ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА СРЕДЊОШКОЛАЦА 2001/2002.

Редакција и обрада:

мр Милена Радновић

Београд 2002

Гимназија *Миодраг Миловановић Луне*, Ужице

ОРГАНИЗАЦИОНИ ОДБОР
44. РЕПУБЛИЧКОГ ТАКМИЧЕЊА

Драгана Ђурић, директор

Рајко Тубић, професор

Марија Станковић, професор

Слободан Суботић, професор

Милован Шаренац, професор

Милена Јелисавчић, професор

Славка Живанић, професор

Историјска сећања на Ужице су дуга али магловита. Иако му се име помиње 1020. године, средњовековни живот овог насеља углавном је тајна, осим опсаде у којој је у њему заробљен Никола Алтомановић. Изгледа као да су се неки богатији и лепши токови српске државе кретали другим коритом, а не овим који је Ђетиња усецала кроз планине, журећи ка зеленој и плодној Морави. За турске владавине, Ужице ће расти од села, преко касабе, до шехера. У њему ће се укрштати каравански путеви са севера на југ и са истока на запад. На жалост, и други, ратнички путеви укрштаће се у овој котлини, уништавајући, често за пар дана, оно што су нараштаји деценијама подизали. Ужичани ће градити куће, магазе и радње, радионице, централе и фабрике, а ратне стихије ће односити све што им под удар дође. Остаци ужичке тврђаве, која доминира видиком, сведоче о тој историји града. Она историја живота његових грађана с муком се чита из улица, пролаза, зграда. И у усменом предању Ужичана, много су чешће помињани они који су разарали, владали Ужицем и у Ужицу, од оних који су градили, стварали и улепшавали или једноставно живели у Ужицу. Јокановића кућа, централа, зграда гимназије, стара црква ћутљиви су сведоци те важније историје града.

У јуну 1865. године, кнез Михаило је донео указ о формирању дворазредне гимназије у Ужицу. Године 1874, Министарство просвете одлучује да у «реалчицу» уведе трећи и четврти разред. Тек 1893. године Ужице ће добити и зграду гимназије. *За време свечаности (поводом њеног отварања) међу грађанима је дошло до једног неспоразума, који ће се продужити и у каснија времена. Неки од оних који су ушли у тек отворену зграду Реалке, да је разгледају, излазили су из ње узбуђени и очарани, тврдећи да се са њених прозора, уместо ужичких брда, Забучја, Вујићевине, Глуваћа и Ибишевог гувна, види Париз, види Берлин, виде се Беч, Женева и Санкт Петерсбург! Радознали, за њима ће у учионице гимназије похрлити и други грађани, али ће из њих, за разлику од оних првих, излазити разочарани. То што су једни видели тад, други неће видети никад. Иако ће у згради гимназије, школујући се, провести године, многи Ужичани са њених прозора никада неће видети ништа друго до Забучје, Глуваће и Ибишево гувно. А неки неће видети чак ни то.* (Љ. Симовић - *Ужице са вранама*)

Преживевши све ратове и буне, наџивевши многе реформе и реформаторе, Ужичка гимназија и данас онима који у њу улазе нуди два видика, један у бескрајни свет, други у локална брда.

РЕПУБЛИЧКА КОМИСИЈА

за такмичења из математике за ученике средњих школа

школска година 2001/2002.

1. Арсеновић др Милош, Математички факултет, Београд
2. Балтић Владимир, Технолошко-металуршки факултет, Београд
3. Блажић др Новица, Математички факултет, Београд
4. Гајић мр Борислав, Математички институт САНУ
5. Долинка др Игор, Природно-математички факултет, Нови Сад
6. Достанић др Милутин, Математички факултет, Београд
7. Драговић др Владимир, Математички институт САНУ
8. Дугошија др Ђорђе, Математички факултет, Београд
9. Живковић др Миодраг, Математички факултет, Београд
10. Икодиновић Небојша, Природно-математички факултет, Крагујевац
11. Кнежевић Миљан, Математички факултет, Београд
12. Кртинић Ђорђе, Математички факултет, Београд
13. Лазовић Небојша, Министарство просвете и спорта Републике Србије
14. Лаудановић мр Младен, Математички факултет, Београд
15. Милосављевић Милош, Природно-математички факултет, Ниш
16. Младеновић др Павле, Математички факултет, Београд
17. Николић Небојша, Факултет организационих наука, Београд
18. Огњановић мр Срђан, Математичка гимназија, Београд
19. Павловић Иван, Гимназија Вук Караџић, Лозница
20. Радновић мр Милена, Математички институт САНУ – **председник**
21. Тановић др Предраг, Математички институт САНУ
22. Томић Иванка, Гимназија, Ваљево
23. Тошић др Ратко, Природно-математички факултет, Нови Сад
24. Чукић др Љубомир, Грађевински факултет, Београд

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ, 9. фебруар 2002.

Први разред – А категорија

1. Ако је n природан број, доказати да $3n^2 + 3n + 7$ није куб ни једног природног броја.

2. У троуглу ABC је $\angle ABC = 60^\circ$. Нека су D и E редом пресечне тачке симетрала углова $\angle CAB$ и $\angle BCA$ са наспрамним страницама, а S центар уписаног круга у тај троугао. Доказати да је $SD \cong SE$.

3. Одредити све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такве да за свако реално x важи:
$$f(x+1) \leq x \leq f(x) + 1.$$

4. Дат је скуп $S = \{1, 2, \ldots, 20\}$. Колико највише елемената може имати његов подскуп A, са следећим својством: ако $x \in A$ онда $2x \notin A$?

5. На рукометном турниру, свака екипа је одиграла по једну утакмицу са сваком од преосталих екипа. За победу се добија 2 поена, за пораз 0, а за нерешен резултат свака екипа добија по 1 поен. Три првопласиране екипе имале су 7, 5 и 3 поена. Колико је на турниру учествовало екипа, и колико је поена имала последњепласирана од њих? (Ако две екипе имају једнак број поена, место се одређује на основу разлике броја датих и примљених голова.)

Други разред – А категорија

1. Дати су реални бројеви x и y, такви да је $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} = \sqrt{2002}$. Колико је $-xy - \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$?

2. Дате су квадратне једначине:
$$x^2 + \frac{8}{a}x - 2a = 0, \quad x^2 + \frac{6}{a}x - a = 0\,.$$
Одредити све вредности реалног параметра a за које су сва четири корена ових двеју једначина реална и међусобно различита, и при томе се тачно један корен прве једначине налази између корена друге.

3. Дат је квадрат $ABCD$. Нека је F средиште странице AD, а L тачка на дужи BC таква да је $BL : LC = 1 : 2$. Дијагонала BD сече дужи AL и CF у тачкама P и Q редом. Доказати да су троуглови BLP и DQF слични.

4. Нека су a, b, c дужине страница, α, β, γ одговарајући углови, и S површина троугла ABC. Доказати да важи једнакост:

$$a^2(\sin 2\beta + \sin 2\gamma) + b^2(\sin 2\alpha + \sin 2\gamma) + c^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) = 12S.$$

5. Наћи целе бројеве a и b тако да важи:

$$\left(1+\frac{1+i}{2}\right)\left(1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^2}\right)\cdots\left(1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^{2002}}\right) = (1+i)\left(a+\frac{b}{2^{2^{2002}}}\right).$$

(i је имагинарна јединица: $i^2 = -1$.)

Трећи разред – А категорија

1. Миљан воли шестоцифрене бројеве код којих је збир прве три цифре једнак збиру последње три, а Младен оне код којих је збир цифара на непарним местима једнак збиру цифара на парним местима. Колико има шестоцифрених бројева које воле и Миљан и Младен?

2. Решити неједначину:

$$\log_x \frac{12-4x}{4-x} \leq 1.$$

3. У оштроуглом троуглу ABC, P и Q су подножја висина из темена A и C редом. Површина троугла ABC је 18, троугла BPQ је 2, а $PQ = 2\sqrt{2}$. Наћи полупречник круга описаног око $\triangle ABC$.

4. За које вредности реалног параметра p једначина:

$$(x-p)^2(p\,(x-p)^2 - p - 1) = -1$$

има више позитивних него негативних решења?

5. Доказати да не постоје природни бројеви a, b, c, d такви да је
$$a^a + b^b + c^c = d^d.$$

Четврти разред – А категорија

1. A је коначан подскуп скупа природних бројева, који садржи више од седам елемената. Најмањи заједнички садржалац свих бројева из A је 210. У скупу A нема парова узајамно простих бројева, а производ свих његових елемената је дељив са 1920 и није квадрат неког природног броја. Одредити скуп A.

2. Дат је правоугли троугао ABC ($\angle C = 90°$), и тачке D, E на страници BC такве да је $\angle BAD = \angle DAE = \angle EAC$. Ако је $BD = 2CE$, израчунати углове троугла ABC.

3. На параболи $y^2 = 2x$ наћи тачку најближу тачки $(1, 4)$.

4. Дат је трапез $ABCD$ са основицама $AD = a$ и $BC = b$, $a > b$. Нека су B_1 и C_1 средишта његових дијагонала. У четвороуглу AB_1C_1D опет уочимо средишта дијагонала – тачке B_2 и C_2. Овај поступак настављамо, и у n-том кораку означимо са B_n и C_n средишта дијагонала четвороугла $AB_{n-1}C_{n-1}D$.
а) Наћи дужину дужи B_nC_n.
б) Израчунати $\lim_{n\to\infty} |B_nC_n|$.
в) Какав треба да буде трапез $ABCD$ да би све дужи B_nC_n биле међусобно једнаке?

5. Види 5. задатак за трећи разред А категорије.

Први разред – Б категорија

1. У једном одељењу има 30 ученика. На такмичењу из математике учествује њих 24, на такмичењу из физике 22 и на такмичењу из информатике 20 ученика. Доказати да бар 6 ученика учествује на сва три такмичења.

2. Дата је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. За свако $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $x \neq 1$ важи:
$$f\left(\frac{x}{x-1}\right) - 2f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 2002x\,.$$
Израчунати $f(2)$.

3. Ако је n непаран цео број, доказати да је $n(n^{2002}-1)$ дељиво са 24.

4. Колико има парова троцифрених бројева чији је производ написан само цифрама 3?

5. Види 5. задатак за први разред А категорије.

Други разред – Б категорија

1. Да ли је број $\dfrac{(1+\sqrt[5]{3}-\sqrt[5]{9})^3}{2-\sqrt[5]{27}}$ рационалан? Образложити одговор.

2. Дата је неједначина: $x^2+ax-1<0$. Одредити све вредности реалног параметра a, такве да скуп решења те неједначине буде интервал дужине 5.

3. Дати су позитивни бројеви a, b, c. Доказати да не могу истовремено бити испуњене све три неједнакости:

$$a\,(1-b)>\frac{1}{4}, \quad b\,(1-c)>\frac{1}{4}, \quad c\,(1-a)>\frac{1}{4}.$$

4. Нађи све комплексне бројеве z за које важи: $\bar{z}=z^3$.

5. Нека је $ABCD$ тетивни четвороугао чије се дијагонале секу у тачки S под правим углом. Ако је H подножје нормале из S на AD, а X пресек правих SH и BC, доказати да је тачка X средиште дужи BC.

Трећи разред – Б категорија

1. Види 1. задатак за трећи разред А категорије.

2. Види 2. задатак за трећи разред А категорије.

3. Решити једначину:

$$6\cdot 9^{1/\sin x}-13\cdot 6^{1/\sin x}+6\cdot 4^{1/\sin x}=0.$$

4. Израчунати запремину тростране пирамиде ако је једна њена ивица дужине 4 cm, а све остале дужине 3 cm.

5. Шта је веће: $\arcsin(\sin 10)$ или $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-3))$? Образложити одговор.

Четврти разред – Б категорија

1. Нека је $\mathcal{S} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\left(\dfrac{z-6i}{z+8}\right) = 0 \right\}$. Доказати да постоји кружница k у равни комплексних бројева, таква да је $\mathcal{S} \subset k$. Да ли је $\mathcal{S} = k$?

2. Види 2. задатак за трећи разред А категорије.

3. Види 3. задатак за четврти разред А категорије.

