2(1+y^2) &= p \\ -x+\cos y &= 19-p^2 \end{aligned}$$

има тачно једно решење?

2. Нека је $z_k = \cos\frac{2k\pi}{p} + i\sin\frac{2k\pi}{p}$ за $k=0,1,\ldots,p-1$, где је p прост број. За ма који природан број n, израчунати $z_0^n + z_1^n + \cdots + z_{p-1}^n$.

3. Дата је основа куће која се састоји од квадрата странице 8 и квадрата странице 4, тако да кућа има шест спољних зидова дужина 12, 8, 8, 4, 4 и 4. Од нивоа олука, кров се над сваким зидом уздиже под једнаким углом 45°. Гледано са било које тачке крова, кров се спушта према најближем зиду; кров се дели у тачкама подједнако удаљеним од више зидова. Нацртати површ крова, а затим израчунати запремину испод крова.

4. Дата су два круга k_1 и k_2 који се додирују споља у тачки A. Нека су B и C променљиве тачке на k_1 и k_2 такве да је $\angle BAC = \pi/2$, и нека је D подножје управне из A на BC. Наћи геометријско место тачака D.

5. Израчунати вредност детерминанте реда n:

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x & y & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & y \\ y & 0 & 0 & \ldots & x \end{vmatrix}.$$

Четврти разред – А категорија

1. Доказати једнакост:
$$n! = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^n.$$

2. На кружници је распоређено неколико реалних бројева. Ако су a, b, c, d четири броја која тим редом стоје један за другим на кружници, и ако је $(a-d)(b-c) > 0$, дозвољено је заменити b и c. Доказати да, после неколико корака, неће бити могуће извести ни једну такву замену.

3. Наћи најмањи природан број n такав да се број $7777n$ у декадном запису записује само јединицама.

4. Нека је p полином са целобројним коефицијентима такав да је $p(5) = -8$, $p(7) = -2$ и $p(12) = 13$. Доказати да он не може имати целобројних нула.

5. Нека су $r_1, r_2, \ldots, rm$ рационални бројеви из интервала $(0, 1)$ чији је збир 1. За сваки природан број n нека је $f(n) = n - \sum_{k=1}^{m}[r_k n]$. Одредити највећу и најмању вредност коју може узети $f(n)$ за природне бројеве n.

Први разред – Б категорија

1. Колико има природних бројева мањих од 1000 који нису дељиви ни са 2 ни са 3 ни са 5 ?

2. Доказати да једначина $x^2-10y^2-2x-10y-2=0$ нема целобројних решења.

3. У равни је дато 17 правих, од којих је 6 међусобно паралелно, а од осталих 11 никоје две нису паралелне, нити су паралелне са првих 6 правих. Одредити број троуглова чије странице леже на датим правама.

4. Доказати да број $\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{8}$ није рационалан.

5. Колико има пресликавања F из скупа $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ у скуп $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ са особинама: $F(a) \geq 4$, $F(c) \leq 4$ и $F(e) = 4$? Колико је међу њима 1-1 пресликавања?

Други разред – Б категорија

1. Права p је заједничка спољна тангента кругова k_1 и k_2 који се споља додирују. Круг k споља додирује оба та круга и праву п. Ако су r_1, r_2 и r полупречници кругова k_1, k_2 и k редом, доказати једнакост:

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}.$$

2. Решити неједначину:

$$\frac{x^2 + x + 2 - |3x + 1|}{x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1} > 0.$$

3. Странице правоугаоника $ABCD$ износе: $AB = 12$, $BC = 10$. Тачка A спојена је са средиштем E странице BC и из тачке D повучена је нормала DM на дуж AE (M је подножје нормале). Израчунати дужину дужи DM.

4. Ако су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $x^2 + px - \frac{1}{2p^2} = 0$, где је $p \neq 0$ реалан број, доказати да важи: $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$.

5. Нека је z комплексан број различит од 1 и -1. Доказати да је број $\frac{z-1}{z+1}$ чисто имагинаран ако и само ако је $|z| = 1$.

Трећи разред – Б категорија

1. Решити неједначину:

$$\sin^2 x_1 + \cdots + \sin^2 x_{1000} + \frac{1}{\sin^2 x_1} + \cdots + \frac{1}{\sin^2 x_{1000}} \leq 2000.$$

2. У зарубљену купу је могуће уписати сферу. Притом је полупречник описане сфере око зарубљене купе $\sqrt{30}$ пута већи од полупречника уписане сфере. Одредити угао који заклапа изводница купе са равни основе.

3. Доказати да је $\cos 24° + \cos 48° - \cos 84° - \cos 12° = \frac{1}{2}$.

4. Нека је a_0 произвољан цео број и $a_{n+1} = 4 + a_0 a_1 \ldots a_n$ $(n \geq 0)$. Доказати да су сви бројеви a_n $(n \geq 2)$ потпуни квадрати.

5. На тежишној дужи AA_1 троугла ABC наћи тачку M тако да збир $AM^2 + BM^2 + CM^2$ буде минималан.

Четврти разред – Б категорија

1. Дата је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ са:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, & x \leq 2 \\ -x + 4, & x > 2. \end{cases}$$

Доказати да постоји њена инверзна функција и израчунати $f^{-1}(x)$.

2. Доказати да је $\operatorname{tg} 10^\circ$ ирационалан број.

3. У низу: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 6$, $a_4 = 11 \ldots$ разлике узастопних бројева чине аритметичку прогресију. Израчунати a_{2001}.

4. Дат је комад папира квадратног облика, странице n. Колико је најмање савијања (паралелно страницама комада) потребно да би се добио комад квадратног облика, странице 1 ?

5. Доказати да је претпоследња цифра броја 3^n у декадном запису парна (n је природан број).

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ, 24. фебруар 2001.

Први разред – А категорија

1. Наћи све тројке (x, y, z) природних бројева, за које важи:

$$xyz + xy + xz + yz + x + y + z = 2000.$$

2. Одредити све природне бројеве n за које је: $5^n + 7^n + 11^n = 6^n + 8^n + 9^n$.

3. У равни су дати једнакостранични троуглови ABC и PQR, тако да се тачка R налази унутар дужи AB, а тачка C унутар дужи PQ, при чему се тачке A и P налазе са исте стране праве CR. Доказати да су праве AP и BQ паралелне.

4. Тачке A, B, C, D, E налазе се на истом кругу, тако да су A и D са различитих страна праве BC, а B и E са различитих страна CD. Ако је $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = 45^\circ$, доказати да је $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DE^2$.

5. Четири темена датог правилног осмоугла треба обојити плавом, а преостала четири црвеном бојом. Два бојења сматрамо еквивалентним ако постоји ротација равни тог осмоугла која свако његово теме преводи у теме обојено истом бојом. Колико има нееквивалентних бојења?

Други разред – А категорија

1. Ако су x, y и z реални бројеви, такви да је $\sin x + \sin y + \sin z \geq 2$, онда је $\cos x + \cos y + \cos z \leq \sqrt{5}$. Доказати.

2. Наћи све реалне бројеве a, за које постоје реални бројеви x и y тако да важи:
$$x^2 + 2xy - 7y^2 \geq \frac{1-a}{a+1}, \quad 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2.$$

3. Решити неједначину:
$$(2001^x)^{1-2001^x} + (2001^{2x})^{1-2001^{2x}} + \cdots + (2001^{2001x})^{1-2001^{2001x}} \geq 2001$$
у скупу ненегативних реалних бројева.

4. У равни су дати једнако оријентисани квадрати $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$. Доказати да су средишта дужи A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 темена квадрата.

5. Фигуру у равни, коју чини низ од четири различита квадрата странице 1, тако да узастопни квадрати у низу имају заједничку страницу, а они који нису узастопни су дисјунктни или имају заједничко теме, зваћемо *"змијица"*. Квадратна табла 4×4 прекривена је са четири "змијице": црвеном, жутом, плавом и зеленом, које се не преклапају. Доказати да постоји бар једна врста, колона или дијагонала квадратне табле, чија су поља обојена са четири различите боје.

Трећи разред – А категорија

1. Ако је $1 < x < y < z$, доказати да је
$$\log_x(\log_x y) + \log_y(\log_y z) + \log_z(\log_z x) > 0.$$

2. Низ (x_n) реалних бројева, задат је са:

$$x_1 = a > 0, \quad x_2 = b > 0, \quad x_n = \frac{1 + x_{n-1}}{x_{n-2}} \text{ за } n \geq 3.$$

Израчунати x_{2001} у функцији од a и b.

3. Дата је раван α, и тачке A и B ван ње, које се налазе са исте стране те равни. Посматрајмо кружнице које садрже тачке A и B и додирују α. Одредити геометријско место додирних тачака свих таквих кружница са равни α.

4. У равни су дати правоугаоници $ABCD$ и $CEFG$, $AB = CE$, $BC = EF$, $D-C-E$, $B-C-G$, са истакнутим дијагоналама AC и EG. Дозвољено је правоугаоник $ABCD$ пресликати симетрично у односу на неку од његових страница, на тако добијени правоугаоник применити исту операцију, итд. Да ли је, применом неколико таквих пресликавања, могуће тај правоугаоник довести до поклапања са $CEFG$, тако да им се и истакнуте дијагонале поклопе?

5. Нека је $S = \{r_1^4 + r_2^4 + \cdots + r_{15}^4 \mid r_1, r_2, \ldots, r_{15} \in \mathbb{Z}\}$. Доказати да је скуп $\mathbb{N} \setminus S$ бесконачан.

Четврти разред – А категорија

1. Ако је $1 < x < y < z$, доказати да је

$$\log_x(\log_x y) + \log_y(\log_y z) + \log_z(\log_z x) > 0.$$

2. Доказати да је могуће наћи 10000 десетоцифрених природних бројева, дељивих са 7, тако да се свака два могу добити један од другог заменом места цифара.

3. Дата је раван α, и тачке A и B ван ње, које се налазе са исте стране те равни. Посматрајмо кружнице које садрже тачке A и B и додирују α. Одредити геометријско место додирних тачака свих таквих кружница са равни α.

4. Квадрат странице 1 изрезан је на k правоугоника. Доказати да збир дужина краћих страница тих правоугаоника није мањи од 1.

5. Нека је $S = \{r_1^4 + r_2^4 + \cdots + r_{15}^4 \mid r_1, r_2, \ldots, r_{15} \in \mathbb{Z}\}$. Доказати да је скуп $\mathbb{N} \setminus S$ бесконачан.

Први разред – Б категорија

1. Наћи све парове (x, y) целих бројева, за које важи: $(x+y+2)^2 = 3(xy+1)$.

2. Дат је једнакокраки трапез $ABCD$, $AB \parallel CD$. Ако је E пресек његових дијагонала, а O центар круга описаног око трапеза $ABCD$, доказати да тачка E припада кругу описаном око троугла AOD.

3. Ако су a, x, y реални бројеви, такви да је $2ax + 3y \neq 0$ и $y > 1$, доказати да важи:

$$\frac{2a^2x^2 + axy - 3y^2}{2ax + 3y} + \frac{3axy + 3y^2 - ax - y}{1 - 3y} + \frac{1 - 6y + 9y^2}{3y - 1} > 0.$$

4. Дат је једнакокраки троугао ABC, коме је унутрашњи угао у темену A туп. Нека је D тачка на његовој основици, таква да је $\angle BAD = 90°$, и E тачка на страници AC таква да важи $AE = AD$. Израчунати угао EDC.

5. Четири темена датог правилног осмоугла треба обојити плавом, а преостала четири црвеном бојом. Два бојења сматрамо еквивалентним ако постоји ротација равни тог осмоугла која свако његово теме преводи у теме обојено истом бојом. Колико има нееквивалентних бојења?

Други разред – Б категорија

1. Наћи све парове (x, y) целих бројева, за које важи: $x^3 - 3y^2 = 2$.

2. Нека је D дискриминанта квадратног тринома $ax^2 + bx + c$ са целим коефицијентима a, b и c. Да ли D може да буде једнако:
   а) 2001;   б) 2002;   в) 2003 ?

