ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА СРЕДЊОШКОЛАЦА 2011/2012.

Београд, 2012.

ОРГАНИЗАЦИОНИ ОДБОР 54. ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

1. Др Радивоје Стојковић
2. Јелена Поповић
3. Љубица Поповић
4. Мр Љиљана Ракић
5. Др Јелана Татар
6. Др Душка Пешић
7. Мр Маријетица Самарџијевић
8. Мр Сања Лозић
9. Верица Говедарица
10. Душица Ашћерић
11. Хермина Љуштина
12. Милош Ќуљић

ДОНАТОР ТАКМИЧЕЊА

- Телвент ДМС

Запис о Новом Саду

Тамо где се укрштају стране света и где путеви према истоку који их повезују прелазе реку Дунав, код левог пристана дунавске скеле, на месту несталог средњовековног села које се некада звало Стари Петроварадин и Пазарни Варадин, за време аустријско-турских ратова настало је насеље названо Петроварадински шанац. Први историјски документ који говори о постојању насеља на подручју Новог Сада је повеља угарског краља Беле IV из 1237. године у којој дарује новој цистерциској опатији у Белакуту (средњовековно утврђење на локацији данашње Петроварадинске тврђаве) имања и села на Бачкој страни. Петроварадински шанац је настао вероватно 1694. године, а можда и раније јер је 1692. почела изградња Петроварадинске тврђаве. Ово насеље је првобитно било познато под именима: *Рацка варош* (Raitzenstadt, Ratzen Stadt, односно Српски град) и *Петроварадински Шанац*, а касније је (1748. године) добило име Нови Сад. Првобитни становници насеља били су већином Срби али и Немци, Јевреји и Мађари а касније га насељавају Јермени, Цинцари, Грци и други о чијем присуству говоре сачувани архитектонски и културни споменици. Од 1702. године, насеље је у саставу Хабсбуршке војне границе, а 1708. године постаје седиште Бачког владике и главно место Бачког дела подунавске војне границе. После новог Аустријско-Турског рата и успостављања нових државних граница 1718. године, Рацка варош није више погранично место, него се развија у трговачко насеље, у коме се размењују плодови сремско-фрушкогорског виногорја и житородне бачке равнице. По подацима из 1720. године Рацка варош је имала 112 српских домова, као и 14 немачких и 5 мађарских. У то време, Нови Сад постаје „коморска варош”, са зачецима урбаних одлика, а будући да се налазио у саставу војне границе, град је по становништву био подељен на војни и цивилни део. Године 1748. богати грађани Рацке вароши (неколико Срба и Немаца) одлазе у Беч, где за 80 000 рајнских форинти купују град од царице Марије Терезије која 1. фебруара 1748. издаје едикт и тиме варош добија статус слободног краљевског града (који је од 1996. и службени Дан Града). Тада добија данашње име. Због статуса слободног краљевског града, Нови Сад доживљава нагли привредни развој и напредак, тако да шездесетих година 18. века он има око 8 000 становника, претежно занатлија и трговаца, али и ратара и повртара. По узору на слободне градове тога времена, Новим Садом управља магистрат на челу са судијом и дванаест сенатора. У првој половини деветнаестог века, Нови Сад је био највећи српски град. У то доба Нови Сад је био центар политичког, културног и друштвеног живота целокупног српског народа. У Новом Саду су у то време стално боравили или се дуже задржавали Светозар Милетић, Полит-Десанчић, Јован Јовановић Змај, Лаза Костић, Ђорђе Натошевић, Илија Вучетић, Стефан Брановачки, С. Павловић, Теодор

Мандић, Л. Станојевић, А. Хаџић, Коста Трифковић, Арса Пајевић, као и многи виђенији емигранти из Србије. Све ово били су разлози да Нови Сад буде прозван Српском Атином. У почетку националних превирања 1848. године, Нови Сад има значајну улогу. У граду је смењен дотадашњи магистрат и изабран нови, састављен искључиво од Срба, а одавде ће потећи и иницијатива за одржавање Мајске скупштине у Сремским Карловцима (13-15. мај 1848.), на којој је проглашена аутономна Српска Војводина у чијем ће саставу бити Нови Сад. Пре проглашења Српске Војводине у Сремским Карловцима новосадски Срби изабрали су на збору у Новом Саду депутацију која је отишла у Пожун да се споразуме са Лајошем Кошутом о односима између нове револуционарне мађарске владе и војвођанских Срба. Споразум није постигнут и тиме је на територији данашње Војводине отпочео крвави рат између Срба и Мађара. У рату је посебно страдао Нови Сад, који је мађарска војска разорила бомбардовањем са Петроварадинске тврђаве, а град је изгубио већину свог становништва. Од преко 2 800 зграда и кућа остало је једва 800, а становништво се разбежало на све стране. После гушења мађарског устанка у град се поново враћа део становништва, али ће попис из 1850. године у граду избројати само 7 102 становника, што није ни половина броја од 20 000 колико је Нови Сад имао становника пре револуције. Требаће двадесет година да се број становника обнови. Колико је град био уништен у револуцији говоре и подаци о идејама аустријских званичника да се изгради нови град неколико километара узводно. Између 1849. и 1860. године, Нови Сад се званично налази у оквиру Војводства Србије и Тамишког Баната, засебне хабсбуршке покрајине чије је административно седиште био Темишвар. После укидања ове покрајине, Нови Сад је део Бачко-Бодрошке жупаније у оквиру Хабсбуршке Угарске. Административно седиште ове жупаније био је град Сомбор. У политичкој и културној сфери, Нови Сад је задржао своју стару улогу и знатно је предњачио. Матица српска се преселила из Будимпеште у Нови Сад 1864. године, а нешто раније (1861. године) у граду је основано и Српско Народно Позориште. Године 1865. поново се формира српска гимназија са вишим разредима. У граду се стварала и група људи која ће деценијама водити војвођанске Србе у широку борбу за своја национална и демокрацка права. Носилац те интензивне политичке и културне акције је Светозар Милетић, а следе га Јован Јовановић Змај, Јован Ђорђевић, Лаза Костић и други. Од оснивања Новог Сада (Петроварадинског шанца) 1694. године, најбројнија етичка група у граду били су Срби, док бројнијег мађарског становништва овде нема све до половине 19. века. После 1867. године, Нови Сад се налази под управом угарског дела Аустроугарске монархије. Током овог периода, политика мађаризације коју је спроводила угарска влада, утицала је на промену демографске структуре града, односно од претежно српког Нови Сад је добио етнички мешовит карактер. Привредни развој града у другој половини деветнаестог века омеђен је карактеристикама тадашње Аустоугарске монархије. Аустроугарска монархија се крајем октобра 1918. године распала, а 3. новембра и капитулирала. После спроведених избора по свим војвођанским местима (од 18. до 24. новембра), у Новом Саду се 25. новембра 1918. године састала Велика народна скупштина Срба, Буњеваца и осталих Словена Баната, Бачке и Барање, која званично проглашава отцепљење ових региона од Угарске и њихово присаједињење Србији. Краљевство Срба, Хрвата и Словенаца проглашено је 1. децембра 1918. године, а Нови Сад улази у ту нову државу као саставни део Краљевине Србије. У нову југословенску државу Нови Сад уноси културно благо и институције, знатан број стручне и техничке интелигенције, друштвени живот са развијеним културним и економским захтевима. Тако је било све до избијања Другог свецког рата. После обарања Тројног пакта у Југославији крајем марта 1941. године, у војним и политичким круговима Мађарске дилеме око напада на Југославију није било. Једини услов који је требало испунити било је тражење формалног разлога који би оправдао такав корак. Формирање такозване Независне Државе Хрватске 10. априла 1941. године протумачено је као престанак постојања Југославије, што је ослобађало обавезе из Уговора о пријатељству, те је влада Мађарске на седници од 10. априла 1941. године одобрила заповест регента Миклоша Хортија о ратним операцијама у „јужним крајевима". Два дана касније, мађарске фашистичке трупе су прешле мађарско-југословенску границу и за непуна четири дана, без борбе, заузеле Бачку, Барању, Међумурје и Прекомурје. Током четворогодишње окупације (од 1941. до 1944. године), окупатори су починили бројне злочине (хапшења, убијања, стрељања, малтретирања) над српским и јеврејским становништвом града, а један од познатијих масовних злочина је Новосадска рација спроведена јануара 1942. године, у којој је убијено и под дунавски лед бачен велики број недужних људи. Пред сам крај рата 1944. године Нови Сад је бомбардован од стране Савезничких авиона, који су за циљ имали стратешке објекте: железнички мост који су Немци подигли на месту порушеног, извесне установе локалних Немаца, али су том приликом страдале и многе стамбене зграде, нарочито у близини моста. Окупатор је угрожен надирањем Црвене армије и Народноослободилачке војске, 1944. године напустио Нови Сад, који је поново постао део Југославије. У периоду после Другог свецког рата Нови Сад постаје највећи град Аутономне покрајине Војводине (1. септембар 1945. године Председништво Народне скупштине Србије донело је Закон о њеном установљењу). Одмах по ослобађању, Нови Сад приступа обнови и развијању индустије. Године 1954. у граду се запошљава око 10 000 радника, да би тај број 1984. године износио око 75 000. Током многобројних урбанизацијских резова у доба социјализма, град губи неке од својих препознатљивих грађевина, као што су Јерменска црква или део Јеврејске улице, а граде се велики булевари и стамбени блокови. Поред старих средњих школа, и нових, које су се у току времена специјализовале и знатно повећале број ђака, Нови Сад добија и више школе. После распада Социјалистичке Федеративне Републике Југославије: одвајања Словеније, Хрватске, Босне и Херцеговије и Македоније и формирања нове Савезне Републике Југославије 1992. године, Нови Сад изненада постаје други по величини град у трећој Југославији, што му даје додатни замајац у развоју, иако је то доба било веома кризно и турбулентно. На самом крају 20. века после бомбардовања 1999. године, град је поново претрпео велика разарања, материјална, еколошка, а по највише духовна. Данас је Нови Сад модеран, етнички и верски шарен град који тежи даљем унапређивању, обнови и усавршавању грађана који слободно говоре својим матерњим језиком.

Неколико речи о школи домаћину

Гимназија „Јован Јовановић Змај" у Новом Саду једна је од најстаријих културно-образовних институција у Србији. Због своје богате прошлости, она је чувар традиције образовања у нашој земљи. Искусила је бројне власти, пролазила кроз различите економске успоне и падове, опстајала и развијала се у духу времена у којем је деловала и у којем и даље делује. Дала је велики број високо образованих људи који су временом, својим друштвеним активностима, постали знамените личности како за своје савременике тако и за будуће генерације, чија се имена и данас са поштовањем изговарају.

Школа у порти цркве Светог Ђорђа, у самом средишту Новог Сада, према данас нама познатим писаним историјским изворима помиње се први пут 1703. године као српска православна основна школа. На месту постојеће школе, владика бачки Висарион Павловић 1731. године, свестан да ће српски народ имати боље услове живота у Хабзбуршкој монархији ако стекне образовање на латинском језику, одлучује да подигне гимназију која се звала *Петроварадинска рождество-богородичина гимназија латинско-словенска.* У периоду од 1741. до 1749. године, гимназија се развијала у филозофско-богословку академију *Collegium Vissariono-Pavlovicsianum Petrovaradiniense.* У то време бележи се да је прва девојка Марта Нешкова 1756. године завршила Гимназију. Гимназија је 1789. годин престала са радом због реформи цара Јозефа II. Срби су прихватили цареве реформе и пристали да се формира *Државна гимназија Јозефа II* за све вероисповести у Новом Саду. Реформе су брзо пропале, па тако државна гимназија постаје *Државна католичка гимназија*, чиме српски народ губи своју школу. Због недостатка православних виших образовних институција српски живаљ је похађао римокатоличке и протестантске школе, што је представљало опасност од однарођавања. Из тог разлога су новосадски трговци херцеговачког порекла Сава Вуковић од Берегсова (који је завештао 20 000 форинти), владика бачки Гедеон Петровић, карловачки митрополит Стеван Стратимировић, Српска православна општина у Нови Саду, као и читав српски народ, одлучили да прикупе средства (преко 100 000 форинти) за отварање српске православне гимназије. Тако је 1810. године основана *Српска православна велика гимназија* у Новом Саду која је званично почела са радом 1816. године, када ју је потврдио цар Франц I. Наставни план је направљен у складу са државном уредбом *Ratio educationis* која је важила за све државне гимназије у Угарској. Гимназија је остала шесторазредна до 1848. године, а сви предмети предавани су на немачком језику, изузев веронауке, која је предавана на српском језику. Наставни предмети били су: основи латинског и немачког језика, географија, антропологија и аритметика, латински језик са синтаксом, веронаука, природопис и антропологија, историја света, археологија, физика, логика, реторика, поезија и етика. Први хор основан је 1838, а 1841. године у *Српској православној гимназији* отворена је Музикална школа коју је водио диригент, композитор и певач Александар Морфидис-Нисис. Гимназија је имала прекид у раду револуционарне 1849. године јер је изгорела приликом бомбардовања Новог Сада. Рад је наставила 1852. године, а обновљена је 1860. године захваљујући новчаној помоћи која је стигла од цара Франца Јозефа I. Гимназија је била највећим делом мушка. Прве ученице Гимназије уписане су тек 1894/95. године. Новосадска гимназија припадала је реду национално-конфесионалних васпитно-образовних установа, али као таква није била затворена за ученике других националности и вероисповести. Подаци о социјалном пореклу ученика показују да су Гимназију највише похађала деца трговаца, занатлија и интелектуалаца. Сиромашни ђаци су били ослобођени школарине или им је иста била плаћана преко разних фондова за стипендирање ученика Гимназије.

Ратне 1914. и 1915. године гимназија је претворена у болницу, док је у наредним ратним годинама радила под веома тешким околностима. После завршетка рада 1920. године добија нови назив *Државна мушка гимназија*, која 1931. године постаје *Државна мушка реална гимназија краља Александра I.* Између два светска рата у раду гимназије учествовало је 150 професора и наставника од којих је било 18 доктора наука. Квалификациона структура наставног кадра била је на завидном нивоу. У овом периоду васпитно-образовни рад као и друштвени живот школе био је веома богат. Наставни кадрови су попуњавани високообразованим предавачима, а са друге стране и број ученика се повећавао.

Крајем 30-тих година двадесетог века многи су постали чланови Комунистичке партије Југославије, која ће тек након Другог светског рата у потпуности креирати политику друштва као и њеног образовног кадра и система. Пред Други светски рат, у мартовским протестима 1941. године, масовно су учествовали и ђаци Гимназије. За време априлског рата већи број ученика се прикључивао јединицама југословенске војске. Гимназија је прекинула са радом 1941. године због почетка рата, а на њеном месту оснива се *Мађарска краљевска државна гимназија са српским наставним језиком.* Године 1945. у Новом Саду се биле формиране три гимназије: Мушка, Мешовита и Женска. Исте године у данашњу зграду школе, уселила се *Мешовита гимназија*, а 1950/51. године преселила се и Мушка гимназија. Тако су од ове две гимназије формиране *Прва мешовита гимназија* и *Друга мешовита гимназија.* Већ следеће године Прва мешовита гимназија мења назив у *Мешовита гимназија „Светозар Марковић"*, а Друга мешовита, некада Мушка гимназија, додаје назив *„Јован Јовановић Змај"*. Ради лакшег коришћења простора ове две гимназије се спајају 1959/60. године у *Гимназију „Јован Јовановић Змај"*. После велике школске реформе од 1977. до 1983. године, гимназија је радила као *Центар за образовање кадрова у друштвеним делатностима*, а 1989. постаје *Средња природно-математичка школа „Јован Јовановић Змај"*. Коначно, школске 1990/91. године добија назив *Гимназија „Јован Јовановић Змај"* који остаје до данашњих дана.

Данас, када целокупно друшво стреми ка осавремењавању себе и своје околине, Гимназија „Јован Јовановић Змај" успешно износи и прати новине, уводи највише стандарде у средњошколско образовање. Са још већим успехом носи велико име своје славне и богате прошлости и негује традицију и не дозвољава да се ни једно учињено племенито дело за стварање и обогаћивање образовно-културне институције преда заборав. Износи са поносом своју прошлост, коју клеше и урезује у садашњост како би имала плодоносну и успешну будућност.

РЕПУБЛИЧКА КОМИСИЈА

за такмичења из математике ученика средњих школа,
школска година 2011/2012.

1. Балтић мр Владимир, Факултет организационих наука, Београд

2. Баралић Ђорђе, Математички институт САНУ, Београд

3. Башић Бојан, ПМФ, Нови Сад

4. Дорословачки др Раде, ФТН, Нови Сад

5. Дугошија др Ђорђе, Математички факултет, Београд

6. Ђорић Милош, Математички факултет, Београд

7. Ђукић Душан, Машински факултет, Београд

8. Илић др Александар, ПМФ, Ниш

9. Кнежевић мр Миљан, Математички факултет, Београд

10. Кртинић др Ђорђе, Математички факултет, Београд

11. Лукић Миливоје, Калтех, САД

12. Марковић др Петар, ПМФ, Нови Сад

13. Матић др Иван, Дјук, САД

14. Милићевић др Ђорђе, Универзитет у Мичигену, САД

15. Милосављевић Милош, Гимназија „Светозар Марковић”, Ниш

16. Пејчев Александар, Машински факултет, Београд

17. Петковић др Марко, ПМФ, Ниш

18. Радовановић Марко, Математички факултет, Београд, председник

19. Сеничић мр Александар, Гимназија, Краљево

20. Стојаковић др Милош, ПМФ, Нови Сад

21. Томић Иванка, Гимназија, Ваљево

22. Шобот др Борис, ПМФ, Нови Сад

Превод на мађарски језик:

1. Пеић др Хајналка, Грађевински факултет, Суботица
2. Рожњик мр Андреа, Грађевински факултет, Суботица

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 21.01.2012.

Први разред, А категорија

1. Нека је E средиште странице CD квадрата $ABCD$. Ако нормала у тачки D на дијагоналу BD сече праву AE у тачки F, доказати да су тачке B, C и F колинеарне.

2. У вестима је дата следећа временска прогноза за сутра:

1) биће облачно или ће падати снег или ће дувати ветар;
2) ако буде облачно са снегом, дуваће ветар;
3) ако не буде ветровито, биће облачно без снега.

Да ли се одатле може закључити да ће, ако буде падао снег, дувати ветар?

3. Одредити све природне бројеве n такве да је број позитивних делилаца броја n^3 за 2011 већи од броја позитивних делилаца броја n.

4. Дат је троугао ABC. Ако је $\sphericalangle ABC > 90^\circ$ и $2 \cdot AB = AC$, доказати да је

$$2 \cdot \sphericalangle ACB > \sphericalangle BAC.$$

5. Доказати да се на стандардну шаховску таблу не може поставити 7, а може поставити 8 ловаца тако да нападају сва поља табле.

Други разред, А категорија

1. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned} x^2 + 3xy &= 54 \\ xy + 4y^2 &= 115. \end{aligned}$$

2. Нека су a, b, c реални бројеви такви да важи

$$\frac{a^2}{1+a^2} + \frac{b^2}{1+b^2} + \frac{c^2}{1+c^2} = 1.$$

Доказати да је $|abc| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Када важи знак једнакости?

3. Ако ниједан од углова $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ конвексног четвороугла $ABCD$ није прав, доказати да важи

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\delta} = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\delta.$$

4. Тачка S је центар уписаног круга троугла ABC, а D средиште странице AB. Ако је $\sphericalangle ASD = 90^\circ$, доказати да је $AB + BC = 3AC$.

5. На столу се налазе две гомиле жетона, једна од m, друга од n жетона. Два играча играју наизменично, а у сваком потезу дозвољено је једну гомилу поделити на произвољно много мањих (у којима не мора бити једнак број жетона). Губи играч који не може да повуче потез, јер је на свакој гомили остао по један жетон. Који од играча има победничку стратегију?

Трећи разред, А категорија

1. Одредити све $a \in \mathbb{R}$ за које корени x_1, x_2, x_3 полинома $x^3 - 4x^2 - ax + a$ задовољавају једнакост

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2 = 0.$$

2. У скупу реалних бројева решити једначину

$$2 \cdot \log_3(\operatorname{ctg} x) = \log_2(\cos x).$$

3. Нека је $\varphi(n)$ вредност Ојлерове функције броја n. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n за које је $\varphi(n) = \dfrac{n}{3}$.

4. Конвексан шестоугао је уписан у кружницу k. Његове узастопне странице су дужине $2, 2, 7, 7, 11$ и 11. Наћи полупречник кружнице k.

5. За свако $n \in \mathbb{N}$ одредити најмањи природан број m такав да у сваком m-елементном подскупу скупа $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ постоје два узајамно проста броја.

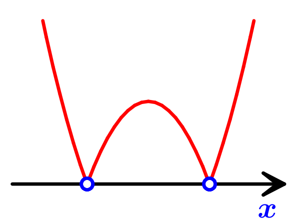
Четврти разред, А категорија

1. Дата је диференцијабилна функција $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ за коју важи $|f'(x)| < 1$ за свако $x \in \mathbb{R}$. Доказати да једначина $f(x) = x$ има јединствено решење у $\mathbb{R}$.