4. Одредити константе a, b, c тако да за сваки природан број n важи:

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \cdots + \frac{n}{5^n} = a + \frac{bn+c}{16 \cdot 5^n}.$$

5. Израчунати:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1)} \right).$$

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ, 2. март 2002.

Први разред – А категорија

1. Ако је n природан број, доказати да је $(n+1)^{3n} - n^{2n}(n+3)^n$ дељиво са $3n+1$.

2. Доказати да је број $\sqrt{1 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{n}}}$ ирационалан, за сваки природан број $n \geq 2$.

3. У петоуглу $ABCDE$ све странице су међусобно подударне, и $\angle BAE = 2\angle CAD$. Израчунати $\angle BAE$.

4. Над страницама конвексног четвороугла, као над пречницима, конструисана су четири круга. Доказати да ти кругови прекривају четвороугао.

5. На одбојкашком турниру, учествовало је 10 екипа. Свака од њих је одиграла по једну утакмицу са сваком од преосталих екипа. На крају турнира, прва екипа је имала x_1 победа и y_1 пораза, друга x_2 победа и y_2 пораза, ... , десета је имала x_{10} победа и y_{10} пораза. Доказати да је

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{10}^2 .$$

(У одбојци нема нерешеног резултата – свака утакмица се завршава победом једне од екипа.)

Други разред – А категорија

1. У оштроуглом троуглу ABC, B' и C' су подножја висина из темена B и C редом. Кружница са пречником AB сече праву CC' у тачкама M и N, а кружница са пречником AC сече праву BB' у P и Q. Доказати да је четвороугао $MPNQ$ тетиван.

2. Нека су α и β два угла неког троугла. Доказати неједнакост:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha\sin\beta} \geq \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2} .$$

3. Дат је квадар са ивицама x, y, z, $x < y < z$. Нека је p збир дужина свих његових ивица, S његова површина, и d дужина дијагонале квадра. Доказати да важи:

$$x < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p - \sqrt{d^2 - \frac{1}{2}S}\right) \quad \text{и} \quad z > \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p + \sqrt{d^2 - \frac{1}{2}S}\right) .$$

4. Дужине страница троугла су природни бројеви, а полупречник описаног круга једнак је $6,25$. Одредити странице тог троугла.

5. На шаховском турниру, учествовало је 8 такмичара. Сваки од њих је одиграо по једну партију са сваким од преосталих учесника. На крају турнира, сви шахисти су имали различит број поена, а другопласирани је освојио онолико поена колико четворица последњих заједно. Како се завршила партија између играча који су заузели четврто и шесто место? (У шаху, за победу играч добија 1 поен, за пораз 0, а у случају ремија, оба играча добијају по 1/2 поена.)

Трећи разред – А категорија

1. У оштроуглом неједнакокраком троуглу ABC уочена је тачка T из које се свака страница тог троугла види под углом од $120°$ (*Торичелијева тачка троугла*). Нека су A_1, B_1, C_1 подножја нормала из тачке T на странице троугла, и k кружница описана око $\triangle A_1B_1C_1$. Ако су A_2, B_2, C_2 пресечне тачке кружнице k са страницама троугла ABC, различите од тачака A_1, B_1, C_1, доказати да је $\triangle A_2B_2C_2$ једнакостраничан.

2. Одредити све парове (m,n) целих бројева, тако да важи једнакост:

$$(5+3\sqrt{2})^m = (3+5\sqrt{2})^n \,.$$

3. Нека су $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарни вектори у $\mathbb{R}^3$, и α, β, γ реални бројеви. Доказати да су вектори:

$$\beta\vec{c} - \gamma\vec{b}\,, \quad \gamma\vec{a} - \alpha\vec{c}\,, \quad \alpha\vec{b} - \beta\vec{a}$$

компланарни.

4. Одредити све просте бројеве $p_1, p_2, \ldots, p_8$ за које важи:

$$p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_8^2 + 992 = 4\,p_1\,p_2\,\ldots\,p_8\,.$$

5. Дат је полином $P(x)$ чији је слободни члан различит од нуле. Ако за сваки реалан број x важи:

$$P(x)P(2x^2) = P(2x^3 + x)\,,$$

доказати да $P(x)$ нема ни једну нулу у скупу реалних бројева.

Четврти разред – А категорија

1. Види 1. задатак за трећи разред А категорије.

2. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ које задовољавају једнакост

$$2f(2x) = f(x) + x \quad \text{за свако} \quad x \in \mathbb{R}$$

и непрекидне су у тачки $x = 0$.

3. Одредити све природне бројеве $n > 1$ који имају следеће својство: за сваке две пермутације $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ скупа $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, постоје различити бројеви $i, j \in A$, такви да $n \mid (a_i + b_i) - (a_j + b_j)$.

4. Човек се налази у чамцу на левој обали канала широког $3\,km$. Жели да стигне до куће на десној обали канала, која је од њега удаљена $5\,km$ ваздушном линијом. Он ће довеслати до неког места на другој обали брзином од $6\,km/h$, а затим наставити до куће трчећи брзином од $8\,km/h$. Одредити растојање куће и места до ког треба човек да довесла, да би стигао кући за најкраће могуће време. (Претпоставља се да вода у каналу мирује.)

5. Нека је P полином са целобројним коефицијентима, и $n \geq 3$ природни број. Доказати да не постоје различити цели бројеви $x_1, x_2, \ldots, x_n$, тако да важи:

$$P(x_1) = x_2\,, \quad P(x_2) = x_3\,, \quad \ldots, \quad P(x_{n-1}) = x_n\,, \quad P(x_n) = x_1\,.$$

Први разред – Б категорија

1. Одредити све природне бројеве n за које је број

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$$

дељив са 18.

2. Познато је да је:

$$28! = 30488a34461171386050150 4b00000\,.$$

Одредити цифре a и b.

3. У троуглу ABC, код кога је $\angle BCA \neq 90^\circ$, A', B' су подножја висина из тачака A, B редом, а O је центар описаног круга. Одредити угао под којим се секу праве $A'B'$ и OC.

4. Четвороугао $ABCD$ је конвексан и тангентан. Ако је O центар круга уписаног у тај четвороугао, одредити збир $\angle AOB + \angle COD$.

5. Види 5. задатак за први разред А категорије.

Други разред – Б категорија

1. Одредити све вредности d за које постоје узајамно прости природни бројеви a и b, тако да је d једнак највећем заједничком делиоцу бројева $a+b$ и a^2+b^2.

2. Дат је троугао ABC, код кога је $|AB|=c$, $|AC|=b$, $\angle CAB=60°$. У тај троугао је уписан паралелограм $AMNP$, такав да темена M, N, P припадају страницама AB, BC, AC редом. Наћи максималну могућу површину таквог паралелограма.

3. Решити једначину:
$$\sqrt[5]{x+27}+\sqrt[5]{6-x}=3$$
у скупу реалних бројева.

4. Над страницама конвексног четвороугла, као над пречницима, конструисана су четири круга. Доказати да ти кругови прекривају четвороугао.

5. Доказати да број
$$5^{2n}\cdot 7^{2n+1}\cdot 11^{2n}+25^n\cdot 7^{2n}\cdot 11^{2n+1}-5^{2n+1}\cdot 49^n\cdot 121^n$$
није потпун квадрат ни за један природни број n.

Трећи разред – Б категорија

1. У равни су дати кругови $k_1(O_1,r_1)$, $k_2(O_2,r_2)$, $k_3(O_3,r_3)$, тако да сваки од њих споља додирује преостала два. Израчунати полупречник круга описаног око троугла $O_1O_2O_3$.

2. Решити једначину:
$$\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\sin x+\cos x\,.$$

3. Види 3. задатак за трећи разред А категорије.

4. Решити неједначину:
$$4^{x-\frac{5}{2}+\sqrt{x^2-4}}+2^{2x-6+2\sqrt{x^2-4}}\geq 3^{x-3+\sqrt{x^2-4}}+3^{x-2+\sqrt{x^2-4}}\,.$$

5. Дат је правоугли троугао са катетама a и b, за које важи:

$$a > b \quad \text{и} \quad \log\frac{a-b}{2} = \frac{1}{2}(\log a + \log b - \log 2)\,.$$

Израчунати оштре углове тог троугла.

Четврти разред – Б категорија

1. У равни су дати кругови $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$, $k_3(O_3, r_3)$, тако да сваки од њих споља додирује преостала два. Израчунати полупречник круга описаног око троугла $O_1O_2O_3$.

2. Дати су реални бројеви m и n, $mn < 0$, $m + n \neq 0$ и функције:

$$y = m \cdot 3^x + n \quad \text{и} \quad y = n \cdot 3^{-x} + m\,.$$

Доказати да се графици ових двеју функција секу у двема тачкама, од којих је једна на апсцисној, а друга на ординатној оси.

3. Дати су реални бројеви a, b, c, d, $a \neq 0$, и једначина $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Ако је λi $(\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0)$ решење те једначине, доказати да је $ad = bc$ и $ac > 0$.
(i је имагинарна јединица: $i^2 = -1$.)

4. Види 4. задатак за четврти разред А категорије.

5. Дат је број $z \in \mathbb{C}$. Ако је $|z| = 1$ и $z \neq 1$, доказати да је

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 0\,.$$

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ, 30. март 2002.

Први разред – А категорија

1. Дат је полином $p(x)$ са целобројним коефицијентима. При дељењу полиномом $x^2 - 12x + 11$, $p(x)$ даје остатак $990x - 889$. Доказати да $p(x)$ нема ни једну нулу у скупу целих бројева.

2. Дат је троугао ABC и тачке M, N, P на његовим страницама AB, BC, AC редом, такве да је четвороугао $AMNP$ паралелограм. Посматрајмо кругове описане око троуглова MBN и NCP. Нека су t_1 и t_2 њихове тангенте у тачкама M и P редом. Доказати да је $t_1 \parallel t_2$.

3. Дати су реални бројеви a, b, c, d за које важи:

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2, \quad ab + cd > 0\,, \quad ac + bd > 0\,.$$

Доказати да је $ad + bc > 0$.

4. Дат је троугао ABC. Посматрајмо праве које секу странице AC и BC у тачкама M и N редом, тако да је $MN = AM + BN$. Доказати да постоји круг k који додирује све такве праве.

5. Нека је $S(n)$ збир, а $P(n)$ производ цифара природног броја n. Наћи све природне бројеве за које је $S(n) + P(n) = n$.

Други разред – А категорија

1. Наћи све вредности реалног параметра a, тако да систем

$$\begin{aligned} axy + x - y + \frac{3}{2} &= 0 \\ x + 2y + xy + 1 &= 0 \end{aligned}$$

има јединствено решење у скупу реалних бројева.

2. Дат је конвексан петоугао $ABCDE$. Ако је $AB = 5$, $BC = 6$, $CD = 10$, $DE = 7$ и $AE = 9$, доказати да се у тај петоугао не може уписати круг.

3. У скупу целих бројева, решити систем:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 3\,. \end{aligned}$$

4. Нека је $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$ низ цифара за који важи: ако је $a_n = 1$ онда $a_{n+1} \neq 2$, и ако $a_n = 3$ онда $a_{n+1} \neq 4$. Доказати да постоје $k, l \in \{1, 2, \ldots, 98\}$, $k \neq l$, такви да је $a_k = a_l$ и $a_{k+1} = a_{l+1}$.

5. Дат је троугао ABC. На правим AC, AB, BC дате су тачке A_1, B_1, C_1 редом, тако да важе распореди: $C - A - A_1$, $A - B - B_1$, $B - C - C_1$. Ако је
$$AA_1 : BB_1 : CC_1 = \frac{AB}{BC} : \frac{BC}{AC} : \frac{AC}{AB},$$
доказати да су троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ слични.

Трећи разред – А категорија

1. Наћи све природне бројеве n за које је број $2^n - 1$ дељив са n.

2. Дати су комплексни бројеви a, b, c и полином $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Доказати да важи бар једна од следеће четири неједнакости:
$$|P(1)| \geq 1, \quad |P(-1)| \geq 1, \quad |P(i)| \geq 1, \quad |P(-i)| \geq 1.$$

3. Дат је тетраедар $SABC$ код кога је троугао ABC оштроугли, и $SA = SB = SC$. Доказати да се тај тетраедар може исећи на коначно много полиедара, од којих се може сложити тетраедар подударан са $SABC$, али супротне оријентације.