3. Дат је правоугаоник $ABCD$, код кога је $AB = 6cm$, а $BC = 3cm$. Тачка E налази се на страници AB, $BE = 2cm$, а тачка F на страници BC, $BF = 1cm$. У петоугао $AEFCD$ треба уписати правоугаоник највеће могуће површине. Колика је та површина?

4. У равни су дати једнако оријентисани квадрати $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$. Доказати да су средишта дужи A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 темена квадрата.

5. Дати су троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ такви да је $\angle CAB = \angle C_1A_1B_1$ и $\angle ABC + \angle A_1B_1C_1 = 180^\circ$. Доказати да је $\dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$.

Трећи разред – Б категорија

1. Ако су x, y и z реални бројеви, такви да је $\sin x + \sin y + \sin z \geq 2$, онда је $\cos x + \cos y + \cos z \leq \sqrt{5}$. Доказати.

2. Нека су $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ четири јединична вектора за које важи: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = 0$. Израчунати вредност израза: $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d} + \vec{c} \cdot \vec{d}$.

3. На страницама AB, AC, BC једнакостраничног троугла ABC дате су редом тачке C_1, B_1, A_1 такве да је $AC_1 = BA_1 = CB_1 = AB/3$. У ком односу стоје површине троугла ABC и троугла који граде праве AA_1, BB_1, CC_1 ?

4. У скупу реалних бројева, решити једначину:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)(x-1)^{0,5(\log_2(x-1)^2)^2-7} = \left(\frac{x-1}{4}\right)^6.$$

5. Нека је $S = \{r_1^4 + r_2^4 + \cdots + r_{15}^4 \mid r_1, r_2, \ldots, r_{15} \in \mathbb{Z}\}$. Доказати да је скуп $\mathbb{N} \setminus S$ бесконачан.

Четврти разред – Б категорија

1. Ако су a, b, c решења једначине $x^3 - x + 1 = 0$, израчунати вредност израза $a^8 + b^8 + c^8$.

2. Решити систем једначина:

$$\begin{gathered} x^2y + y + xy^2 + x = 18xy \\ x^4y^2 + y^2 + x^2y^4 + x^2 = 208x^2y^2. \end{gathered}$$

3. Око купе висине h и полупречника основе r, описују се купе са центрима основе у врху дате купе. Одредити висину оне од тих описаних купа која има најмању запремину.

4. Дати су скупови $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| = |z-i|\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-5| = 2\}$. Одредити минимум израза $|z_1 - z_2|$, када $z_1 \in A$, $z_2 \in B$.

5. Нека је $S = \{r_1^4 + r_2^4 + \cdots + r_{15}^4 \mid r_1, r_2, \ldots, r_{15} \in \mathbb{Z}\}$. Доказати да је скуп $\mathbb{N} \setminus S$ бесконачан.

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ, 24. март 2001.

Први разред – А категорија

1. Да ли се првих сто природних бројева могу поделити у три групе, тако да је збир бројева прве дељив са 102, збир бројева друге дељив са 203, и збир бројева треће дељив са 304?

2. Дат је оштроугли троугао ABC. Нека је BK, $K \in AC$, симетрала његовог унутрашњег угла у темену B, CD висина, $N \in CD$ тачка таква да је $KN \perp BC$, и $\{M\} = BK \cap CD$. Ако је P пресечна тачка круга описаног око троугла BKN и праве AB, $P \neq B$, доказати да је $PK = PM$.

3. Нека су a, b, c позитивни бројеви, такви да је $a > c$ и $b > c$. Доказати:

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}.$$

4. Дат је круг k полупречника $31mm$ и изломљена линија ℓ дужине $61mm$ којој се обе крајње тачке налазе на том кругу. Доказати да постоји права p која садржи центар круга k, таква да се све тачке изломљене линије ℓ налазе са исте стране праве p.

5. Дат је скуп $\mathcal{A}$ од 2000 тачака у равни, тако да међу њима не постоје три колинеарне. Доказати да се ове тачке могу спојити са 1000 плавих, 1000 црвених и 1000 жутих дужи, тако да важи:
(1) свака тачка скупа $\mathcal{A}$ спојена је са тачно 3 друге скупа $\mathcal{A}$;
(2) из сваке тачке скупа $\mathcal{A}$ полазе дужи три различите боје;
(3) дужи различитих боја немају заједничких унутрашњих тачака.

Други разред – А категорија

1. Одредити скуп свих реалних вредности параметра a за које неједначина

$$x^2 - a(a+1)x + a^3 \leq 0$$

има тачно пет целобројних решења.

2. Наћи два седмоцифрена броја, таква да су њихов збир, њихова разлика и збир цифара једног од њих, факторијели неких бројева.

3. Свака дијагонала конвексног петоугла одсеца троугао јединичне површине. Израчунати површину тог петоугла.

4. На полукругу полупречника 1 са пречником AD, дате су тачке B и C. Доказати да важи: $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AB \cdot BC \cdot CD = 4$.

5. Да ли се бројеви 1, 2, ... 2001 могу поређати по кругу тако да разлика свака два суседна броја припада интервалу $[500, 999]$?

Трећи разред – А категорија

1. У скупу реалних бројева решити, систем једначина:

$$\begin{aligned} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 =& 0 \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 =& 0 \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 =& 0. \end{aligned}$$

2. Ако су a, b и c дужине страница, P површина и s полуобим неког троугла, доказати да важи неједнакост:

$$3^{500} \cdot (a^{2001} + b^{2001} + c^{2001}) \geq 2^{2001} \cdot P^{1000} \cdot s.$$

3. Доказати да је мерни број површине нормалне пројекције јединичне коцке на произвољну раван α једнак мерном броју дужине нормалне пројекције коцке на праву n нормалну на α.

4. На табли је написан природан број a. Дозвољено је додати том броју неки његов делилац различит од тог броја и јединице. На добијени број дозвољено је применити исту процедуру, итд. Одредити све бројеве који се на тај начин могу добити полазећи од броја $a = 4$.

5. Наћи све функције $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ такве да је $2f(x) = f(x - y) + f(x + y)$, за све $x, y \in \mathbb{Q}$.

Четврти разред – А категорија

1. Колико има функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таквих да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $f(n) > 1$ и $f(n+3)f(n+2) = f(n+1) + f(n) + 36$?

2. Ако су a, b и c дужине страница, P површина и s полуобим неког троугла, доказати да важи неједнакост:

$$3^{500} \cdot (a^{2001} + b^{2001} + c^{2001}) \geq 2^{2001} \cdot P^{1000} \cdot s.$$

3. Доказати да је мерни број површине нормалне пројекције јединичне коцке на произвољну раван α једнак мерном броју дужине нормалне пројекције коцке на праву n нормалну на α.

4. У кутији се налазе 4 куглице нумерисане бројевима $1, 2, 3, 4$. Два играча играју игру у којој наизменично бирају са враћањем једну куглицу из кутије. Избори су међусобно независни, а свака куглица има вероватноћу $\frac{1}{4}$ да буде изабрана у сваком кораку. Игра се завршава у тренутку када је збир свих до тада изабраних бројева дељив са 3, победом играча који је последњи бирао куглицу. Одредити вероватноћу догађаја да се игра заврши победом играча који је први бирао куглицу.

5. Дати су реални бројеви x и r, $|r| \leq \frac{1}{2}$. Низ (s_n) задат је са:

$$s_1 = \frac{1}{2}, \ s_n = s_{n-1} + r^{n-1}\cos(2^{n-2}x), \ n \geq 2.$$

Доказати да су сви чланови тог низа ненегативни.

Први разред - Б категорија

1. Ако је

$$x = \frac{b}{c} + \frac{c}{b}, \ y = \frac{a}{c} + \frac{c}{a}, \ z = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \quad (abc \neq 0)$$

доказати да вредност израза $x^2 + y^2 + z^2 - xyz$ не зависи од a, b, c.

2. Круг уписан у троугао ABC додирује странице BC и BA редом у тачкама M и N. Ако је K пресечна тачка симетрале угла BAC са правом MN, израчунати угао AKC.

3. Домаћица је направила торту округлог облика, али не зна тачно колико ће имати гостију – троје или четворо. Који је најмањи број праволинијских резова торте које она треба да направи пре него што дођу гости, тако да у сваком случају, без допунских резова, сваки гост добије једнаку количину торте?

4. Производ природних бројева x и y је троцифрен број са једнаким цифрама, а њихов збир је двоцифрен, такође са једнаким цифрама. Наћи све такве бројеве x и y.

5. Дат је скуп $\mathcal{A}$ од 2000 тачака у равни, тако да међу њима не постоје три колинеарне. Доказати да се ове тачке могу спојити са 1000 плавих, 1000 црвених и 1000 жутих дужи, тако да важи:
(1) свака тачка скупа $\mathcal{A}$ спојена је са тачно 3 друге скупа $\mathcal{A}$;
(2) из сваке тачке скупа $\mathcal{A}$ полазе дужи три различите боје;
(3) дужи различитих боја немају заједничких унутрашњих тачака.

Други разред – Б категорија

1. Одредити скуп свих реалних вредности параметра a за које неједначина

$$x^2 - a(a+1)x + a^3 \leq 0$$

има тачно пет целобројних решења.

2. У равни су дати кругови k_1 и k_2 са центрима O_1 и O_2. Полуправе O_1a и O_1b додирују круг k_2 и секу k_1 у тачкама A и B, а полуправе O_2c и O_2d додирују k_1 и секу k_2 у тачкама C и D. Доказати да је $AB = CD$.

3. Нека су a, b, c позитивни бројеви, такви да је $a > c$ и $b > c$. Доказати:

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}.$$

4. Одредити све вредности реалног параметра a тако да једначина

$$4^x - (a+3)2^x + 4a - 4 = 0$$

има тачно једно реално решење.

5. Да ли је број

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{9\sqrt{8}+8\sqrt{9}}$$

рационалан или ирационалан? Одговор образложити.

Трећи разред – Б категорија

1. Доказати да је:

$$-\frac{1}{2}\leq\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}\leq\frac{1}{2},$$

за све реалне бројеве x и y.

2. Странице троугла су три узастопна природна броја, а један од углова троугла је два пута већи од једног од преостала два угла. Одредити дужине страница тог троугла.

3. Доказати да је мерни број површине нормалне пројекције јединичне коцке на произвољну раван α једнак мерном броју дужине нормалне пројекције коцке на праву n нормалну на α.

4. Ако су a, b, c дужине страница троугла, доказати да је трином

$$ax^2+(b-c-a)x+c$$

позитиван за све реалне бројеве x.

5. Нека су a, b, c међу собом различити реални бројеви, различити од нуле. Доказати да је вредност детерминанте

$$\begin{vmatrix} \frac{a}{b} & \frac{b}{c} & \frac{c}{a} \\ a & b & c \\ ab & bc & ca \end{vmatrix}$$

различита од нуле.

Четврти разред – Б категорија

1. У скупу реалних бројева, решити систем једначина:

$$x + y + z = \frac{7}{2}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{41}{4}$$
$$x^2y^2z + xy^2z^2 + x^2yz^2 = -\frac{3}{2}.$$

2. Дат је природан број a и аритметички низ a, $3a$, $5a$, $7a$ ... Чланови тог низа груписани су на следећи начин: прву групу чине првих a чланова низа, другу следећих $2a$ чланова, трећу следећих $3a$ чланова, итд. Доказати да је збир елемената у свакој групи једнак кубу броја елемената те групе.

3. Доказати да је мерни број површине нормалне пројекције јединичне коцке на произвољну раван α једнак мерном броју дужине нормалне пројекције коцке на праву n нормалну на α.

4. Дата је функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, таква да је $f(f(m) + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$, за све природне бројеве m и n. Ако је $f(1) = 29$ и $f(29) = 58$, израчунати $f(2001)$.