2. Да ли постоји природан број n и реални бројеви $a_0, a_1, \ldots, a_n$ тако да је на слици приказан график функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, за коју је

$$f(x) = |a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0| - |a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n|,$$

за свако $x \in \mathbb{R}$?



3. Нека је $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ бијекција таква да за све $m, n \in \mathbb{N}$ из $m < n$ следи

$$m + f(m) < n + f(n).$$

Одредити $f(2012)$.

4. Нека је AM пречник описане кружнице троугла ABC и нека тај пречник сече страницу BC у тачки D. Ако су E и F подножја нормала из тачке D на странице AB и AC, редом, доказати да је $EF \parallel BC$.

5. Природан број зовемо *зао* ако се у његовом бинарном запису налази паран број јединица. На пример, број $18 = (10010)_2$ је зао. Одредити суму првих 2012 злих бројева.

Први разред, Б категорија

1. Нека су CD и CE висина и тежишна дуж троугла ABC, редом, а PQ и PR висина и тежишна дуж троугла MNP, редом. Ако је $CD \cong PQ$, $CE \cong PR$ и $AB \cong MN$, доказати да су троуглови ABC и MNP подударни.

2. На испиту је 21 ученик решавао три задатка. Први и други задатак решило је 6 ученика, други и трећи задатак 7 ученика, а први и трећи задатак 11 ученика. Показати да постоје бар два ученика који су решили сва три задатка и да постоји бар један ученик који је решио највише један задатак.

3. Јелена је рекла њеном тати да је данас решила више задатака него јуче (када је такође решила неки задатак). Још је додала да је јуче решила X задатака, а данас Y и да важи $X \cdot Y + (X + Y) = 59$. Колико различитих решења ове Јеленине мозгалице може да нађе њен тата?

4. Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функција таква да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$f(3x - 1) = 6x - 8.$$

а) Одредити $f(5)$.

б) Одредити $f(x)$ за свако $x \in \mathbb{R}$.

в) Доказати да је f $1-1$ функција.

г) Скицирати графике функција $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$.

5. У квадратну шему 10×10 постављено је 100 људи различите висине. За сваку колону одредимо највишег од људи који се у њој налази, а затим најнижег од тих 10 људи – нека је то Пера. Затим, за сваку врсту одредимо најнижег од људи који се у њој налази, а затим највишег од тих 10 људи – нека је то Жика. Да ли се може утврдити ко је виши Пера или Жика?

Други разред, Б категорија

1. Одредити све комплексне бројеве z за које важи $|z| = |z - 2i|$ и $|z - 1| = 1$.

2. На листу је са три боје нацртано 36 кенгура. Од тога њих 25 има жуте делове, 28 има браон делове, а 20 има делове обојене црном бојом. Ако само 5 кенгура има делове све три боје, колико има једнобојних кенгура?

3. Функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, задата је са $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$, за свако $x \in \mathbb{R}$. Решити неједначину

$$f(f(x)) \leqslant 0.$$

4. Нека је AE тежишна дуж троугла ABC. Права p паралелна са AE сече страницу BC у тачки D, страницу AB у тачки F и продужетак странице AC у тачки G. Доказати да $DF + DG$ не зависи од положаја праве p.

5. Доказати да је број

$$\frac{\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{3}}$$

природан.

Трећи разред, Б категорија

1. Основа праве призме је троугао чије су две странице дужина 3 cm и 5 cm, а угао између њих једнак 120°. Површина бочне стране највеће површине је $35\,\mathrm{cm}^2$. Израчунати површину омотача призме.

2. Нека је $a \in \mathbb{R}$. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned} 3x + ay - z &= a - 1 \\ -x + y + az &= 1 \\ x + 4y + 3z &= 3. \end{aligned}$$

3. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\arcsin 3x = \operatorname{arctg} 5x.$$

4. Зарубљена купа подељена је једном равни паралелној основама на два дела једнаких запремина. Изразити полупречник ρ пресечног круга преко полупречника основа R и r.

5. Да ли се квадрат $\mathscr{K}$ може у потпуности прекрити са

а) 2011

б) 2012

квадрата који немају заједничких унутрашњих тачака и који су садржани у $\mathscr{K}$?

Четврти разред, Б категорија

1. Ако је $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ аритметички низ, доказати да за све $m, n, p \in \mathbb{N}$ важи

$$a_m(n-p) + a_n(p-m) + a_p(m-n) = 0.$$

2. Дат је полином

$$p(z) = z^3 + (3-4i)z^2 - (3+8i)z - 5.$$

Ако је један корен овог полинома облика λi ($\lambda \in \mathbb{R}$), наћи све његове корене.

3. Нека је n природан број и $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функција дефинисана са

$$f_n(x) = \sin^n x - \cos^n x,$$

за свако $x \in \mathbb{R}$. Одредити (ако постоји) најмању и највећу вредност функције f_n.

4. Израчунати површину троугла који образују симетрале првог и другог квадранта и тангента на хиперболу $x^2 - y^2 = 5$ у тачки $M(3,2)$.

5. Међу свим 10-цифреним бројевима који имају све цифре различите и дељиви су са 11 одредити најмањи и највећи.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 11.02.2012.

Први разред, А категорија

1. Нека је K тачка симетрична ортоцентру H троугла ABC у односу на средиште странице BC. Доказати да је AK пречник описане кружнице троугла ABC.

2. Дати су полиноми $p(x) = x^3 + x^2 + x + 2$ и $q(x) = x^3 - x + 3$. Да ли постоји цео број m тако да $q(m) \mid p(m)$?

3. За свако $n \in \mathbb{N}$ број x_n настао је узастопним дописивањем квадрата првих n природних бројева (нпр. $x_{12} = 149162536496481100121144$). Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n, таквих да број x_n није потпун степен природног броја (природан број y је потпун степен ако и само ако постоје природни бројеви $k > 1$ и a, тако да важи $y = a^k$).

4. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао који није трапез. Симетрале страница AD и BC секу се у тачки P, а симетрале страница AB и CD секу се у тачки Q. Уколико се тачке P и Q налазе у унутрашњости четвороугла $ABCD$ и важи $\sphericalangle APD = \sphericalangle BPC$, доказати да је $\sphericalangle AQB = \sphericalangle CQD$.

5. На свакој од $n > 4$ картица уписан је један од бројева $+1$ или -1. Са колико најмање питања можемо сазнати производ свих бројева записаних на картицама, ако једним питањем можемо сазнати вредност производа бројева на тачно три произвољно изабране картице?

Други разред, А категорија

1. Наћи све реалне бројеве a такве да неједнакост

$$x^4 + ax^3 + (a+3)x^2 + ax + 1 > 0$$

важи за све реалне бројеве x.

2. Нека је $a \in \mathbb{R}$, $|a| > 1$. Доказати да за све $z \in \mathbb{C}$ важи

$$\left|\frac{az - i}{a + zi}\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow |z| \leqslant 1.$$

3. Доказати да се квадрат природног броја не може завршавати са четири исте ненула цифре.

4. На страницама BC и AC троугла ABC дате су тачке D и E, редом, тако да важи $AE = BD$. Означимо са M средиште странице AB, а са P пресек правих AD и BE. Доказати да тачка Q симетрична тачки P у односу на M лежи на симетрали угла ACB.

5. У поља таблице 100×100 су уписани бројеви. У свакој врсти има бар 10 различитих бројева, али у сваке три узастопне врсте има највише 16 различитих бројева. Колико се највише различитих бројева може налазити у таблици?

Трећи разред, А категорија

1. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\frac{2^x - 16}{(9^{2x+1} - 243) \cdot \sqrt{5^{\frac{x^2-3}{2}} - 125}} \leqslant 0.$$

2. Нека је $n > 2$ природан број. Доказати да је вредност детерминанте

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n-1 \\ 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 3 \\ n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

једнака квадрату целог броја.

3. Низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ је дефинисан са $a_0 = 1$ и

$$a_{n+1} = (n^2+1)\cdot a_n - n,$$

за $n \geqslant 0$. Доказати да постоји члан низа који је дељив са 2011.

4. Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао такав да за сваку тачку M која је у равни тог шестоугла важи

$$MA^2 + MC^2 + ME^2 = MB^2 + MD^2 + MF^2.$$

Доказати да се тежишта троуглова ACE и BDF поклапају.

5. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Колико се највише непразних подскупова може издвојити из скупа од n елемената тако да су свака два или дисјунктна или је један од њих подскуп другог?

Четврти разред, А категорија

1. Дате су тачке $A(1,3)$ и $B(2,4)$. Одредити тачку C на параболи $x = y^2 + 1$ за коју троугао ABC има најмању могућу површину.

2. Нека је $f : [\,1,2\,] \to \mathbb{R}$ диференцијабилна функција и $f(1) = 0$. Колики је најмањи могући број решења једначине

$$2\cdot f(x) = f'(x)\cdot \sin 2x\,?$$

3. а) Доказати да не постоје прости бројеви p и q такви да је број

$$p^2 + 2012pq + q^2$$

потпун квадрат.

б) Доказати да постоји бесконачно много парова узајамно простих природних бројева (m,n), тако да је

$$m^2 + 2012mn + n^2$$

потпун квадрат.

4. Нека је M унутрашња тачка квадрата $ABCD$. Нека су A_1, B_1, C_1, D_1 друге тачке пресека правих AM, BM, CM, DM са описаном кружницом квадрата $ABCD$, редом. Доказати да је

$$A_1B_1 \cdot C_1D_1 = A_1D_1 \cdot B_1C_1.$$

5. Нека је $m \geqslant 3$ природан број. Наћи најмањи природан број $r(m)$ за који важи да се за свако разбијање скупа $\{1,2,\ldots,r(m)\}$ на 2 подскупа из једног од њих може изабрати m бројева (не обавезно различитих) $x_1, x_2, \ldots, x_m$ за које важи

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} = x_m.$$

Први разред, Б категорија

1. Нека су M, N и K средишта страница AB, BC и CD тетивног четвороугла $ABCD$, редом. Доказати да важи

$$\sphericalangle BMN = \sphericalangle CKN.$$

2. Нека је $P(x)$ полином са целим коефицијентима који при дељењу са $x^3 - x^2 + x - 6$ даје остатак $x^2 - 7x + 3$. Колики је остатак при дељењу полинома $P(x)$ са $x - 2$?

3. У скупу простих бројева решити једначину

$$2x^2 + 1 = y^5.$$

4. Нека је $ABCD$ паралелограм, а Z тачка на продужетку странице BC тако да важи распоред $B - C - Z$. Нека права AZ сече праве BD и CD у тачкама X и Y, редом. Ако је дужина дужи AZ једнака 6, а дужина дужи AY једнака 3, одредити дужину дужи AX.

5. На неком такмичењу из математике било је 5 задатака различите тежине, па никоја два нису носила исти број бодова, али је сваки носио број бодова који је природан број. Ако се за два урађена најлакша задатка добијало 10 бодова, а за два урађена најтежа задатка 18 бодова, колико бодова се добијало за свих 5 урађених задатака?

Други разред, Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\sqrt{4 + 7x - 2x^2} < 2x + 1.$$

2. Нека су бројеви $a, b, c \in \mathbb{R}$ по паровима различити и $f(x)$ квадратни трином, тако да је $f(a) = bc$, $f(b) = ca$, $f(c) = ab$. Доказати да је

$$f(a + b + c) = ab + bc + ca.$$

3. Да ли постоји природан број $n > 1$ такав да су последње четири цифре броја 2012^n једнаке 2012?

4. Ако симетрала унутрашњег угла код темена A троугла ABC сече описану кружницу у тачки N, а страницу BC у тачки T, доказати да је

$$BN^2 = AN \cdot TN.$$

5. На једном маскенбалу окупило се $n \geqslant 4$ људи. Сви су се снабдевали код истог продавца, који је у понуди имао костиме у некој од $n + 2$ могуће боје. Неке од боја у понуди биле су: бела, црна, плава, зелена, жута, црвена. На маскенбалу се испоставило:

- тачно једна од боја {бела, црна} била је заступљена;

- тачно две од боја {црна, плава, зелена} биле су заступљене;
- од боја {бела, плава, жута} био је заступљен паран број (тј. или ниједна од њих, или тачно две);
- од боја {бела, зелена, црвена} био је заступљен паран број.

Доказати да се могу наћи две особе на маскенбалу обучене у костиме исте боје.

Трећи разред, Б категорија

1. Доказати да за произвољне векторе $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ важи

$$\left[\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\times\left(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right)\right]\cdot(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a})=2\overrightarrow{c}\cdot(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}).$$

2. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned}\sin x\cdot\cos 2y &= 1\\ \cos x\cdot\sin 2y &= 0.\end{aligned}$$

3. Доказати да се квадрат природног броја не може завршавати са четири исте ненула цифре.

4. У конвексном четвороуглу $ABCD$ важи

$$\frac{AB^2-BC^2+AC^2}{CD^2-AD^2+AC^2}=\frac{AB^2-AD^2+BD^2}{CD^2-BC^2+BD^2}.$$

Доказати да је $AB\parallel CD$.

5. У поља таблице 100×100 су уписани бројеви. У свакој врсти има бар 10 различитих бројева, али у сваке три узастопне врсте има највише 16 различитих бројева. Колико највише различитих бројева може да се нађе у таблици?

Четврти разред, Б категорија

1. Одредити тачку на графику функције $y=x-\ln(x+1)$ у којој је тангента паралелна са правом која пролази кроз тачке $A(2,3)$ и $B(-1,4)$.

2. Да ли је функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дефинисана са $f(x)=\sin(x^2)$, за све $x\in\mathbb{R}$, периодична?

3. У скупу природних бројева решити једначину

$$2^x-6^y=2012.$$

4. У оштроуглом троуглу ABC тачка D је подножје висине из темена C и важи $AD=BC$. Ако је L подножје нормале из D на висину из темена A троугла ABC, доказати да је BL симетрала угла ABC.

5. На свакој од 2011 картица уписан је један од бројева $+1$ или -1. Са колико најмање питања можемо сазнати производ свих бројева, ако једним питањем можемо сазнати вредност производа бројева на тачно три произвољно изабране картице?

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 17.03.2012.

Први разред , А категорија

1. Нека је $D \in BC$ подножје висине из темена A оштроуглог троугла ABC. На дужи AD уочена је тачка P таква да је $\sphericalangle PBA = \sphericalangle PCA$. Доказати да је троугао ABC једнакокрак или је тачка P ортоцентар троугла ABC.

2. Познато је да за неке природне бројеве x и y важи

$$23^x \cdot 111^y = \overline{aab3dc6902b2c74d456b},$$

где су $a \neq 0, b, c, d$ неке (не обавезно различите) цифре. Наћи $a+b+c+d$.

3. Нека је $P(x)$ полином са целобројним коефицијентима, такав да за сваки природан број n број $P(P(n))$ при дељењу са n даје остатак $n-1$. Доказати да полином $P(x)$ нема целобројну нулу.

4. Главни град неке државе спојен је са преосталих 2012 градова авиолинијама. Сваки од преосталих градова спојен је авиолинијом бар са још једним градом осим главног. Доказати да је могуће укинути 1006 авиолинија из главног града тако да је и даље могуће стићи из сваког града до сваког другог коришћењем неких авиолинија.
(Све авиолиније су двосмерне.)

Други разред , А категорија

1. На табли је записана једначина

$$\sqrt{*x^2 + *x + *} = *x + *.$$

Два играча, Мирко и Славко, наизменично уместо једне од преосталих звездица уписују цео број. Мирко игра први. Он добија игру уколико добијена једначина има бар једно решење у скупу рационалних бројева, док у супротном игру добија Славко. Који од играча има победничку стратегију?

2. Нека су D, E, F подножја висина из темена A, B, C, редом, оштроуглог троугла ABC који није једнакокрак. Права EF сече праву BC у тачки P, док права кроз D паралелна са EF сече странице AB и AC у тачкама Q и R, редом. Доказати да једна пресечна тачка описаних кружница троуглова DEF и PQR лежи на страници BC.

3. Наћи сва решења (p, q, a, m) једначине

$$p^2 + 4^a q^2 = m^2,$$

таква да су p и q прости бројеви и $a, m \in \mathbb{N}$.

4. Перица је на папиру нацртао $n \geqslant 2$ тачака које припадају истој кружници и дуж између сваке две тачке. Притом, сваку од тих дужи означио је или са $+$ или са $-$. Доказати да, без обзира на начин на који су дужи означене, Марица може избрисати све дужи означене једним знаком и неке дужи означене другим знаком, тако да важе следећа два услова:

1) неизбрисане дужи немају заједничких тачака у унутрашњости кружнице и
2) сваке две тачке повезане су изломљеном линијом састављеном од једне или више неизбрисаних дужи.

Трећи разред, А категорија

1. Доказати да је број $\operatorname{tg}\left(17^{3^{2012}}\right)^{\circ}$ ирационалан.

2. Нека су a и b природни бројеви. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n таквих да је за сваки прост број p број $a \cdot p^n + b$ сложен.

3. Нека су M и N тачке на страници BC троугла ABC такве да важи распоред $B - M - N$ и да је $BM = CN$. Тачке P и Q изабране су на дужима AN и AM, редом, тако да је $\sphericalangle PMC = \sphericalangle MAB$ и $\sphericalangle QNB = \sphericalangle NAC$. Доказати да је

$$\sphericalangle QBC = \sphericalangle PCB.$$

4. За коначан непразан скуп S природних бројева дефинишемо

$$r(S) = \max(S) - \min(S)$$

(разлика највећег и најмањег елемента скупа S). Ако је A скуп од 30 различитих природних бројева, колико највише различитих вредности може имати $r(S)$ за све могуће петочлане подскупове S скупа A (тј. колико највише елемената може имати скуп $\{r(S) \mid S \subseteq A \wedge |S| = 5\}$)?

Четврти разред, А категорија

1. Доказати да се прост број p може приказати у облику

$$p = \frac{n^4 - m^4}{n^3 + m^3},$$

за неке n, $m \in \mathbb{N}$, ако и само ако је p једнак збиру квадрата нека два узастопна природна броја.

2. Ако су $1 = x_0 \geqslant x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n = 0$ реални бројеви, одредити највећу могућу вредност суме

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i x_{i+1}(x_i - x_{i+1}).$$

3. Нека је $n \in \mathbb{N}$. На свакој од $2n$ карата записан је један од бројева 1 до $2n$ (сваки број на тачно једној карти). Карте су постављене на сто у једном реду, али у непознатом редоследу и окренуте лицем надоле. Милош и Аца играју следећу игру против њиховог другара Ђолета. Прво Милош и Ђоле приђу столу и окрену све карте. Пошто погледа распоред карата Милош може заменити места тачно две карте на столу (или их оставити у датом редоследу). Затим се све карте поново окрену лицем надоле, а столу прилази Аца. Ђоле каже било који број од 1 до $2n$, а Аца окреће карте како би пронашао карту са тим бројем. Милош и Аца побеђују ако Аца нађе тражену карту у највише n покушаја, а иначе побеђује Ђоле. Ко има победничку стратегију? (Милош и Аца се могу договарати само пре почетка игре.)

4. Доказати да површина четвороугла са страницама a, b, c, d, тим редом, није већа од

$$\frac{1}{4} \cdot \left((a+c)^2 + bd\right).$$

Први разред, Б категорија

1. Нека је M произвољна тачка у равни датог троугла ABC. Доказати да вектор $2 \cdot \overrightarrow{MA} - 3 \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ не зависи од избора тачке M.

2. Четири ученика: Аца, Бора, Васа и Горан такмичили су се у трчању. После трке (на којој није било деобе места), на питање које је ко место заузео, одговорили су следеће:

- Аца: „Ја нисам био ни први ни последњи."
- Бора: „Ја нисам био последњи."
- Васа: „Ја сам био први."
- Горан: „Ја сам био последњи."

а) Да ли могуће да су сви одговори тачни?
б) Познато је да су 3 од ових одговора били истинити, а 1 неистинит. Ко је говорио неистину? За кога од њих са сигурношћу можете тврдити какав му је био поредак на циљу?

3. Доказати да за реалне бројеве $x \neq y \neq z \neq x$ важи

$$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 \neq 0.$$

4. Кружнице k_1 и k_2 секу се у тачкама P и Q. Права l која сече дуж PQ сече дате кружнице у тачкама A, B, C, D, при чему важи распоред $A - B - C - D$. Доказати да је

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle CQD.$$

5. Шест мудраца је говорило о броју $n \in \mathbb{N}$ записаном у декадном запису.

Први: „Број n умањен за 1 је прост број акко n има бар један прост делилац из 1. десетице."

Други: „Број n је дељив са 2 акко n није палиндром који има број цифара дељив са 2."

Трећи: „Број n није дељив са 3 акко има мање од 3 непарна делиоца."

Четврти: „Број n је дељив са 4 акко има тачно 4 цифре."

Пети: „Број n није дељив са 5 акко је збир цифара броја n једнак 5."