4. Доказати да постоји природан број n коме су последње четири цифре једнаке 2002, такав да n^{2002} почиње цифрама 2002.

5. Дати су природни бројеви m, n. Правоугаоник чије су странице једнаке m и n издељен је на mn јединичних квадратних поља. За неку праву кажемо да сече неко поље ако садржи бар једну његову унутрашњу тачку. Колико највише поља овог правоугаоника може да сече нека права?

Четврти разред – А категорија

1. Нека су f и g не-нула полиноми истог степена, са целобројним коефицијентима. Ако је $f(n)$ дељиво са $g(n)$ за свако $n \in \mathbb{N}$, доказати да постоји $c \in \mathbb{Z}$ такво да је $f(x) = cg(x)$ за свако $x \in \mathbb{R}$.

2. Доказати да је број
$$\left[\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right] + 1$$
дељив са 7. ($[x]$ је највећи цео број који није већи од x.)

3. Дат је триедар са врхом O, и тачке A, B, C на његовим ивицама које су једнако удаљене од тачке O. Нека је S центар лопте уписане у тај триедар. Доказати да је вектор $\overrightarrow{OS}$ колинеаран са вектором

$$\sin(\angle BOC)\cdot\overrightarrow{OA}+\sin(\angle COA)\cdot\overrightarrow{OB}+\sin(\angle AOB)\cdot\overrightarrow{OC}.$$

4. У кутији се налази једна плава и 99 црвених куглица. Из кутије се случајно бирају куглице једна за другом и остављају ван кутије, све док се не изабере куглица (означимо је са A) која се по боји разликује од претходно изабране куглице. Куглица A се враћа у кутију и експеримент почиње из почетка. Процес се наставља све док се не узму све куглице. Избори куглица су међусобно независни. Колика је вероватноћа да је последња изабрана куглица плава?

5. Доказати да се у координатној равни може нацртати кружница која не пролази ни кроз једну тачку са целобројним координатама, а у чијој се унутрашњости налазе тачно 2002 такве тачке.

Први разред – Б категорија

1. Одредити све просте бројеве p за које су и бројеви p^3+6, p^3-6 прости.

2. Види 2. задатак за први разред А категорије.

3. Дати су позитивни бројеви a, b, c. Ако је $a^2+b^2+c^2=\dfrac{5}{3}$, доказати да је

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}<\frac{1}{abc}.$$

4. Види 4. задатак за први разред А категорије.

5. Дат је скуп $\mathcal{A}=\{1,2,3,\ldots,2002\}$. Колико има подскупова $\mathcal{B}$ скупа $\mathcal{A}$ са следећим својством: ако $x\in\mathcal{B}$ и $y\in\mathcal{B}$ онда $x+y\neq 2003$?

Други разред – Б категорија

1. Види 1. задатак за други разред А категорије.

2. Дат је трапез $ABCD$, $AB \parallel CD$. Нека је $\{S\} = AC \cap BD$, и p права која садржи тачку S и паралелна је основицама трапеза. Ако су M и N пресечне тачке праве p са крацима трапеза, доказати да је S средиште дужи MN.

3. Дати су позитивни реални бројеви a и b, $a+b=1$. Ако су a^3 и b^3 рационални, доказати да су и бројеви a, b такође рационални.

4. Види 4. задатак за други разред А категорије.

5. Дат је троугао ABC. Нека су A_1, B_1 средишта страница BC, AC редом, и T његово тежиште. Ако се у четвороугао B_1TA_1C може уписати круг, доказати да је троугао ABC једнакокрак.

Трећи разред – Б категорија

1. Нека су α и β оштри углови неког троугла. Ако је

$$\sin(\alpha+\beta) - 1 = \sin^2\alpha - \cos^2\beta\,,$$

доказати да је трећи угао тог троугла прав.

2. У троуглу ABC, странице AC и BC су подударне, и $\angle BCA = 100°$. Унутар тог троугла, уочена је тачка M таква да је $\angle MAB = 30°$ и $\angle MBA = 20°$. Одредити $\angle ACM$.

3. Види 3. задатак за трећи разред А категорије.

4. Види 4. задатак за трећи разред А категорије.

5. Дати су природни бројеви a, b, c. Доказати да је вредност

$$\frac{1}{2abc}\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

куб неког природног броја.

Четврти разред – Б категорија

1. Шта је веће:
$$\frac{2}{201} \qquad \text{или} \qquad \ln\frac{101}{100}\ ?$$
Образложити одговор.

2. Дати су бројеви $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$ и $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Ако је $z^n = 1$ доказати да важи:
$$1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1} = \frac{n}{z-1}\,.$$

3. Види 3. задатак за четврти разред А категорије.

4. Одредити сва реална решења система:
$$\frac{2x_1^2}{1+x_1^2} = x_2, \quad \frac{2x_2^2}{1+x_2^2} = x_3, \quad \ldots, \quad \frac{2x_n^2}{1+x_n^2} = x_1\,.$$

5. Види 5. задатак за четврти разред А категорије.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА

Први разред – А категорија

1.1. Претпоставимо да је $3n^2+3n+7=t^3$. Израз $3n^2+3n+7=3n(n+1)+7$ је увек непаран, па се може увести смена $t=2s+1$. Из $3n^2+3n+6=8s^3+12s^2+6s$, добијамо да је $8s^3$ дељиво са 3, па је $s=3r$. Дакле, $n^2+n+2=72r^3+36r^2+6r$. Ако је n облика $3k$ или $3k+2$, израз на левој страни при дељењу са 3 даје остатак 2, а ако је n облика $3k+1$, остатак је 1. Дакле, тај израз никада није дељив са 3, а онај на десној страни јесте, па је једнакост немогућа.

1.2. $\angle ESD=\angle CSA=180^\circ-(\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2})=90^\circ+\frac{\beta}{2}=120^\circ$, па је четвороугао $BDSE$ тетиван. Следи: $\angle SED=\angle SBD$ (над тетивом SD), $\angle SDE=\angle SBE$ (над SE), $\angle SBD=\angle SBE$ (S је на симетрали $\angle ABC$), па је $\angle SED=\angle SDE$, тј. $\triangle SED$ је једнакокраки, па је $SE=SD$.

1.3. Из $x\leq f(x)+1$ следи $f(x)\geq x-1$, а из $f(x+1)\leq x$, заменом x са $x-1$, добијамо $f(x)\leq x-1$. Дакле, $f(x)=x-1$.

1.4. Поделимо S на следеће блокове: $\{1,2,4,8,16\}$, $\{3,6,9\}$, $\{5,10,20\}$, $\{7,14\}$, $\{9,18\}$, $\{11\}$, $\{13\}$, $\{15\}$, $\{17\}$, $\{19\}$. Никоја два суседна броја из било ког блока не могу бити истовремено у A. Осим тога, ни један број није двоструки чинилац броја из другог блока. На основу тога лако добијамо да за скуп A можемо узети највише три елемента првог блока: 1, 4, 16, највише два елемента другог: 3, 9, највише два елемента трећег: 5, 20, и по један елемент из осталих блокова. Дакле, максималан број елемената скупа A је 14.

1.5. Означимо број екипа са n. На турниру је одиграно $n(n-1)/2$ утакмица, и укупан број поена је $n(n-1)$. Пошто је $n(n-1)\geq 7+5+3=15$, мора бити $n\geq 5$. Екипе пласиране иза трећег места су освојиле највише по 3 поена, па је $n(n-1)\leq 7+5+3(n-2)$, тј. $(n-2)^2\leq 10$, одакле је $n\leq 5$. Према томе, на турниру је учествовало 5 екипа, четвртопласирана је освојила 3 поена, а петопласирана 2.

Други разред – А категорија

2.1. Нека је $a=\sqrt{1+x^2}$, $b=\sqrt{1+y^2}$, $A=xb+ya$, $B=-xy-ab$. Биће:

$B^2 - A^2 = x^2y^2 + a^2b^2 - x^2b^2 - y^2a^2 = (y^2 - b^2)(x^2 - a^2) = 1$. Дакле, $B^2 = A^2 + 1 = 2003$. Како је $-B = \sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2} + xy > |x||y| + xy \geq 0$, то је $B = -\sqrt{2003}$.

2.2. Нека је $f(x) = x^2 + \frac{8}{a}x - 2a$, $g(x) = x^2 + \frac{6}{a}x - a = 0$. Како је код обе функције коефицијент уз x^2 једнак 1, неопходан и довољан услов да буде задовољено оно што се тражи у задатку јесте да пресечна тачка графика тих функција лежи испод x-осе. x-координата пресечне тачке је $\frac{a^2}{2}$ (из $f(x) = g(x)$), па мора бити $f(\frac{a^2}{2}) = \frac{a^4}{4} + 2a < 0$, тј. $-2 < a < 0$.

2.3. Израчунајмо углове троугла DQF. $\angle QFD = \operatorname{arctg} 2$ (из $\triangle DFC$), $\angle FDQ = 45°$, па је $\angle DQF = 135° - \operatorname{arctg} 2$. Према адиционој формули, добијамо $\operatorname{tg} \angle DQF = 3$, одакле следи да је $\angle DQF = \operatorname{arctg} 3 = \angle BLP$ (из $\triangle ABL$). Пошто су и углови у теменима D и B троуглова DQF и BLP подударни $(45°)$, следи да су ти троуглови слични.

2.4. Користећи синусну теорему и једнакост $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, имамо:

$$\begin{aligned}
a^2 \sin 2\beta + b^2 \sin 2\alpha &= 2a \cdot a \sin\beta \cdot \cos\beta + 2b \cdot b\sin\alpha \cdot \cos\alpha \\
&= 2a \cdot b\sin\alpha \cdot \cos\beta + 2b \cdot a\sin\beta \cdot \cos\alpha \\
&= 2ab\,(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) = 2ab\sin(\alpha+\beta) \\
&= 2ab\sin\gamma = 4S.
\end{aligned}$$

Одавде следи и тражена једнакост.

2.5. $\left(\frac{1+i}{2}\right)^2 = \frac{i}{2}, \left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^2} = \left(\frac{i}{2}\right)^2, \ldots, \left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^{2002}} = \left(\frac{i}{2}\right)^{2^{2001}} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
&\left(1 + \frac{1+i}{2}\right)\left(1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^2\right)\left(1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^2}\right)\cdots\left(1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^{2002}}\right) \\
&\quad = \left(1 + \frac{1+i}{2}\right)\left(1 + \frac{i}{2}\right)\left(1 + \left(\frac{i}{2}\right)^2\right)\cdots\left(1 + \left(\frac{i}{2}\right)^{2^{2001}}\right) \\
&\quad = \frac{1 + \frac{1+i}{2}}{1 - \frac{i}{2}}\left(1 - \frac{i}{2}\right)\left(1 + \frac{i}{2}\right)\left(1 + \left(\frac{i}{2}\right)^2\right)\cdots\left(1 + \left(\frac{i}{2}\right)^{2^{2001}}\right) \\
&\quad = \frac{3+i}{2-i}\left(1 - \left(\frac{i}{2}\right)^{2^{2002}}\right) = (1+i)\left(1 - \frac{1}{2^{2^{2002}}}\right),
\end{aligned}$$

јер је $\frac{3+i}{2-i} = 1 + i$, $i^{2^{2002}} = 1$. Дакле, $a = 1, b = -1$.

Трећи разред – А категорија

3.1. Нека је $\overline{abcdef}$ шестоцифрен број. Следи: $a + b + c = d + e + f$, $a + c + e = b + d + f$, тј. $b = e$, $a + c = d + f$. Цифру $b = e$ можемо изабрати на 10 начина. Нека је $k = a + c = d + f$. Ако је $1 \leq k \leq 9$, онда пар (d, f) можемо изабрати на $k + 1$ начин, а пар (a, c) на k начина (јер $a \neq 0$). За $10 \leq k \leq 18$, оба пара можемо изабрати на по $19 - k$ начина. Дакле, тражених бројева има: $10 \cdot (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + 9 \cdot 10 + 9 \cdot 9 + 8 \cdot 8 + \cdots + 1 \cdot 1) = 6150$.