5. Дата је реална функција $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, где су a, b, c, d дати реални бројеви, $ad - bc \neq 0$. Доказати да је ова функција једнака својој инверзној функцији ако и само ако важи $a + d = 0$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА

Први разред - А категорија

1.1. Посматрајмо интервал (a_i, a_{i+1}) за свако $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ (уз ознаке: $a_0 = -\infty$, $a_{n+1} = +\infty$. На том интервалу је вредност израза $|x - a_1| + |x - a_2| + \cdots + |x - a_n|$ једнака $(x - a_1) + \cdots + (x - a_i) + (a_{i+1} - x) + \cdots + (a_n - x) = (i - (n - i))x + a = (2i - n)x + a$, где је a неки реалан број (не зависи од x) који се добија сређивањем израза. Иста формула важи и у крајњим тачкама интервала, ако су коначне. Стога, ако је $2i < n$, вредност израза опада на датом интервалу, ако је $2i = n$ она је константна и ако је $2i > n$ вредност расте. *Први случај:* n непарно. Израз најмању вредност узима у тачки $x = a_{(n+1)/2}$, будући да његов вредност опада до x, а затим расте. *Други случај:* n парно. Израз ће најмању вредност узети у ма којој тачки интервала $[a_{n/2}, a_{n/2+1}]$, јер је на том интервалу вредност израза константна, на претходним интервалима опада, а на следећим расте.

1.2. Дату једнакост трансформишемо у $\frac{10a+b}{10b+c} = \frac{a}{c}$, тј. у $9a(c - b) = b(a - c)$. Дакле, $b(a-c)$ је дељиво са 9. Обзиром да је $0 < |a-c| \leq 8$, то b мора бити дељиво са 3. За сваку могућу вредност b имамо одговарајућу једначину по a и c. Разматрањем случајева $b = 3$, $b = 6$ и $b = 9$, добијамо да су решења: $(a, b, c) \in \{(1, 6, 4), (2, 6, 5), (1, 9, 5), (4, 9, 8)\}$.

1.3. Нека је O пресек правих које садрже краке трапеза и које су међусобно управне. Такође, нека су M и N средишта основица AB, односно CD. Како је $\angle AOM = \angle OAB = \angle ODC = \angle DON$, то су тачке O, M и N колинеарне. Стога је $MN = OM - ON = AB/2 - CD/2 = (AB - CD)/2$.

1.4. Одаберимо ма ког ученика. Од осталих 29 ученика, одабрани ученик би са сваким требало да је једном на дежурству, при чему он увек дежура са по два ученика и ни један од та два ученика неће бити на два дежурства. Дакле, 29 ученика би требало разбити на парове ученика који дежурају заједно са одабраним учеником, што је немогуће.

1.5. Претпоставимо да је такав избор речи могућ. Сваку од речи са мање од 7 слова продужићемо на све могуће начине до речи од 7 слова (од речи са 4 слова тако добијамо по нових 8 речи, од речи са 5 слова - по 4, од речи са 6 - по две речи). Све ове речи су међусобно различите. Стога би укупно требало да постоји бар $3 \cdot 8 + 10 \cdot 4 + 30 \cdot 2 + 5 = 129$ седмословних речи, што је немогуће јер речи од седам слова А, Б има укупно 128.

Други разред – А категорија

2.1. Нека су AA_1, BB_1, CC_1 тежишне дужи троугла ABC, T тежиште и S средиште дужи BT. Површина троугла TSC_1 је половина површине троугла TBC_1, шестина површине троугла CBC_1, тј. дванаестина површине целог троугла ABC. Странице троугла TSC_1 су: $TS = t_b/3, TC_1 = t_c/3$ и $SC_1 = TA/2$ (средња линија у троуглу ABT) $= ta/3$. Полуобим му је, дакле, $(t_a/3 + t_b/3 + t_c/3)/2 = t/3$. Стога, његова површина по Хероновом обрасцу износи $\frac{1}{9}\sqrt{t(t-t_a)(t-t_b)(t-t_c)}$. Површина целог троугла ABC је 12 пута већа, што је и требало доказати.

2.2. Позната је неједнакост: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ која важи за позитивне x и y. Ако се примени, редом, на парове $(s-a, s-b)$, $(s-b, s-c)$, $(s-c, s-a)$, добија се: $\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} \geq \frac{4}{c}$, $\frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \geq \frac{4}{a}$, $\frac{1}{s-c} + \frac{1}{s-a} \geq \frac{4}{b}$, одакле, сабирањем и дељењем са 2, добијамо тражену неједнакост.

2.3.

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ - (\operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 27^\circ) &= \frac{\sin 90^\circ}{\cos 9^\circ \cos 81^\circ} - \frac{\sin 90^\circ}{\cos 27^\circ \cos 63^\circ} \\
&= \frac{\cos 27^\circ \cos 63^\circ - \cos 9^\circ \cos 81^\circ}{\cos 9^\circ \cos 81^\circ \cos 27^\circ \cos 63^\circ} = 2\frac{2\cos 27^\circ \cos 63^\circ - 2\cos 9^\circ \cos 81^\circ}{2\cos 9^\circ \cos 81^\circ \cdot 2\cos 27^\circ \cos 63^\circ} \\
&= 2\frac{\cos 90^\circ + \cos 36^\circ - \cos 90^\circ - \cos 72^\circ}{(\cos 90^\circ + \cos 72^\circ)(\cos 90^\circ + \cos 36^\circ)} = 2\frac{\cos 36^\circ - \cos 72^\circ}{\cos 36^\circ \cos 72^\circ} \\
&= 2\frac{2\sin 54^\circ \sin 18^\circ}{\sin 54^\circ \sin 18^\circ} = 4.
\end{aligned}$$

2.4. Трећа једначина се може записати у облику: $(x-2)^2 + z^2 = 4$, одакле се уз услов $z \geq 0$ добија $0 \leq z \leq 2$. Ако је $y = -2$, друга једначина нема решења, а у супротном се добија да је $z = \frac{1}{2}\frac{(y+3)^2}{y+2}$. Дакле, за свако решење система је испуњено: $0 \leq \frac{1}{2}\frac{(y+3)^2}{y+2} \leq 2$. Једине вредности y за које је овај систем неједначина задовољен су $y = -3$ и $y = -1$. Затим, заменом y у полазни систем добијамо једино решење: $(x, y, z) = (2. -1, 2)$, јер $y = -3$ не задовољава прву једначину система.

2.5. Нека је $q = \sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$. Онда је $(q - \sqrt{3})^3 = 2$, тј. $\sqrt{3} = \frac{q^3+9q-2}{3q^2+3}$. Ако би q био рационалан број, тада би и $\sqrt{3}$ био рационалан број, што је контрадикција.

Трећи разред – А категорија

3.1. Јасно је да, ако је (x, y) решење система, и $(x, -y)$ је решење. Стога, да би решење било јединствено, мора бити $y = 0$. Онда се систем своди на: $2x = p$, $-x + 1 = 19 - p^2$, за који, да би имао решења, мора бити $2(p^2 - 18) = p$, тј. $p = -4$ или $p = 9/2$. Провером се утврђује да за ове вредности систем заиста има јединствено решење.

3.2. Нека је $z = z_1 = \cos(2\pi/p) + i\sin(2\pi/p)$. Уочимо да су сви остали бројеви z_k степени овог: $z_k = z^k$. Стога је тражени збир једнак $\sum_{k=0}^{p-1}(z^n)^k$. То је сума геометријске прогресије са почетним чланом $(z^n)^0 = 1$ и количником $z^n = \cos(2n\pi/p) + i\sin(2n\pi/p)$. Ако је n је дељиво са p, сви чланови геометријске прогресије су једнаки 1 и сума износи p. Ако n није дељиво са p, имамо да је збир једнак $\frac{z^{np}-1}{z^n-1} = 0$.

3.3. Кров дате куће, заједно за простором испод, може се поделити на једну правлину четворострану пирамиду (над већим квадратом) и косу тространу призму (кров над мањим квадратом, заједно за делом прислоњеним на приамиду). Висина пирамиде је 4, па је запремина једнака $8^2 \cdot 4/3 = 256/3$. Да бисмо нашли запремину призме, расецимо је по равни равни зида пребацимо доњи део на врх призме. Добија се нова права призма исте запремине, чија је висина 4, а основа једнакокраки правоугли троугао са основом 4. Његова површина је 4, а запремина призме износи 16. Укупна запремина испод крова је $256/3 + 16 = 304/3$.

3.4. Како је AB заједничка нормала за FB и AC, то је FB паралелно са AC. Стога, хомотетија или транслација која пресликава k_1 у k_2 слика и тачку B у тачку C, тако да у случају да су k_1 и k_2 неједнаких полупречника права BC пролази кроз центар хомотетије X на правој O_1O_2, а у случају да су једнаких полупречника - паралелна је са O_1O_2. Тако у првом случају тачка D лежи на кругу над пречником AX, а у другом - на нормали на O_1O_2 кроз A. Сем тога, D лежи, заправо, на луку овог круга између тачака D_1 и D_2, у којима овај круг сече тангенте из X на кругове k_1 и k_2 у случају различитих полупречника, односно на дужи између тачака D_1 и D_2 у којима нормала сече међусобно паралелне заједничке тангенте у случају једнаких полупречника. Приде, тачка D се не поклапа са тачком A. Обрнуто, ако тачка D задовољава све наведене услове, онда у случају једнаких полупречника паралела са O_1O_2 сече круг k_1 у бар једној тачки B и транслацијом k_1 до k_2 добијамо C, а у случају различитих полупречника, права DX сече круг k_1 у бар једној тачки B и тачку C добијамо хомотетијом. У оба случаја је FB паралелно са AC, па је AB, будући да је нормална на FB нормална и на AC, тако да тачке B и C задовољавају услове задатка, док је AD очигледно нормална на BC у оба случаја. Дакле, тражено геометријско место тачака је унија два кружна лука AD_1 и AD_2 (ако k_1 и k_2 имају различите полупречнике) или унија две дужи AD_1 и AD_2 (ако су полупречници једнаки).

3.5. Развојем детерминанте по првој колони, добија се да је она једнака збиру двеју детерминанти троугаоних матрица, па се лако добија њена вредност: $x \cdot x^{n-1} + (-1)^{n-1} y \cdot y^{n-1} = x^n - (-y)^n$.

Четврти разред – А категорија

4.1. Пребројаваћемо све функције које сликају скуп $S = \{1, 2, \dots, n\}$ у себе. Нека скуп A_i чине оне од тих функција које не узимају вредност i. Скуп A_i има $(n-1)^n$ елемената. Пресек по k скупова A_i је скуп функција које не узимају неких k вредности скупа S (тј. чији скуп слика је садржан у неком $n-k$-чланом скупу) и тај пресек има $(n-k)^n$ елемената. Свих функција има n^n, па користећи формулу укључења и искључења можемо наћи број оних функција које не припадају ни једном од скупова Аи, а то је управо десна страна дате једнакости. Међутим, број функција ван свих скупова A_i је, заправо, број свих пермутација скупа S. Њих има $n!$, чиме је дата једнакост доказана.

4.2. Ако је $(a-d)(b-c) > 0$, онда је $ab+bc+cd > ac+cb+bd$. Сходно томе, после извршене замене b и c, збир свих производа суседних бројева на кругу ће опасти. Пошто постоји коначан број могућих распореда бројева на кругу, број могућих збирова свих производа суседних бројева је коначан, тако да је могуће извршити само коначно много замена.

4.3. Практично, наћи ћемо најмањи број записан само јединицама који је дељив са 7777. Како је $7777 = 7 \cdot 1111$, при чему су 7 и 1111 узајамно прости, довољно је испитати када ће број бити дељив са 7 и 1111. Пре свега, он је дељив са 7 ако и само ако је број $10^m - 1$ дељив са 7, тј. онда када број 10^m даје остатак 1 при дељењу са 7. Остаци које, редом, дају $10, 10^2, \dots, 10^6$ при дељењу са 7 су: 3, 2, 6, 4, 5, 1, и после тога се остаци понављају. Дакле, $10^m - 1$ (а тиме и x) је дељиво са 7 ако и само ако $6 \mid m$. С друге стране, када се број x подели са 1111, добија се остатак 0, 1, 11 или 111 према томе да ли је остатак при дељењу m са 4 једнак

0, 1, 2 или 3. Дакле, x је дељиво са 1111 ако и само ако $4 \mid m$. Коначно, број x је дељив са 7777 ако и само ако $6 \mid m$ и $4 \mid m$, па је најмањи такав број $m = 12$, а томе одговара $n = 14287143$.