Шести: „Број n није узајамно прост са 6 акко има тачно 6 делилаца."

Одредите све могуће природне бројеве n, ако се зна да је изјава сваког мудраца тачна.

(Број n је палиндром уколико је једнак броју који се добија читањем броја n са лева на десно. Нпр. број 1245421 је палиндром.)

Други разред, Б категорија

1. Нека су $a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$, такви да једначина $ax^4 + bx^2 + c = 0$ нема решења у скупу реалних бројева. Да ли једначина $ax^6 + bx^3 + c = 0$ може имати бар једно реално решење?

2. Одредити све реалне бројеве x за које важи

$$\log_{x+1} x \geqslant \log_{x^2+1} x^2 \geqslant \log_{x^3+1} x^3 \geqslant \ldots \geqslant \log_{x^n+1} x^n \geqslant \ldots$$

3. Нека су $x > y$ природни бројеви за које 2012 дели број

$$\frac{x!}{y! \cdot (x-y)!}.$$

Колико најмање може бити $x + y$?

(За $n \in \mathbb{N}$ са $n!$ означен је производ првих n природних бројева.)

4. Нека је E тачка на страници AC троугла ABC, а l права различита од AB и BC која садржи теме B. Права која садржи E и паралелна је са BC сече праву l у тачки N, а права која садржи E и паралелна је са AB сече праву l у тачки M. Доказати да је $AN \parallel CM$.

5. Дата је таблица 2010×2012, где свако поље садржи по једну сијалицу. На почетку је број упаљених сијалица у таблици већи од $2009 \cdot 2011$. Ако се у неком делу таблице димензија 2×2 налазе три угашене сијалице тада се и четврта сијалица тог дела аутоматски гаси, а у супротном се стање сијалица не мења (угашене сијалице остају угашене, а упаљене остају упаљене). Доказати да се не могу угасити све сијалице у таблици.

Трећи разред, Б категорија

1. Тачке комплексне равни које одговарају комплексним бројеви

$$2a+b,\ 2b+c,\ 2c+a$$

чине темена једнакостраничног троугла. Да ли тачке комплексне равни које одговарају комплексним бројеви a, b, c морају бити темена једнакостраничног троугла?

2. Нека је x реалан број већи од 1. Шта је веће 4^x+1 или 2^x+3^x?

3. Нека је $f(x)=x^4-5x^2+67$, за $x\in\mathbb{N}$. Одредити све просте бројеве p за које је збир цифара броја $f(p)$ најмањи могући.

4. У троуглу ABC дата је тачка O тако да важи

$$OA\cdot BC=OB\cdot CA=OC\cdot AB.$$

Доказати да су подножја нормала конструисаних из тачке O на странице троугла темена једнакостраничног троугла.

5. а) Израчунати збир свих троцифрених бројева чије су све цифре непарне.
б) Одредити последњу цифру збира свих троцифрених бројева који у декадном запису не садрже цифру 3.

Четврти разред, Б категорија

1. Нека је $P(x)$ полином са реалним коефицијентима. Одредити збир квадрата његових нула уколико је познато да важи

$$P(x)^3=x^9+a_8x^8+a_7x^7+a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+15x+1$$

за неке $a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8\in\mathbb{R}$, и да је збир коефицијената полинома $P(x)^3$ једнак 216.

2. У скупу природних бројева решити једначину

$$\operatorname{arctg}\frac{n}{11}+n\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{7}=\operatorname{arctg}\frac{1}{n}.$$

3. Одредити (ако постоји) најмањи природан број n чије су све цифре различите и дељив је са 2012.

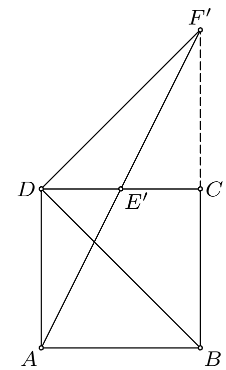
4. Дат је $\sphericalangle xAy$ и тачка B, $B\neq A$, на симетрали овог угла. Кружница k која садржи тачке A и B сече крак Ax у тачки C, $C\neq A$, а крак Ay у тачки D, $D\neq A$. Доказати да $AC+AD$ не зависи од избора кружнице k.

5. На колико начина можемо 3 Италијана, 4 Француза и 4 Немца да сместимо у низ ако сви Италијани морају да стоје један до другог, а никоја два Немца не смеју да стоје један до другог?

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23.01.2010.

Први разред, А категорија

1. Нека је F' пресек нормале у тачки D на праву BD и праве BC, и E' пресек правих AF' и CD. Тада је $\sphericalangle F'DC = \sphericalangle F'DB - \sphericalangle CDB = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ и $\sphericalangle DCF' = 90^\circ$, па је $\sphericalangle DF'C = 45^\circ$ и $\triangle DCF'$ је једнакокрако-правоугли. Како је $AD \parallel BC$, то је $\sphericalangle DAE' = \sphericalangle E'F'C$, па из $DA = DC = CF'$ и $\sphericalangle ADE' = \sphericalangle E'CF' = 90^\circ$ закључујемо да је $\triangle DAE' \cong \triangle CF'E'$. Сада је $DE' = E'C$, па је $E \equiv E'$ и самим тим $F' \equiv F$, чиме је доказ завршен. (Тангента 62, стр. 40, Писмени задаци, задатак 2)



ОП 2012, 1А – 1

2. Означимо са p, q и r следеће исказе:

p : Биће облачно. q : Падаће снег. r : Дуваће ветар.

Тада тврђењима 1), 2) и 3) из поставке задатка одговарају респективно следеће исказне формуле: $F_1 \equiv p \vee q \vee r$, $F_2 \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$, $F_3 \equiv \neg r \Rightarrow (p \wedge \neg q)$. Треба проверити да ли је исказна формула $F \equiv q \Rightarrow r$ логичка последица формула F_1, F_2 и F_3, односно да ли је формула $F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \Rightarrow F$ таутологија. Доказаћемо да је формула

$$(p \vee q \vee r) \wedge ((p \wedge q) \Rightarrow r) \wedge (\neg r \Rightarrow (p \wedge \neg q)) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$$

таутологија методом свођења на апсурд. Претпоставимо зато да претходна формула није таутологија, односно да постоје вредности исказних слова p, q, r за које је $\tau((p \vee q \vee r) \wedge ((p \wedge q) \Rightarrow r) \wedge (\neg r \Rightarrow (p \wedge \neg q)) \Rightarrow (q \Rightarrow r)) = \bot$. Тада је

$$\tau((p \vee q \vee r) \wedge ((p \wedge q) \Rightarrow r) \wedge (\neg r \Rightarrow (p \wedge \neg q))) = \top, \qquad \tau((q \Rightarrow r)) = \bot.$$

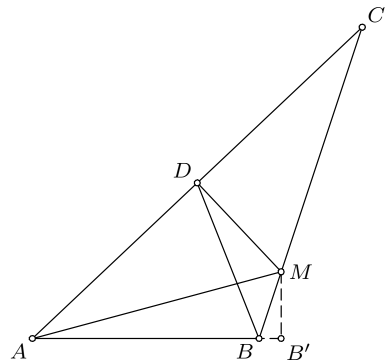
Сада је из друге формуле $\tau(q) = \top$ и $\tau(r) = \bot$. Даље, како је из прве формуле $\tau(\neg r \Rightarrow (p \wedge \neg q)) = \top$, то је према претходном $\tau(p \wedge \neg q) = \top$, односно $\tau(\neg q) = \top$. Контрадикција! (Тангента 65, стр. 18, Наградни задаци, задатак М964)

3. Ако је $d \in \mathbb{N}$ делилац броја n, онда је и $\frac{n}{d}$ делилац броја n. Притом, је $d = \frac{n}{d}$ ако и само ако је n потпун квадрат и $d = \sqrt{n}$. Дакле, ако n није потпун квадрат, делиоци броја n се могу поделити на двочлане скупове облика $\left\{d, \frac{n}{d}\right\}$. Ако је n потпун квадрат, исто се може урадити са свим делиоцима броја n, сем $\sqrt{n}$. Следи да је број делиоца броја n непаран ако и само ако је n потпун квадрат. Како су n и n^3 или оба потпуни квадрати или оба нису потпуни квадрати, бројеви њихових делилаца су исте парности, па се не могу разликовати за 2011, односно једначина нема решења.

4. Нека је D средиште странице AC, а M тачка на правој BC таква да је $MD \perp AC$. По услову задатка $\triangle ABD$ је једнакокраки, те је $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ABD < 90°$, па се тачка M налази на страници BC. Како се тежишна дуж и висина из темена D троугла AMC поклапају, то је он једнакокраки, па је $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MCA = \sphericalangle BCA$. Из услова задатка је $\sphericalangle ABM > 90°$ и $\sphericalangle ADM = 90°$, па је

$$\begin{aligned} \sphericalangle DBM &= \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABD \\ &> \sphericalangle ADM - \sphericalangle ADB \\ &= \sphericalangle BDM, \end{aligned}$$

односно $MD > BM$.



ОП 2012, 1А – 4

Нека је B' подножје нормале из тачке M на праву AB. Тада из правоуглог троугла $BB'M$ закључујемо $MB' < BM$, па је $MB' < DM$. Како је у троугловима AMB' и AMD испуњено $AM = AM$, $\sphericalangle ADM = \sphericalangle AB'M = 90°$ и $MB' < DM$, то је $\sphericalangle MAD > \sphericalangle B'AM = \sphericalangle BAM$, и самим тим

$$\sphericalangle BCA = \sphericalangle MAC > \sphericalangle BAM = \sphericalangle BAC - \sphericalangle BCA,$$

што је и требало доказати.

5. Претпоставимо да је могуће поставити 7 ловаца тако да нападају сва поља шаховске табле. Посматрајмо рубна поља шаховске табле, тј. поља уз ивицу табле. Оваквих поља има 28, од којих је 14 бело и 14 црно. Приметимо да један ловац напада поља исте боје, па постоји боја таква да су рубна поља те боје нападнута од стране највише три ловца - нека је то црна боја. Међутим, сваки ловац напада највише 4 рубна поља, тако да је нападнуто највише 12 рубних поља црне боје, контрадикција.

Осам ловаца постављених у поља четврте колоне табле нападају сва поља, чиме је доказ у потпуности завршен.

Други разред, А категорија

1. Сабирањем датих једначина добијамо

$$169 = x^2 + 4xy + 4y^2 = (x + 2y)^2,$$

па је $x + 2y = \pm 13$.
Први случај. Ако је $x + 2y = 13$, тада је $x = 13 - 2y$, па заменом у прву једначину добијамо $2y^2 + 13y - 115 = 0$, чија су решења $y = 5$ и $y = -\frac{23}{2}$. Дакле, у овом случају решења су парови $(3, 5)$ и $\left(36, -\frac{23}{2}\right)$.
Други случај. Ако је $x + 2y = -13$, тада је $x = -13 - 2y$, па заменом у прву једначину добијамо $2y^2 - 13y - 115 = 0$, чија су решења $y = -5$ и $y = \frac{23}{2}$. Дакле, у ово случају решења су парови $(-3, -5)$ и $\left(-36, \frac{23}{2}\right)$.
Решења једначине су парови $(3, 5)$, $(-3, -5)$, $\left(36, -\frac{23}{2}\right)$ и $\left(-36, \frac{23}{2}\right)$. (Тангента 58, стр. 29, Писмени задаци, задатак 4)

2. Постоје реални бројеви α, β, $\gamma \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ тако да је $a = \operatorname{tg}\alpha$, $b = \operatorname{tg}\beta$ и $c = \operatorname{tg}\gamma$. Тада је

$$1 = \frac{a^2}{1+a^2} + \frac{b^2}{1+b^2} + \frac{c^2}{1+c^2} = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma,$$

па је $\cos^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma \geqslant 2\sqrt{\sin^2\beta\sin^2\gamma} = 2|\sin\beta\sin\gamma|$ (последња неједнакост следи из А-Г неједнакости). Слично је $\cos^2\beta \geqslant 2|\sin\alpha\sin\gamma|$ и $\cos^2\gamma \geqslant 2|\sin\alpha\sin\beta|$. Множењем претходних неједнакости налазимо да је

$$\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta\cdot\cos^2\gamma \geqslant 8\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma,$$

па је

$$\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta\cdot\operatorname{tg}^2\gamma \leqslant \frac{1}{8},$$

тј. $|\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}$, односно $|abc| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Једнакост важи ако и само ако је $\sin^2\alpha = \sin^2\beta = \sin^2\gamma = \frac{1}{3}$, односно $a^2 = b^2 = c^2 = \frac{1}{2}$.

Друго решење. Множењем датог услова са $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$ добијамо да је он еквивалентан са

$$1 = 2a^2b^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.$$

Како је по А-Г неједнакости

$$1 = 2a^2b^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geqslant 4\sqrt[4]{2a^2b^2c^2\cdot a^2b^2\cdot b^2c^2\cdot c^2a^2} = 4\sqrt[4]{2a^6b^6c^6},$$

то је $|abc| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Једнакост важи ако и само ако је $2a^2b^2c^2 = a^2b^2 = b^2c^2 = c^2a^2$, односно $a^2 = b^2 = c^2 = \frac{1}{2}$.

3. Како је $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\operatorname{ctg}\beta = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta}$, $\operatorname{ctg}\gamma = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\gamma}$ и $\operatorname{ctg}\delta = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\delta}$, то је довољно доказати

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}\delta \\ = \; & \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta, \end{aligned}$$

односно

$$(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)(\operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\delta - 1) = -(\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta)(\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta - 1). \qquad (\dagger)$$

Приметимо да је $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \vee \alpha + \beta = 270^\circ \Leftrightarrow \gamma + \delta = 270^\circ \vee \gamma + \delta = 90^\circ \Leftrightarrow \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\delta = 1$, па је ($\dagger$) довољно доказати у случају да је $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$ и $\operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\delta$ различито од 1. Међутим, тада ($\dagger$) следи из

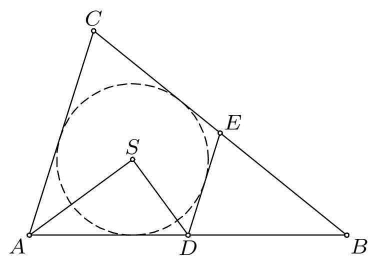
$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = -\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha - \beta) = -\operatorname{tg}(\gamma+\delta) = -\frac{\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta}{1 - \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\delta}.$$

(Тангента 57, стр. 32, Писмени задаци, задатак 1)

4. Нека је E тачка на страници BC таква да DE додирује уписани круг троугла ABC. Како је

$$\begin{aligned} & \sphericalangle ADE + \sphericalangle DAC \\ = \; & 2 \cdot \sphericalangle ADS + 2 \cdot \sphericalangle DAS \\ = \; & 2 \cdot (180^\circ - \sphericalangle ASD) = 180^\circ, \end{aligned}$$

то је $DE \parallel AC$.



ОП 2012, 2А – 4

Како је D средиште дужи AB, то је DE средња линија троугла ABC, па је $2 \cdot CE = CB$. Како је четвороугао $ADEC$ тангентан, то је

$$\frac{3}{2} \cdot AC = AC + DE = AD + CE = \frac{1}{2} \cdot (AB + BC),$$

тј. $AB + BC = 3AC$.

5. Докажимо да, ако је $m = n$, побеђује Други играч, а у супротном Први (Први играч је онај чијим потезом почиње игра).

Ако је $m = n$, Други играч у сваком свом потезу треба да „опонаша” потез Првог, тј. ако Први подели неку гомилу, он треба другу са истим бројем жетона да подели на исти начин. На тај начин после сваког потеза Другог број гомила је паран (нпр. $2k$), при чему су бројеви жетона на гомилама $x_1, x_1, x_2, x_2, \ldots, x_k, x_k$ (другим речима, за сваки природан број l биће паран број гомила са по l жетона). Дакле, Други увек може да одигра потез, па како се игра завршава (после коначно много потеза), он има победничку стратегију.

Ако је, без умањења општости, $m > n$, Први треба да гомилу са m жетона подели на једну са n и $m - n$ гомила са по једним жетоном. Затим преузима стратегију Другог описану горе.

Трећи разред, А категорија

1. По Виетовим формулама важе једнакости $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ и $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -a$, па је

$$\begin{aligned}0 &= (x_1-2)^2 + (x_2-2)^2 + (x_3-2)^2 \\ &= (x_1+x_2+x_3)^2 - 2\cdot(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) - 4\cdot(x_1+x_2+x_3) + 12 \\ &= 12 + 2a,\end{aligned}$$

односно $a = -6$ је решење задатка. (Тангента 60, стр. 28, Писмени задаци, задатак 5)

2. Изрази $\log_3(\operatorname{ctg} x)$ и $\log_2(\cos x)$ дефинисани су акко је $\operatorname{ctg} x > 0$ и $\cos x > 0$, односно за $x \in D = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2})$. Како су функције $\log_3(\operatorname{ctg} x)$ и $\log_2(\cos x)$ периодичне са заједничком периодом 2π, то је једначину довољно решити на интервалу $(0, \frac{\pi}{2})$. Нека је $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Тада је

$$\begin{aligned}2\log_3(\operatorname{ctg} x) = \log_2(\cos x) &\Leftrightarrow 2(\log_3(\cos x) - \log_3(\sin x)) = \log_2(\cos x) \quad (1)\\ &\Leftrightarrow \frac{2-\log_2 3}{2\cdot\log_2 3}\cdot\log_2(\cos x) = \log_2(\sin x). \quad (2)\end{aligned}$$

Посматрајмо функције $f, g : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, задате са

$$f(x) = \frac{2-\log_2 3}{2\cdot\log_2 3}\cdot\log_2(\cos x), \qquad g(x) = \log_2(\sin x).$$

Како је на посматраном интервалу функција $\cos x$ строго опадајућа, то је и функција $\log_2(\cos x)$ такође строго опадајућа (пошто је функција $\log_2 t$ строго растућа). Имајући још на уму да је $0 < \log_2 3 < 2$, то је $\dfrac{2-\log_2 3}{2\cdot\log_2 3} > 0$, те је функција $f(x)$ строго опадајућа. Слично овом закључујемо да је на посматраном интервалу функција $g(x)$ строго растућа. Због овога једначина (2) може имати највише једно решење. Заиста, ако је α неко решење те једначине, за $x > \alpha$ важи $f(x) < f(\alpha) = g(\alpha) < g(x)$, а за $x < \alpha$, $f(x) > f(\alpha) = g(\alpha) > g(x)$. Овим смо доказали да једначина (2), а тиме и (1), на интервалу $(0, \frac{\pi}{2})$ има највише једно решење. Како је

$$2\log_3(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}) = 2\log_3\frac{1}{\sqrt{3}} = -1, \qquad \log_2(\cos\frac{\pi}{3}) = \log_2\frac{1}{2} = -1,$$

то је $x = \frac{\pi}{3}$ једино решење полазне једначине на интервалу $(0, \frac{\pi}{2})$. Решења полазне једначине су $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, за све $k \in \mathbb{Z}$.

3. Докажимо да сваки од бројева $n = 2\cdot 3^m$, $m \in \mathbb{N}$, задовољава дату једнакост. Заиста

$$\varphi(n) = \varphi(2\cdot 3^m) = \varphi(2)\cdot\varphi(3^m) = 3^m - 3^{m-1} = 2\cdot 3^{m-1} = \frac{n}{3}.$$

Како бројева облика $2\cdot 3^m$ има бесконачно много, тврђење задатка је доказано. (Тангента 65, стр. 21, Наградни задаци, задатак М985)

4. Приметимо да, уколико уредимо странице шестоугла (заједно са кружним одсечцима који су налегли на њих), опет добијамо кружницу исте величине. Зато, довољно је одредити полупречник кружнице описане око шестоугла $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ таквог да је $A_1A_2 = A_4A_5 = 2$, $A_2A_3 = A_5A_6 = 7$ и $A_3A_4 = A_6A_1 = 11$. Приметимо да је тада $A_1A_4 = D$ пречник круга, па применом Птоломејеве теореме на четвороугао $A_1A_2A_3A_4$ добијамо

$$\sqrt{D^2-121}\cdot\sqrt{D^2-4} = A_1A_3\cdot A_2A_4 = A_1A_4\cdot A_2A_3 + A_1A_2\cdot A_3A_4 = 7D+22.$$

Квадрирањем претходног израза и срећивањем добијамо једначину $P(D) = D\cdot(D^3-174D-308) = 0$. Како је $P(D) = D\cdot(D-14)\cdot(D^2+14D+22)$, то је једино позитивно решење дате једначине $D = 14$. Како пречник дате кружнице мора да задовољава претходну једнакост, то је тражени полупречник једнак 7.