3.2. Лева страна неједначине је дефинисана за $x > 0$, $x \neq 1$, $\frac{12-4x}{4-x} > 0$, тј. за $x \in (0, 1) \cup (1, 3) \cup (4, +\infty)$. За $x \in (0, 1)$, неједначина је еквивалентна са:

$$\frac{12 - 4x}{4 - x} \geq x \iff \frac{12 - 8x + x^2}{4 - x} \geq 0 \iff \frac{(x - 6)(x - 2)}{4 - x} \geq 0,$$

што је задовољено за све вредности у том интервалу. Ако $x > 1$, неједначина је еквивалентна са: $\frac{12-4x}{4-x} \leq x \iff \frac{(x-6)(x-2)}{4-x} \leq 0 \iff x \in [2, 4) \cup [6, +\infty)$. Уз услов дефинисаности, добијамо да су решења неједначине: $x \in (0, 1) \cup [2, 3) \cup [6, +\infty)$.

3.3. Како је $\frac{BP}{AB} = \frac{BQ}{BC} = \cos\beta$, имамо да су троуглови PBQ и ABC слични са коефицијентом сличности $\cos\beta$. Онда је $\frac{P(\triangle PBQ)}{P(\triangle ABC)} = \cos^2\beta$, па је $\cos\beta = \frac{1}{3}$. Одатле је $AC = 3PQ = 6\sqrt{2}$. Како је $2R = \frac{AC}{\sin\beta}$, добијамо да је $R = \frac{9}{2}$.

3.4. Дата једначина је еквивалентна са $((x-p)^2 - 1)(p\,(x-p)^2 - 1) = 0$, па мора бити $(x - p)^2 = 1$ или $p(x - p)^2 = 1$. Ако је $p \leq 0$, једина реална решења су $p + 1$ и $p - 1 < 0$, па услов задатка није испуњен. За $p > 0$, корени једначине су: $x_1 = p + 1$, $x_2 = p - 1$, $x_3 = p + \frac{1}{\sqrt{p}}$, $x_4 = p - \frac{1}{\sqrt{p}}$. За $0 < p < 1$, једначина има једнако позитивних и негативних решења ($x_2 < 0$, $x_4 < 0$, $x_1 > 0$, $x_3 > 0$). За $p \geq 1$, имамо $x_1 > 0, x_2 \geq 0, x_3 > 0, x_4 \geq 0$. Дакле, одговор је $p \geq 1$.

3.5. Нека је $a \leq b \leq c < d$. Ако је $c = 1$, онда $1^1 + 1^1 + 1^1 = 3 \neq d^d$. За $c = 2$, имамо три могућности: $1^1 + 1^1 + 2^2 = 6 \neq d^d$, $1^1 + 2^2 + 2^2 = 9 \neq d^d$, $2^2 + 2^2 + 2^2 = 12 \neq d^d$. Нека је $c \geq 3$. Тада имамо: $d^d = a^a + b^b + c^c \leq 3 \cdot c^c \leq c^{c+1} < (c+1)^{c+1}$. Одавде је $d < c + 1$, што је немогуће.

Четврти разред – А категорија

4.1. Сви бројеви скупа A деле $210 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$, па су сви они облика $2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\cdot 7^d$, где је $a,b,c,d\in\{0,1\}$ (*). Њихов производ је дељив са $1920 = 2^7\cdot 3\cdot 5$, па A мора садржати бар 7 парних бројева. Парних бројева облика (*) има 8, и то су: 2, 6, 10, 14, 30, 42, 70, 210. Ако би било $2\in A$, онда би и сви остали елементи скупа A били парни (због услова да у скупу нема парова узајамно простих бројева). Пошто A има више од 7 елемената, морало би да буде $A = \{2,6,10,14,30,42,70,210\}$. Али, производ ових бројева је потпун квадрат, па овај случај није могућ. Дакле, $2\notin A$ и $\{6,10,14,30,42,70,210\}\subset A$. У скупу A се мора налазити и неки непаран број N. Пошто N није узајамно прост са 6, 10 и 14, мора бити дељив са $3\cdot 5\cdot 7$, а како је облика (*), добијамо да мора бити $N = 3\cdot 5\cdot 7$. Производ добијених бројева није потпун квадрат, па је решење задатка скуп $A = \{6,10,14,30,42,70,105,210\}$.

4.2. Означимо са x трећину угла у темену A троугла. Услов $BD = 2CE$ је еквивалентан са:

$$\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x = 2\operatorname{tg} x \;\Leftrightarrow\; \frac{\sin x}{\cos 3x\cos 2x} = \frac{2\sin x}{\cos x} \;\Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{2}(\cos 5x + \cos x) = \frac{1}{2}\cos x \;\Leftrightarrow\; \cos 5x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 18^\circ,$$

јер је $0 < x < 30^\circ$. Дакле, $\angle A = 54^\circ$, $\angle B = 36^\circ$.

4.3. Одстојање тражене тачке $M(x,y)$ од тачке $(1,4)$ је

$$d = \sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}y^2-1\right)^2+(y-4)^2}.$$

Нека је $f(y) = d^2 = (\frac{1}{2}y^2-1)^2+(y-4)^2$. Имамо да је $f'(y) = y^3-8$. Лако се проверава да је $y=2$ минимум функције $f(y)$. Дакле, $M(2,2)$ је тражена тачка.

4.4. а) Лако се доказује да је AB_1C_1D такође трапез, за мањом основицом $B_1C_1 = \frac{a-b}{2}$. Слично добијамо да је $B_nC_n = \frac{a-B_{n-1}C_{n-1}}{2}$. Индукцијом се показује да је $B_nC_n = \frac{a}{3}+\frac{3b-a}{3}(-\frac{1}{2})^n$. б) Очигледно је $\lim_{n\to\infty}|B_nC_n| = a/3$. в) Све дужи B_nC_n биће међусобно једнаке (и једнаке BC) када је $a = 3b$.

4.5. Види решење задатка 3.5 за А категорију.

Први разред – Б категорија

1.1. Означимо са a број ученика који учествују на сва три такмичења, са b, c, d број оних који учествују на два такмичења: из математике и физике, из физике и информатике, и из математике и информатике редом, и са e, f, g број ученика који учествују само на једном такмичењу: из математике, физике, информатике редом. Имамо:

$$\begin{aligned} a+b+c+d+e+f+g &\leq 30 \\ a+b+d+e &= 24 \\ a+b+c+f &= 22 \\ a+d+c+g &= 20. \end{aligned}$$

Ако прву неједначину помножимо са -2 и саберемо са три преостале једначине, добићемо $a-(e+f+g) \geq 6$, одакле је $a \geq 6$.

1.2. Ако у дату једнакост заменимо $x=2$ и $x=-1$, добијамо: $f(2)-2f(\frac{1}{2}) = 4004$ и $f(\frac{1}{2})-2f(2) = -2002$. Одавде се добија $f(2)=0$.

1.3. Дати број се може написати у облику $(n^{1001}-1)\cdot n\cdot(n^{1001}+1)$. Како је n непарно, $n^{1001}-1$ и $n^{1001}+1$ су узастопни парни бројеви, и њихов производ је дељив са 8. Од три узастопна броја $n^{1001}-1$, n^{1001} и $n^{1001}+1$, један је дељив са 3. Ако је то n^{1001}, онда је и n дељив са 3. Дакле, дати број је дељив са 3 и 8, па и са 24.

1.4. Производ два троцифрена броја је петоцифрен или шестоцифрен. Ако је написан само помоћу тројки, може бити 33333 или 333333. Раставимо ове бројеве на чиниоце: $33333 = 3\cdot 41\cdot 271$, а $333333 = 3^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37$. У првом случају, решење представља само пар 123 и 271. У другом случају, један од та два броја је облика $37\cdot a$, где је $10 \leq a \leq 27$, па су решења парови: $407 = 37\cdot 11$ и 819, $481 = 37\cdot 13$ и 693, $777 = 37\cdot 21$ и 429. Дакле, задатак има четири решења.

1.5. Види решење задатка 1.5 за А категорију.

Други разред – Б категорија

2.1. $(1+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9})^3 = (1+\sqrt[3]{3})^3 - 3(1+\sqrt[3]{3})^2\cdot\sqrt[3]{9} + 3\cdot(1+\sqrt[3]{3})\cdot\sqrt[3]{9^2} - \sqrt[3]{9^3} = 10-5\sqrt[3]{27} = 5(2-\sqrt[3]{27})$, па је вредност датог израза рационални број 5.

2.2. Квадратна функција $y = x^2 + ax - 1$ има позитивну дискриминанту, па су њени корени x_1 и x_2 реални и различити. Услов задатка је еквивалентан са:

$$5 = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{a^2 + 4}\,,$$

према Виетовим формулама. Тражене вредности су: $a = \sqrt{21}$ и $a = -\sqrt{21}$.

2.3. Претпоставимо да важе све три неједнакости. Када их помножимо, добијамо $a(1-a) \cdot b(1-b) \cdot c(1-c) > \frac{1}{64}$. Међутим, то је у контрадикцији са неједнакошћу $0 < x(1-x) \leq \frac{1}{4}$, која важи за све x у интервалу $(0,1)$ (коме морају припадати и a, b, c).

2.4. $z = 0$ је решење. $\bar{z} = z^3 \Rightarrow \bar{z} \cdot z = z^4 \Rightarrow |z|^2 = z^4 \Rightarrow |z^2| = |z^4| \Rightarrow |z| = 1$, за $z \neq 0$. Одатле, $z^4 = 1 \Rightarrow (z^2-1)(z^2+1) = 0 \Rightarrow (z-1)(z+1)(z-i)(z+i) = 0$. Дакле, постоји пет тражених комплексних бројева: $0, 1, -1, i, -i$.

2.5.

$$\begin{aligned} \angle XSC &= \angle ASH \text{ (унакрсни углови)} \\ &= \angle ADB \text{ (углови са нормалним крацима)} \\ &= \angle ACB \text{ (периферијски углови над истим луком)} \\ &= \angle SCX. \end{aligned}$$

Слично, $\angle SBX = \angle DBC = \angle DAC = \angle HAS = 90^\circ - \angle ASH = 90^\circ - \angle XSC = \angle BSX$. Из једнакости $\angle XSC = \angle SCX$ и $\angle SBX = \angle BSX$, добијамо $XC = XS = XB$, па је X средиште дужи BC.

Трећи разред – Б категорија

3.1. Види решење задатка 3.1 за А категорију.

3.2. Види решење задатка 3.2 за А категорију.

3.3. Ако поделимо једначину са $4^{1/\sin x}$ и уведемо смену $(\frac{3}{2})^{1/\sin x} = t$, добијамо квадратну једначину $6t^2 - 13t + 6 = 0$, чија су решења $t_1 = \frac{3}{2}$ и $t_2 = \frac{2}{3}$, одакле је $\sin x = 1$ или $\sin x = -1$. Решења једначине су сви реални бројеви облика $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3.4. Ако су све бочне ивице неке пирамиде једнаке, тада је подножје висине центар круга описаног око основе. Посматрајмо пирамиду у таквом положају да јој је основа једнакокраки троугао са страницама $3, 3, 4$. Површина тог троугла је $B = 2\sqrt{5}$, а полупречник описаног круга $R = \frac{abc}{4B} = \frac{9\sqrt{5}}{10}$. Висина пирамиде је $H = \sqrt{3^2 - R^2} = \frac{3\sqrt{55}}{10}$, па је њена запремина једнака $V = \frac{1}{3}BH = \sqrt{11}\,\mathrm{cm}^3$.

3.5. $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-3)) = \pi - 3 > 0 > 3\pi - 10 = \arcsin(\sin 10)$.

Четврти разред – Б категорија

4.1. Нека је $z = x + iy$. Из:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{x + (y-6)i}{x + 8 + iy}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{x + (y-6)i}{x + 8 + iy} \cdot \frac{x + 8 - iy}{x + 8 - iy}\right) = \frac{x(x+8) + y(y-6)}{(x+8)^2 + y^2},$$

следи да је $z \in \mathcal{S}$ еквивалентно са: $x^2 + 8x + y^2 - 6y = 0$ и $(x+8)^2 + y^2 \neq 0$, тј. $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$ и $z \neq -8$. Дакле, сви комплексни бројеви који задовољавају дату једнакост, припадају кружници са центром у тачки $(-4, 3)$ и полупречником 5. $\mathcal{S} \neq k$, јер $(-8, 0) \in k$ и $-8 \notin \mathcal{S}$.