4.4. Како је p полином са целобројним коефицијентима, ако је $x \equiv y (\mathrm{mod}\, n)$ за неке целе бројеве x и y и природан број n, важиће и $p(x) \equiv p(y) (\mathrm{mod}\, n)$. Нека је m ма који цео број. Ако је $m \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$, онда је и $m \equiv 12 (\mathrm{mod}\, 3)$, па је $p(m) \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$. Ако је $m \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$, онда је и $m \equiv 7 (\mathrm{mod}\, 3)$, па је $p(m) \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$. Ако је $m \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$, онда је и $m \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 3)$, па је $p(m) \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$. Дакле, $p(m) \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$ за сваки цео број m, па дати полином нема целобројних нула.

4.5. Обзиром да је $[r_k n] \le r_k n < [r_k n] + 1$, сумирајући по k, добијамо:

$$n - \sum_{k=1}^{m} r_k n \le n - \sum_{k=1}^{m} [r_k n] < n - \sum_{k=1}^{m} (r_k n - 1),$$

тј. $0 \le f(n) < m$. Дакле, $f(n)$ не може узети већу вредност од $m - 1$ нити мању од 0, па треба још доказати да се те две вредности заиста достижу. Узмимо $n_0 = q_1 q_2 \ldots q_m$. Тада је, за свако k, број $r_k n_0$ цео, па је и $[r_k n_0] = r_k n_0$ и $f(n_0) = 0$. Узмимо сада $n_1 = n_0 - 1$. Обзиром да је $0 < r_k < 1$, то је $r_k n_1 = r_k n_0 - r_k$, дакле $r_k n_0 - 1 < r_k n_1 < r_k n_0$. Отуда је и $[r_k n_1] = r_k n_0 - 1$, па сумирајући по k добијамо: $f(n_1) = m - 1$.

Први разред – Б категорија

1.1. Бројева дељивих са 2 има 499, са 3 има 333, са 5 има 199, са 2 и 3 (дакле са 6) има 166, са 2 и 5 (дакле са 10) има 99, са 3 и 5 (дакле са 15) има 66 и, најзад, са 2, 3 и 5 (дакле са 30) има 33. Означимо са A, B, C, D, E, F, G редом број оних бројева који су дељиви само са 2, само са 3, само са 5, само се 2 и 3, само са 2 и 5, само са 3 и 5, и са сва три броја. Имамо: $G = 33$, $D + G = 166$ $(D = 133)$, $E + G = 99$ $(E = 66)$, $F + G = 66$ $(F = 33)$, затим $A + D + E + G = 499$ $(A = 267)$, $B + D + F + G = 333$ $(B = 134)$ и $C + E + F + G = 199$ $(C = 67)$. Стога је $A + B + C + D + E + F + G = 733$, што је број бројева мањих од 1000 који су дељиви бар једним од бројева 2, 3, 5. Остаје $999 - 733 = 266$ бројева који нису дељиви ни једним од бројева 2, 3, 5.

1.2. Једначина се може трансформисати у: $(x-1)^2 = 10(y^2 - y) + 3$. Она нема решења јер би потпун квадрат $(x-1)^2$ морао завршавати цифром 3.

1.3. Број троуглова чија ни једна страница није на датих 6 правих је број начина да се од преосталих 11 правих одаберу 3. Прва се може одабрати на 11 начина, друга на 10, трећа на 9, али обзиром да поредак није битан, по 6 таквих избора даје исти троугао. Дакле, број таквих троуглова је $11\cdot 10\cdot 9/6=165$. Број троуглова чија је једна страница на датих 6 правих је број начина да се одабере та права и да се одаберу још две праве од осталих 11. Прва се може одабрати на 11 начина, а друга на 10, али како поредак није битан, по два избора дају исти троугао. Дакле, број троуглова је: $6\cdot\frac{11\cdot 10}{2}=330$. Укупно има $165+330=495$ троуглова.

1.4. Нека је $q=\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{8}$. Тада важи: $(q+\sqrt{8})^2=(\sqrt{5}+\sqrt{8})^2$, тј. $q^2+2q\sqrt{8}=2\sqrt{15}$, тј. $q^4+4q^3\sqrt{8}+32q^2=60$. Ако би q био рационалан број, онда би и број $\sqrt{8}=\frac{60-q^4-32q^2}{4q^3}$ био рационалан, што је контрадикција.

1.5. За $F(a)$ постоји 3 могућности, за $F(c)$ 4 могућности, за $F(e)$ једна могућност и за остале елементе скупа A по 6 могућности. Укупан број пресликавања је, дакле, $3\cdot 6\cdot 4\cdot 6\cdot 1\cdot 6=2592$. Тражимо број 1-1 пресликавања. За $F(e)$ постоји једна могућност. За $F(a)$ постоје 2 могућности (јер је већ $F(e)=4$). За $F(c)$ постоје 3 могућности (јер је већ $F(e)=4$). За $F(b),F(d),F(f)$ постоје по 3, 2, односно 1 могућност избора, редом (не сме се пресликати у већ искоришћени елемент). Укупан број 1-1 пресликавања је, дакле, $1\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot 1=36$.

Други разред – Б категорија

2.1. Нека су O_1,O_2,O центри кругова k_1,k_2,k редом, и нека су H_1,H_2,H подножја управних из ових центара на праву p. Означимо: $HH_1=x$, $HH_2=y$, $H_1H_2=z=x+y$. Спуштајући нормалу из O на O_1H_1, и применом Питагорине теореме, добијамо: $x=2\sqrt{r_1r}$. Слично, спуштајући нормалу из O на O_2H_2 добијамо: $y=2\sqrt{r_2r}$. Најзад, спуштајући нормалу из O_2 на O_1H_1 добијамо: $z=2\sqrt{r_1r_2}$. Из једнакости $z=x+y$, добија се тражена једнакост.

2.2. Треба уочити да је именилац за свако x позитиван. Наиме, за $x\leq 0$ сви сабирци у имениоцу су ненегативни (и $1>0$), за $0<x<1$ је $x^{12}>0$, $-x^9+x^4=x^4(1-x^5)>0$ и $-x+1>0$. Најзад, за $x\geq 1$ је $x^{12}-x^9=x^9(x^3-1)\geq 0$, $x^4-x=x(x^3-1)\geq 0$ и $1>0$. Стога се неједначина из задатка своди на неједначину: $x^2+x+2-|3x+1|>0$. Ако је $x>-1/3$, последња неједначина се своди на: $(x-1)^2>0$, тј. на $x\neq 1$. Ако је $x\leq -1/3$, своди се на: $x^2+4x+3>0$ чија су решења: $x<-3$ и $x>-1$. Када се ова решења обједине, скуп решења полазне неједначине је: $(-\infty,-3)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

2.3. Применом Питагорине теореме лако се израчуна $AE=13$. Троуглови AMD и EBA су слични. Стога је $DM:DA=AB:AE$, одакле се добија да је $DM=120/13$.

2.4. Из Вијетових правила је $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=-1/2p^2$, па је $x_1^2+x_2^2=p^2+\frac{1}{p^2}$. Даље је: $x_1^4+x_2^4=p^4+\frac{1}{p^4}+2$. Користећи неједнакост аритметичке и геометријске средине, добија се: $p^4+\frac{1}{p^4}\geq\sqrt{2}$, тако да је $x_1^4+x_2^4\geq 2+\sqrt{2}$.

2.5. Нека је $z=a+ib$. Тада је $\frac{z-1}{z+1}=\frac{a^2+b^2-1+2ib}{(a+1)^2+b^2}$, тако да је број $\frac{z-1}{z+1}$ чисто имагинаран ако и само ако је $a^2+b^2-1=0$, тј. ако и само ако је $|z|=1$.

Трећи разред – Б категорија

3.1. Посматраћемо само оне вредности променљивих $x_1,\ldots,x_{1000}$ за које је неједначина дефинисана (тј. x_i није облика $k\pi$ за целобројно k). Тада је $\sin^2 x_i$ позитивно. Обзиром да за позитиван број t важи: $t+1/t\geq 2$, при чему једнакост важи ако и само ако је $t=1$, то су сви сабирци облика $\sin^2 x_i+\frac{1}{\sin^2 x_i}$ већи или једнаки 2, тако да је лева страна неједначине већа или једнака 2000, те је мања или једнака 2000 ако и само ако је једнака 2000, а сви сабирци облика $\sin^2 x_i+\frac{1}{\sin^2 x_i}$ су једнаки 2. То се дешава ако и само ако је $\sin x_i=\pm 1$, тј. $x_i=\pi/2+k_i\pi$, где су k_i цели бројеви који се могу произвољно и независно одабрати.

3.2. Посматрајмо попречни пресек $ABCD$ купе са било којом равни која садржи осу купе. Нека су полупречници датих сфера R и $R\sqrt{30}$. Ако је H подножје нормале из тачке D на AB, имамо: $BH=(AB+CD)/2=(AD+BC)/2=AD=2R/\sin\alpha$, где је α тражени угао. Отуда је $BD=\sqrt{BM^2+MD^2}=\frac{2R}{\sin\alpha}\sqrt{1+\sin^2\alpha}$. С друге стране је $BD=2R\sqrt{30}\sin\alpha$, тј. $1+\sin^2\alpha=30\sin^4\alpha$. Одатле, $\sin\alpha=1/5$, тј. $\alpha=\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$.

3.3.

$$\begin{aligned}\cos 24^\circ+\cos 48^\circ-(\cos 84^\circ+\cos 12^\circ)&=2\cos 36^\circ\cos 12^\circ-2\cos 48^\circ\cos 36^\circ\\ =2\cos 36^\circ(\cos 12^\circ-\cos 48^\circ)&=4\cos 36^\circ\cos 18^\circ\cos 30^\circ=2\cos 36^\circ\sin 18^\circ\\ =\frac{4\sin 18^\circ\cos 18^\circ\cos 36^\circ}{2\cos 18^\circ}&=\frac{2\sin 36^\circ\cos 36^\circ}{2\cos 18^\circ}=\frac{\sin 72^\circ}{2\cos 18^\circ}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

3.4. Обзиром да су сви чланови низа цели бројеви и да је

$$a_{n+2} = 4 + a_0 a_1 \ldots a_n a_{n+1} = 4 + (a_{n+1} - 4)a_{n+1} = a_{n+1}^2 - 4a_{n+1} + 4 = (a_{n+1} - 2)^2,$$

за $n \geq 2$, то су сви чланови низа почев од a_2 потпуни квадрати.

3.5. Нека су a, b, c странице троугла, нека је $t = t_a$ тежишна дуж која одговара страници a и нека је $AM = \lambda t$. Из косинусне теореме је $\cos\angle B = (a^2 + c^2 - b^2)/2ac$, и $t^2 = c^2 + (a/2)^2 - ca\cos\angle B$, па заменом добијамо $t^2 = c^2 + a^2/4 - (a^2 + c^2 - b^2)/2 = b^2/2 + c^2/2 - a^2/4$. Сада, применом косинусне теореме на троугао BAA_1 закључујемо: $\cos\angle BAA_1 = (c^2 + t^2 - a^2/4)/2ct$. Затим, применом косинусне теореме на троугао BAM добијамо: $BM^2 = c^2 + (\lambda t)^2 - 2c\lambda t\cos\angle BAA_1 = c^2 + \lambda^2 t^2 - \lambda(c^2 + t^2 - a^2/4)$. Слично, применом косинусне теореме прво на троугао CAA_1, а затим на CAM, закључујемо да је $CM^2 = b^2 + \lambda^2 t^2 - \lambda(b^2 + t^2 - a^2/4)$. Како је још $AM^2 = \lambda^2 t^2$, добијамо: $AM^2 + BM^2 + CM^2 = 3\lambda^2 t^2 - \lambda(b^2 + c^2 - a^2/2 + 2t^2) + (b^2 + c^2) = 3t^2\lambda^2 - 4t^2\lambda + (b^2 + c^2)$. Ово је квадратна функција по λ, која достиже минимум за $\lambda = 2/3$. Другим речима, тачка M са траженим особинама је тежиште троугла ABC.