5. Довољно је размотрити следећа два случаја.
Први случај: $2 \mid n$, тј. $n = 2k$, за неко $k \in \mathbb{N}$. Докажимо да је $m = k+1$. Наиме, у подскупу $\{2,4,\ldots,2k\}$ нема узајамно простих бројева. С друге стране, претпоставимо да $X \subseteq N_n$ има $k+1$ елемент. Поделимо све елементе из N_n у парове: 1 и 2, 3 и 4, итд. $2k-1$ и $2k$. Из бар једног пара су у скупу X оба броја, а они су узајамно прости.
Други случај: $2 \nmid n$, тј. $n = 2k+1$, за неко $k \in \mathbb{N}$. Докажимо да је опет $m = k+1$. Слично као горе, у $\{2,4,\ldots,2k\}$ нема узајамно простих бројева. Нека $X \subseteq N_n$ има $k+1$ елемент. Поделимо све елементе из X осим јединице у парове: 2 и 3, 4 и 5, итд. $2k$ и $2k+1$. Сада, или у X имамо оба елемента из неког од парова, или је у X јединица која је узајамно проста са сваким другим елементом.
Дакле, најмањи број са датим својством је $\left[\dfrac{n}{2}\right]+1$.

Четврти разред, А категорија

1. Посматрајмо функцију $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дату са $g(x) = f(x) - x$, за $x \in \mathbb{R}$. Како је $g(0) = f(0) \geqslant 0$, $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ и g непрекидна функција, на интервалу $[0,1]$ постоји барем једно c такво да је $g(c) = 0$, односно $f(c) = c$. Претпоставимо да постоје барем два оваква броја, $x_1 \neq x_2$. Тада, према Роловој теореми, постоји $\widetilde{x} \in (x_1, x_2)$ тако да је $g'(\widetilde{x}) = 0$. Међутим, како је $g'(x) = f'(x) - 1$, за $x \in \mathbb{R}$, то је $f'(\widetilde{x}) = 1$, контрадикција. (Тангента 63, стр. 13, Наградни задаци, задатак М942)

2. Претпоставимо да такви бројеви постоје. Нека су функције $g, h : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, дефинисане са

$$g(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0,\ h(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

за свако $x \in \mathbb{R}$. За парно n важи $g(-1) = h(-1)$, а за непарно n имамо $g(-1) = -h(-1)$. Зато (без обзира на парност броја n) важи $|g(-1)| = |h(-1)|$, те је $f(-1) = |g(-1)| - |h(-1)| = 0$. Пошто је $g(1) = h(1)$, важи и $f(1) = 0$. Са скице дате у задатку можемо уочити да функција f има тачно две нуле. Из претходног дела закључујемо да те нуле морају бити бројеви -1 и 1. Са скице такође уочавамо да је функција f позитивна на интервалу између својих нула, односно на интервалу $(-1, 1)$. Отуда је $f(0) > 0$, односно $|a_0| > |a_n|$. Како је $\lim_{x\to\infty} \frac{|g(x)|}{x^n} = |a_n|$ и $\lim_{x\to\infty} \frac{|h(x)|}{x^n} = |a_0|$, то је

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^n} = |a_n| - |a_0|.$$

Сада, како је $|a_n| - |a_0| < 0$, имамо да је $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. Међутим, са скице имамо да је $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, чиме долазимо до контрадикције. Дакле, бројеви са наведеном особином не постоје.

3. Докажимо да мора бити $f(n) = n$ за све $n \in \mathbb{N}$. Претпоставимо супротно, и нека је m најмањи природан број такав да је $f(m) \neq m$. Тада је $f(m) > m$. Заиста, ако је $m = 1$ важи $f(m) = f(1) > 1 = m$, а ако је $m > 1$ и $f(m) = k < m$, имали бисмо $f(m) = f(k)$ и f не би била инјективна. Пошто је f бијекција, постоји $k \in \mathbb{N}$ такав да је $f(k) = m$. Јасно, $k > m$, па из услова задатка имамо $m + f(m) < (m+1) + f(m+1) < \ldots < k + f(k)$. Уз то, пошто је f инјективна, $f(m)$, $f(m+1)$, $\ldots$, $f(k-1)$ су различити и већи од m. Сада је, са једне стране,

$$(m+f(m))+\ldots+((k-1)+f(k-1)) \geqslant (m+\ldots+(k-1))+((m+1)+\ldots+k) = k^2-m^2,$$

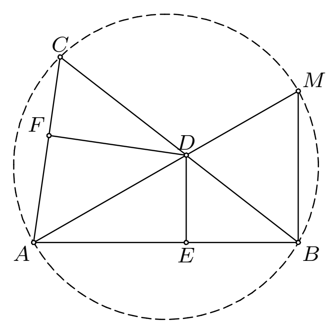
а са друге, из услова задатка,

$$(m + f(m)) + \ldots + ((k-1) + f(k-1)) < (k-m)(k + f(k)) = k^2 - m^2.$$

Контрадикција. Дакле, $f(2012) = 2012$.

4. Како је $\sphericalangle AMB = \sphericalangle ACB$ (као углови над тетивом AB), то из правоуглог троугла ABM добијамо да је $\sphericalangle MAB = \sphericalangle DAE = 90^\circ - \sphericalangle ACB$, па у правоуглом троуглу ADE важи $AE = AD \cdot \sin\sphericalangle ACB$. Аналогно добијамо и $AF = AD \cdot \sin\sphericalangle ABC$. Из синусне теореме је $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sin\sphericalangle ACB}{\sin\sphericalangle ABC}$, па је

$$\frac{AE}{AF} = \frac{\sin\sphericalangle ACB}{\sin\sphericalangle ABC} = \frac{AB}{AC},$$



ОП 2012, 4А – 4

и тврђење задатка следи из Талесове теореме. (Тангента 60, стр. 32, Писмени задаци, задатак 2)

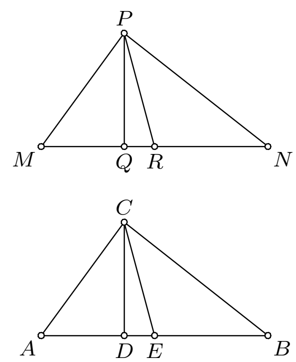
5. Приметимо да се k-тоцифрен (у бинарном запису) зао број може добити тако што на произвољан начин изаберемо $k-1$ цифру највеће тежине, а затим k-ту цифру тако да је укупан број јединица у запису паран. Самим тим, n-ти зао број је једнак $2n + x(n)$, где је $x(n)$ једнако 1 ако је број јединица у бинарном запису броја n непаран, и 0 у супротном. Такође, како је број јединица у бинарном запису броја $2n+1$ за један већи од броја јединица у бинарном запису броја $2n$, то је $x(2n+1) \neq x(2n)$, а самим тим и $x(2n+1) + x(2n) = 1$, за све $n \geqslant 1$. Како је $x(2012) = 0$ и $x(1) = 1$, то је тражени збир једнак

$$\sum_{n=1}^{2012} (2n + x(n)) = 2012 \cdot 2013 + 1005 + 1.$$

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 21.01.2012.

Први разред, Б категорија

1. Како је $CD \cong PQ$, $CE \cong PR$ и $\sphericalangle CDE \cong \sphericalangle PQR$, то је по ставу ССУ $\triangle CDE \cong \triangle PQR$ (оба троугла су правоугла), па је $\sphericalangle CED \cong \sphericalangle PRQ$. Претпоставимо да, без умањења општости, важе распореди $A-D-E$ и $M-Q-R$. Тада је $CE \cong PQ$, $AE \cong MR$ (као половине дужи AB, односно MN) и $\sphericalangle AEC \cong \sphericalangle MRP$, па је по ставу СУС $\triangle ACE \cong \triangle MPR$ и самим тим $AC \cong MP$. Како је $\sphericalangle CEB$ суплементаран $\sphericalangle AEC$, а $\sphericalangle PRN$ суплементаран $\sphericalangle PRM$, то је $\sphericalangle BEC \cong \sphericalangle NRP$, па аналогним разматрањем добијамо да је $\triangle CEB \cong \triangle PRN$, односно $CB \cong PN$. Сада, како је $AB \cong MN$, $AC \cong MP$ и $CB \cong PN$, то је по ставу ССС $\triangle ABC \cong \triangle MNP$. (Тангента 65, стр. 38, Писмени задаци, задатак 2)



ОП 2012, 1Б – 1

2. Нека су A, B, C, редом, скупови ученика који су решили први, други, трећи задатак, редом. Означимо са $x = |(A \cap B) \setminus C|$, $y = |(B \cap C) \setminus A|$, $z = |(A \cap C) \setminus B|$ бројеве ученика који су решили тачно два задатка, са $t = |A \cap B \cap C|$ број ученика који су решили сва три задатка и са u број ученика који су решили највише један задатак. Из услова задатка имамо $x + t = 6$, $y + t = 7$, $z + t = 11$ и $x + y + z + t + u = 21$. Одузимањем четврте једначине од збира прве три добијамо $2t = u + 3$. Одавде је очигледно $t \geqslant 2$ и $u \geqslant 1$ (јер је $u = 2t - 3$ непаран број). (Тангента 65, стр. 19, Наградни задаци, задатак М966)

3. Уколико обема странама дате једнакости додамо 1, добијамо $XY + X + Y + 1 = 60$, па је

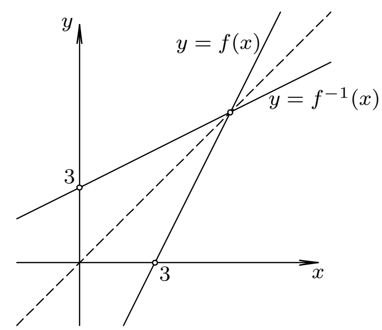
$$XY + X + Y + 1 = X(Y + 1) + Y + 1 = (X + 1)(Y + 1) = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Број различитих начина да одаберемо $X+1$ (чиме одређујемо и $Y+1$), је једнак броју различитих делиоца броја $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, што је $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$. Од ових 12 решења у пола је $X > Y$ (не могу бити једнаки, јер 60 није тачан квадрат), па нам остаје 6 решења. У једном од њих је $X + 1 = 1$, па и оно не задовољава услове задатка, тј. постоји 5 различитих решења. Она су: $(X, Y) \in \{(1, 29), (2, 19), (3, 14), (4, 11), (5, 10)\}$.

4. Уведимо смену $t = 3x - 1$, за $x \in \mathbb{R}$. Тада је $x = \dfrac{t+1}{3}$, па је

$$f(t) = 6x - 8 = 6 \cdot \frac{t+1}{3} - 8 = 2t - 6.$$

Дакле, $f(5) = 4$ и, уопште, $f(x) = 2x - 6$, за све $x \in \mathbb{R}$. Даље, ако је $f(x_1) = f(x_2)$, то је према претходном $2x_1 - 8 = 2x_2 - 8$, па је $x_1 = x_2$, и самим тим, функција f је 1-1. Графици функција $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ дати су на слици десно



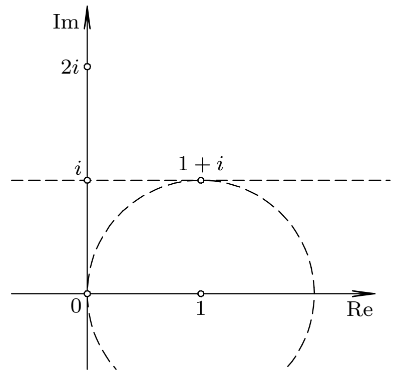
ОП 2012, 1Б – 4

(график функције $y = f^{-1}(x)$ добијамо тако што график функције $y = f(x)$ пресликамо симетрично у односу на праву $y = x$). (Тангента 65, стр. 34, Писмени задаци, задатак 4)

5. Ако су Пера и Жика у истој колони, онда је Пера виши од Жике, јер је Пера највиши у тој колони.
Ако су у истој врсти, онда је Жика нижи од Пере, јер је Жика најнижи у тој врсти.
Ако су Пера и Жика у различитим врстама и колонама, онда постоји трећа особа (назовимо је Лаза), која је у истој колони са Пером и у истој врсти са Жиком. Како је Пера виши од Лазе, јер су у истој колони (а Пера је ту највиши), и како је Лаза виши од Жике, јер су у истој врсти (а Жика је ту најнижи), добијамо да је и у овом случају Пера виши од Жике.
Дакле, можемо тврдити да је Пера виши од Жике.

Други разред, Б категорија

1. Посматрајмо комплексне бројеве у комплексној равни. Тада је $|z|$ растојање броја z од тачке 0, а $|z-2i|$ растојање броја z од тачке $2i$, па једначину $|z| = |z - 2i|$ задовољавају комплексни бројеви који се налазе на симетрали дужи са крајевима у тачкама 0 и $2i$ (ово је права која пролази кроз тачку i и паралелна је реалној оси). Једначину $|z-1| = 1$ задовољавају комплексни бројеви који се налазе на кругу полупречника 1 са центром у тачки 1. Како права која представља решење прве једначине и круг који представља решење друге једначине имају тачно једну заједничку тачку $z = 1+i$, она је и једино решење датог система једначина. (Тангента 65, стр. 35, Писмени задаци, зад. 5)



ОП 2012, 2Б – 1

Друго решење. Нека $z = a + bi$, где је $a, b \in \mathbb{R}$, задовољава дати систем једначина. Тада, из прве једначине закључујемо $|a + bi| = |a + (b - 2)i|$, односно $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (b-2)^2}$, па је после квадрирања $b = 1$. Сада, заменом у другу једначину добијамо $1 = |(a-1)+i|$, односно $1 = \sqrt{(a-1)^2 + 1}$, тј. $a = 1$. Дакле, једино решење датог система једначина је $z = 1 + i$.

2. Нека је x број кенгура који су обојени са две боје, а y број кенгура који су обојени са само једном бојом. Тада је $x + y$ број кенгура који нису обојени са све три боје, па је $x+y = 36-5 = 31$. Такође, уколико посматрамо све кенгуре који су обојени са највише две боје, у њиховом бојењу је, по услову задатка, употребљено $(25-5)+(28-5)+(20-5)$ боја. Овај број је, са друге стране, једнак $2x + y$, па је $2x + y = 58$. Решавањем овог система једначина добијамо да је $x = 27$, а $y = 4$, па су на листу нацртана четири једнобојна кенгура. (Тангента 59, стр. 24, Наградни задаци, задатак М857)

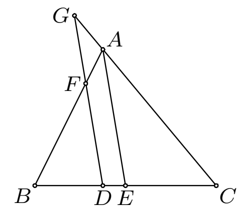
3. Решења квадратне једначине $3x^2 + 4x + 1 = 0$ су $x = -\frac{1}{3}$ и $x = -1$. Зато је $f(x) = 3(x + \frac{1}{3})(x+1)$. Сада је

$$f(f(x)) \leqslant 0 \Leftrightarrow\ 3 \cdot \left(f(x) + \frac{1}{3}\right) \cdot (f(x)+1) \leqslant 0 \Leftrightarrow\ -1 \leqslant f(x) \leqslant -\frac{1}{3}.$$

Решења квадратне неједначине $-1 \leqslant f(x)$ су сви реални бројеви (дискриминанта квадратне функције $3x^2 + 4x + 2$ једнака је -8), док је једино решење квадратне неједначине $f(x) \leqslant -\frac{1}{3}$ број $x = -\frac{2}{3}$ (дискриминанта квадратне функције $3x^2 + 4x + \frac{4}{3}$ једнака је 0). Дакле, једино решење полазне неједначине је $x = -\frac{2}{3}$.

4. Како је $FD \parallel AE$, то је по Талесовој теореми $DF/EA = BD/BE$, а како је $AE \parallel GD$, то је $DG/AE = DC/EC$.

Како је $BE = EC$ сабирањем претходне две једнакости добијамо
$$\frac{DF+DG}{AE} = \frac{BD+DC}{BE} = \frac{BC}{BE} = 2,$$
па је $DF + DG$ једнако $2AE$ и самим тим не зависи од положаја праве p.



ОП 2012, 2Б – 4

5. Како је по формули за куб бинома $(1+\sqrt{2})^3 = 1 + 3\sqrt{2} + 6 + 2\sqrt{2} = 7+5\sqrt{2}$, а по формули за квадрат бинома $(1+\sqrt{3})^2 = 1+2\sqrt{3}+3 = 4+2\sqrt{3}$ и $1+\sqrt{3} > 0$, то је
$$\frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\cdot(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{(1+\sqrt{3})-\sqrt{3}} = 1,$$
чиме је тврђење задатка доказано. (Тангента 61, стр. 32, Писмени задаци, задатак 4)

Трећи разред, Б категорија

1. Нека је c дужина треће странице основе. Тада је на основу косинусне теореме
$$c^2 = 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos 120^\circ = 49,$$
па је $c = 7$. Самим тим, бочна страна највеће површине има једну страницу дужине 7, па је $35 = 7\cdot H$, тј. $H = 5$, где је H висина дате призме. Површина омотача призме једнака је $3\cdot 5 + 5\cdot 5 + 7\cdot 5 = 75$. (Тангента 57, стр. 29, Писмени задаци, задатак 1)

2. Уколико трећу једначину додамо другој, а затим трећу једначину помножену са -3 додамо првој добијамо еквивалентан систем једначина
$$\begin{array}{rcrcrcl} & & (a-12)y & - & 10z & = & a-10\\ & & 5y & + & (a+3)z & = & 4\\ x & + & 4y & + & 3z & = & 3. \end{array}$$
Уколико другу једначину новодобијеног система једначина помножимо са $-\dfrac{a-12}{5}$ и додамо првој, добијамо једначину
$$\frac{-a^2+9a-14}{5}\cdot z = \frac{a-2}{5}. \qquad (\dagger)$$
Како је $-a^2 + 9a - 14 = -(a-2)(a-7)$, размотрићемо следећа три случаја:

Први случај: $a \neq 2$, $a \neq 7$. Тада је из (†) $z = -\dfrac{1}{a-7}$, па је $y = \dfrac{a-5}{a-7}$ и $x = \dfrac{-a+2}{a-7}$.

Други случај: $a = 7$. Једначина (†) нема решења, па ни полазни систем нема решења.

Трећи случај: $a = 2$. Тада свако $z = t$ задовољава (†), па је $y = \dfrac{4}{5} - t$ и $x = t - \dfrac{1}{5}$. Дакле, у овом случају решења система су $\left(t - \dfrac{1}{5}, \dfrac{4}{5} - t, t\right)$, за све $t \in \mathbb{R}$.

(Тангента 62, стр. 37, Писмени задаци, задатак 4)

3. Услов дефинисаности датог израза је $-1 \leqslant 3x \leqslant 1$. Нека је $\arcsin 3x = a$, а $\operatorname{arctg} 5x = b$. Како $3x = \pm 1$ нису решења дате једначине, можемо претпоставити да је $\sin a \neq \pm 1$. Даље је $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$, па је

$$5x = \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} = \pm \frac{3x}{\sqrt{1-9x^2}}. \qquad (†)$$

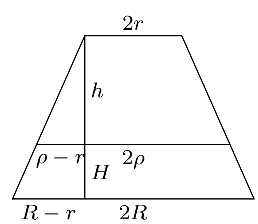
Једно решење једначине (†) је $x = 0$ и ово је решење полазне једначине. Ако је $x \neq 0$, тада из (†) добијамо $\sqrt{1-9x^2} = \pm \dfrac{3}{5}$, па знак мора бити $+$. Квадрирањем и сређивањем, добијамо да су преостала решење једначине (†) $x = \pm \dfrac{4}{15}$. Како за $x = \dfrac{4}{15}$ важи $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, а за $x = -\dfrac{4}{15}$ важи $a, b \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, то су $x = \pm \dfrac{4}{15}$ решења и полазне једначине.

Сва решења дате једначине су $x = 0$, $x = \dfrac{4}{15}$ и $x = -\dfrac{4}{15}$.

4. Означимо са H и h висине доњег и горњег дела зарубљене купе. Изједначавајући запремине ових делова добијамо $\dfrac{\pi H}{3} \cdot (R^2 + R\rho + \rho^2) = \dfrac{\pi h}{3} \cdot (\rho^2 + \rho r + r^2)$, одакле је $\dfrac{H}{h} = \dfrac{\rho^2 + \rho r + r^2}{R^2 + R\rho + \rho^2}$. (†)

Из Талесове теореме (погледати слику десно – на њој је дат попречни пресек дате зарубљене купе) имамо $\dfrac{h}{H+h} = \dfrac{\rho - r}{R - r}$, односно, након сређивања

$$\frac{H}{h} = \frac{R-\rho}{\rho - r}. \qquad (‡)$$



ОП 2012, 3Б – 4

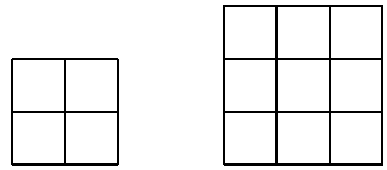
Изједначавањем десних страна (†) и (‡) добијамо $R^3 - \rho^3 = \rho^3 - r^3$, па је $2\rho^3 = R^3 + r^3$, тј.

$$\rho = \sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}}.$$

(Тангента 65, Наградни задаци, задатак M972)

5. Докажимо да је одговор у оба дела задатка ДА.

Квадрат се може поделити на 4 и на 9 квадрата као на слици десно. Поделом произвољног квадрата на неки од претходних начина, број квадрата у подели се повећава или за 3 (првим начином) или за 8 (другим начином).