4.2. Види решење задатка 3.2 за А категорију.

4.3. Види решење задатка 4.3 за А категорију.

4.4. Нека је $S = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \cdots + \frac{n}{5^n}$. Тада је $\frac{1}{5}S = \frac{1}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \cdots + \frac{n}{5^{n+1}}$. Одузимањем ових једнакости налазимо: $\frac{4}{5}S = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n} - \frac{n}{5^{n+1}}$, одакле је:

$$S = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^{n-1}}\right) - \frac{n}{4 \cdot 5^n} = \frac{5}{16} - \frac{4n+5}{16 \cdot 5^n}.$$

Дакле, $a = \frac{5}{16}$, $b = -4$, $c = -5$.

4.5. Како је $\frac{n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1)} = \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$, тражена гранична вредност је једнака:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 1.$$

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА

Први разред – А категорија

1.1. $(n+1)^{3n} - n^{2n}(n+3)^n = (n^3+3n^2+3n+1)^n - (n^3+3n^2)^n$, па је дати број дељив разликом $(n^3+3n^2+3n+1)-(n^3+3n^2) = 3n+1$.

1.2. Претпоставимо да је $r = \sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}$ рационалан број. *Први случај:* n није квадрат ни једног природног броја. Узастопним квадрирањем, добијамо да је

$$\sqrt{n} = (\ldots((r^2-1)^2-2)^2\ldots),$$

што је немогуће, јер је на левој страни ирационални број, а на десној рационални. *Други случај:* $n = m^2$, за неко $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$. Као у првом случају, добијамо да је број $\sqrt{n-1+\sqrt{n}} = \sqrt{m^2+m-1}$ рационалан. Међутим, то је немогуће, јер је $m^2 < m^2+m-1 < (m+1)^2$, па m^2+m-1 није потпун квадрат.

1.3. $\angle BCD + \angle CDE = \angle BCA + \angle ACD + \angle CDA + \angle ADE = \angle BAC + \angle ACD + \angle CDA + \angle DAE = \angle CAD + \angle ACD + \angle CDA = 180°$. Следи да је $BCDE$ ромб, па је $BE = CD$ и $\triangle ABE$ је једнакостраничан. Дакле, $\angle BAE = 60°$.

1.4. Из сваке тачке унутар четвороугла, бар једна страница се види под углом који није оштар (јер та четири угла чине пун угао). Тада ће круг конструисан над том страницом прекривати дату тачку.

1.5. Свака екипа је одиграла 9 утакмица, па је $x_i+y_i = 9 \Rightarrow x_i^2 = 9^2-2\cdot 9\cdot y_i+y_i^2$. Сабирајући ове једнакости, добијамо: $x_1^2+\cdots+x_{10}^2 = 10\cdot 9^2 - 2\cdot 9\cdot(y_1+\cdots+y_{10})+(y_1^2+\cdots+y_{10}^2)$. Пошто је $x_1+\cdots+x_{10} = y_1+\cdots+y_{10} = \frac{10\cdot 9}{2}$, следи и тврђење задатка.

Други разред – А категорија

2.1. Означимо са H ортоцентар $\triangle ABC$. Важи: $HB\cdot HB' = HM\cdot HN$ и $HC\cdot HC' = HP\cdot HQ$ (потенција тачке H у односу на конструисане кружнице). Дељењем ове две једнакости, следи: $\frac{HB}{HC'}\cdot\frac{HB'}{HC} = \frac{HM}{HP}\cdot\frac{HN}{HQ}$. Међутим, пошто је $\frac{HC'}{HB} = \sin\angle ABB'$, $\frac{HB'}{HC} = \sin\angle ACC'$ и $\angle ABB' = \angle ACC' = 90° - \angle BAC$, имамо $\frac{HM}{HP}\cdot\frac{HN}{HQ} = 1$, тј. $\frac{HM}{HP} = \frac{HQ}{HN}$, одакле је $\triangle HMP \sim \triangle HQN \Rightarrow$

$\angle PQN = \angle PMN$ (*). Пошто је $\triangle ABC$ оштроугли, тачка H се налази између M и N, као и између P и Q, па су тачке M, Q са исте стране праве PN (**). Из (*) и (**) следи да је четвороугао $MNPQ$ тетиван.

2.2.

$$\begin{aligned}\frac{\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha\sin\beta} - \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2} &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta - 2\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \left(\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin\alpha\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} + \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\beta\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\right) = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}(\sin\alpha-\sin\beta)}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\,.\end{aligned}$$

Одређености ради, можемо претпоставити да је $\alpha \geq \beta$. Приметимо је сваки чинилац у имениоцу овог израза увек позитиван, као и да је $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \geq 0$. Дакле, треба показати да је $\sin\alpha \geq \sin\beta$. *Први случај:* Угао α није туп. Пошто је $\sin x$ растућа функција на интервалу $(0, \frac{\pi}{2}]$, следи неједнакост $\sin\alpha \geq \sin\beta$. *Други случај:* α је туп угао. Нека је $\phi = \alpha - \frac{\pi}{2}$. Тада је $\beta < \frac{\pi}{2} - \phi$ (због $\alpha + \beta < \pi$), па је: $\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) = \cos\phi$, $\sin\beta < \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \cos\phi$, тј. $\sin\alpha > \sin\beta$.

2.3. Означимо: $\alpha = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p - \sqrt{d^2 - \frac{1}{2}S}\right)$, $\beta = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p + \sqrt{d^2 - \frac{1}{2}S}\right)$. Онда је $\alpha + \beta = \frac{1}{6}p$, $\alpha\beta = \frac{1}{6}S$, па су α и β корени квадратне једначине $f(t) = t^2 - \frac{1}{6}p\cdot t + \frac{1}{6}S = 0$. Приметимо да је $\frac{\alpha+\beta}{2}$ апсциса темена параболе $y = f(t)$. Како је $x < \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1}{3}(x+y+z) < z$, $f(x) = \frac{1}{3}(z-x)(y-x) > 0$ и $f(y) = \frac{1}{3}(z-x)(z-y) > 0$, мора бити $x < \alpha$ и $y > \beta$.

2.4. Нека су a, b, c странице и s полуобим тог троугла. Имамо:

$$\frac{abc}{4\cdot 6,25} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{тј.}\quad 4abc = 25\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}\ (*).$$

Из ове једнакости следи да број $\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$ мора бити природан, па $25|abc$. Пошто су a, b, c природни бројеви не већи од $2\cdot 6,25 = 12,5$, следи да су бар два од њих дељива са 5. *Први случај:* $a = b = 5$. Из (*) добијамо да мора бити $c = \sqrt{84} \notin \mathbb{N}$. *Други случај:* $a = 5$, $b = 10$. У овом случају, једначина (*) нема реалних решења.

Трећи случај: $a = b = 10$. $(^*) \Rightarrow \ c = 12$. Дакле, странице овог троугла једнаке су 10, 10 и 12.

2.5. Нека је x_k број поена које је освојио играч на k-том месту. Према услову задатка: $x_1 > x_2 > \cdots > x_8$. Пошто су сви играчи одиграли по 7 партија, имамо да је $x_1 \leq 7$, и $x_2 \leq 6,5$. Ако би било $x_2 = 6,5$, то би значило да другопласирани није изгубио ни једну партију, али пошто мора бити и $x_1 = 7$, имали бисмо да је првопласирани играч победио све остале, па је то немогуће. Дакле, мора бити $x_2 \leq 6$. Последња четири играча су међусобно одиграла $\frac{4\cdot 3}{2} = 6$ партија, и у њима заједно освојили 6 поена. Дакле, $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 6$. Из услова $x_2 = x_5 + x_6 + x_7 + x_8$, добијамо да је $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 6$. Дакле, последња четири играча су изгубила све партије које су одиграли са првом четворицом, па је четвртопласирани победио шестопласираног. *Напомена:* Овакав исход турнира је могућ ако је сваки играч изгубио од свих који су пласирани изнад њега, а победио остале.

Трећи разред – А категорија

3.1. Како је четвороугао BA_1TC_1 тетиван, то је:

$$\angle BTA_1 = \angle BC_1A_1 = \angle C_2C_1A_1 = \angle C_2B_2A_1.$$

Слично, добијамо да је $\angle CTA_1 = \angle B_2C_2A_1$. Сада је $\angle C_2B_2A_1 + \angle B_2C_2A_1 = \angle BTA_1 + \angle CTA_1 = \angle BTC = 120°$, па је у $\triangle A_1B_2C_2$, $\angle B_2A_1C_2 = 60°$. Али, $\angle B_2A_2C_2 = \angle B_2A_1C_2$. Аналогно се и за остале углове $\triangle A_2B_2C_2$ доказује да су једнаки $60°$.

3.2. Ако је пар (m, n) решење, онда је и $(-m, -n)$ решење. Пошто је $5 + 3\sqrt{2} > 1$ и $3 + 5\sqrt{2} > 1$, бројеви m, n морају бити истог знака. Дакле, можемо претпоставити да је $m \geq 0$, $n \geq 0$. Из једначине следи да важи и $(5 - 3\sqrt{2})^m = (3 - 5\sqrt{2})^n$. Како је $0 < 5 - 3\sqrt{2} < 1$ и $5\sqrt{2} - 3 > 1$, ово је могуће само за $m = n = 0$. Дакле, једино решење је пар $(0, 0)$.

3.3. Означимо: $\vec{x} = \beta\vec{c} - \gamma\vec{b}$, $\vec{y} = \gamma\vec{a} - \alpha\vec{c}$, $\vec{z} = \alpha\vec{b} - \beta\vec{a}$. Ако је $\alpha = \beta = \gamma = 0$, тада су $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ нула-вектори, па тврђење важи. Претпоставимо сада да је бар један од скалара различит од нуле, на пример $\gamma \neq 0$. Тада је $\vec{z} = -\frac{\alpha}{\gamma}\,\vec{x} - \frac{\beta}{\gamma}\,\vec{y}$, па су та три вектора компланарна.

3.4. Ако ни један од тих бројева није 2, онда њихови квадрати дају остатак 1 при дељењу са 8, па би лева страна једнакости била дељива са 8, а десна не. Дакле, бар један од бројева мора бити једнак 2. Тада је десна страна дељива са 8. Да би и лева страна била парна, међу сабирцима $p_1^2, \dots, p_8^2$ мора бити паран број непарних, тј. има 0, 2, 4 или 6 непарних сабирака. Њихов збир при дељењу са 8 даје остатке 0, 2, 4, 6 редом, па мора бити $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = p_7 = p_8 = 2$. Провером се установљава да ови бројеви заиста зadодовљавају једнакост.

3.5. По услову задатка, $P(0) \neq 0$. Претпоставимо да је x_0 реална нула тог полинома. Тада је и $x_1 = 2x_0^3 + x_0$ такође његова реална нула, при чему је $|x_1| = |2x_0^3 + x_0| = |x_0| \cdot |2x_0^2 + 1| > |x_0|$, јер $x_0 \neq 0$. Настављајући овај поступак добили бисмо бесконачан низ реалних нула полинома, при чему је свака наредна по апсолутној вредности већа од претходне, а то није могуће. Дакле, полином не може имати ни једну реалну нулу.

Четврти разред – А категорија

4.1. Види решење задатка 3.1 за А категорију.

4.2. Нека је f функција која задовољава услове задатка. Заменом вредности $x = 0$ у дату једнакост, добија се да је $f(0) = 0$. Важи:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + f\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2^2} + f\left(\frac{x}{2^2}\right)\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2^3} + f\left(\frac{x}{2^3}\right)\right)\right)\right).$$

Индукцијом се лако доказује да је $f(x) = \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{2n}}\right)x + \frac{1}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right)$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Тада је:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{2n}}\right)x + \frac{1}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) = \frac{x}{3},$$

јер је $\lim_{n\to\infty} \frac{x}{2^n} = 0$, и функција је непрекидна у тачки $x = 0$. Провером се види да непрекидна функција $f(x) = \frac{x}{3}$ заиста задовољава дату једнакост.