Четврти разред – Б категорија

4.1. Нека је дат реалан број y. Претпоставимо да је $y \geq 2$. Ако је $-x + 4 = y$, онда је $x = 4 - y \leq 2$. Ако је $x^2 - 4x + 6 = y$, онда је дискриминанта једначине по x једнака $4y - 8 \geq 0$ и решења су: $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{y-2}$, при чему је $x_2 \leq 2$ и $x_1 > 2$, или $x_1 = x_2 = 2$. Дакле, ако је $f(x) = y$, за $x \leq 2$ је и $x^2 - 4x + 6 = y$, па услов $x \leq 2$ задовољава само $x = x_2$, а за $x > 2$ је $-x + 4 = y$, што је у контрадикцији са $x > 2$. Сходно томе, ако је $f(x) = y \geq 2$, постоји јединствена вредност x која то задовољава и то је $x = 2 - \sqrt{y-2}$. Нека је сада $y < 2$. Ако је $-x + 4 = y$, онда је $x = 4 - y > 2$. С друге стране, дискриминанта једначине $x^2 - 4x + 6 = y$ је негативна, па та једначина нема решења по x. Дакле, ако је $f(x) = y$, за $x \leq 2$ је и $x^2 - 4x + 6 = y$, што је немогуће, а за $x > 2$ је $-x + 4 = y$, тј. $x = 4 - y$ и задовољава $x > 2$. Све у свему, за свако реално y постоји јединствено x такво да је $f(x) = y$. Дакле, функција f је бијекција и поседује инверзну функцију. Штавише, $f^{-1}(y) = 2 - \sqrt{y-2}$ за $y \geq 2$, и $f^{-1}(y) = 4 - y$ за $y < 2$.

4.2. Ако би $\operatorname{tg} 10^\circ$ био рационалан број, рационалан би био и број $\operatorname{tg} 20^\circ = \frac{2\operatorname{tg} 10^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 10^\circ}$, а онда и $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 10^\circ}{1 - \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 10^\circ}$. Међутим, $\operatorname{tg} 30^\circ = 1/\sqrt{3}$ - ирационалан број. Контрадикција!

4.3. Имамо: $a_{2001} = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{2001} - a_{2000}) = 2 + (1 + 3 + 5 + \cdots + 3999) = 2 + 2000^2 = 4000002$.

4.4. Минималан број савијања је увек паран. Наиме, ако при минималном броју савијања вршимо k савијања паралелно једној страни квадрата и l савијања паралелно другој, мора бити $k = l$ јер би, иначе, нпр. при $k < l$ било могуће уместо оних l савијања извршити k савијања (истоветних као већ извршених k) и исти циљ би се постигао са $2k < k + l$ савијања. Ако је $n = 2^k$, покажимо да је минималан број савијања $2k$. Наиме, очигледно је толико савијања довољно (преполовимо k пута како ширину, тако и висину квадрата). Са мање савијања је немогуће добити квадрат 1×1, обзиром да се при сваком савијању површина комада папира смањује највише 2 пута, тако да ако је l број савијања којима се добија квадрат 1×1, површина полазног папира је највише 2^l. Знајући да је површина полазног комада папира 2^{2k}, добијамо $l \geq 2k$. Ако је $2^k < n < 2^{k+1}$, покажимо да је минималан број савијања $2(k+1)$. Пре свега, лако је са 2 савијања добити комад формата $2k \times 2k$, који се затим са још $2k$ савијања претвори у комад 1×1. Да је то минималан број, добија се поново разматрањем површине. У овом случају, ако је довољно l савијања, површина полазног папира је највише 2^l. Међутим, то је сада веће од 2^{2k}, тј. $l > 2k$. Обзиром да је минималан број савијања већи од $2k$ и паран, то је $l = 2(k+1)$.

4.5. Последње две цифре броја $3k$ зависе само од последњих двеју цифара броја k. Стога, можемо исписати парове последњих цифара за 3^n: 03, 09, 27, 81, 43, 29, 87, 61, 83, 49, 47, 41, 23, 69, 07, 21, 63, 89, 67, 01. Затим се парови последњих цифара понављају. Очигледно, претпоследња цифра је увек парна, што је и требало доказати.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА

Први разред – А категорија

1.1. Како је $xyz + xy + xz + yz + x + y + z + 1 = (x+1)(y+1)(z+1)$, дата једначина је еквивалентна једначини $(x+1)(y+1)(z+1) = 2001$. Претпоставимо да је $0 < x < y < z$. Како је $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$, добијамо решење $(2, 22, 28)$, из кога пермутовањем добијамо осталих 5 решења.

1.2. Очигледно је да $n = 1$ задовољава једначину. Ако је $n \geq 2$, тада је:

$$\begin{aligned} 11^n - 9^n &= 2(11^{n-1} + 11^{n-2} \cdot 9 + \cdots + 9^{n-1}) \\ &> (8^{n-1} + 8^{n-2} \cdot 7 + \cdots + 7^{n-1}) + (6^{n-1} + 6^{n-2} \cdot 5 + \cdots + 5^{n-1}) \\ &= (8^n - 7^n) + (6^n - 5^n). \end{aligned}$$

Следи да је, за $n \geq 2$, $5^n + 7^n + 11^n > 6^n + 8^n + 9^n$, па је $n = 1$ једино решење.

1.3. Пошто је $\angle CAR = \angle RPC = 60°$, четвороугао $ARCP$ је тетиван, па је $\angle APR = \angle ACR$. Аналогно, $\angle BQR = \angle BCR$. Одатле, $\angle APC + \angle BQC = \angle APR + \angle RPC + \angle BQR + \angle RQC = \angle ACR + 60° + \angle BCR + 60° = \angle ACB + 120° = 180°$, па је и $AP \parallel BQ$.

1.4. $\angle CBE = \angle CDE = 45°$, као периферијски углови над тетивом CE. Одатле је угао ABE прав, и AE је пречник круга. Дужи BC и DE су паралелне (због подударности наизменичних углова BCD и CDE), па је четвороугао $BCED$ једнакокраки трапез. Дијагонале CD и BE тог трапеза су подударне. Имамо: $AB^2 + CD^2 = AB^2 + BE^2 = AE^2$, на основу Питагорине теореме. Слично се показује да је и $BC^2 + DE^2$ једнако квадрату пречника круга, па је $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DE^2$.

1.5. Означимо темена осмоугла редом бројевима од 1 до 8. У случају када су сва четири црвена темена узастопна, сва бојења су еквивалентна. Ако су три црвена темена узастопна, а четврто црвено им није суседно, постоје 3 нееквивалентна бојења: црвена су темена 1,2,3,5 или 1,2,3,6 или 1,2,3,7. Сва бојења у којима постоје тачно два суседна црвена темена, еквивалентна су једном од следећа три: црвена темена су 1,2,4,6, или 1,2,4,7, или 1,2,5,7. Бојења у којима постоје два пара суседних црвених темена, при чему ти парови нису суседни, еквивалентна су бојењима 1,2,4,5 или 1,2,5,6. Коначно, постоји само једно нееквивалентно бојење у коме нема узастопних црвених темена. Дакле, укупан број нееквивалентих бојења једнак је $1 + 3 + 3 + 2 + 1 = 10$.

Други разред – А категорија

2.1. Користећи да је $2ab \leq a^2 + b^2$, имамо:

$$\begin{aligned}(\sin x + \sin y + \sin z)^2 =& \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z \\ &+ 2(\sin x \sin y + \sin y \sin z + \sin z \sin x) \\ \leq& \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z + 2(\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z) \\ =& 3(\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z).\end{aligned}$$

Аналогно је $(\cos x + \cos y + \cos z)^2 \leq 3(\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z)$. Према томе, $(\sin x + \sin y + \sin z)^2 + (\cos x + \cos y + \cos z)^2 \leq 9$. Ако је $\sin x + \sin y + \sin z \geq 2$, онда је $\cos x + \cos y + \cos z \leq \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$.

2.2. Неједначине можемо написати у облику $-x^2 - 2xy + 7y^2 \leq 1 - \dfrac{2}{a+1}$, $3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2$. Када помножимо прву неједначину са 2 и саберемо са другом, добијамо $(x+3y)^2 \leq -\dfrac{4}{a+1}$. Како је лева страна увек ненегативна, добијамо да мора бити $a < -1$. Доказаћемо да за свако $a < -1$ заиста постоји решење система неједначина. Како је тада $-\dfrac{4}{a+1} > 0$, довољно је показати да систем $(x+3y)^2 = 0$, $3x^2 + 10xy - 5y^2 = -2$ има решења. Лако се проверава да су решења овог система $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$.

2.3. $2001^x \geq 1 \Rightarrow 1 - 2001^x \leq 0 \Rightarrow (2001^x)^{1-2001^x} \leq 1$. Означимо са S леву страну неједначине. Онда имамо $S \leq 2001$, па мора бити $S = 2001$, тј. $x = 0$.

2.4. Означимо средишта дужи A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 са A, B, C, D редом. Лако се показује да је $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2})$, као и $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{B_2C_2})$. Пошто се вектори $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{B_2C_2}$ добијају од вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_2B_2}$ ротацијом за 90° у истом смеру, следи да се и вектор $\overrightarrow{BC}$ добија истом том ротацијом од $\overrightarrow{AB}$, па су дужи BC и AB међусобно нормалне и подударне. Исто се показује и за преостале парове суседних страница четвороугла $ABCD$, па он заиста јесте квадрат.

2.5. Приметимо да свака змијица мора имати заједнички квадратић са бар једном од дијагонала. Ако свака од четири змијице има заједнички квадратић са обе дијагонале, тада су на дијагоналама разнобојна поља. Зато претпоставимо да постоји змијица која има заједнички квадратић

2.2. $x^2 + 2xy - 7y^2 \to \sup$; $3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2$
Наћи $\lambda > 0$ за које је
$\lambda(3x^2 + 10xy - 5y^2) - (x^2 + 2xy - 7y^2)$
позитивно семидефинитно и анулира
се у активној тачки.
$\hat{\lambda} = 1/2$, $\hat{x} = \mp 3/2$, $\hat{y} = \pm 1/2$; $\hat{v} = -1$ ...

само са једном дијагоналом. Лако је видети да је та змијица у блику слова Г, и да се сва њена поља морају налазити уз руб табле. Без умањења општости, можемо претпоставити да она покрива поље у доњем левом углу табле, два поља изнад њега, и поље до њега. Уколико преостале 3 змијице имају по један заједнички квадратић са том дијагоналом, тада су на њој различите боје. У супротном, нека од преостале 3 змијице има заједничких поља само са другом дијагоналом, па она мора бити опет у облику слова Г, при чему покрива доњи десни угао табле. Једини такав распоред змијица јесте са још две змијице у облику слова Г, када су друга и трећа врста обојене различитим бојама.

Трећи разред – А категорија

3.1. Из $y > x > 1$ следи $\log_x y > 1$ и $\log_x(\log_x y) > \log_y(\log_x y)$. Из $1 < x < z$ следи $0 < \log_z x < 1$, а из $1 < y < z$ следи $\log_z(\log_z x) > \log_y(\log_z x)$. Добијамо:

$$\begin{aligned}\log_x(\log_x y) + \log_y(\log_y z) + \log_z(\log_z x) &\\ > \log_y(\log_x y) + \log_y(\log_y z) + \log_y(\log_z x) &\\ = \log_y(\log_x y \cdot \log_y z \cdot \log_z x) = \log_y 1 = 0. &\end{aligned}$$

3.2. Како је $x_3 = \dfrac{1+b}{a}$, $x_4 = \dfrac{1+a+b}{ab}$, $x_5 = \dfrac{1+a}{b}$, $x_6 = a$, $x_7 = b$, то је дати низ периодичан са периодом 5, па је $x_{2001} = a$.