ОП 2012, 3Б – 5

Како је $2011 = 1 + 3 \cdot 670$, понављањем поделе квадрата првим начином 670 пута добиће се подела у којој учествује 2011 квадрата. Како је $2012 = 1 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 665$, са две поделе другим начином и 665 подела првим начином добиће се подела квадрата на 2012 квадрата.

Четврти разред, Б категорија

1. Нека је $a = a_1$ почетни члан, а $d = a_2 - a_1$ разлика овог аритметичког низа. Тада је $a_m = a + (m-1)d$, $a_n = a + (n-1)d$, $a_p = a + (p-1)d$, па за $L = a_m(n-p) + a_n(p-m) + a_p(m-n)$ важи

$$\begin{aligned} L = &\ (a+(m-1)d)(n-p) + (a+(n-1)d)(p-m) + (a+(p-1)d)(m-n) \\ = &\ a(n-p) + (mn - mp - n + p) \cdot d + a(p-m) + (np - nm - p + m) \cdot d \\ &+ a(m-n) + (pm - pn - m + n) \cdot d = 0, \end{aligned}$$

што је и требало доказати. (Тангента 64, стр. 33, Писмени задаци, задатак 1)

2. Како је

$$\begin{aligned} p(\lambda i) &= (\lambda i)^3 + (3-4i) \cdot (\lambda i)^2 - (3+8i) \cdot (\lambda i) - 5 \\ &= -3\lambda^2 + 8\lambda - 5 + (-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda) i, \end{aligned}$$

то из $p(\lambda i) = 0$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ закључујемо да је $-3\lambda^2 + 8\lambda - 5 = 0$ и $-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda = 0$. Решења прве једначине су 1 и $\frac{5}{3}$, а друге 0, 1 и 3, па је $\lambda = 1$, и $z_1 = i$ корен полинома p. Нека су z_2 и z_3 преостала два корена полинома p. Тада је по Виетовим формулама $i + z_2 + z_3 = 4i - 3$ и $iz_2z_3 = 5$, па је $z_2 + z_3 = 3i - 3$ и $z_2z_3 = -5i$. Самим тим, z_2 и z_3 су решења квадратне једначине $x^2 + (3-3i)x - 5i = 0$. Дискриминанта ове квадратне једначине је $D = 2i = (1+i)^2$, па је $z_{2,3} = \dfrac{3i - 3 \pm (1+i)}{2}$. Корени датог полинома су i, $-1+2i$ и $-2+i$. (Тангента 64, стр. 33, Писмени задаци, задатак 5)

3. Ако је a реалан број за који важи $|a| \leqslant 1$, а $n \geqslant 2$, онда је $|a|^n \leqslant |a|^2$. Одавде, за $n \geqslant 2$, на основу неједнакости троугла (за све $a, b \in \mathbb{R}$ важи $|a-b| \leqslant |a| + |b|$), имамо

$$|f_n(x)| = |\sin^n x - \cos^n x| \leqslant |\sin^n x| + |\cos^n x| \leqslant \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

тј. $-1 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$. Како је $f_n(0) = -1$ и $f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, то је за $n \geqslant 2$ максимум једнак 1, а минимум једнак -1.
За $n = 1$ имамо

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sin x - \cos x = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) \\ &= \sqrt{2} \cdot \left(\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cdot \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Зато је $-\sqrt{2} \leqslant f_1(x) \leqslant \sqrt{2}$. Уз то је $f_1\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$, а $f_1\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, па је за $n = 1$ максимум једнак $\sqrt{2}$, а минимум једнак $-\sqrt{2}$.

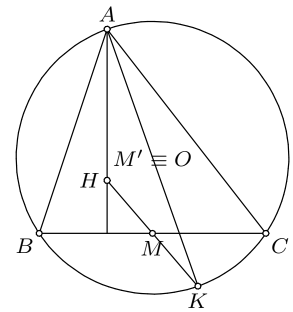
4. Једначина симетрале првог квадранта је $y = x$, симетрале другог квадранта је $y = -x$, а тангенте на дату хиперболу у тачки $M(3, 2)$ је $3x - 2y = 5$. Темена датог троугла су пресеци ових правих. Пресек прве две праве је тачка $A(0, 0)$. Пресек $B(x, y)$ прве и треће праве задовољава $y = x$ и $3x - 2y = 5$, па је $x = y = 5$, односно $B(5, 5)$. Пресек $C(x, y)$ друге и треће праве задовољава $y = -x$ и $3x - 2y = 5$, па је $x = 1$ и $y = -1$, односно $C(1, -1)$. Приметимо да је ABC правоугли троугао, јер је $\sphericalangle CAB = 90^\circ$, па је његова површина једнака $\frac{1}{2} \cdot BA \cdot CA = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 5$. (Тангента 63, стр. 33, Писмени задаци, задатак 3)

5. Како је сума свих цифара 45, тј. непарна, то и разлика збира бројева на непарним (број A) и збира бројева на парним местима (број B) мора бити непарна. Како је $A - B$ дељиво са 11, то је $A - B \in \{\pm 11, \pm 33\}$. Међутим, како је $A, B \geqslant 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ и $A, B \leqslant 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 35$, то је, према претходном, $A - B \in \{\pm 11\}$. Дакле, имамо $A + B = 45$ и $A - B = 11$, што даје $A = \frac{45+11}{2} = 28$ и $B = \frac{45-11}{2} = 17$, или $A + B = 45$ и $A - B = -11$, што даје $A = 17$ и $B = 28$.
Одредимо највећи број са траженим својством. За њега важи $A = 28$, $B = 17$ и при томе цифре највеће тежине морају бити што је веће могуће. Приметимо да овај број не може почети са 987654, јер је тада $17 = B \geqslant 8 + 6 + 4 = 18$, контрадикција. Уколико дати број почиње са 98765, тада преостале три цифре на парним местима дају збир 3, па како су различите морају бити $2, 1$ и 0. Преостале цифре на парним местима су 4 и 3, па је највећи број једнак 9876524130.
Одредимо најмањи број са траженим својством. За њега важи $A = 17$, $B = 28$ и при томе цифре највеће тежине морају бити што је мање могуће. Дакле, он почиње са 102. Следећа цифра је 4, јер је $0 + 3 + 9 + 8 + 7 < B = 28$, па су преостале цифре на парним местима $7, 8$ и 9, и самим тим преостале цифре на непарним местима $3, 5$ и 6. Коначно, најмањи број са траженим својством је 1024375869.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 11.02.2012.

Први разред, А категорија

1. Нека је M средиште странице BC, а M' пресек симетрале странице BC и дужи AK. Како је M средиште дужи HK и $MM' \parallel AH$, то је MM' средња линија троугла AHK, па је $2 \cdot \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{HA}$. Ако је O центар описане кружнице троугла ABC, тада је $\overrightarrow{HA} = 2 \cdot \overrightarrow{MO}$, па је према претходном $O \equiv M'$ и самим тим AK пречник описане кружнице троугла ABC. (Тангента 66, стр. 40, Наградни задаци, M989)



ОК 2012, 1А – 1

2. Претпоставимо да овакво $m \in \mathbb{Z}$ постоји. Како је $q(m) = (m-1) \cdot m \cdot (m+1) + 3$, а $(m-1) \cdot m \cdot (m+1)$ дељиво са 3 као производ три узастопна броја, то $3 \mid q(m)$, па $3 \mid p(m)$. Самим тим,

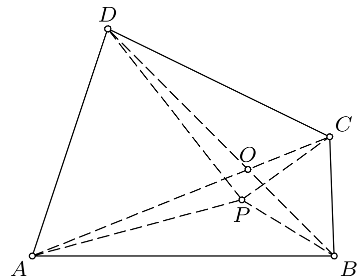
$$3 \mid p(m) - q(m) = m^2 + 2m - 1 = 3m + (m^2 - m - 1),$$

тј. $3 \mid m^2 - m - 1$. Како је $m^2 \equiv 1 \pmod 3$ када m није дељиво са 3, а $m^2 - m - 1 \equiv 2 \pmod 3$ када је m дељиво са 3, то $m^2 - m - 1$ није дељиво са 3, контрадикција.

3. Доказаћемо да постоји бесконачно много бројева n таквих да је x_n дељив са 3, а да није дељив са 9, одакле ће следити тврђење задатка. Како сваки природан број даје исти остатак по модулу 9 као и збир његових цифара, то је

$$\begin{aligned} x_n &\equiv S(1^2) + S(2^2) + \ldots + S(n^2) \\ &\equiv 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \pmod 9, \end{aligned}$$

где смо са $S(m)$ означили збир цифара природног броја m. Специјално $x_n \equiv \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \pmod 3$. Одаберимо број n у облику $n = 9k,\ k \in \mathbb{N}$, где број k није дељив са 3. Тада је $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{3k(9k+1)(18k+1)}{2}$ дељив са 3, а није дељив са 9, а тиме $3 \mid x_n$ и $9 \nmid x_n$. Дакле, за сваки природан број $n = 9k$, где је k природан број који није дељив са 3, број x_n није потпун степен. Како природних бројева k са наведеном особином има бесконачно много, то је доказ завршен.



ОК 2012, 1А – 4

4. Нека је O пресек дијагонала четвороугла $ABCD$. Без умањења општости претпоставимо да се тачка P налази у $\triangle ABC$. Како је $\sphericalangle APD = \sphericalangle BPC$, то је $180^\circ > \sphericalangle APC = \sphericalangle APD + \sphericalangle CPD = \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPD$, па је P у $\triangle AOB$ и важи $\sphericalangle APC = \sphericalangle BPD$. Како је P на симетрали дужи AD то је $AP = DP$, а како је P на симетрали дужи BC то је $BP = CP$, па су троуглови APC и DPB подударни и важи $AC = BD$. Сада, како је $CQ = DQ$ (јер је Q на симетрали дужи CD) и $AQ = BQ$ (јер је Q на симетрали дужи AB), то су и троуглови AQC и BQD подударни. Претпоставимо да се тачка Q налази у $\triangle AOB$ или $\triangle COD$. Тада, како је $\sphericalangle AQC = \sphericalangle BQD$, то је $\sphericalangle AQD = \sphericalangle BQC$, па како је $AQ = BQ$ и $DQ = CQ$, то је $\triangle AQD \cong \triangle BQC$. Међутим, тада је $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DAQ + \sphericalangle QAB = \sphericalangle CBQ + \sphericalangle QBA = \sphericalangle ABC$, и аналогно $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BCD$, па је четвороугао $ABCD$ трапез, контрадикција. Дакле, без умањења општости можемо претпоставити да је тачка Q у $\triangle AOD$, па је $\sphericalangle AQB = \sphericalangle AQC - \sphericalangle BQC = \sphericalangle BQD - \sphericalangle BQC = \sphericalangle CQD$, што је и требало доказати.

5. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ бројеви записани на картицама и нека је p тражени број питања. За сваки од бројева a_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, морамо поставити барем једно питање везано за производ три броја међу којима је један a_i, па је $p \geqslant \frac{n}{3}$. Размотримо следећа три случаја:

Први случај. $n = 3k$, за неко $k \in \mathbb{N}$. Тада је $p \geqslant k$. Постављањем питања везана за производе $a_{3l+1}a_{3l+2}a_{3l+3}$, за $0 \leqslant l \leqslant k-1$, добијамо да је $p = k$ (производ бројева на картицама једнак је производу бројева које добијамо као одговоре на питања).

Други случај. $n = 3k+1$, за неко $k \in \mathbb{N}$. Тада је $p \geqslant k+1$. Постављањем питања везана за производе $a_1a_2a_3, a_1a_4a_5, a_1a_6a_7$ и $a_{3l-1}a_{3l}a_{3l+1}$, за $3 \leqslant l \leqslant k$, добијамо да је $p = k+1$, јер је производ бројева које добијамо као одговоре на питања једнак производу бројева на картицама, тј.

$$a_1a_2a_3 \cdot a_1a_4a_5 \cdot a_1a_6a_7 \cdot \prod_{l=3}^{k} a_{3l-1}a_{3l}a_{3l+1} = a_1^2 \cdot \prod_{l=1}^{n} a_l = \prod_{l=1}^{n} a_l.$$

Трећи случај. $n = 3k+2$, за неко $k \in \mathbb{N}$. Тада је $p \geqslant k+1$. Постављањем питања везана за производе $a_1a_2a_3, a_1a_2a_4, a_1a_2a_5$ и $a_{3l}a_{3l+1}a_{3l+2}$, за $2 \leqslant l \leqslant k$, добијамо да је $p \leqslant k+2$ (слично као у прва два случаја). Докажимо да се са $k+1$ питања не може добити жељено. У супротном, у тројкама за које су постављена питања учествује укупно $n+1$ бројева, па како сваки број мора да учествује у постављеним питањима, за један број су постављена тачно два питања. Ако је тај број x, а y и z неки од бројева који учествују у различитим питањима везаним за x, тада исте одговоре добијамо и за бројеве $-x$, $-y$, $-z$, а овом заменом се производ свих бројева мења, контрадикција.

Други разред, А категорија

1. Ако је $x = 0$ неједнакост важи за свако a. Ако је $x \neq 0$, дељењем са x^2 и увођењем смене $t = x + \frac{1}{x}$ неједнакост постаје еквивалентна са

$$f(t) = t^2 + at + a + 1 > 0,$$

за $t \notin (-2, 2)$ (јер квадратна једначина $x^2 - tx + 1 = 0$ има решење у скупу реалних бројева ако и само ако $t \notin (-2, 2)$). Дискриминанта тринома $f(t)$ је $D = a^2 - 4a - 4$. Довољно је размотрити следећа два случаја.
Први случај. Нека је $D < 0$, тј. $a \in (2 - 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2})$. Тада неједнакост $f(t) > 0$ важи за свако реално t, па и за $t \notin (-2, 2)$.
Други случај. Нека је $D \geqslant 0$, тј. $a \in (-\infty, 2 - 2\sqrt{2}] \cup [2 + 2\sqrt{2}, +\infty)$. Тада неједнакост $f(t) > 0$ важи за све $t \notin (-2, 2)$ акко је $f(2) > 0$, $f(-2) > 0$ и ако се теме квадратне функције $f(t)$ налази у $(-2, 2)$, тј. $-2 < -\frac{a}{2} < 2$. Ове неједнакости редом дају $a > -\frac{5}{3}$, $a < 5$, $4 > a > -4$, па је тражени скуп параметара у овом случају $(-\frac{5}{3}, 2 - 2\sqrt{2}]$.
Дакле, тражени скуп параметара је $a \in (-\frac{5}{3}, 2 + 2\sqrt{2})$.

2. Приметимо да за $|z| \leqslant 1$ важи $a > |-zi|$, па можемо претпоставити да је $a \neq -zi$. Тада важи следећи низ еквиваленција

$$\left|\frac{az - i}{a + zi}\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow |az - i| \leqslant |a + zi| \Leftrightarrow |az - i|^2 \leqslant |a + zi|^2.$$

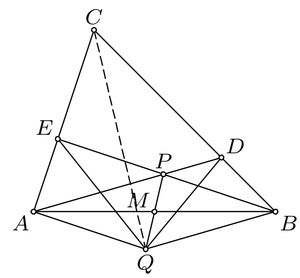
Како је $|az - i|^2 = (az - i)(a\overline{z} + i) = a^2|z|^2 - ia\overline{z} + iaz + 1$ и $|a + zi|^2 = (a + zi)(a - \overline{z}i) = a^2 + iaz - ia\overline{z} + |z|^2$, то је

$$\begin{aligned} |az - i|^2 \leqslant |a + zi|^2 \quad &\Leftrightarrow \quad a^2|z|^2 + 1 \leqslant a^2 + |z|^2 \\ &\Leftrightarrow \quad (a^2 - 1)(|z|^2 - 1) \leqslant 0 \Leftrightarrow |z| \leqslant 1, \end{aligned}$$

што је и требало доказати. (Тангента, стр. 33, Писмени задаци, задатак 2)

3. Потпун квадрат се може завршавати цифрама 1, 4, 5, 6, 9. Потпун квадрат се не може завршавати са 11, 55 или 99, јер ти бројеви дају остатак 3 при дељењу са 4, а ни са 66, јер је тај број дељив са 2, а није са 4. Дакле, довољно је доказати да се потпун квадрат не може завршавати са бар четири броја 4.
Претпоставимо да постоји потпун квадрат који се завршава са бар четири броја 4, тј. нека је $a^2 = 10000k + 4444$, за неке a, $k \in \mathbb{N}$. Број a је паран, па је $a = 2b$, за неко $b \in \mathbb{N}$, и самим тим $b^2 = 2500k + 1111$. Међутим, број $2500k + 1111$ даје остатак 3 при дељењу са 4, па не може бити потпун квадрат, контрадикција.

4. Означимо са $S(XYZ)$ површину троугла XYZ. Како је $AM = MB$ и $PM = MQ$, то се дијагонале четвороугла $APBQ$ полове, па је он паралелограм. Сада, како је $EP \parallel AQ$, то је $S(AEQ) = S(APQ)$, а како је $PD \parallel QB$, то је $S(QDB) = S(QPB)$, па како је $S(APQ) = S(QPB)$, то је $S(AEQ) = S(QDB)$. Како је $AE = BD$, то су висине троуглова AQE и BDQ које одговарају овим страницама једнаке, односно тачка Q је једнако удаљена од правих AE и BD, што је и требало доказати.



ОК 2012, 2А − 4

5. Ако се у једној врсти налази бар 10 различитих бројева, онда се у наредне две појављује највише 6 нових бројева. Разбијмо таблицу на 50 парова узастопних врста. У првом пару има највише 16 различитих бројева, а у сваком од следећих 49 има највише 6 нових бројева, што даје укупно највише $16 + 49 \cdot 6 = 310$ различитих бројева.
Пример таблице са 310 различитих бројева конструишемо на следећи начин. За $k = 1, 2, \ldots, 50$, унесимо у $(2k-1)$-ву врсту све природне бројеве од $6k-5$ до $6k+4$, а у $(2k)$-ту врсту све природне бројеве од $6k+1$ до $6k+10$. Ова таблица испуњава услове задатка, а у њој се налазе бројеви од 1 до 310.

Трећи разред, А категорија

1. Услов дефинисаности датог израза је $2x+1 \neq \frac{5}{2}$ и $\frac{x^2-3}{2} > 3$, односно $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$. Како је $2^x - 16 \geqslant 0$ акко је $x \in [4, +\infty)$, а $9^{2x+1} - 243 \geqslant 0$ акко је $x \in \left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$, то је (уз услов дефинисаности) дати израз не већи од 0 акко је $x \in (3, 4]$. (Тангента 64, стр. 37, Писмени задаци, задатак 15)

2. По дефиницији, детерминанта је збир $n!$ сабирака који представљају (до на знак) производ n елемената, при чему је из сваке врсте и сваке колоне одабран по тачно један елемент. Довољно је размотрити следеће случајеве.
Први случај. Нека је $n > 4$. Посматрајмо све колоне осим прве и последње. Из ових колона могуће је изабрати највише два ненула елемента, јер се једини ненула елементи ових колона налазе у првој и последњој врсти. Како је ових колона барем 3, то је сваки сабирак који учествује у развоју детерминанте једнак 0, па је и детерминанта једнака 0.
Други случај. За $n = 3$ детерминанта је једнака 16.
Трећи случај. За $n = 4$ детерминанта је једнака 25.

3. Допунимо низ са $a_{-1} = 0$, тако да рекурентна релација остаје на снази. Показаћемо да је низ $\{a_n\}$ периодичан по модулу 2011. Како постоји само коначно много парова остатака по модулу 2011, то постоје природни бројеви m, n $(m > n)$ такви да је $m \equiv n \pmod{2011}$ и $a_m \equiv a_n \pmod{2011}$. Како је 2011 прост број који даје остатак 3 по модулу 4, то $k^2 + 1$ није дељиво са 2011 ни за једно $k \in \mathbb{Z}$, па из

$$((m-1)^2+1) \cdot a_{m-1} - (m-1) \equiv ((n-1)^2+1) \cdot a_{n-1} - (n-1) \pmod{2011}$$

следи $a_{m-1} \equiv a_{n-1} \pmod{2011}$. Настављајући овај поступак, добијамо $a_{m-n-1} \equiv a_{-1} = 0 \pmod{2011}$, дакле $2011 \mid a_{m-n-1}$.