4.3. Ако је n непарно, узмимо пермутације $a_i = b_i = i$, за све $i \in A$. Важи: $n \mid (a_i + b_i) - (a_j + b_j) \;\Rightarrow\; n \mid 2i - 2j \;\Rightarrow\; n \mid i - j$. Међутим, $|i - j| < n$, па мора бити $i = j$. Према томе, непарни бројеви немају тражено својство. Размотримо сада случај парног n. Нека су $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ произвољне пермутације скупа A. Ако n не дели ни једну од разлика

$(a_i+b_i)-(a_j+b_j)$, то значи да сви елементи n-торке $(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)$ дају различите остатке при дељењу са n. Збир елемената те n-торке једнак је $n(n+1)$, па је дељив са n. Са друге стране, $(a_1+b_1)+\cdots+(a_n+b_n)\equiv 1+2+\cdots+n \pmod n$, и $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, што није дељиво са n, јер је n парно, и нема заједничких делилаца са $n+1$. *Одговор:* природни бројеви са траженим својством су парни.

4.4. Претпоставимо да је човек довеслао до места на десној обали које је $x\,km$ удаљено од оне тачке на тој обали која се налази тачно наспрам његовог почетног положаја, $0\le x\le 4$. Тада је он веслао $\sqrt{x^2+9}\,km$, а трчао $4-x\,km$. Време које му је потребно за то је $t(x)=\frac{\sqrt{x^2+9}}{6}+\frac{4-x}{8}$. Како је $t'(x)=\frac{x}{6\sqrt{x^2+9}}-\frac{1}{8}$, минимум функције се достиже у тачки $x_0=\frac{9}{\sqrt 7}$ (јер $t'(x_0)=0$, $t''(x_0)>0$). Пошто је $0<x_0<4$, тражено растојање је једнако $4-\frac{9}{\sqrt 7}\,km$.

4.5. За целе x,y, $P(x)-P(y)$ је увек дељиво са $x-y$. Означимо: $x_2-x_3=P(x_1)-P(x_2)=R_1\cdot(x_1-x_2)$, $x_3-x_4=P(x_2)-P(x_3)=R_2\cdot(x_2-x_3)$, $\dots$, $x_1-x_2=P(x_n)-P(x_1)=R_n\cdot(x_n-x_1)$. Множењем ових једнакости, добијамо да је $R_1R_2\dots R_n=1$. Како су $R_1,\dots,R_n$ цели бројеви, сваки од њих је једнак 1 или -1. Видимо да морају сви бити једнаки 1, јер би се иначе неке од вредности $x_1,\dots,x_n$ поклапале. Претпоставимо да је x_1 највећи од тих бројева. Тада, из $x_1-x_2=x_n-x_1$, добијамо контрадикцију: $2x_1=x_2+x_n<x_1+x_1$. Дакле, тражени цели бројеви не могу постојати.

Први разред – Б категорија

1.1. $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=3n(n^2+2)$. Покажимо да је овај број увек дељив са 9. Ако је n дељиво са 3, онда је производ $3n$ дељив са 9, а ако је $n=3k+1$ или $n=3k+2$, са 9 ће бити дељиво $3(n^2+2)$. Збир два парна и једног непарног броја (у случају непарног n) је непаран, а збир два непарна и једног парног броја (када је n парно) је паран. Дакле, дати израз је дељив са 18 ако и само ако је n парно.

1.2. $28!$ је дељиво са $5\cdot 8\cdot 10\cdot 15\cdot 20\cdot 25=3000000$, па је $b=0$. Пошто је број $28!$ дељив са 9, и збир његових цифара мора бити дељив са 9, тј. $9\mid 82+a$. Једина цифра са овим својством је $a=8$.

1.3. Бар један од углова у теменима A и B овог троугла такође је оштар. Можемо претпоставити да је то угао $\angle ABC$. Тачке A,B,A',B' налазе се на истом кругу (јер $\angle AB'B = \angle AA'B = 90^\circ$). Ако је $\angle BCA$ оштар, важи $\angle AB'A' = 180^\circ - \angle ABC \Rightarrow \angle A'B'C = \angle ABC$, а ако је туп, углови $\angle A'B'C$ и $\angle ABC$ су подударни као периферијски над тетивом AA'. Посматрајмо тангенту t круга описаног око троугла ABC која садржи тачку C, и на тој тангенти произвољну тачку M која се налази са различите стране праве AC него тачка B. Угао између тангенте и тетиве једнак је одговарајућем периферијском углу над том тетивом, тј. $\angle MCA = \angle ABC$. Добили смо да су углови $\angle A'B'C$ и $\angle MCA$ подударни. Како су они наизменични када је $\angle BCA$ оштар, а сагласни када је туп, следи да је $A'B' \parallel t$. Како је $t \perp OC$, тражени угао је прав.

1.4. $\angle AOB = 180^\circ - (\angle OAB + \angle OBA)$ и $\angle COD = 180^\circ - (\angle OCD + \angle ODC) \Rightarrow$ $\angle AOB + \angle COD = 360^\circ - \frac{1}{2}(\angle DAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA) = 180^\circ$.

1.5. Види решење задатка 1.5 за А категорију.

Други разред – Б категорија

2.1. $(a+b)^2 - (a^2+b^2) = 2ab \Rightarrow d = \text{НЗД}(a+b, a^2+b^2) = \text{НЗД}(a+b, 2ab)$. Претпоставимо да је $p \geq 3$ заједнички прост чинилац бројева $a+b$ и $2ab$. $p \mid 2ab \Rightarrow p \mid a$ или $p \mid b$. Пошто је један сабирак, као и збир $a+b$, дељив са p, следи да су и a и b дељиви са p, што није могуће, јер су узајамно прости. На сличан начин се добија и да $a+b$, $2ab$ не могу истовремено бити дељиви са 4. Дакле, $d \in \{1,2\}$. Ако су a и b непарни, онда је $d=2$, а ако је један од њих паран, $d=1$.

2.2. Нека је $a_1 = AM$, x висина из темена P паралелограма на основицу AM, а h висина троугла ABC која одговара страници AB. $\triangle ABC \sim \triangle PNC \Rightarrow$ $\frac{h}{h-x} = \frac{c}{a_1}$. Пошто је $h = b\frac{\sqrt{3}}{2}$ налазимо $a_1 = \frac{c(b\sqrt{3}-2x)}{b\sqrt{3}}$, па је површина паралелограма $P = a_1 x = \frac{c(b\sqrt{3}-2x)}{b\sqrt{3}} \cdot x$. Максимум ове квадратне функције је $P_{\max} = \frac{bc\sqrt{3}}{8}$ (за $x = \frac{b\sqrt{3}}{4}$).

2.3. Означимо $a = \sqrt[5]{x+27}$, $b = \sqrt[5]{6-x}$. Тада је $a+b=3$, $a^5+b^5=33$. Како је $a^5+b^5 = (a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$, мора бити $a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4 = 11$. Означимо $t = ab$. Пошто је $a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 9-2t$, имамо: $11 = a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4 = (a^2+b^2)^2 - a^2b^2 - ab(a^2+b^2) = (9-2t)^2 - t^2 - t(9-2t) \Rightarrow$ $t^2 - 9t + 14 = 0$, тј. $t_1 = 2$, $t_2 = 7$. Решења система $a+b=3$, $ab=2$ су $(1,2)$, $(2,1)$, одакле налазимо $x_1 = -26$, $x_2 = 5$. Систем $a+b=3$, $ab=7$ нема реалних решења. *Одговор:* Решења једначине су -26 и 5.

2.4. Из сваке тачке унутар четвороугла, бар једна страница се види под углом који није оштар (јер та четири угла чине пун угао). Тада ће круг конструисан над том страницом прекривати дату тачку.

2.5. $5^{2n} \cdot 7^{2n+1} \cdot 11^{2n} + 25^n \cdot 7^{2n} \cdot 11^{2n+1} - 5^{2n+1} \cdot 49^n \cdot 121^n = 5^{2n} \cdot 7^{2n} \cdot 11^{2n} \cdot (7+11-5) = 13 \cdot 5^{2n} \cdot 7^{2n} \cdot 11^{2n}$. Дати број је дељив са 13, а није са 13^2, па не може бити потпун квадрат.

Трећи разред – Б категорија

3.1. $O_1O_2 = r_1 + r_2$, $O_1O_3 = r_1 + r_3$, $O_2O_3 = r_2 + r_3$. По Хероновом обрасцу, површина троугла $O_1O_2O_3$ је $P = \sqrt{r_1r_2r_3(r_1 + r_2 + r_3)}$. Са друге стране, ако са R означимо тражени полупречник описаног круга, имамо:

$$P = \frac{(r_1 + r_2)(r_1 + r_3)(r_2 + r_3)}{4R} \ \Rightarrow\ R = \frac{(r_1 + r_2)(r_1 + r_3)(r_2 + r_3)}{4\sqrt{r_1r_2r_3(r_1 + r_2 + r_3)}}.$$

3.2. Једначина нема решења јер је $|\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x| \geq 2 > \sqrt{2} \geq |\sin x + \cos x|$.

3.3. Види решење задатка 3.3 за А категорију.

3.4. Ако уведемо смену $t = x + \sqrt{x^2 - 4}$, добија се неједначина $(\frac{4}{3})^{t-4} \geq 1$, одакле је $t \geq 4$, тј. $\sqrt{x^2 - 4} \geq 4 - x$. Лева страна неједначине је дефинисана за $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. У случају $4 - x < 0$, решење представља интервал $(4, +\infty)$, а у случају $4 - x \geq 0$, после квадрирања, добијамо $x \geq \frac{5}{2}$. Дакле, решење неједначине је интервал $[\frac{5}{2}, +\infty)$.

3.5. $\log \frac{a-b}{2} = \frac{1}{2}(\log \frac{ab}{2}) \ \Rightarrow\ a^2 - 4ab + b^2 = 0 \ \Rightarrow\ (\frac{a}{b})^2 - 4\frac{a}{b} + 1 = 0 \ \Rightarrow\ \frac{a}{b} = 2 + \sqrt{3}$, јер $\frac{a}{b} > 1$. Дакле, $\operatorname{tg}\alpha = 2 + \sqrt{3} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\operatorname{tg}45^\circ + \operatorname{tg}30^\circ}{1 - \operatorname{tg}45^\circ \operatorname{tg}30^\circ} = \operatorname{tg}(45^\circ + 30^\circ) = \operatorname{tg}75^\circ$. Значи, $\alpha = 75^\circ$, $\beta = 15^\circ$.

Четврти разред – Б категорија

4.1. $O_1O_2 = r_1 + r_2$, $O_1O_3 = r_1 + r_3$, $O_2O_3 = r_2 + r_3$. По Хероновом обрасцу, површина троугла $O_1O_2O_3$ је $P = \sqrt{r_1r_2r_3(r_1 + r_2 + r_3)}$. Са друге стране, ако са R означимо тражени полупречник описаног круга, имамо:

$$P = \frac{(r_1 + r_2)(r_1 + r_3)(r_2 + r_3)}{4R} \ \Rightarrow\ R = \frac{(r_1 + r_2)(r_1 + r_3)(r_2 + r_3)}{4\sqrt{r_1r_2r_3(r_1 + r_2 + r_3)}}.$$

4.2. Решења (x,y) система: $y = m\cdot 3^x + n$, $y = n\cdot 3^{-x} + m$ су парови $(0, m+n)$, $(\log_3(-\frac{m}{n}), 0)$, а то су управо координате пресечних тачака графика ових функција.

4.3. $a(\lambda i)^3 + b(\lambda i)^2 + c(\lambda i) + d = 0 \;\Rightarrow\; (d - b\lambda^2) + (c\lambda - a\lambda^3)i = 0 \;\Rightarrow\; d = b\lambda^2,\ c\lambda = a\lambda^3 \;\Rightarrow\; da\lambda^3 = bc\lambda^3 \;\Rightarrow\; da = bc$, јер $\lambda \neq 0$. Из $c = a\lambda^2$ следи $ac = a^2\lambda^2 > 0$.

4.4. Види решење задатка 4.4 за А категорију.