3.3. *Први случај:* права AB сече раван α у тачки O. Нека је k круг који садржи тачке A, B, и додирује α у тачки K. Тада је OK тангента тог круга, па је потенција тачке O у односу на k једнака $OA \cdot OB = OK^2$. Дакле, тачка K се налази на кругу ℓ са центром O и полупречником $\sqrt{OA \cdot OB}$. Нека је N произвољна тачка круга ℓ, и n круг који садржи тачке A, B, N. Потенција тачке O у односу на тај круг једнака је $OA \cdot OB = ON^2$, па ON мора бити његова тангента. Пошто је ON пресечна права равни α и равни круга n, следи да n додирује α. Тиме је доказано да је круг ℓ тражено геометријско место тачака. *Други случај:* $AB \parallel \alpha$. Нека је β симетрална раван дужи AB, и $s = \alpha \cap \beta$. Нека је k круг који садржи тачке A, B, и додирује α у тачки K. Ако $K \notin \beta$, онда би тачка симетрична са K у односу на β била још једна заједничка тачка круга k и равни α. Дакле, $K \in s$. Нека је $N \in s$ произвољна тачка. Лако се показује да круг описан око троугла ABN додирује раван α. Дакле, у овом случају, геометријско место тачака је права s.

3.4. Да би се први правоугаоник поклопио са другим, потребно је применити паран број пресликавања. Међутим, тиме ће истакнута дијагонала остати паралелна свом почетном положају. Дакле, није могуће.

3.5. Пошто четврти степен непарног броја увек даје остатак 1 при дељењу са 16, следи да је збир облика $r_1^4+\cdots+r_{15}^4$ дељив са 16 ако и само ако су сви сабирци парни, па важи $16n \in S \Leftrightarrow n \in S$. Пошто $31 \notin S$, онда ни један од бројева облика $31\cdot 16^m$ није у S, па је $\mathbb{N}\setminus S$ бесконачан скуп.

Четврти разред – А категорија

4.1. Види задатак 3.1.

4.2. Међу десетоцифреним бројевима, има бар $\frac{1}{7}\cdot 9\cdot 10^9 > 10^9$ дељивих са 7. За два десетоцифрена броја, рећи ћемо да су истог типа, ако се декадни запис једног може добити из декадног записа другог премештањем цифара. Број различитих типова десетоцифрених бројева једнак је $\binom{19}{10}-1 = 92377 < 10^5$. По Дирихлеовом принципу, бар један тип садржи бар $10^9/10^5 = 10000$ бројева дељивих са 7.

4.3. Види задатак 3.3.

4.4. Правоугаонике поређамо на следећи начин. Ставимо први правоугаоник тако да му је дужа страница на x-оси, а краћа на y-оси. На њега ставимо други, тако да му је краћа страница на y-оси, а дужом се наслања на први, и тако све док не ставимо и последњи правоугаоник. Добијену фигуру можемо сместити у правоугаоник страница 1 и l, где је l збир дужина краћих страница. Површина те фигуре једнака је површини квадрата, тј. 1, а површина правоугаоуника у који је она смештена једнака је l. Одатле, $l \geq 1$.

4.5. Види задатак 3.5.

Први разред – Б категорија

1.1. $3|(x+y+2)^2 \Rightarrow 3|x+y+2 \Rightarrow 9|(x+y+2)^2 \Rightarrow 3|xy+1$. Треба да буде

$$(2x-y+4)^2+3(y+4)^2=60$$

$x+y\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$ и $xy\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$. Прва релација важи у случајевима:

$$\begin{aligned}&1.\ x\equiv 1, y\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)\Rightarrow xy\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)\\&2.\ x\equiv 0, y\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)\Rightarrow xy\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)\\&3.\ x\equiv 2, y\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)\Rightarrow xy\equiv 1(\mathrm{mod}\,3).\end{aligned}$$

Дакле, никада није $xy\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$, и овакви цели бројеви не постоје.

1.2. $\triangle DEC$ је једнакокраки, па $\angle ECD=\angle CDB=\phi$. Одатле, $\angle DEA=2\phi$, као спољашњи угао у $\triangle DEC$. Даље, $\angle AOD=2\phi$, као централни угао над тетивом AD. Пошто је $\angle AOD=\angle DEA$, четвороугао $AOED$ је тетиван.

1.3.

$$\begin{aligned}&\frac{2a^2x^2+axy-3y^2}{2ax+3y}+\frac{3axy+3y^2-ax-y}{1-3y}+\frac{1-6y+9y^2}{3y-1}\\&\qquad=\frac{(ax-y)(2ax+3y)}{2ax+3y}+\frac{(ax+y)(3y-1)}{1-3y}+\frac{(3y-1)^2}{3y-1}\\&\qquad=ax-y-(ax+y)+3y-1=y-1>0\end{aligned}$$

1.4. Нека је $\angle ABC=\angle ACB=\beta$, $\angle ADE=\angle AED=\phi$ и $\angle EDC=x$. Из $\triangle ABD$ је $\phi+x=\beta+90°$, а из $\triangle DEC$ — $\phi=x+\beta$. Из ове две релације, добија се $x=45°$.

1.5. Види задатак 1.5 за А категорију.

Други разред – Б категорија

2.1. Очигледно мора бити $x>0$ и $y\neq 0$. Закључујемо и да x није дељив са 3. Такође је $x\neq 3k+1$, јер бисмо у противном имали да је $x^3=(3k+1)^3=3n+1=2+3y^2$, тј. за неки ненегативан цео број n, било би $3(n-y^2)=1$, што је немогуће. Остаје једина могућност да је $x=3k+2$, за неки цео број k. Тада је $x^3=(3k+2)^3=3(9k^3+18k^2+12k+2)+2=2+3y^2$, одакле је $y^2=9k^3+18k^2+12k+2$, тј. $y^2=3p+2$ за неки цео број p. Контрадикција. Дакле, такви цели бројеви x и y не постоје.

2.2. а) Може, на пример за $a=500$, $b=1$, $c=-1$. б) Не може, јер је 2002 број облика $4k+2$. Ако би било $b^2-4ac=4k+2$, тада би b^2 било дељиво са 2, па је и b парно, $b=2l$. Тада је $4l^2-4ac=4k+2$, што је немогуће.

в) Не може. Из $b^2 - 4ac = 4k + 3$ следи да је b непарно, $b = 2m + 1$. Тада је $D = 4(m^2 + m - ac) + 1 = 4k + 3$, што је немогуће.

2.3. Нека је $A_1B_1C_1D$ уписани правоугаоник, тако да је $A_1 \in AD$, $B_1 \in EF$, $C_1 \in CD$. Нека је $x = CC_1$, $y = AA_1$. Како је $\frac{y}{1} = \frac{2-x}{2}$, то је $y = 1 - \frac{x}{2}$, па је површина правоугаоника једнака $(6-x)(3-y) = (6-x)(2+\frac{x}{2}) = -\frac{x^2}{2} + x + 12$. Она је максимална за $x = 1$ (и $y = \frac{1}{2}$), и тада је једнака $\frac{25}{2}cm^2$.

2.4. Види задатак 2.4 за А категорију.

2.5. Без умањења општости, можемо претпоставити да се A и A_1 поклапају, да су тачке A, B, B_1 колинеарне, при чему се B и B_1 налазе са исте стране тачке A, а да се тачке C и C_1 налазе са разних страна праве AB. Нека је $C_2 = BC \cap AC_1$. Права AB је симетрала унутрашњег угла у темену A троугла ACC_2, па је $\frac{BC}{AC} = \frac{BC_2}{AC_2}$. Како је $BC_2 \parallel B_1C_1$, на основу Талесове теореме имамо: $\frac{BC_2}{AC_2} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1}$. Из ове две једнакости добијамо $\frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1}$, што је еквивалентно траженој једнакости.

Трећи разред – Б категорија

3.1. Види задатак 2.1 за А категорију.

3.2.

$$
\begin{aligned}
&(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})^2 = 0 \\
\Rightarrow &2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{d} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{d} + 2\vec{c} \cdot \vec{d} + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 = 0 \\
\Rightarrow &\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d} + \vec{c} \cdot \vec{d} = -2.
\end{aligned}
$$

3.3. Означимо $a = AB$, $\beta = \angle A_1AB$, $\delta = \angle AA_1B$, $P = AA_1 \cap CC_1$, $Q = AA_1 \cap BB_1$, $R = BB_1 \cap CC_1$. Онда је $\mathcal{P}(\triangle ABC) = a^2\sqrt{3}/4$. Применом косинусне теореме на $\triangle AA_1C$, добијамо $AA_1 = a\sqrt{7}/3$. Применом синусне теореме на $\triangle AA_1B$, добијамо $\sin\beta = \sqrt{3}/(2\sqrt{7})$, $\sin\delta = 3\sqrt{3}/(2\sqrt{7})$, а њеном применом на $\triangle APC_1$, добијамо да је $AP = a/\sqrt{7}$, и на $\triangle QA_1B$, добијамо да је $QA_1 = a/(3\sqrt{7})$. Дакле, $\mathcal{P}(\triangle PQR) = PQ^2\sqrt{3}/4 = a^2\sqrt{3}/28$. Тражени однос је 7:1.

3.4. За $x > 1$ се добија:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{x-1}(x-1)^{0,5(\log_2(x-1)^2)^2-7} = \left(\frac{x-1}{4}\right)^6$$

$$(x-1)^{0,5(\log_2(x-1)^2)^2-8} = \left(\frac{x-1}{4}\right)^6.$$

Логаритмовањем за основу 2 имамо:

$$\left(\frac{1}{2}\left(2\log_2(x-1)\right)^2 - 8\right)\log_2(x-1) = 6\log_2(x-1) - 6\log_2 4$$

$$\left(2\log_2^2(x-1) - 8\right)\log_2(x-1) = 6\log_2(x-1) - 12.$$

Уведимо смену $\log_2(x-1) = t$. Добијамо: $t^3 - 7t + 6 = 0$. $t_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 3$, $t_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 5$, $t_3 = -3 \Rightarrow x_3 = \frac{9}{8}$.

3.5. Види задатак 3.5 за А категорију.

Четврти разред – Б категорија

4.1. Према Вијетовим формулама имамо $a+b+c=0$, $ab+ac+bc=-1$, $abc=-1$. Одатле, $0=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$, па је $a^2+b^2+c^2=2$. Даље, $a^3=a-1 \Rightarrow a^4=a^2-a \Rightarrow a^8=a^4-2a^3+a^2=2a^2-3a+2$. Аналогно $b^8=2b^2-3b+2$ и $c^8=2c^2-3c+2$, па је $a^8+b^8+c^8=2(a^2+b^2+c^2)-3(a+b+c)+6=10$.

4.2. Једно решење је $(0,0)$. Ако је $x \neq 0$, онда је и $y \neq 0$, и обрнуто. Када прву једначину поделимо са xy, а другу са x^2y^2, добија се $x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}=18$, $x^2+\frac{1}{x^2}+y^2+\frac{1}{y^2}=208$. Уведимо смену: $x+\frac{1}{x}=u$, $y+\frac{1}{y}=v$. Из $u+v=18$, $u^2+v^2=212$, налазимо $u_1=4, v_1=14$, $u_2=14, v_2=4$. Сада је $x+\frac{1}{x}=4$, $y+\frac{1}{y}=14$, или обрнуто. Решења система су парови: $(0,0)$, $(2+\sqrt{3}, 7+4\sqrt{3})$, $(2+\sqrt{3}, 7-4\sqrt{3})$, $(2-\sqrt{3}, 7+4\sqrt{3})$, $(2-\sqrt{3}, 7-4\sqrt{3})$, $(7+4\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$, $(7+4\sqrt{3}, 2-\sqrt{3})$, $(7-4\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$, $(7-4\sqrt{3}, 2-\sqrt{3})$.

4.3. Нека је R полупречник основе, а H висина описане купе. Из $\frac{r}{R}=\frac{H-h}{H}$ налазимо $R=\frac{rH}{H-h}$, па је $V=\frac{\pi}{3}R^2H=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{r^2H^3}{(H-h)^2}$. Како је $V'(H)=$

4.2. $\begin{cases} (xy+1)(x+y)=18xy \\ (x^2y^2+1)(x^2+y^2)=208x^2y^2 \end{cases}$

$\begin{cases} (p+1)s=18p \\ (p^2+1)(s^2-2p)=208p^2 \end{cases}$

$p(p^2-4p+1)(p^2-52p+1)=0$ ...