4. Уведимо комплексну раван, тако да су a, b, c, d, e, f и z, редом, комплексни бројеви који одговарају тачкама A, B, C, D, E, F и M. Дати услов еквивалентан је са $|z-a|^2+|z-c|^2+|z-e|^2 = |z-b|^2+|z-d|^2+|z-f|^2$, односно са

$$|a|^2+|c|^2+|e|^2-z(\overline{a}+\overline{c}+\overline{e})-\overline{z}(a+c+e) = |b|^2+|d|^2+|f|^2-z(\overline{b}+\overline{d}+\overline{f})-\overline{z}(b+d+f).$$

Из последње једнакости, ако је $\alpha = b+d+f-(a+c+e)$, имамо да за свако $z \in \mathbb{C}$ важи

$$z\overline{\alpha} + \overline{z}\alpha = |b|^2 + |d|^2 + |f|^2 - (|a|^2 + |c|^2 + |e|^2).$$

Одавде, најпре одабиром $z = 0$, добијамо $|b|^2 + |d|^2 + |f|^2 - (|a|^2 + |c|^2 + |e|^2) = 0$, а потом одабиром $z = 1$ и $z = i$, редом добијамо $\overline{\alpha} + \alpha = 0$ и $\overline{\alpha} - \alpha = 0$, односно $\alpha = 0$. Овим смо доказали да је $a + c + e = b + d + f$. Из ове једнакости, имајући на уму да су комплексни бројеви који одговарају тежиштима наведених троуглова $\dfrac{a+c+e}{3}$ и $\dfrac{b+d+f}{3}$, непосредно следи тврђење задатка.

5. Докажимо индукцијом да је тражени број подскупова, у ознаци $f(n)$, једнак $2n-1$. За $n = 1$ очигледно је $f(n) = 1$. Претпоставимо да за све $k < n$ важи $f(k) = 2k - 1$. Нека је F максимална фамилија непразних подскупова скупа X од n елемената тако да су свака два или дисјунктна или је један од њих подскуп другог. Један од њих је сам X, јер је у супротном $F \cup \{X\}$ већа фамилија са истим својствима. Нека је $Y \in F$ такав да он није подскуп ниједног елемента из F осим X, и нека Y има k елемената. Тада је сваки елемент фамилије F или подскуп скупа Y (таквих по индуктивној хипотези може бити највише $f(k) = 2k - 1$), или дисјунктан са Y, тј. подскуп скупа $X \setminus Y$ (таквих по индуктивној хипотези може бити највише $f(n-k) = 2n - 2k - 1$) или сам X. Дакле, у фамилији F може бити највише $(2k-1) + (2n-2k-1) + 1 = 2n - 1$ подскупова. Јасно је да је тај број могуће достићи: по индуктивној хипотези можемо изабрати, за неки непразан $Y \subseteq X$, $2k-1$ подскупова скупа Y, $2n-2k-1$ подскупова скупа $X \setminus Y$ и сам скуп X.

Четврти разред, А категорија

1. Нека је $C(c^2+1,c)$. Коришћењем формуле за површину полигона добијамо да је површина троугла ABC једнака

$$\left|\frac{(4+3)(2-1)}{2}+\frac{(c+4)((c^2+1)-2)}{2}+\frac{(3+c)(1-(c^2+1))}{2}\right|=\left|\frac{c^2-c+3}{2}\right|.$$

Минимална вредност израза c^2-c+3 достиже се за $c=\frac{1}{2}$ и једнака је $\frac{11}{4}>0$, па је минимална вредност површине једнака $\frac{11}{8}$ и достиже се за тачку $C\left(\frac{5}{4},\frac{1}{2}\right)$. (Тангента 63, стр. 33, Тангента, задатак 4)

2. Функција $g(x)=f(x)\cdot\operatorname{ctg}x$ је диференцијабилна на $(1,2)$, непрекидна на $[\,1,2\,]$ и важи $g(1)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, па по Роловој теореми постоји $c\in(1,2)$ тако да је

$$0=g'(c)=\frac{1}{2\sin^2 c}\cdot\left(f'(c)\sin 2c-2f(c)\right).$$

Према томе, за произвољно $f(x)$ (које задовољава услове задатка), једначина има бар једно решење.
Ако је $f(x)=x-1$, једначина гласи $2(x-1)=\sin 2x$. Ако је $h:[\,1,2\,]\to\mathbb{R}$ дефинисана са $h(x)=2(x-1)-\sin 2x$, број решења једначине једнак је броју нула функције $h(x)$. Ова функција је диференцијабилна на $[\,1,2\,]$ и важи $h'(x)=2(1-\cos 2x)>0$, па $h(x)$ строго расте. Следи да $h(x)$ може имати највише једну нулу, а по претходном следи да има тачно једну нулу.
Дакле, најмањи могући број решења једначине је један.

3. а) Уколико су p и q непарни бројеви важи

$$p^2+2012pq+q^2\equiv 1+0+1=2 \pmod 4,$$

па $p^2+2012pq+q^2$ није потпун квадрат. Дакле, барем један од p и q је паран, па је једнак 2. Нека је (без умањења општости) $p=2$. Уколико је q непаран тада је

$$p^2+2012pq+q^2\equiv 4+0+1=5 \pmod 8,$$

па $p^2+2012pq+q^2$ опет није потпун квадрат. Уколико је $p=q=2$, тада је $p^2+2012pq+q^2=4\cdot 2014$, што није потпун квадрат.
б) Посматрајмо једначину

$$m^2+2012mn+n^2-t^2=0.$$

Ова једначина има решења у скупу природних бројева ако и само ако је $(2012^2-4)n^2+4t^2$ потпун квадрат, тј. ако је

$$1005\cdot 1007\cdot n^2=s^2-t^2,$$

за неко $s \in \mathbb{N}$. Нека су зато s и t такви да је $s-t = 1005\cdot 1007$ и $s+t = n^2$. Тада је

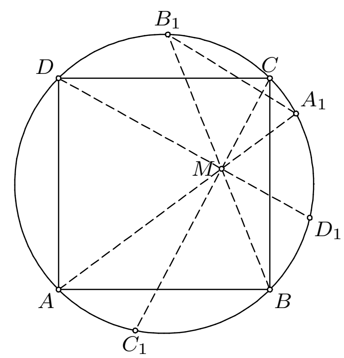
$$m = \frac{(n-1005)(n-1007)}{2}.$$

Уколико је још n непаран, већи од 1007 и узајамно прост са 1005 и 1007, тада је НЗД$(m,n) = 1$, тј. (m,n) је пар са траженим својством. Оваквих бројева n има бесконачно много, чиме је доказ у потпуности завршен.

4. Како је $\sphericalangle BAA_1 = \sphericalangle BB_1A_1$ (као углови над тетивом BA_1) и $\sphericalangle AMB = \sphericalangle B_1MA_1$, то је $\triangle ABM \sim \triangle B_1A_1M$. Аналогно добијамо да је $\triangle BCM \sim \triangle C_1B_1M$, $\triangle CDM \sim \triangle D_1C_1M$ и $\triangle DAM \sim \triangle A_1D_1M$, па је

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BM}{A_1M}, \qquad \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BM}{C_1M},$$

$$\frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DM}{C_1M}, \qquad \frac{DA}{D_1A_1} = \frac{DM}{A_1M}.$$



ОК 2012, 4А – 4

Сада је

$$\frac{AB}{A_1B_1}\cdot\frac{CD}{C_1D_1} = \frac{BM\cdot DM}{A_1M\cdot C_1M} = \frac{BC}{B_1C_1}\cdot\frac{DA}{D_1A_1},$$

па како је $AB = BC = CD = DA$, то је заиста $A_1B_1\cdot C_1D_1 = A_1D_1\cdot B_1C_1$.

5. Доказаћемо да је $r(m) = m^2 - m - 1$.
Нека је скуп $\{1, 2, \dots, m^2 - m - 2\}$ разбијен на 2 подскупа A и B:

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, \dots, m-2, (m-1)^2, (m-1)^2+1, \dots, m^2-m-2\} \\ B &= \{m-1, m, \dots, (m-1)^2 - 1\}. \end{aligned}$$

Покажимо да је сваки од ова 2 скупа, A и B, *слободан-од-m-сума*, тј. да једначина

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} = x_m$$

нема решења ни у A ни у B.
Ако су бројеви $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$ из $\{1, 2, \dots, m-2\}$ онда важи

$$m-1 \leqslant x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} \leqslant (m-1)\cdot(m-2) < m\cdot(m-2) = (m-1)^2 - 1,$$

те је $x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} \in B$.
Ако је међу бројевима $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$ бар један из $\{(m-1)^2, (m-1)^2 + 1, \dots, m^2-m-2\}$, тада је најмања могућа вредност суме на левој страни једначине једнака

$$\underbrace{1+1+\ldots+1}_{m-2} + (m-1)^2 = m^2-m-1 \quad\Rightarrow\quad x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} \notin A.$$

Овим смо показали да је скуп A слободан-од-m-сума.
Ако су бројеви $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ из $B = \{m-1, m, \ldots, (m-1)^2 - 1\}$ онда је најмања могућа вредност суме на левој страни једначине једнака

$$\underbrace{(m-1)+(m-1)+\ldots+(m-1)}_{m-1} = (m-1)^2 \quad \Rightarrow \quad x_1+x_2+\ldots+x_{m-1} \notin B.$$

Овим смо показали да је и скуп B слободан-од-m-сума, стога следи да је $r(m) \geqslant m^2 - m - 1$.
Покажимо да важи и супротна неједнакост. Другим речима свако разбијање скупа $\{1, 2, \ldots, m^2 - m - 1\}$ на 2 подскупа A и B, садржи бар један подскуп који није слободан-од-m-сума.
Претпоставимо да ово тврђење није тачно. Без умањења општости можемо претпоставити да је $1 \in A$. То повлачи да $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{m-1} = m-1 \notin A$, тј. $m-1 \in B$. Даље имамо $\underbrace{(m-1)+(m-1)+\ldots+(m-1)}_{m-1} = (m-1)^2 \notin B$, тј. $(m-1)^2 \in A$. Сада имамо 2 могућности за m, да је у скупу A или у скупу B:

1° Ако је $m \in A$ онда имамо $\underbrace{m+m+\ldots+m}_{m-2}+1 = m^2-2m+1 = (m-1)^2$, па скуп A није слободан-од-m-сума.

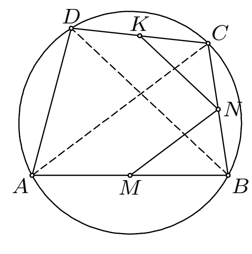
2° Ако је $m \in B$ онда због $\underbrace{m+m+\ldots+m}_{m-2}+m-1 = m^2-m-1$ следи да $m^2-m-1 \notin B$, тј. $m^2-m-1 \in A$. Даље имамо $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{m-2}+(m-1)^2 = m^2-m-1$, па скуп A није слободан-од-m-сума.

Тиме смо добили контрадикцију са полазном претпоставком, чиме смо показали неједнакост $r(m) \leqslant m^2 - m - 1$.
Из $r(m) \geqslant m^2 - m - 1$ и $r(m) \leqslant m^2 - m - 1$ следи да је $r(m) = m^2 - m - 1$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 11.02.2012.

Први разред, Б категорија

1. Како је M средиште странице AB, а N средиште странице BC троугла ABC, то је MN средња линија овог троугла, па је $MN \parallel AC$ и самим тим $\sphericalangle BMN = \sphericalangle BAC$. Слично, KN је средња линија троугла CDB, па је $KN \parallel DB$ и самим тим $\sphericalangle CKN = \sphericalangle CDB$. Четвороугао $ABCD$ је тетиван, па је $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CDB$ (као углови над тетивом BC), и самим тим и $\sphericalangle BMN = \sphericalangle CKN$. (Тангента 66, стр. 40, Писмени задаци, задатак 2)



ОК 2012, 1Б – 1

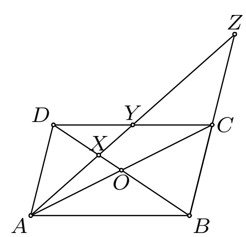
2. Нека је $Q(x) = x^3 - x^2 + x - 6$. Како је $Q(2) = 2^3 - 2^2 + 2 - 6 = 8 - 4 + 2 - 6 = 0$, то је $Q(x)$ дељиво са $x - 2$. Дељењем полинома $Q(x)$ са $x - 2$ добијамо $Q(x) = (x-2)(x^2+x+3)$. Даље, по услову задатка је

$$P(x) = Q(x)\cdot R(x) + x^2 - 7x + 3 = (x-2)\cdot(x^2+x+3)\cdot R(x) + x^2 - 7x + 3, \quad (\dagger)$$

за неки полином $R(x)$. Како је остатак при дељењу полинома $S(x) = x^2 - 7x + 3$ са $x - 2$ по Безуовом ставу једнак $S(2) = -7$, то је према ($\dagger$) и остатак при дељењу полинома $P(x)$ са $x - 2$ једнак -7.

3. Ако је $x = 3$, онда је $y^5 = 19$, па у овом случају једначина нема решења. Ако је $x \neq 3$, како је x прост број следи НЗД$(x, 3) = 1$, па x^2 даје остатак 1 при дељењу са 3 и самим тим је $2x^2 + 1 \equiv 0 \pmod 3$. Следи $3 \mid y^5$, па како је y прост број следи $y = 3$, одакле је $x = 11$. Дакле, једино решење је $(x, y) = (3, 11)$.

4. Како је $AZ : AY = 2 : 1$, то је Y средиште дужи AZ, а како је и $YC \parallel AB$, то је YC средња линија троугла ABZ, па је Y средиште дужи CD. Нека је O пресек дијагонала датог паралелограма. Тада је O средиште дужи AC, па је тачка X тежиште троугла ACD. Самим тим, $AX : XY = 2 : 1$, па како је дужина дужи AY једнака 3, то је дужина дужи AX једнака 2.



ОК 2012, 1Б – 4

5. Како два најлакша задатка носе 10 бодова, то тежи од њих носи барем 6 бодова (јер носе различит број бодова). Како два најтежа задатка носе 18 бодова, то лакши од њих носи највише 8 бодова (јер носе различит број бодова). Дакле, трећи по тежини задатак мора носити 7 бодова, па задаци укупно носе $10+18+7=35$ бодова. (Тангента 59, стр. 24, Наградни задаци, M856)

Други разред, Б категорија

1. Дати израз је дефинисан ако и само ако је $4+7x-2x^2 \geqslant 0$, односно ако и само ако је $x \in \left[-\frac{1}{2}, 4\right] = \mathscr{D}$. Даље, како је за $x \geqslant -\frac{1}{2}$ десна страна дате неједначине ненегативна, то је довољно одредити све $x \in \mathscr{D}$ који задовољавају неједначину

$$6x^2 - 3x - 3 > 0.$$

Решења последње квадратне неједначине су из скупа $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$, па је решење почетне неједначине скуп $(1, 4]$. (Тангента 63, стр. 32, Писмени задаци, задатак 2)

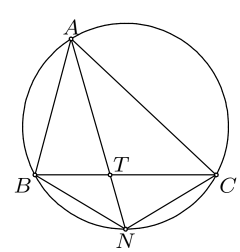
2. Нека је $f(x) = kx^2 + lx + m$, за неке k, l, $m \in \mathbb{R}$. Из услова задатка следи

$$\begin{aligned} k(a^2-b^2)+l(a-b) &= f(a)-f(b)=c(b-a)\\ k(a^2-c^2)+l(a-c) &= f(a)-f(c)=b(c-a). \end{aligned}$$

Како су a, b, c различити, следи $a-b \neq 0$, $a-c \neq 0$, па дељењем прве једначине са $a-b$, а друге са $a-c$, добијамо $k(a+b)+l+c=0=k(a+c)+l+b$, одакле је $k(b-c)=b-c$. Како је $b-c \neq 0$, следи $k=1$, па је $l=-(a+b+c)$ и $m=ab+bc+ca$. Следи $f(a+b+c) = (a+b+c)^2-(a+b+c)(a+b+c)+(ab+bc+ca)=ab+bc+ca$, што је и требало доказати.

3. Како $4 \mid 2012$, то за $n \geqslant 2$ имамо да $4^2 \mid 4^n \mid 2012^n$. Зато је број 2012^n, за $n>1$, дељив са 8. Број који се завршава са 2012, није дељив са 8 пошто $8 \nmid 012$ (природан број при дељењу са 8 даје исти остатак као и број састављен од његове последње три цифре). Из свега наведеног закључујемо да број n са наведеном особином не постоји.

4. Како је $\sphericalangle BAN = \sphericalangle NAC$, то је $BN=CN$ (као тетиве описане кружнице троугла ABC које одговарају овим угловима). Такође, $\sphericalangle BCN = \sphericalangle BAN$ (као углови над тетивом BN), па је $\sphericalangle TCN = \sphericalangle CAN$, а како је и $\sphericalangle TNC = \sphericalangle CNA$, то је $\triangle TCN \sim \triangle CAN$. Из ове сличности закључујемо да је $\dfrac{TN}{CN} = \dfrac{CN}{AN}$, па како је $BN=CN$,



ОК 2012, 2Б – 4

то је $BN^2 = AN \cdot TN$, што је и требало доказати. (Тангента 64, стр. 43, Писмени задаци, задатак 2)

5. Уколико је на маскенбалу била заступљена бела боја, тада црна није, па из другог услова следи да су биле заступљене плава и зелена, а потом из трећег и четвртог услова следи да нису биле заступљене ни жута, ни црвена. Дакле, црна, жута и црвена боја нису биле заступљене.
Уколико, с друге стране, бела боја није била заступљена, тада црна јесте, па из другог услова следи да је била заступљена или плава или зелена боја. За прву могућност из четвртог услова следи да ни црвена боја није била заступљена (па свеукупно: бела, зелена и црвена боја нису биле заступљене), а за другу могућност из трећег услова следи да ни жута боја није била заступљена (па свеукупно: бела, плава и жута боја нису биле заступљене).
Тиме смо показали да сигурно постоје бар три боје које нису биле заступљене на маскенбалу, па је број заступљених боја највише $n-1$. Према Дирихлеовом принципу следи да се могу наћи две особе на маскенбалу обучене у костиме исте боје.

Трећи разред, Б категорија

1. Коришћењем основних особина векторског, скаларног и мешовитог производа добијамо да за $L = \left[\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \times \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)\right] \cdot (\overrightarrow{c} + \overrightarrow{a})$ важи

$$\begin{aligned} L &= \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right) \cdot (\overrightarrow{c} + \overrightarrow{a}) = [a,b,c] + [b,c,a] = 2[a,b,c] \\ &= 2(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{c} \cdot (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}), \end{aligned}$$

што је и требало доказати. (Тангента 66, стр. 38, Писмени задаци, задатак 3)

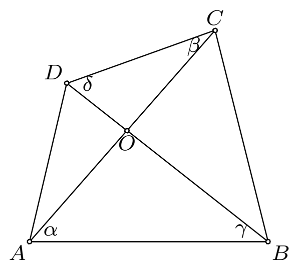
2. Из прве једначине је $\sin x = 1$ и $\cos 2y = 1$, или $\sin x = -1$ и $\cos 2y = -1$. Такође, уколико је $\sin x = \pm 1$, тада је $\cos x = 0$, па уколико x и y задовољавају прву једначину, задовољавају и другу. Како је $\sin x = \cos 2y = 1$ акко је $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, за неко $k \in \mathbb{Z}$, и $y = l\pi$, за неко $l \in \mathbb{Z}$, а $\sin x = \cos 2y = -1$ акко је $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, за неко $k \in \mathbb{Z}$, и $y = \frac{\pi}{2} + l\pi$, за неко $l \in \mathbb{Z}$, то су решења датог система једначина парови $\left(\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{m\pi}{2}\right)$, где су m, n произвољни цели бројеви исте парности. (Тангента 58, стр. 31, Писмени задаци, задатак 2)

3. Потпун квадрат се може завршавати цифрама 1, 4, 5, 6, 9. Потпун квадрат се не може завршавати са 11, 55 или 99, јер ти бројеви дају остатак 3 при дељењу са 4, а ни са 66, јер је тај број дељив са 2, а није са 4. Дакле, довољно је доказати да се потпун квадрат не може завршавати са бар четири броја 4.
Претпоставимо да постоји потпун квадрат који се завршава са бар четири броја 4, тј. нека је $a^2 = 10000k + 4444$, за неке a, $k \in \mathbb{N}$. Број

a је паран, па је $a = 2b$, за неко $b \in \mathbb{N}$, и самим тим $b^2 = 2500k + 1111$. Међутим, број $2500k+1111$ даје остатак 3 при дељењу са 4, па не може бити потпун квадрат, контрадикција.

4. Нека је $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ACD = \beta$, $\sphericalangle ABD = \gamma$, $\sphericalangle BDC = \delta$. Применом косинусних теорема на троуглове ABC, ACD, ABD, BCD, редом добијамо

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos\alpha &= BC^2, \\ CD^2 + AC^2 - 2CD \cdot AC \cos\beta &= AD^2, \\ AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cos\gamma &= AD^2, \\ CD^2 + BD^2 - 2CD \cdot BD \cos\delta &= BC^2. \end{aligned}$$



ОК 2012, 3Б – 4

Заменом у дати израз добијамо

$$\frac{2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\alpha}{2 \cdot CD \cdot AC \cdot \cos\beta} = \frac{2 \cdot AB \cdot BD \cdot \cos\gamma}{2 \cdot CD \cdot BD \cdot \cos\delta} \Leftrightarrow \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\cos\gamma}{\cos\delta},$$

па је $\cos\alpha \cdot \cos\delta = \cos\beta \cdot \cos\gamma$. Применом формуле за претварање производа косинуса у збир, добијамо да је последња једнакост еквивалентна са $\cos(\alpha - \delta) + \cos(\alpha + \delta) = \cos(\beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma)$. Нека је тачка O пресек дијагонала четвороугла $ABCD$. Тада из троуглова AOB и COD налазимо $\alpha+\gamma = \beta+\delta$, па је $\cos(\alpha-\delta) = \cos(\beta-\gamma)$, односно $\cos(\alpha+\delta) = \cos(\beta+\gamma)$. Како је $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 360^\circ - \sphericalangle AOB - \sphericalangle COD < 360^\circ$, то је из претходне једнакости $\alpha + \delta = \beta + \gamma$, па је $\alpha = \beta$, односно $AB \parallel CD$.