4.5. Нека је $z = \cos\phi + i\sin\phi$. Тада је:

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{1+\cos\phi + i\sin\phi}{-1+\cos\phi+i\sin\phi} = \frac{2\cos^2\frac{\phi}{2} + 2i\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}}{-2\sin^2\frac{\phi}{2} + 2i\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}}$$
$$= \operatorname{ctg}\frac{\phi}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\phi}{2} + i\sin\frac{\phi}{2}}{-\sin\frac{\phi}{2} + i\cos\frac{\phi}{2}}$$
$$= \operatorname{ctg}\frac{\phi}{2}\cdot\frac{\left(-\sin\frac{\phi}{2} + i\cos\frac{\phi}{2}\right)\cdot(-i)}{-\sin\frac{\phi}{2} + i\cos\frac{\phi}{2}} = -i\operatorname{ctg}\frac{\phi}{2},$$

одакле следи тврђење задатка.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА РЕПУБЛИЧКОГ ТАКМИЧЕЊА

Први разред – А категорија

1.1. Означимо $r(x) = 990x - 889$. Пошто је $x^2 - 12x + 11 = (x-1)(x-11)$, онда је $p(1) = r(1) = 101$ и $p(11) = r(11) = 10001 = 73\cdot 137$. За све $k, l \in \mathbb{Z}$ важи: $k - l \mid p(k) - p(l)$. Ако је $p(k) = 0$ тада $k - 1 \mid p(1)$ и $k - 11 \mid p(11)$. Из прве релације је $k \in \{0, 2, -100, 102\}$. Пошто ни један елемент овог скупа не задовољава другу релацију, следи да $p(x)$ не може имати целобројних нула.

1.2. Нека је $T_1 \in t_1$ тачка која се не налази са исте стране праве MN као и тачка B, а $T_2 \in t_2$ тачка која се не налази са исте стране PC као и N. Тада је $\angle T_2PC = \angle PNC$ и $\angle T_1MN = \angle MBN$, јер је угао између тангенте и тетиве подударан одговарајућем периферијском углу над том тетивом. Углови $\angle PNC$ и $\angle MBN$ су подударни, као сагласни са паралелним крацима BM и NP. Одатле је $\angle T_2PC = \angle T_1MN$, па из $AC \parallel MN$ следи $t_1 \parallel t_2$.

1.3. Тврђење следи из једнакости: $(ad+bc)(ac+bd) = (a^2+b^2)cd + (c^2+d^2)ab = (a^2+b^2)(ab+cd)$.

1.4. Нека је p једна од посматраних правих. Конструшимо круг који додирује дуж MN и полуправе MA, NB редом у тачкама R, P, Q. Имамо: $MA + NB = MN = MR + NR = MP + NQ$, па је $AP = BQ$, при чему се једна од тачака P, Q налази унутар одговарајуће странице троугла ABC, а друга на продужетку. Одатле је $CP = CQ = \frac{1}{2}(CA+CB)$, тј. положај тачака P, Q не зависи од избора праве p. Према томе, конструисани круг додирује све праве које имају својство дато у задатку.

1.5. Очигледно, ни један једноцифрен број не задовољава тражену релацију. Нека је $n = \overline{ab}$ двоцифрен број. Тада из $a + b + ab = 10a + b$ следи да је $b = 9$, а a може бити било која цифра различита од 0. Математичком индукцијом по броју цифара броја $n \geq 100$, доказаћемо да је $n > S(n) + P(n)$. *1.* $n = \overline{abc}$. Тада је $S(n) + P(n) = a + b + c + abc = a(1 + bc) + b + c \leq 82a + b + c < 100a + 10b + c = n$. *2.* Нека је $n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{k+1}}$, $k \geq 3$. Ако је $n' = \overline{a_1 a_2 \ldots a_k}$, по индуктивној претпоставци важи $S(n') + P(n') < n'$. Тада је $S(n) + P(n) = a_{k+1} + S(n') + a_{k+1}P(n') \leq 9 + S(n') + 10P(n') \leq 10S(n') + 10P(n') < 10n' \leq n$, што је и требало показати. Дакле, тражени бројеви су: 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89 и 99.

Други разред – А категорија

2.1. Пошто је друга једначина система еквивалентна са $y(x+2) + x + 1 = 0$, следи да није $x = -2$ ни за једно његово решење. Одатле је систем еквивалентан са:

$$\begin{array}{c} axy + x - y + \frac{3}{2} = 0 \\ y = -\frac{x+1}{x+2} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} (2a-2)x^2 + (2a-9)x - 8 = 0 \\ y = -\frac{x+1}{x+2}. \end{array}$$

Заменом вредности $x = -2$ у прву једначину, добијамо да је $a = -\frac{1}{2}$ јединa вредност параметра за коју та једначина има решење $x_1 = -2$. Друго решење је тада $x_2 = -\frac{4}{3}$, па систем има јединствено решење $(-\frac{4}{3}, \frac{1}{2})$. За $a = 1$, прва једначина је линеарна, па систем има јединствено решење $(-\frac{8}{7}, \frac{1}{6})$. За $a \neq 1$, прва једначина је квадратна са дискриминантом $D = 4a^2 + 28a + 17$. $D < 0 \Rightarrow$ систем нема решења. $D > 0$ и $a \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow$ систем има два решења. $D = 0$ за $a = \frac{-7 \pm 4\sqrt{2}}{2}$. Пошто су ове две вредности различите од $-\frac{1}{2}$, следи да и тада систем има јединствено решење. *Одговор:* $a \in \{1, -\frac{1}{2}, \frac{-7+4\sqrt{2}}{2}, \frac{-7-4\sqrt{2}}{2}\}$.

2.2. Претпоставимо супротно. Нека су a, b, c, d, e дужине тангентних дужи из темена A, B, C, D, E редом на уписани круг. Важи: $b = 5-a$, $c = 6-b = a+1$, $d = 10-c = 9-a$, $e = 7-d = a-2$, $a = 9-e = 11-a$, па је $a = 5\frac{1}{2} > AB$, што је немогуће.

2.3. $(x+y+z)^3 - (x^3+y^3+z^3) = 3(x+y)(y+z)(x+z) \Rightarrow (x+y)(y+z)(x+z) = 8$ (*). Како је $(x+y)+(y+z)+(x+z) = 6$ (**), следи да међу збировима $x+y$, $y+z$, $x+z$ има или тачно један или тачно три парна. *Први случај:* Сва три су парна. (*) $\Rightarrow$ сваки од збирова је једнак 2 или -2. (**) $\Rightarrow$ $x+y = y+z = x+z = 2 \Rightarrow x = y = z = 1$. *Други случај:* Тачно један од три збира је паран, на пример $x+y$. Тада је $|x+y| = 8$, $|y+z| = |x+z| = 1$. (**) $\Rightarrow x+y = 8$, $y+z = x+z = -1 \Rightarrow x = y = 4$, $z = -5$. Дакле, сва решења система су: $(1,1,1), (-5,4,4), (4,-5,4), (4,4,-5)$.

2.4. Ако се међу бројевима $a_1, \ldots, a_{98}$ нека од цифара $0,2,4,5,6,7,8,9$ појави 11 пута, или се нека од цифара 1 и 3 појави 10 пута, тада ће таква цифра имати два иста следбеника, па тврђење задатка важи. Претпоставимо да се $0,2,4,5,6,7,8,9$ појављују највише 10 пута, а 1 и 3 највише 9 пута међу првих 98 чланова низа. Пошто је то укупно 98 појављивања, следи да се свака од цифара $0,2,4,5,6,7,8,9$ појављује тачно 10 пута, а 1,3 по 9 пута. Слично се добија да међу бројевима $a_2, \ldots, a_{99}$ има по 10 цифара $0,1,3,5,6,7,8,9$, а по 9 цифара 2 и 4. Одатле следи на првом месту у низу морају бити цифре 2 и 4, а на последњем 1 и 3, што је немогуће.

2.5. Означимо: $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Постоји дужина t таква да је $AA_1 = t \cdot \frac{c}{a}$, $BB_1 = t \cdot \frac{a}{b}$, $CC_1 = t \cdot \frac{b}{c}$. Применом косинусне теореме на $\triangle A_1CC_1$, имамо: $A_1C_1^2 = \frac{b^2t^2}{c^2} + (b + \frac{ct}{a})^2 + 2\frac{bt}{c}(b + \frac{ct}{a})\cos\gamma$. Пошто је $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, одавде се добија: $\frac{A_1C_1^2}{b^2} = 1 + t^2(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}) + t(\frac{c}{ab} + \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac})$. На исти начин су $\frac{A_1B_1^2}{c^2}$ и $\frac{B_1C_1^2}{a^2}$ једнаки том изразу, тј. $\frac{A_1C_1}{b} = \frac{A_1B_1}{c} = \frac{B_1C_1}{a}$, што је и требало доказати.

Трећи разред – А категорија

3.1. Докажимо да је $n = 1$ једино решење. Претпоставимо супротно; нека је тада p најмањи прост делилац броја n. $p \geq 3$, пошто n не може бити паран број. Нека је m најмањи природан број са особином да је $2^m - 1$ дељиво са p. Тада је за приозвољан природан број k, $2^k - 1$ дељиво са p ако и само ако m дели k. Заиста, ако би било $k = qm + r$ за неко $0 < r < m$, тада бисмо имали $1 \equiv 2^k = 2^{qm+r} = (2^m)^q 2^r \equiv 2^r (\bmod p)$, тј. $2^r - 1$ би било дељиво са p, што је у супротности са избором m. Према томе, m дели n, али и $p-1$, будући да је $2^{p-1}-1$ дељиво са p, по малој Фермаовој теореми. Стога је $1 < m \leq p-1$. Међутим, то је контрадикција, јер n не може бити дељив бројем који је мањи од p и различит од 1.

3.2. Нека је $Q(x) = xP(x)$. Непосредном провером види се да је $Q(1) + Q(i) + Q(-1) + Q(-i) = 4$, па је $|Q(1)| + |Q(i)| + |Q(-1)| + |Q(-i)| \geq |Q(1) + Q(i) + Q(-1) + Q(-i)| = 4$. Одатле, постоји $z \in \{1, i, -1, -i\}$ тако да је $|Q(z)| \geq 1$. Тада је $|P(z)| = |z| \cdot |P(z)| = |Q(z)| \geq 1$, као што се и тражило.

3.3. Нека је SH висина из S на ABC. Пошто је $SA = SB = SC$, H је центар круга описаног око $\triangle ABC$. Исецимо тетраедар на три тетраедра $SHAB$, $SHBC$, $SHAC$. Подударан тетраедар супротне оријентације добијамо када $SHAB$ оставимо на месту, а деловима $SHBC$ и $SHAC$ заменимо места.

3.4. Сви цели бројеви у интервалу $\mathcal{I} = (2002 \cdot 10^m, 2003 \cdot 10^m)$, $m \in \mathbb{N}$, почињу цифрама 2002. Докажимо да се може одабрати m тако да такав интервал садржи бар 10000 елемената који су 2002. степени природних бројева. То је испуњено ако је $\sqrt[2002]{2003 \cdot 10^m} - \sqrt[2002]{2002 \cdot 10^m} > 10000$, тј.

$$m > 2002 \log \frac{10000}{\sqrt[2002]{2003} - \sqrt[2002]{2002}}.$$

Дакле, можемо одабрати довољно велико m које испуњава ову неједнакост. Тада постоји 10000 узастопних природних бројева чији 2002. степени припадају интервалу $\mathcal{I}$. Један од тих бројева се завршава цифрама 2002, и задовољава услов задатка.

3.5. Правоугаоник је подељен на јединичне квадрате помоћу $m-1$ хоризонталне и $n-1$ вертикалне дужи. Ако права има k заједничких тачака са тим дужима и страницама правоугаоника, тада она сече $k-1$ поље. Пошто права може имати највише 2 заједничке тачке са страницама правоугаоника, следи да она сече највише $2+(m-1)+(n-1)-1 = m+n-1$ поље. Покажимо да је то могуће постићи. Нека је A доње лево теме правоугаоника, а B тачка на десној страници поља које се налази у горњем десном углу, таква да дуж AB не садржи ни једно од темена квадрата на које је издељен правоугаоник, осим темена A. Права AB сече свих $(m-1)+(n-1)$ подеоних дужи правоугаоника у различитим тачкама. *Одговор:* $m+n-1$.