$\frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{H^2}{(H-h)^3} \cdot (H-3h)$, за $H > 3h$ је $V'(H) > 0$, а за $H < 3h$ је $V'(H) < 0$. Дакле минимум функција V достиже за $H = 3h$.

4.4. Означимо са x и y редом реални и имагинарни део броја z. Тада је скуп A права $y = -x$, а B круг $(x-5)^2 + y^2 = 4$. Најмање одстојање тачака ове праве и круга је $\frac{5}{\sqrt{2}} - 2$.

4.5. Види задатак 3.5 за А категорију.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА РЕПУБЛИЧКОГ ТАКМИЧЕЊА

Први разред – А категорија

1.1. Претпоставимо да је то могуће. Тада је збир бројева тих трију група једнак $102k$, $203m$ и $304n$. Имамо: $102k + 203m + 304n = 1 + 2 + \cdots + 100$, тј. $101(k + 2m + 3n) + k + m + n = 101 \cdot 50$, па $101 \mid k + m + n$. Одатле је $k+m+n \geq 101$, па је и $101(k+2m+3n)+k+m+n > 101 \cdot 50$. Контрадикција. Дакле, немогуће је првих сто природних бројева поделити у такве три групе.

1.2. Нека је P' тачка праве AB за коју је $KP' = MP'$. Приметимо да је $\angle KMN = 180^\circ - \angle BKC - \angle KCM = 180^\circ - \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{\beta}{2} = 90^\circ - \angle KBC = \angle MKN$. Одавде закључујемо $KN = MN$. Како је $MP' = KP'$, имамо да је $\triangle KNP' \cong \triangle MNP'$. Одатле следи: $\angle P'KN = \angle P'MN$ и $P'N \perp BK$, па је M ортоцентар троугла $P'BN$. Зато, $\angle P'MN = 180^\circ - \angle P'BN = \angle P'KN$. Дакле, тачке P', B, K, N леже на једном кругу, односно $P' = P$.

1.3. Ако је $a > c$ онда је $a = (1+x)c$, где је $x > 0$. Слично, $b = (1+y)c$, $y > 0$. Тражена неједнакост је еквивалентна са $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{(1+x)(1+y)}$, одакле квадрирањем добијамо $2\sqrt{xy} \leq 1 + xy$, тј. $(1 - \sqrt{xy})^2 \geq 0$.

1.4. Означимо са A и B крајеве линије ℓ, и са $C \in k$ тачку дијаметрално супротну тачки A. Тада је $B \neq C$, јер је дужина изломљене линије ℓ мања од пречника круга. Нека је p симетрала дужи BC. Претпоставимо да постоји тачка D заједничка за p и ℓ. Део линије између D и B пресликамо симетрично у односу на p. Тако добијамо изломљену линију дузине $61mm$, која спаја A и C, што је немогуће.

1.5. Нека је s права те равни, која није паралелна ни једној од правих одређених двема тачкама скупа $\mathcal{A}$. Повуцимо кроз сваку тачку скупа A праву паралелну са s. Означимо те праве са $s_1, \dots, s_{2000}$, тако да је права s_k лежи између s_{k-1} и s_{k+1}, за све $2 \leq k \leq 1999$, и тачке скупа $\mathcal{A}$ са $A_1, \dots, A_{2000}$ тако да $A_k \in s_k$ за све k. Четворке тачака

$$\{A_1, A_2, A_3, A_4\}, \dots, \{A_{1997}, A_{1998}, A_{1999}, A_{2000}\}$$

одређују четвороуглове који немају заједничких тачака. Обојимо две наспрамне странице сваког четвороугла плаво, друге две наспрамне странице црвено, и дијагонале жуто. Тако су испуњени услови задатка.

Други разред – А категорија

2.1. Решења одговарајуће једначине су a и a^2. Како се између ова два броја мора наћи 5 целих, мора бити $a \notin [0, 1]$, па је решење неједначине интервал $[a, a^2]$. Како он садржи тачно 5 целих бројева, мора бити $4 \leq a^2 - a < 6$. *Први случај:* $-2 < a \leq \dfrac{1 - \sqrt{17}}{2}$. Скупу решења припадају -1, 1, 0, а бројеви 2 и 3 ако и само ако је $3 \leq a^2 < 4$. *Други случај:* $\dfrac{1 + \sqrt{17}}{2} \leq a < 3$. Скупу решења сигурно припадају 3 и 4, а бројеви 5, 6 и 7 ако и само ако је $7 \leq a^2 < 8$. Одговор: $a \in (-2, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{7}, \sqrt{8})$.

2.2. Нека су x и y тражени бројеви, $x > y$. Њихов збир може бити само $10! = 3628800$, јер је $9!$ шестоцифен, а $11! = 39916800$, што не може бити збир два седмоцифрена броја. С друге стране, збир цифара седмоцифреног броја, ако је то факторијел, може бити само 2, 6 или 24. Ако је $x - y = k!$, онда је $k \leq 5$. У противном би и x и y били дељиви са 9, па би им и збирови цифара били дељиви са 9. Међутим, бројеви 2, 6, 24 нису дељиви са 9. Према томе, x и y задовољавају систем $x + y = 3628800$, $x - y = k!$, $k \leq 5$. Провером, налазимо да су слови задатка задовољени за $k = 5$, и тада је $x = 1814460$, $y = 1814340$. Збир цифара броја x једнак је 24.

2.3. Нека је $ABCDE$ дати петоугао и $P = CE \cap BD$. Пошто је $P(ABC) = P(ABE)$, растојања тачака C и E од праве AB су једнака, па је $CE \parallel AB$. Слично, $BD \parallel AE$, па је четвороугао $ABPE$ паралелограм и $P(BPE) =$

$P(AEB) = 1$. Даље,

$$\frac{P(BPC)}{P(DPC)} = \frac{BP}{DP} = \frac{P(BPE)}{P(DFE)}$$
$$\Rightarrow \ \frac{P(BPE)}{P(DPE)} = \frac{P(BPC)}{P(DBC) - P(BPC)} = \frac{P(BPC)}{1 - P(BPC)}.$$

Како је $P(BPC) = 1 - P(DPC) = P(DPE)$, означимо површине троуглова BPC и DPE са a. Тада је $\dfrac{a}{1-a} = \dfrac{1}{a}$, одакле је $a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. $P(ABCDE) = P(ABE) + P(BPE) + P(BPC) + P(EDC) = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$.

2.4. Означимо $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AC = x$, $\angle ADC = \alpha$. По косинусној теореми, $AB^2 + BC^2 = x^2 - 2ab\cos\alpha$, јер је $\angle ABC = 180^\circ - \alpha$, па је $a^2 + b^2 + c^2 + abc = x^2 - 2ab\cos\alpha + c^2 + abc = x^2 + c^2 + ab(c - 2\cos\alpha) = 4$, јер је $x^2 + c^2 = 4$ и $c = 2\cos\alpha$.

2.5. Претпоставимо да је то могуће, и поделимо дате бројеве у две класе: $A = \{1, 2, \ldots, 500\} \cup \{1502, 1503, \ldots, 2001\}$ и $B = \{501, 502, \ldots, 1501\}$. У класи A има 1000, а у B 1001 број. Лако је видети да на кругу сваки број из A стоји између два броја из B. Тада постоје b_1 и b_2 из класе B који су суседни на кругу, и имају још по једног суседа из A. Бројеви 501 и 1501 имају само по једног могућег суседа из A, а то су 1 и 2001. То значи да мора бити $\{b_1, b_2\} = \{501, 1501\}$. Али, то је немогуће, јер та два броја не смеју бити суседна! Дакле, одговор је негативан.

Трећи разред – А категорија

3.1. Систем напишимо у облику: $y^3 = 9f(x)$, $z^3 = 9f(y)$, $x^3 = 9f(z)$, где је $f(t) = t^2 - 3t + 3$. Како је $f > 0$, x, y, z морају бити позитивни. Сабирањем једначина, добијамо $(x-3)^3 + (y-3)^3 + (z-3)^3 = 0$. За $x > 3$ из треће једначине система имамо $z > 3$, а затим из друге $y > 3$, што је немогуће. Слично се елиминише случај када је $x < 3$. Једино решење система је $(3, 3, 3)$.

$$\begin{cases} y^3 = x^3 - (x-3)^3 \\ z^3 = y^3 - (y-3)^3 \\ x^3 = z^3 - (z-3)^3 \end{cases}$$

$x > 3$
$y > x$
$z > y$
$x > z$

$x < 3$
$y < x$
$z < y$
$x < z$

3.2.

$$
\begin{aligned}
&\frac{s}{3} = \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \\
\Rightarrow\ &\frac{s^2}{3^{3/2}} \geq \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = P \\
\Rightarrow\ &\frac{2\sqrt{P}}{3^{1/4}} \leq \frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt[2001]{\frac{a^{2001}+b^{2001}+c^{2001}}{3}} \\
\Rightarrow\ &\left(\frac{2\sqrt{P}}{3^{1/4}}\right)^{2000} \cdot \frac{2s}{3} \leq \frac{a^{2001}+b^{2001}+c^{2001}}{3},
\end{aligned}
$$

одакле следи тражена неједнакост.

3.3. Без смањења оштости разматрања, можемо претпоставити да се цела коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ налази са једне стране равни α, и да је теме D најближе (или једно од најближих) тој равни. Означимо са ϕ угао између равни ACD_1 и α. Површина нормалне пројекције коцке на α једнака је двострукој површини нормалне пројекције троугла ACD_1, тј. $2\cdot\frac{(\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot\cos\phi = \sqrt{3}\cos\phi$. Нормална пројекција коцке на праву $n \perp \alpha$ поклапа се са нормалном пројекцијом дијагонале DB_1. Како је $\angle(DB_1, n) = \phi$, то је дужина те пројекције једнака $DB_1 \cos\phi = \sqrt{3}\cos\phi$.

3.4. На описани начин, полазећи од броја 4, могу се добити сви сложени бројеви. Сваки парни број се може добити узастопним додавањем двојке. Нека је mn непаран сложен број, где је $m > 2$, $n > 2$. Прво добијемо паран број $2m$, затим додавањем делитеља m добијамо mn. Прост број p немогуће је добити, јер се после сваког додавања броју a неког његовог делитеља $d > 1$, добија број дељив са d.

3.5. Ако је $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Q}$, и f функција која задовољава једначину, имамо: $2f(nx) = f(nx-x)+f(nx+x) \Rightarrow f((n+1)x)-f(nx) = f(nx)-f((n-1)x)$, па је низ $(f(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ аритметички, тј. $f(nx) = f(0) + n(f(x) - f(0))$. Одатле је $f(n) = a+bn$, $(a = f(0),\ b = f(1)-f(0))$. За $x = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ добијамо: $f(m) = a + n\left(f\left(\frac{m}{n}\right) - a\right)$, па је $f\left(\frac{m}{n}\right) = a + b\frac{m}{n}$. Дакле, $f(x) = a + bx$ за све $x \in \mathbb{Q}$, где су a, b дати рационални бројеви. Лако се проверава да свака оваква функција задовољава дату функционалну једначину.

4.1. $f(n+3)f(n+2) = f(n+1) + f(n) + 36$

$f(n+4)f(n+3) = f(n+2) + f(n+1) + 36$

$(f(n+4) - f(n+2))f(n+3) = f(n+2) - f(n)$

$f(2k+1) - f(2k-1) = \frac{f(3) - f(1)}{f(2k)f(2k-2)\dots f(4)}$

$\forall k: f(2k+1) - f(2k-1) = 0$

слично

$\forall k: f(2k+2) - f(2k) = 0$

...