5. Ако се у једној врсти налази бар 10 различитих бројева, онда се у наредне две појављује највише 6 нових бројева. Разбијмо таблицу на 50 парова узастопних врста. У првом пару има највише 16 различитих бројева, а у сваком од следећих 49 има највише 6 нових бројева, што даје укупно највише $16 + 49 \cdot 6 = 310$ различитих бројева.
Пример таблице са 310 различитих бројева конструишемо на следећи начин. За $k = 1, 2, \ldots, 50$, унесимо у $(2k-1)$-ву врсту све природне бројеве од $6k - 5$ до $6k + 4$, а у $(2k)$-ту врсту све природне бројеве од $6k + 1$ до $6k + 10$. Ова таблица испуњава услове задатка, а у њој се налазе бројеви од 1 до 310.

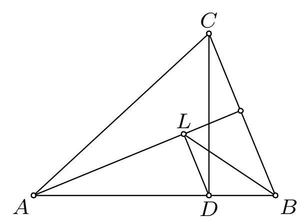
Четврти разред, Б категорија

1. Коефицијент правца праве која пролази кроз тачке A и B једнак је $\dfrac{4-3}{-1-2} = -\dfrac{1}{3}$, па је потребно одредити тачку дате функције у којој је коефицијент правца тангенте једнак $-\dfrac{1}{3}$. Како је коефицијент правца тангенте у тачки x_0 функције $y = f(x)$ једнак $f'(x_0)$, то је $1-\dfrac{1}{x_0+1}=-\dfrac{1}{3}$, односно $x_0=-\dfrac{1}{4}$. Дакле, тражена тачка је $\left(-\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{4}-\ln\dfrac{3}{4}\right)$. (Тангента 66, стр. 38, Писмени задаци, задатак 1)

2. Претпоставимо да је функција f периодична и нека је $T>0$ једна њена периода (не обавезно минимална). Како је $f(0)=f(T)$, то је $0=\sin T^2$, одакле је $T^2=k\pi$, за неко $k\in\mathbb{N}$, односно $T=\sqrt{k\pi}$. Нека је n произвољан природан број. Из $f(\sqrt{n\pi})=f(\sqrt{n\pi}+T)$ имамо $0=\sin(\sqrt{n\pi}+T)^2$, те како је $T=\sqrt{k\pi}$, добијамо $(\sqrt{n\pi}+\sqrt{k\pi})^2=l_n\pi$, за неко $l_n\in\mathbb{Z}$. Одавде, сређивањем, налазимо да је $2\sqrt{kn}=l_n-k-l\in\mathbb{N}$. Дакле, за сваки природан број n важи да је $2\sqrt{nk}$ природан број. Специјално, за $n=1$ и $n=2$ имамо да су бројеви $2\sqrt{k}$ и $2\sqrt{2k}$ природни. Самим тим, њихов количник је рационалан број, односно $\dfrac{2\sqrt{2k}}{2\sqrt{k}}=\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$, контрадикција. Овим смо доказали да функција f није периодична.

3. Како је $2^x>2012$, то је $x\geqslant 11$. Сада је $6^y=2^x-2012\geqslant 2^{11}-2012=36$, па је $y\geqslant 2$. При томе, ако је $y=2$, тада је $x=11$ и ово је једно решење дате једначине. Уколико је $y\geqslant 3$, тада је 6^y дељиво са 8, а како је $x\geqslant 11$, то је и 2^x дељиво са 8, па је 2^x-6^y дељиво са 8. Међутим, 2012 није дељив са 8, па је $(x,y)=(11,2)$ једино решење једначине.

4. Како је $\sphericalangle DAL=90^\circ-\sphericalangle ABC=\sphericalangle BCD$, $AD=CB$ и $\sphericalangle ALD=\sphericalangle CDB=90^\circ$, то је по ставу УСУ $\triangle ADL\cong\triangle CBD$, па је $LD=DB$. Самим тим, троугао DBL је једнакокраки, па је $\sphericalangle DLB=\sphericalangle DBL$. Сада је $180^\circ=\sphericalangle LAB+\sphericalangle ABL+\sphericalangle BLA=90^\circ-\sphericalangle ABC+\sphericalangle ABL+90^\circ+\sphericalangle ABL$, па је $2\cdot\sphericalangle ABL=\sphericalangle ABC$, што је и требало доказати. (Тангента 66, стр. 16, Наградни задаци, M990)



ОК 2012, 4Б – 4

5. Нека су $a_1,a_2,\ldots,a_{2011}$ бројеви записани на картицама и нека је p тражени број питања. За сваки од бројева a_i, $1\leqslant i\leqslant n$, морамо поставити барем једно питање везано за производ три броја међу којима је један a_i, па је $p\geqslant\dfrac{2011}{3}$, односно $p\geqslant 671$. Постављањем питања везана за производе $a_1a_2a_3, a_1a_4a_5, a_1a_6a_7$ и $a_{3l-1}a_{3l}a_{3l+1}$, за $3\leqslant l\leqslant 670$, можемо сазнати и производ свих бројева, јер је

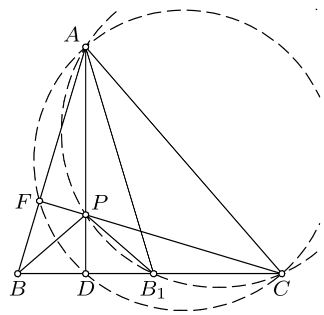
$$a_1a_2a_3\cdot a_1a_4a_5\cdot a_1a_6a_7\cdot\prod_{l=3}^{670}a_{3l-1}a_{3l}a_{3l+1}=a_1^2\cdot\prod_{i=1}^{2011}a_i=\prod_{i=1}^{2011}a_i,$$

па је $p=671$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 17.03.2012.

Први разред, А категорија

1. Ако је $BD = DC$, како је AD висина, онда је и $AB = AC$, односно троугао ABC је једнакокраки. Претпоставимо да је $BD \neq DC$ и докажимо да је тачка P ортоцентар троугла ABC. Претпоставимо, без губљења општости, да је $BD < DC$ и нека је B_1 тачка дужи DC таква да је $BD = B_1D$. Троуглови BPA и B_1AP су симетрични у односу на праву AD, па је $\sphericalangle PBA = \sphericalangle PB_1A$, а одатле и $\sphericalangle PB_1A = \sphericalangle PCA$. Одавде следи да је четвороугао B_1CAP тетиван и важе једнакости $\sphericalangle B_1CP = \sphericalangle PAB_1 = \sphericalangle PAB$. Нека је пресек праве CP и AB тачка F. Углови FAD и FCD су једнаки, па је и четвороугао $DCAF$ тетиван. Најзад, имамо једнакост $\sphericalangle AFC = \sphericalangle ADC = 90°$, па је и CF висина троугла ABC, односно, тачка P је ортоцентар троугла ABC.



ДР 2012, 1А – 1

2. Приметимо да за све природне бројеве x и y важи $23^x \cdot 111^y \equiv 1^x \cdot 1^y \equiv 1 \pmod{11}$. Како је збир цифара на парним местима датог броја једнак $P = b+5+d+7+2+2+9+c+3+a$, а на непарним једнак $N = 6+4+4+c+b+0+6+d+b+a$, то је

$$1 \equiv P - N = 8 - b \pmod{11},$$

па је $b = 7$ (пошто је b цифра). Даље, како је $10^3 \equiv 1 \pmod{111}$, а дати број дељив са 111, то је

$$\begin{aligned}
0 &\equiv \overline{aab3dc6902b2c74d456b}\\
&\equiv \overline{56b} + 10^3\cdot\overline{4d4} + 10^6\cdot\overline{2c7} + 10^9\cdot\overline{2b} + 10^{12}\cdot\overline{c69} + 10^{15}\cdot\overline{b3d} + 10^{18}\cdot\overline{aa}\\
&\equiv \overline{56b} + \overline{4d4} + \overline{2c7} + \overline{2b} + \overline{c69} + \overline{b3d} + \overline{aa}\\
&\equiv 11(a+d) + 110c + 102b + 1290\\
&\equiv 11(a+d) + 6 - c \pmod{111}.
\end{aligned}$$

Како су a, c и d цифре, при чему је $a \geqslant 1$, то је са једне стране $11(a+d) + 6 - c \geqslant 11\cdot 1 + 6 - 9 > 0$, док је са друге стране $11(a+d) + 6 - c \leqslant 11\cdot 18 + 6 - 0 < 222$, па мора бити $11(a+d) + 6 - c = 111$. Зато је $11(a+d-10) = c - 5$. Ово значи да $11 \mid c - 5$, па како је c цифра добијамо да је $c = 5$, а самим тим и $a + d = 10$. Коначно $a + b + c + d = 22$.

3. Како за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $n \equiv 0 \pmod{n}$, то је $P(n) \equiv P(0) \pmod{n}$, а самим тим и $P(P(n)) \equiv P(P(0)) \pmod{n}$. Одатле, по услову задатка

имамо $P(P(0)) \equiv -1 \pmod{n}$, односно $n \mid P(P(0))+1$, за сваки природан број n, па је $P(P(0)) = -1$.
Претпоставимо да постоји $a \in \mathbb{Z}$, такво да је $P(a) = 0$. Тада је $P(x) = (x-a)Q(x)$, за неки полином $Q(x) \in \mathbb{Z}[X]$, па важи $P(0) = -a \cdot Q(0)$ и

$$-1 = P(P(0)) = (-a \cdot Q(0) - a) \cdot (Q(P(0))) = -a \cdot (Q(0)+1) \cdot Q(P(0)). \quad (\dagger)$$

Одавде је број $Q(0)$ паран (јер је $Q(0)+1 \in \{-1,1\}$), па је због $P(0) = -a \cdot Q(0)$ и $P(0)$ паран број. Нека је $P(0) = b$. Из $(\dagger)$ је $Q(b) \in \{-1,1\}$, те је $Q(b)$ непаран. Међутим, како је $b \equiv 0 \pmod 2$, то је $1 \equiv Q(b) \equiv Q(0) \equiv 0 \pmod 2$, контрадикција. Овим смо доказали да полином $P(x)$ нема целобројну нулу, што је и требало доказати.

4. Ако би се укинуле све авиолиније из главног града скуп преосталих 2012 градова би био подељен на подскупове такве да су у истом подскупу градови повезани авиолинијама (не обавезно директно). У сваком подскупу има бар 2 града, јер је сваки град повезан авиолинијом бар још са једним, па ових подскупова има највише 1006. Уколико за сваки од тих подскупова задржимо тачно једну авиолинију из главног града до неког од градова из тог подскупа, из сваког града ће се до сваког другог моћи стићи коришћењем неких авиолинија. Дакле, да бисмо добили тражено, довољно је уклонити преостале линије из главног града, а њих је барем 1006.

Други разред, А категорија

1. Доказаћемо да Мирко има победничку стратегију – он може да обезбеди да је једно решење посматране једначине $x = 1$.
Обележимо, редом, непознате коефицијенте са a, b, c, d и e. Мирко у свом првом потезу упише произвољан цео број a. Преостала четири броја подели у два пара (b, c) и (d, e). У сваком следећем потезу Мирко „одговара” на Славков последњи потез бирањем броја који је пар последњем Славковом броју тако да важи $a + b + c = 0$ и $d + f = 0$ (ово може учинити без обзира на Славков потез). За овакав избор коефицијената очигледно је $x = 1$ решење полазне једначине.

2. Претпоставимо, без умањења општости, да је $|AB| > |AC|$ и нека је M средиште странице BC. Кружница описана око троугла DEF је Ојлерова кружница троугла ABC, па садржи тачку M. Дакле, довољно је доказати да тачка M припада кружници описаној око троугла PQR, тј. да је четвороугао $PRMQ$ тетиван. За то је довољно је да докажемо да важи

$$DP \cdot DM = DR \cdot DQ, \qquad (\clubsuit)$$

због потенције тачке D. Четвороугао $BCEF$ је тетиван, па важи $\sphericalangle AEF = \sphericalangle ABD$. Због $EF \parallel RQ$ имамо $\sphericalangle CRD = \sphericalangle AEF = \sphericalangle DBA$. Самим тим, троуглови BDQ и RDC су слични, одакле је

$$BD/DQ = RD/DC.$$

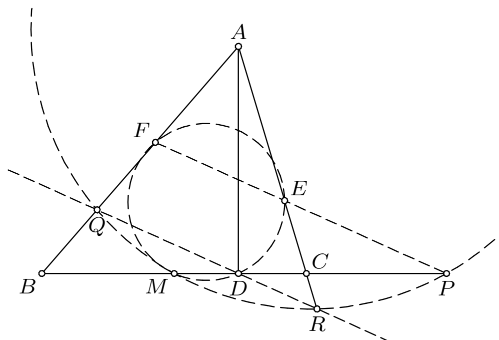
Дакле, једнакост (♣) еквивалентна је једнакости

$$DP \cdot DM = BD \cdot DC. \qquad (\diamondsuit)$$

Из потенције тачке P у односу на описане кружнице четвороуглова $BCEF$ и $EFMD$ добијамо

$$PD \cdot PM = PE \cdot PF = PC \cdot PB. \qquad (\heartsuit)$$

Ако означимо $BM = x, MD = y, PC = z$, тада је $CD = x - y$ и једнакост ($\heartsuit$) еквивалентна је (због распореда $B-M-D-C-P$) услову $xy + yz = x^2$. Непосредно се проверава да је овај услов еквивалентан траженој једнакости ($\diamondsuit$), чиме је доказ завршен.



ДР 2012, 2А – 2

3. Дата једначина може се записати у облику $p^2 = (m - 2^a q)(m + 2^a q)$. Како је p прост број и $m - 2^a q < m + 2^a q$, то је једина могућност $m + 2^a q = p^2$ и $m - 2^a q = 1$. Одузимањем ових двеју релација добијамо $2^{a+1} q = (p-1)(p+1)$, па је $p > 2$. Како је и q прост број, ово се своди на два случаја: 1) $p + 1 = 2^l q$ и $p - 1 = 2^{a+1-l}$, за неко $0 \leqslant l \leqslant a$, или 2) $p + 1 = 2^l$ и $p - 1 = 2^{a+1-l} q$, за неко $1 \leqslant l \leqslant a+1$. Из првог случаја одузимањем следи $2 = 2^l q - 2^{a+1-l}$, а из другог $2 = 2^l - 2^{a+1-l} q$.

1) Уколико је $2 = 2^l q - 2^{a+1-l}$ и $q \neq 2$, тада, како не могу оба степена двојке на десној страни бити већа од 2, добијамо $l = 1$ или $l = a$. Ако је пак $q = 2$, тада дељењем са 2 добијамо $1 = 2^l - 2^{a-l}$, одакле опет следи $l = 1$. Дакле, размотримо случајеве $l = 1$ и $l = a$.

   - За $l = 1$ следи $1 = q - 2^{a-1}$, тј. $q = 2^{a-1} + 1$, и $p = 2^{a+1-l} + 1 = 2^a + 1$. Очито, ни $a - 1$ ни a не смеју имати непарних простих фактора, јер би се у супротном неки од израза $2^{a-1} + 1$, $2^a + 1$ могао факторисати. Према томе, једине две могућности су $a = 1$ и $a = 2$. Одатле добијамо решења $(p, q, a, m) \in \{(3, 2, 1, 5), (5, 3, 2, 13)\}$.
   - За $l = a$ следи $1 = 2^{a-1} q - 1$, тј. $2^{a-1} q = 2$, што се своди на решење $(p, q, a, m) = (3, 2, 1, 5)$.

2) Уколико је $2 = 2^l - 2^{a+1-l}q$ и $q = 2$, поново налазимо решење $(p, q, a, m) = (3, 2, 1, 5)$. Претпоставимо зато да је $q \neq 2$ и самим тим $l = a$. Следи $1 = 2^{a-1} - q$, тј. $q = 2^{a-1} - 1$, и $p = 2^l - 1 = 2^a - 1$. Закључујемо да и $a - 1$ и a морају бити прости бројеви, па добијамо $a = 3$ и $(p, q, a, m) = (7, 3, 3, 25)$.

Дакле, постављена једначина има три решења:

$$(p, q, a, m) \in \{(3, 2, 1, 5), (5, 3, 2, 13), (7, 3, 3, 25)\}.$$

4. Доказ ћемо извести индукцијом по n. За $n = 2$ тврђење очигледно важи. Претпоставимо да тврђење важи за све $n < n_0$. Ако Марица од Перице добије папир са скупом P од n_0 тачака на кружници и дужима означеним на наведени начин, важи један од следећа два случаја.
Случај 1. Све дужи између суседних тачака на кружници означене су истим знаком. Тада Марица може да обрише све дужи сем ових, задовољавајући услове задатка.
Случај 2. Постоје три суседне тачке A, B, C на кружници тако да су дужи AB и BC означене различитим знаком. Према индуктивној хипотези за скуп $P \setminus \{B\}$, Марица може да избрише неке дужи, тако да на том скупу услови задатка буду задовољени. Након тога преостаје јој само да избрише једну од дужи AB и BC, и то ону чији је знак различит од свих неизбрисаних дужи на скупу $P \setminus \{B\}$, као и све остале дужи из B.

Трећи разред, А категорија

1. Одредимо остатак при дељењу броја $17^{3^{2012}}$ са 180. Приметимо да је $17^2 \equiv 109 \pmod{180}$, па је $17^4 \equiv 109^2 \equiv 1 \pmod{180}$. Како је $3^{2012} \equiv 1 \pmod 4$, то је према претходном $17^{3^{2012}} \equiv 17 \pmod{180}$, па је $\operatorname{tg}\left(17^{3^{2012}}\right)^\circ = \operatorname{tg} 17^\circ$. Дакле, довољно је доказати да је број $\operatorname{tg} 17^\circ$ ирационалан.
Претпоставимо супротно, тј. $\operatorname{tg} 17^\circ \in \mathbb{Q}$. Како је (уз дефинисаност датих израза)

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta},$$

то из $\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}\beta \in \mathbb{Q}$ следи и $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) \in \mathbb{Q}$. Самим тим, из дате претпоставке, индукцијом следи да је $\operatorname{tg}(n \cdot 17)^\circ \in \mathbb{Q}$, за све $n \in \mathbb{N}$, $90 \nmid n$. За $n = 5$ закључујемо $\operatorname{tg} 85^\circ \in \mathbb{Q}$, па је и $\operatorname{tg} 5^\circ = 1/\operatorname{tg} 85^\circ \in \mathbb{Q}$. Слично претходном, сада је и $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{tg}(6 \cdot 5)^\circ \in \mathbb{Q}$, контрадикција.

2. Нека је d највећи заједнички делилац бројева a и b. Ако је $d > 1$, онда је за сваки природан број n и прост број p, број $a \cdot p^n + b$ дељив са d, те је као такав сложен и тврђење задатка је доказано. Дакле, довољно је размотрити случај $d = 1$. Нека је q прост делилац броја

$a+b$ и r прост делилац броја $a\cdot q^{q-1}+b$. Тада је $r\neq q$. Заиста, ако је $r=q$, тада из $r\mid a\cdot q^{q-1}+b$ следи $r\mid b$, па из $q\mid a+b$ следи $q\mid a$, што је у супротности са $d=1$. Посматрајмо бројеве n облика $(q-1)(1+k(r-1))$, где је k произвољан природан број. Докажимо да су за овако одабране бројеве n, бројеви $a\cdot p^n+b$ сложени. Ако је $p\neq q$, онда на основу Мале Фермаове теореме имамо

$$a\cdot p^n+b\equiv a\cdot(p^{(q-1)})^{1+k(r-1)}+b\equiv a+b\equiv 0 \pmod q, \qquad (\dagger)$$

док за $p=q$ (због $q\neq r$), на основу исте теореме важи

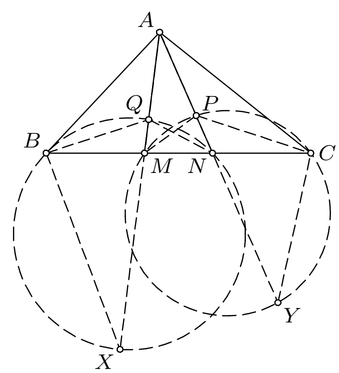
$$a\cdot p^n+b\equiv a\cdot(q^{(r-1)})^{k(q-1)}\cdot q^{q-1}+b\equiv a\cdot q^{q-1}+b\equiv 0 \pmod r. \qquad (\ddagger)$$

Једнакости (†) и (‡) , имајући на уму да је $a\cdot p^n+b>\max\{q,r\}$, сведоче да је број $a\cdot p^n+b$ сложен за сваки прост број p и $n=(q-1)\cdot(1+k(r-1))$, за $k\in\mathbb{N}$.