Четврти разред – А категорија

4.1. Постоји број $n_0 \in \mathbb{N}$ који је већи од свих реалних нула полинома $g(x)$. Пошто су f и g истог степена, низ $\left(\frac{f(n)}{g(n)}\right)_{n \geq n_0}$ је конвергентан. Како су његови чланови цели бројеви, то постоје $c \in \mathbb{Z}$ и $k \in \mathbb{N}$ такви да је $\frac{f(n)}{g(n)} = c$ за свако $n \geq k$. Тада је $f(n) - cg(n) = 0$ за свако $n \geq k$, па полином $f(x) - cg(x)$ има бесконачно много нула, и мора бити идентички једнак нули, што је и требало показати.

4.2. Нека је $z_1 = 2 + \sqrt{3}$, $z_2 = 2 - \sqrt{3}$. Ова два броја су решења једначине $z^2 - 4z + 1 = 0$. Низ целих бројева $A_n = \frac{1}{2}(z_1^n + z_2^n)$ задовољава рекурентну релацију $A_n = 4A_{n-1} - A_{n-2}$, а прва два члана су $A_0 = 1, A_1 = 2$. Нека је B_n остатак броја A_n при дељењу са 7. Пошто је $B_0 = 1$, $B_1 = 2$, $B_2 = 0$, $B_3 = 5$, $B_4 = 6$, $B_5 = 5$, $B_6 = 0$, $B_7 = 2$, $B_8 = 1 = B_0$, $B_9 = 2 = B_1$, низ B_n је периодичан са перидом дужине 8. Зато је $B_{2002} = B_2 = 0$, па је A_{2002} дељиво са 7. Како је $A_{2002} = \frac{1}{2}z_1^{2002} + \frac{1}{2}z_2^{2002}$ и $0 < \frac{1}{2}z_2^{2002} < 1$, следи да је $[\frac{1}{2}z_1^{2002}] = A_{2002} - 1$, па је број $[\frac{1}{2}z_1^{2002}] + 1$ дељив са 7.

4.3. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $OA = OB = OC = 1$. Означимо: $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ и $\alpha = \angle BOC$, $\beta = \angle AOC$, $\gamma = \angle AOB$. Уочимо тачку S' такву да је $\overrightarrow{OS'} = \sin\alpha \cdot \vec{a} + \sin\beta \cdot \vec{b} + \sin\gamma \cdot \vec{c}$, и израчунајмо њена растојања од страна рогља. Растојање од стране BOC једнако је:

$$\frac{\left|\left(\overrightarrow{OS'}, \vec{b} \times \vec{c}\right)\right|}{|\vec{b} \times \vec{c}|} = \frac{\sin\alpha \left|\left(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}\right)\right|}{\sin\alpha} = \left|\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]\right|.$$

Исту вредност имају и растојања од преостале две стране, па је S' једнако удаљена од њих. Следи да су вектори $\overrightarrow{OS}$ и $\overrightarrow{OS'}$ колинеарни.

4.4. Означимо са p_{mn} вероватноћу догађаја да последња изабрана куглица буде плава, ако се на почетку у кутији налази m плавих и n црвених куглица. Тада важи: $p_{m0} = 1$ за $m \geq 1$ и $p_{0n} = 0$ за $n \geq 1$. Лако се проверава да је $p_{11} = \frac{1}{2}, p_{12} = \frac{1}{2}$. Претпоставимо да је $p_{1k} = \frac{1}{2}$ за свако $1 \leq k < n$, и размотримо случај када се у кутији налази 1 плава и n црвених куглица. Означимо са A_ℓ догађај да на почетку једна за другом буде изабрано тачно ℓ црвених куглица $(0 \leq \ell \leq n)$, а затим плава. Тада је

$$\begin{aligned}
p_{1n} &= P(A_0)p_{0n} + \sum_{k=1}^{n} P(A_k)p_{1,n-k} \\
&= P(A_0)\cdot 0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} P(A_k) + P(A_n)\cdot 1 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} P(A_k) + \frac{1}{2}(P(A_n) - P(A_0)) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(P(A_n) - P(A_0)).
\end{aligned}$$

Како је $P(A_n) = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}\ldots\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{n+1} = P(A_0)$, то следи $p_{1n} = \frac{1}{2}$. Према томе, за свако $n \geq 1$ важи $p_{1n} = \frac{1}{2}$, па је $p_{1,99} = \frac{1}{2}$.

4.5. Посматрајмо квадрат са центром у координатном почетку, чије су странице дужине 2002, и паралелне су координатним осама. Уочимо симетрале свих дужи са крајевима у целобројним тачкама које припадају том квадрату. Пошто тих симетрала има коначно много, постоји тачка $S(0, y_0)$, $0 < y_0 < \frac{1}{2}$ која није ни на једној од њих. Тачка S се налази на различитим растојањима од свих целобројних тачака из квадрата. Нека је P_1 целобројна тачка у квадрату најближа тачки S, P_2 следећа најближа итд. Унутар кружнице $k(S, r)$, где је $SP_{2002} < r < SP_{2003}$ налазе се тачно 2002 целобројне тачке из квадрата. Ако унутар кружнице или на њој постоји још нека целобројна тачка, онда је $r \geq 1002 - y_0 > 1001 + \frac{1}{2}$, јер је $(0, 1002)$ целобројна тачка најближа тачки S, од оних које не припадају квадрату. Међутим, тада би и све 2003 целобројне тачке y-осе које припадају квадрату биле унутар тог круга, што је контрадикција. Дакле, кружница k задовољава услове задатка.

Први разред – Б категорија

1.1. Провером се установљава да бројеви 2, 3, 5 нису решења, а да 7 јесте. Нека је $p > 7$. Ако је p облика $7k+1$, $7k+2$ или $7k+4$, број p^3+6 је дељив са 7, а ако је p облика $7k+3$, $7k+5$, $7k+6$, онда је p^3-6 дељиво са 7. Према томе, $p = 7$ је једино решење.

1.2. Види решење задатка 1.2 за А категорију.

1.3. $(a+b-c)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab-ac-bc) \geq 0 \Rightarrow \frac{5}{3} \geq 2(-ab+ac+bc) \Rightarrow \frac{5}{6} \geq -ab+ac+bc \Rightarrow 1 > -ab+ac+bc \Rightarrow \frac{1}{abc} > \frac{1}{b} + \frac{1}{a} - \frac{1}{c}$.

1.4. Види решење задатка 1.4 за А категорију.

1.5. Поделимо скуп $\mathcal{A}$ на парове: $\{1, 2002\}, \{2, 2001\}, \dots, \{1001, 1002\}$. Подскуп $\mathcal{B}$ не сме садржати ни један од ових парова. Дакле, за сваки пар можемо одабрати да ли се у $\mathcal{B}$ налази први елемент, други, или ни један од њих. Према томе, тражених подскупова има 3^{1001}.

Други разред – Б категорија

2.1. Види решење задатка 2.1 за А категорију.

2.2. Важи: $\dfrac{MS}{AB} = \dfrac{DM}{DA} = \dfrac{CN}{CB} = \dfrac{NS}{AB}$, одакле је $MS = NS$.

2.3. $a^3+b^3 = (a+b)((a+b)^2-3ab) = 1-3ab \Rightarrow ab \in \mathbb{Q}$. $a^3-b^3 = (a-b)((a+b)^2-ab) = (a-b)(1-ab)$ (*). Ако је $ab = 1$, онда је $a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = -1 < 0$, што је немогуће. Дакле, $ab \neq 1$, па из (*) следи да $a-b \in \mathbb{Q}$. Тада је $a = \frac{1}{2}((a+b)+(a-b)) = \frac{1}{2}(1+(a-b)) \in \mathbb{Q}$ и $b = 1-a \in \mathbb{Q}$.

2.4. Види решење задатка 2.4 за А категорију.

2.5. Четвороугао B_1TA_1C је тангентан, па је $B_1T + A_1C = TA_1 + CB_1$, тј. $\frac{BB_1}{3} + \frac{BC}{2} = \frac{AA_1}{3} + \frac{AC}{2}$. Пошто већој страници у троуглу одговора мања тежишна дуж, из $BC > AC$ би следило да је $AA_1 < BB_1$, па би било $\frac{BB_1}{3} + \frac{BC}{2} > \frac{AA_1}{3} + \frac{AC}{2}$. Слично, не може бити ни $BC > AC$, па је $BC = AC$.

Трећи разред – Б категорија

3.1. $\sin(\alpha+\beta) - 1 = \sin^2\alpha - \cos^2\beta \Leftrightarrow \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha - 1 = \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 1 \Leftrightarrow \sin\alpha(\sin\alpha - \cos\beta) = \sin\beta(\cos\alpha - \sin\beta)$. Углови α и β су оштри, па су њихови синуси и косинуси позитивни. Из претпоставке $\sin\alpha < \cos\beta$ следи: $\cos\alpha < \sin\beta \Rightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha < \sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$, што је немогуће. Слично, не може бити ни $\sin\alpha > \cos\beta$, па је $\sin\alpha = \cos\beta$, тј. $\alpha + \beta = 90^\circ$.

3.2. Нека су A_1, B_1, C_1 подножја нормала из тачке M на странице BC, AC, AB редом. Пошто је BM симетрала угла $\angle ABC$, важи $MC_1 = MA_1$, па можемо означити $m = MC_1 = MA_1$, $n = MB_1$, $x = \angle ACM$. Троуглови CMB_1 и CMA_1 имају заједничку хипотенузу, па је $\frac{n}{m} = \frac{\sin x}{\sin(100^\circ - x)}$. Слично, из троуглова AMB_1 и AMC_1 следи $\frac{n}{m} = \frac{\sin 10^\circ}{\sin 30^\circ}$. Одатле, $\frac{\sin x}{\sin(100^\circ - x)} = \frac{\sin 10^\circ}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \sin x = 2\sin 10^\circ \sin(100^\circ - x) = \cos(90^\circ - x) - \cos(110^\circ - x) = \sin x - \cos(110^\circ - x) \Rightarrow \cos(110^\circ - x) = 0 \Rightarrow 110^\circ - x = 90^\circ \Rightarrow x = 20^\circ$.

3.3. Види решење задатка 3.3 за А категорију.

3.4. Види решење задатка 3.4 за А категорију.

3.5. После сређивања, добија се да је дати израз једнак $(a+b+c)^3$.

Четврти разред – Б категорија

4.1. Нека је $x_0 = \frac{1}{100}$. Тада је $\frac{2}{201} = \frac{2x_0}{2+x_0}$, $\ln\frac{101}{100} = \ln(1+x_0)$. Посматрајмо функцију $f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}$. Пошто је $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} > 0$ за $x > -1$, функција је растућа на интервалу $(-1, +\infty)$. Следи да је $f(x_0) > f(0) = 0$. *Одговор:* $\ln\frac{101}{100} > \frac{2}{201}$.

4.2. Нека је $S = 1 + 2z + \cdots + nz^{n-1}$. Тада је $S - zS = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} - nz^n = \frac{1-z^n}{1-z} - nz^n = -n$, па је $S = \frac{n}{z-1}$.

4.3. Види решење задатка 4.3 за А категорију.

4.4. Ако је један од бројева x_i једнак нули, лако се види да и остали морају бити 0, као и да $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ заиста јесте решење система. Претпоставимо сада да су сви различити од нуле. Тада сви морају бити позитивни. Како је $1 + x_1^2 \geq 2x_1$, из прве једначине добијамо да је $x_2 \geq x_1$, а из свих осталих: $x_1 \geq x_n \geq x_{n-1} \cdots \geq x_2 \geq x_1$, па мора бити $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$. Дакле, решења система су n-торке $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ и $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$.

4.5. Види решење задатка 4.5 за А категорију.

РАСПОРЕД ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ ЗА ШКОЛСКУ 2002/2003. ГОДИНУ

Општинско такмичење .... 8. фебруар 2003.

Окружно такмичење .... 1. март 2003.

Републичко такмичење .... 29. март 2003.

Савезно такмичење .... 19. април 2003.

САДРЖАЈ

PRINT PALJIĆ

tel.: 021/ 21-598 • fax: 022/ 561-244 • mobil: 064/ 11 27 013