Четврти разред – А категорија

4.1. Нека функција f задовољава услове задатка. Тада, за сваки природан број n, важи $f(n) \geq 2$, па је $2(f(n+3) + f(n+2)) \leq f(n+3)f(n+2) + 4 = f(n+1) + f(n) + 40$. Одатле следи да је $f(n+3) + f(n+2) \leq \max\{f(n+1) + f(n), 40\}$, па је $f(n) + f(n+1) \leq \max\{f(1) + f(2), f(2) + f(3), 40\}$, за све $n \in \mathbb{N}$. Дакле, функција f је ограничена. Како три узастопна члана низа $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ одређују следећи члан, и скуп вредности функције f је ограничен, тај низ мора бити периодичан. Нека је n_0 природан број за који важи $f(n_0) = M = \max_{k\in\mathbb{N}} f(k)$. Тада је $f(n_0+1)M = f(n_0-1) + f(n_0-2) + 36$ и $f(n_0+2)f(n_0+1) = M + f(n_0-1) + 36$. Одатле добијамо: $0 \leq M - f(n_0-2) = f(n_0+1)(f(n_0+2) - M) \leq 0$. Према томе, $f(n_0-2) = f(n_0+2) = M$, па следи да је сваки други члан низа $f(n)$ једнак максимуму M. Аналогно доказујемо да су преостали чланови једнаки минимуму m. Из услова $Mm = M + m + 36$, добијамо $(M-1)(m-1) = 37$, па је $m = 2$, $M = 38$. Дакле, постоје два низа која задовољавају услов задатка: $(2, 38, 2, 38, \dots)$ и $(38, 2, 38, 2, \dots)$.

4.2. Види задатак 3.2.

4.3. Види задатак 3.3.

4.4. За $i \in \{1,2\}$, уведимо следеће ознаке: p_i – вероватноћа победе првог играча ако је он на потезу, а збир претходно изабраних бројева је облика $3k+i$; q_i – вероватноћа победе првог играча, ако је други на потезу, а збир претходно изабраних бројева је облика $3k+i$. Тада важе једнакости: $p_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}q_1 + \frac{2}{4}q_2$, $p_2 = \frac{2}{4} + \frac{1}{4}q_1 + \frac{1}{4}q_2$, $q_1 = \frac{1}{4}p_1 + \frac{2}{4}p_2$, $q_2 = \frac{1}{4}p_1 + \frac{1}{4}p_2$, а тражена вероватноћа је: $P = \frac{1}{4} + \frac{2}{4}q_1 + \frac{1}{4}q_2$. Решавањем система једначина, добија се $q_1 = \frac{11}{23}$, $q_2 = \frac{7}{23}$, и $P = \frac{13}{23}$.

4.5. Очигледно је да су s_1 и $s_2 = \frac{1}{2} + r\cos x$ ненегативни. Нека је $f(y) = r\cos y + r^2\cos 2y$. Функција f је периодична и диференцијабилна, па достиже минимум у некој тачки y_0, у којој је $f'(y_0) = 0$. $f'(y) = -r\sin y(1 + 4r\cos y)$, па је $y_0 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, или $\cos y_0 = -\frac{1}{4r}$. У првом случају је $f(y_0) = r^2 + (-1)^k r \geq -\frac{1}{4}$, а у другом $f(y_0) = -\frac{1}{8} - r^2 \geq -\frac{3}{8}$. Према томе, $f(y) \geq -\frac{3}{8}$ за све y.

$$f(y) = r\cos y + r^2(2\cos^2 y - 1)$$
$$= 2r^2\cos^2 y - r\cos y - r^2$$
$$= \frac{1}{8}(4r\cos y - 1)^2 - r^2 - \frac{1}{8}$$
$$\geq -r^2 - \frac{1}{8} \geq -\frac{3}{8} \quad \dots$$

Важи:

$$\begin{aligned} s_{2n+1} &= \frac{1}{2} + f(x) + r^2 f(4x) + \cdots + r^{2n-2} f(4^{n-1}x) \\ &\geq \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\left(1 + r^2 + \cdots + r^{2(n-1)}\right) \\ &\geq \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{4 - 4^{-(n-1)}}{8} = \frac{1}{2 \cdot 4^n} = \frac{1}{2^{2n+1}} \geq 0, \end{aligned}$$

па је $s_{2n+2} = s_{2n+1} + r^{2n+1}\cos 2^{2n}x \geq s_{2n+1} - \frac{1}{2^{2n+1}} \geq 0$. Дакле, сви чланови низа су ненегативни.

Први разред – Б категорија

1.1.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - xyz =& \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2} + 2 + \frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + 2 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2 \\ & - \left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} + 1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} + 1 + \frac{c^2}{b^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) = 4. \end{aligned}$$

1.2. Нека је O центар уписаног круга $\triangle ABC$. Тада је $\angle COK = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$, $\angle KMB = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$, и $\angle KMB = 180^\circ - \angle KMC$, па је четвороугао $COKM$ тетиван и $\angle AKC = \angle OKC = \angle OMC = 90^\circ$, као периферијски над OC.

1.3. Помоћу два реза, домаћица торту може поделити највише на 4 дела. Ти комади морају морају бити једнаки, за случај да јој дођу четири госта. Међутим, уколико јој дођу три госта, она им не може поделити торту на једнаке делове. Докажимо да домаћица може торту поделити помоћу три реза кроз центар торте. Два реза су по међусобно нормалним пречницима, а трећи под углом од 30° у односу на један од њих. На тај начин, торта је подељена на 6 парчића: по два од 30°, 60° и 90°. Уколико дођу 4 госта, домаћица ће двоје послужити парчићима од 90°, а двоје по једним парчетом од 30° и 60°. Ако их дође троје, двоје ће послужити по једним парчетом од 90° и 30°, а трећег двама парчадима од 60°.

1.4. $xy = \overline{aaa} = a \cdot 111 = a \cdot 37 \cdot 3$. Одатле добијамо да је један од бројева x, y дељив са 37, на пример x. Како x не може бити троцифрен број, имамо две могућности. *Први случај:* $x = 37$, $y = 3a$. Провером се добија $a = 6$, тј. $y = 18$. *Други случај:* $x = 2 \cdot 37$, $y = 3a/2$. Провером се добија $a = 2$, тј. $x = 74, y = 3$.

1.5. Види задатак 1.5 за А категорију.

Други разред – Б категорија

2.1. Види задатак 2.1 за А категорију.

2.2. Означимо са r_1 и r_2 полупречнике кругова k_1 и k_2, са X додирну тачку полуправе O_1a са k_2, и са Y пресек дужи O_1O_2 и AB. Тада су троуглови O_1AY и O_1O_2X слични, па је $\frac{AY}{r_1} = \frac{r_2}{O_1O_2}$, тј. $AB = 2AY = 2\frac{r_1r_2}{O_1O_2}$. Слично се показује и да је $CD = 2\frac{r_1r_2}{O_1O_2}$, па је $AB = CD$.

2.3. Види задатак 1.3 за А категорију.

2.4. Сменом $t = 2^x$ добијамо $t^2 - (a+3)t + 4a - 4 = 0$, чија су решења $t_1 = a - 1$ и $t_2 = 4$. Да би полазна једначина имала тачно једно решење, треба да буде $a - 1 \leq 0$ или $a - 1 = 4$. Дакле, $a \in (-\infty, 1] \cup \{5\}$.

2.5. За $k \in \mathbb{N}$, имамо: $\frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} = \frac{(k+1)\sqrt{k} - k\sqrt{k+1}}{(k+1)^2k - k^2(k+1)} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$, па је тражени збир једнак $1 - \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$.

Трећи разред – Б категорија

3.1. Посматрајмо векторе $\vec{a} = \left(\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$, и $\vec{b} = \left(\frac{1-y^2}{1+y^2}, \frac{2y}{1+y^2}\right)$. Тада је $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, и $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$. $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}| = 1 \Rightarrow \left|2\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \leq 1$.

3.2. Нека је $a = n - 1$, $b = n$, $c = n + 1$. Тада је $\alpha < \beta < \gamma$, и могућа су три случаја. *Први случај:* $\beta = 2\alpha$. Из синусне теореме: $\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{\sin\beta}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2a} = \frac{n}{2(n-1)}$, а из косинусне теореме: $\cos\alpha = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{n+4}{2(n+1)}$, одакле је $n = 2$, тј. $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, што је немогуће. *Други* *случај:* $\gamma = 2\alpha$. Из синусне теореме: $\cos\alpha = \dfrac{n+1}{2(n-1)}$, а из косинусне $\cos\alpha = \dfrac{n+4}{2(n+1)}$, одакле је $n = 5$ и $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$. *Трећи случај:* $\gamma = 2\beta$. Из синусне теореме, $\cos\beta = \dfrac{n+1}{2n}$, а из косинусне $\cos\beta = \dfrac{n^2+2}{2(n^2-1)}$, па се добија $n_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$, што нису природни бројеви. Дакле, једини троугао са наведеним својствима има странице 4, 5 и 6.

3.3. Види задатак 3.3 за А категорију.

3.4. Довољно је доказати да је дискриминанта $D = (b-c-a)^2 - 4ac = b^2 + c^2 + a^2 - 2bc - 2ca - 2ab$ негативна. Међутим, за странице троугла важи: $|b-c| < a$, $|c-a| < b$, $|a-b| < c$, па се после квадрирања и сабирања ових неједнакости, добија: $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$, што је и требало доказати.

3.5. $D = (a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$.

Четврти разред – Б категорија

4.1. Из $x + y + z = \dfrac{7}{2}$, $(x+y+z)^2 - 2(xy + yz + zx) = \dfrac{41}{4}$ и $xyz(xy + yz + zx) = -\dfrac{3}{2}$, налазимо $xy + yz + zx = 1$, $xyz = -\dfrac{3}{2}$, па су x, y, z решења једначине $2t^3 - 7t^2 + 2t + 3 = (t-1)(t-3)(2t+1) = 0$. Дакле, решење система је тројка $\left(-\dfrac{1}{2}, 1, 3\right)$ и још пет пермутација ових бројева.

4.2. Број свих елемената низа пре првог елемента n-те групе је $a + 2a + 3a + \cdots + (n-1)a = \dfrac{an(n-1)}{2}$. Први члан n-те групе је $a + 2a\dfrac{an(n-1)}{2} = a + a^2n(n-1)$, а последњи $a + a^2n(n-1) + 2a(na-1) = a^2n(n+1) - a$. Збир свих елемената n-те групе је $S_n = \dfrac{na}{2}[a + a^2n(n-1) + a^2n(n+1) - a] = (na)^3$.

4.3. Види задатак 3.3 за А категорију.

4.4. Докажимо индукцијом да је $f(k \cdot 29) = (k+1) \cdot 29$, за све $k \in \mathbb{N}$. За $k = 1$, то својство важи. Докажимо га и за $k = 2$. Из $f(f(1) + f(1)) = f(f(1)) + f(1)$, добијамо $f(2 \cdot 29) = f(29) + 29 = 58 + 29 = 3 \cdot 29$. Претпоставимо да је $k > 2$, и да је тражена једнакост испуњена за $1, 2, \ldots k-1$. Имамо:

$f(f(1)+f((k-2)\cdot 29)) = f(f(1))+f((k-2)\cdot 29) = 2\cdot 29+(k-1)\cdot 29 = (k+1)\cdot 29$. Дакле, пошто је $2001 = 69\cdot 29$, имамо да је $f(2001) = 70\cdot 29 = 2030$.

4.5. $f^{-1}\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right) = x$; $t = \dfrac{ax+b}{cx+d} \;\Rightarrow\; x = \dfrac{dt-b}{a-ct}$, па је $f^{-1}(x) = \dfrac{dx-b}{a-cx}$. Услов $\dfrac{dx-b}{a-cx} = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ важи за све x ако и само ако $x^2c(d+a)+x(d^2-a^2)-b(a+d) = 0$, односно ако и само ако $a+d=0$ или $b=c=a-d=0$. Другу могућност елиминишемо, због $ac-bd\neq 0$.

РАСПОРЕД ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ ЗА ШКОЛСКУ 2001/2002. ГОДИНУ

Општинско такмичење .... 2. фебруар 2002.

Окружно такмичење .... 23. фебруар 2002.

Републичко такмичење .... 23. март 2002.

Савезно такмичење .... 20. април 2002.

САДРЖАЈ