3. Нека AM и AN секу описане кружнице троуглова BQN и PMC у тачкама $X\neq Q$ и $Y\neq P$, редом. Четвороуглови $BQNX$ и $PMCY$ су тетивни, па је $\sphericalangle QBC=\sphericalangle QXN$ и $\sphericalangle PCB=\sphericalangle PYM$, тако да је за доказ тврђења $\sphericalangle QBC=\sphericalangle PCB$ довољно доказати да је четвороугао $MNXY$ тетиван, а то је еквивалентно са

$$AM/AN=AY/AX.$$

Нека је за $\triangle UVW$ са $S(UVW)$ означена његова површина.



ДР 2012, 3А – 3

Како страницама BM и CN (које су једнаких дужина) троуглова ABM и ACN одговарају једнаке висине, то је $S(ABM)=S(ACN)$, односно

$$AM\cdot AB\cdot\sin\sphericalangle MAB=AN\cdot AC\cdot\sin\sphericalangle NAC. \qquad (\dagger)$$

С друге стране, како је $\sphericalangle BXA=\sphericalangle BNQ=\sphericalangle CAY$ и $\sphericalangle AYC=\sphericalangle PMC=\sphericalangle XAB$, то су троуглови ABX и YCA слични, па је $AY/AX=CY/AB$. (‡) Применом синусне теореме на троугао ACY добијамо

$$\sin\sphericalangle MAB/AC=\sin\sphericalangle NAC/CY,$$

што заједно са (†) и (‡) даје тражено.

4. Нека је $A=\{a_1,a_2,\dots,a_{30}\}$ и $a_1<a_2<\dots<a_{30}$. Јасно је да за сваки скуп S који задовољава услове задатка $\min(S)$ и $\max(S)$ морају бити бројеви a_i и a_j такви да је $j-i\geqslant 4$. Таквих парова бројева има $26+25+\dots+1=\binom{27}{2}$. Покажимо да је могуће наћи скуп A тако да се

заиста добије $\binom{27}{2}$ различитих вредности за $r(S)$. Нека је $a_1 = 1$ и за $1 < n \leqslant 30$ нека је a_n произвољан природан број већи од $2 \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})$. На тај начин добијамо да су све разлике $a_n - a_i$ различите од свих разлика формираних од претходно дефинисаних бројева, тј. од $a_j - a_k$ за $1 \leqslant k < j < n$ (јер је $a_n - a_i > a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} > a_j - a_k$). Специјално, све могуће разлике $\max(S) - \min(S)$ су различите.

Четврти разред, А категорија

1. Претпоставимо прво да се прост број p може записати у датом облику. Нека је $d = \text{НЗД}(n, m)$ и $n = ds$, $m = dt$. Тада важи:

$$p = \frac{n^4 - m^4}{n^3 + m^3} = \frac{d^4(s^4 - t^4)}{d^3(s^3 + t^3)} = \frac{d(s-t)(s+t)(s^2+t^2)}{(s+t)(s^2 - st + t^2)} = \frac{d(s-t)(s^2+t^2)}{s^2 - st + t^2}.$$

Докажимо да је број $s^2 - st + t^2$ узајамно прост и са $s - t$, и са $s^2 + t^2$. Заиста, из $q \mid s^2 - st + t^2$ и $q \mid s - t$ (за неки прост број q) следило би $q \mid (s^2 - st + t^2) - (s - t)^2 = st$, тј. $q \mid s$ или $q \mid t$, што уз $q \mid s - t$ даје $q \mid s, t$, контрадикција (s и t су узајамно прости); слично, из $q \mid s^2 - st + t^2$ и $q \mid s^2 + t^2$ следило би $q \mid (s^2 + t^2) - (s^2 - st + t^2) = st$, и поново $q \mid s$ или $q \mid t$, што са $q \mid s^2 + t^2$ опет води до контрадикције.

Дакле, имамо:

$$p = \underbrace{\frac{d}{s^2 - st + t^2}}_{\in \mathbb{N}} (s - t)(s^2 + t^2).$$

Будући да је p прост број и $s^2 + t^2 > 1$, следи $\frac{d}{s^2 - st + t^2} = 1$, $s - t = 1$ и $p = s^2 + t^2$. Из последње две констатације следи $s = t + 1$ и $p = (t+1)^2 + t^2$, што је и требало доказати.

Докажимо и други смер датог тврђења. На основу разматрања спроведеног у претходном делу задатка, закључујемо да се број $p = (t+1)^2 + t^2$ може записати у облику

$$p = \frac{((t^2 + t + 1)(t + 1))^4 - ((t^2 + t + 1)t)^4}{((t^2 + t + 1)(t + 1))^3 + ((t^2 + t + 1)t)^3}.$$

2. Докажимо да је тражени максимум једнак $\dfrac{n^2 - 1}{3n^2}$.

По неједнакости између средина, за све $z_i \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$, важи

$$z_1^3 + \ldots + z_n^3 \geqslant \frac{1}{n^2} \cdot (z_1 + \ldots + z_n)^3,$$

па како је $x_i x_{i+1}(x_i - x_{i+1}) = \frac{1}{3}(x_i^3 - x_{i+1}^3 - (x_i - x_{i+1})^3)$, имамо

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} x_i x_{i+1}(x_i - x_{i+1}) &= \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left(x_i^3 - x_{i+1}^3 - (x_i - x_{i+1})^3\right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(x_0^3 - x_n^3 - \sum_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^3\right) \\ &\leqslant \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2} \cdot (x_0 - x_n)^3\right) = \frac{n^2-1}{3n^2}.\end{aligned}$$

Једнакост се достиже и то када су све разлике $x_i - x_{i+1}$ једнаке, тј. за $x_i = 1 - \dfrac{i}{n}$, $0 \leqslant i \leqslant n$, па је тражени максимум заиста једнак $\dfrac{n^2-1}{3n^2}$.

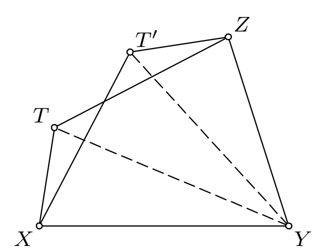
3. Докажимо да Милош и Аца имају победничку стратегију.
Распоред карата можемо посматрати као пермутацију π бројева од 1 до $2n$ ($\pi(i)$ је број на i-тој карти). Нека је $\pi^k(i) = \underbrace{\pi(\ldots\pi}_{k}(i)\ldots)$, за $k \geqslant 1$, и $\pi^0(i) = i$. За свако i скуп $\{\pi^k(i) \mid k \geqslant 0\}$ ћемо звати „циклус". Циклуси су коначни, а како је π бијекција свака два су или дисјунктна или једнака. На овај начин скуп $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ подељен је на дисјунктне циклусе. Када приђе столу Милош посматра циклусе пермутације. Како је π пермутација $2n$ елемената, постоји највише један циклус са више од n елемената. Ако овакав циклус не постоји Милош не мења места картама, а ако овакав циклус $\{\pi^k(i) \mid k \geqslant 0\}$ постоји и има m елемената, Милош мења карте на местима $\pi^l(i)$ и $\pi^{m-1}(i)$, где је $l = \left[\frac{m}{2}\right]$. На овај начин на столу остаје низ карата који одговара пермутацији чији сваки циклус има највише n елемената. Сада, ако Ђоле каже број j, Аца отварањем карата $\pi^k(j)$, за $k \geqslant 1$, тј. карата на местима $j, \pi(j), \ldots,$ у највише n покушаја проналази карту на којој је записан број j.

4. Нека је за произвољан четвороугао $XYZT$, његова површина означена са $S(XYZT)$. Докажимо да при томе важи

$$S(XYZT) \leqslant \frac{1}{2} \cdot (XY \cdot ZT + YZ \cdot TX).$$

Заиста, ако је T' тачка симетрична тачки T у односу на симетралу дужи XZ, за $S = S(XYZT)$ важи

$$\begin{aligned} S = {} & S(XYZT') \\ = {} & S(YZT') + S(T'XY) \\ \leqslant {} & \frac{1}{2} \cdot (YZ \cdot ZT' + T'X \cdot XY) \\ = {} & \frac{1}{2} \cdot (YZ \cdot TX + XY \cdot ZT). \end{aligned}$$



ДР 2012, 4А – 4

Нека је $ABCD$ четвороугао са $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $DA = d$, и нека су M и N средишта страница BC и DA, редом. Према претходном је

$$S(ABMN) \leqslant \frac{1}{2} \cdot (AN \cdot MB + MN \cdot AB) = \frac{1}{8} \cdot bd + \frac{1}{2} \cdot a \cdot MN$$

и, аналогно, $S(CDNM) \leqslant \frac{1}{8} \cdot bd + \frac{1}{2} \cdot c \cdot MN$. Сабирањем добијамо

$$S(ABCD) = S(AMND) + S(BMNC) \leqslant \frac{1}{4} \cdot bd + \frac{1}{2} \cdot (a+c) \cdot MN.$$

Како је из неједнакости троугла $MN = |\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}| \leqslant \frac{1}{2}(AB + CD) = \frac{1}{2}(a+c)$, тврђење задатка је доказано.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 17.03.2012.

Први разред, Б категорија

1. Како је $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}$, то је

$$2 \cdot \overrightarrow{MA} - 3 \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2 \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC},$$

што не зависи од положаја тачке M. (Тангента 65, стр. 38, Писмени задаци, задатак 5)

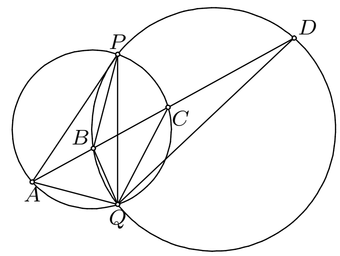
2. а) Могуће је. Један од два могућа распореда при ком су сви одговори истинити је Васа – први, Аца – други, Бора – трећи, Горан – четврти.
б) Претпоставимо да Аца не говори истину. Тада је он стигао први или последњи, али то није тачно јер је Васа први, а Горан последњи. Према томе, Аца говори истину.
Ако претпоставимо да Бора лаже, значи да је он стигао последњи. Међутим, то не може бити тачно јер је онда и Горан стигао последњи. Значи, и Бора говори истину.
Ако би Горан лагао и тај случај би био немогућ јер онда нико не би био последњи. Дакле, и Горан говори истину.
Како Аца, Бора и Горан говоре истину, остаје да је Васа лагао.
На основу Горанове изјаве знамо да је он последњи. На основу Ацине изјаве и Васине изјаве имамо да њих двојица не могу бити први (као ни Горан за кога смо већ добили да је последњи), па је Бора први.
Дакле имамо 2 редоследа који задовољавају услове задатка: Бора, Аца, Васа, Горан; Бора, Васа, Аца, Горан. Стога са сигурношћу можемо тврдити само да је Бора први, а Горан последњи.

3. Нека је $a = x - y, b = y - z, c = z - x$. Тада је по услову задатка $a, b, c \neq 0$, при чему је $a + b + c = 0$. Одавде, како је $-c = a + b$, имамо

$$-c^3 = (a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3 = a^3 + 3ab(-c) + b^3,$$

те је $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Из последње једнакости, како је $abc \neq 0$, то је $a^3 + b^3 + c^3 \neq 0$, што је и требало доказати.

4. Нека се без умањења општости тачка A налази на кружници k_1. Тада се због датог распореда тачка C налази на кружници k_1, а тачке B и D на кружници k_2, и при томе важи $\sphericalangle APB = \sphericalangle APQ - \sphericalangle BPQ$. Како је $\sphericalangle APQ = \sphericalangle ACQ$ (углови над тетивом AQ кружнице k_1) и $\sphericalangle BPQ = \sphericalangle BDQ$ (углови над тетивом BQ кружнице k_2), то је $\sphericalangle APB = \sphericalangle ACQ - \sphericalangle BDQ = \sphericalangle CQD$, што је и требало доказати.



ДР 2012, 1Б – 4

5. Прво докажимо да $2 \mid n$. Претпоставимо супротно, тј. да је n непаран. Тада из изјаве другог мудраца закључујемо да је n палиндром који има паран број цифара, а самим тим има и паран збир цифара. Зато збир цифара броја n не може бити 5, па из изјаве петог мудраца следи да $5 \mid n$. Међутим, тада из изјаве првог мудраца закључујемо да је број $n-1$ прост. Како је $n-1$ паран број то је $n = 3$, што је због $5 \mid n$ немогуће. Дакле, n мора бити паран.

Како n није узајамно прост са 6, из изјаве шестог мудраца закључујемо да је број делилаца броја n једнак 6. Одавде следи да n не може имати више од два проста фактора. Ако има само један прост фактор, онда је $n = 2^5 = 32$, што је у контрадикцији са изјавом четвртог мудраца. Ако n има два проста фактора, онда је $n = 2^2 \cdot p$ или $n = 2 \cdot p^2$, где је p непаран прост број. Докажимо да други случај није могућ. Заиста, ако је $p = 3$, онда је $n = 18$, па пети мудрац није рекао истину; ако $p \neq 3$, онда $3 \nmid n$, а n има бар три непарна делиоца (1, p и p^2), што је у супротности са изјавом трећег мудраца. Дакле, потребно је још испитати случај $n = 4p$. Тада из изјаве четвртог мудраца закључујемо да број n има тачно четири цифре у декадном запису, па је $p > 250$. Специјално $5 \nmid n$, па је збир цифара броја n једнак 5 (због изјаве петог мудраца). Користећи ово и дељивост броја n са 4, закључујемо да су једини кандидати бројеви 1004, 1112, 2012. За прва два броја реченица првог мудраца није тачна, а за број 2012 провером утврђујемо да су реченице свих мудраца истините, па је 2012 једини број са траженим својством.

Други разред, Б категорија

1. Може. Уколико је $a = c = 1$ и $b = 2$, тада је $x^4 + 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$, па прва једначина нема реално решење, а једно решење друге једначине је $x = -1$.

2. Решимо најпре неједначину $\log_{x+1} x \geqslant \log_{x^2+1} x^2$. Ова неједначина има смисла само за бројеве $x > 0$. Имамо

$$\begin{aligned}\log_{x+1} x \geqslant \log_{x^2+1} x^2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\log x}{\log(x+1)} \geqslant \frac{\log x^2}{\log(x^2+1)}\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\log x}{2\log(x+1)} \geqslant \frac{\log x}{\log(x^2+1)}\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\log x \cdot (\log(x^2+1) - \log(x+1)^2)}{\log(x+1)^2 \cdot \log(x^2+1)} \geqslant 0.\end{aligned}$$

(са log означен је логаритам са основом 10). За $x > 0$ важи $(x+1)^2 > 1$ и $(x+1)^2 > x^2+1$, па како је логаритамска функција са основом 10 растућа, то је $\log(x+1)^2 > 0$, $\log(x^2+1) > 0$ и $\log(x+1)^2 > \log(x^2+1)$. Зато је полазна неједнакост еквивалентна са $\log x \leqslant 0$, односно $0 < x \leqslant 1$. Овим смо доказали да све неједнакости могу важити само за бројеве $x \in (0,1]$. Докажимо да су за свако $x \in (0,1]$ задовољене све неједнакости. За $x = 1$ то је очигледно случај (сви наведени изрази једнаки су нули), па је довољно доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ и свако $x \in (0,1)$ важи неједнакост $\log_{x^n+1} x^n \geqslant \log_{x^{n+1}+1} x^{n+1}$. Нека је $a = x^n$ и $b = x^{n+1}$. За $x \in (0,1)$ важи $0 < b = x^{n+1} = x^n \cdot x < x^n \cdot 1 = a < 1$. Дакле, довољно је доказати да за бројеве $1 > a > b > 0$ важи $\log_{1+a} a > \log_{1+b} b$. Како је логаритамска функција са основом већом од 1 растућа, важи $\log_{1+a} a > \log_{1+a} b$. Пошто је $\log(1+a) > \log(1+b) > 0$ и $\log b < 0$, то је

$$\log_{1+a} b = \frac{\log b}{\log(a+1)} > \frac{\log b}{\log(b+1)} = \log_{b+1} b,$$

чиме је доказ завршен.

3. Приметимо да за $x = 504$ и $y = 2$ важи $2012 \mid \frac{504\cdot 503}{2}$. Докажимо да мора бити $x + y \leqslant 504 + 2 = 506$. Претпоставимо супротно. Из $503 \mid \dfrac{x!}{y!\cdot(x-y)!}$ и $\dfrac{x!}{y!\cdot(x-y)!} \mid x!$ имамо $503 \mid x!$, па како је 503 прост број важи $x \geqslant 503$. Како је $x+y \leqslant 505$, то је $(x,y) \in \{(503,1),(503,2),(504,1)\}$. Међутим, бројеви $\dfrac{503!}{502!\cdot 1!} = 503$, $\dfrac{503!}{501!\cdot 2!} = 503\cdot 251$ и $\dfrac{504!}{503!\cdot 1!} = 504$ нису дељиви са 2012, контрадикција. Овим смо доказали да је тражени минимум једнак 506.

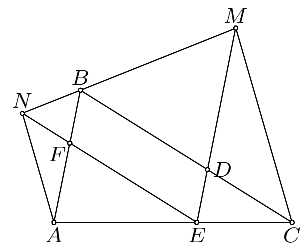
4. Нека је D пресек правих BC и ME, а F пресек правих AB и NE. Како је $BC \parallel EF$ и $AB \parallel DE$, то је четвороугао $BDEF$ паралелограм и важи $\sphericalangle BNF = \sphericalangle MBD$, $NBF = \sphericalangle BMD$, $\sphericalangle FAE = \sphericalangle DEC$, $\sphericalangle FEA = \sphericalangle DCE$. Самим тим је $\triangle FBN \sim \triangle BMD$ и $\triangle AFE \sim \triangle DCE$, па је

$$\frac{NF}{FB} = \frac{BD}{DM} = \frac{EF}{DM},\ \frac{AF}{FE} = \frac{DE}{DC} = \frac{BF}{DC}.$$

Дељењем ових једнакости добијамо $NF/FA = DC/DM$, па како је $\sphericalangle AFN = \sphericalangle MDC$, то је $\triangle AFN \sim \triangle MDC$. Сада је

$$\begin{aligned} \sphericalangle ACM &= \sphericalangle MCD + \sphericalangle DCE \\ &= \sphericalangle ANE + \sphericalangle FEA, \end{aligned}$$

па је $\sphericalangle NAC + \sphericalangle ACM = 180^\circ$ и самим тим $AN \parallel MC$.



ДР 2012, 2Б – 4

5. Да би нека сијалица била угашена, она мора бити четврта сијалица у неком делу 2×2 у ком су остале сијалице угашене. Зато се сваки део 2×2 може искористити само једном за гашење сијалице. Како у таблици постоји тачно $2009 \cdot 2011$ делова 2×2, највише толико сијалица се може угасити, па се не могу угасити све сијалице. (Тангента 60, стр. 5, Наградни задаци, М864)

Трећи разред, Б категорија

1. Нека је $\alpha = b - c$, $\beta = c - a$ и $\gamma = a - b$. Доказаћемо да је $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| > 0$, одакле следи да тачке комплексне равни које одговарају бројевима a, b, c чине темена једнакостраничног троугла. Из једнакости $|(2a+b)-(2b+c)| = |(2b+c)-(2c+a)|$, имамо $|\gamma - \beta| = |\alpha - \gamma|$, па како је $\alpha+\beta+\gamma = 0$ добијамо $|\alpha + 2\beta| = |2\alpha + \beta|$. Сада је

$$\begin{aligned} |\alpha + 2\beta|^2 = |2\alpha + \beta|^2 \quad &\Leftrightarrow \quad (\alpha + 2\beta)(\overline{\alpha} + 2\overline{\beta}) = (2\alpha + \beta)(2\overline{\alpha} + \overline{\beta}) \\ &\Leftrightarrow \quad 3|\alpha|^2 = 3|\beta|^2 \Leftrightarrow |\alpha| = |\beta|. \end{aligned}$$

Аналогно овом добијамо $|\alpha| = |\gamma|$. Остаје да докажемо да је $|\alpha| > 0$. Претпоставимо супротно. Тада би било $a = b = c$, те се тачке које одговарају бројевима $2a + b, 2b + c, 2c + a$ поклапају. Контрадикција. Овим је доказ комплетиран.

2. Докажимо да је број $4^x + 1$ већи од броја $2^x + 3^x$.
Како је $\frac{4}{3} > 1$, то за $x > 1$ важи $\left(\frac{4}{3}\right)^{x-1} > 1$, па је $4^{x-1} > 3^{x-1}$. Зато је

$$\begin{aligned} 4^x + 1 - 2^x - 3^x &= 4 \cdot 4^{x-1} + 1 - 2^x - 3 \cdot 3^{x-1} \\ &> 4 \cdot 4^{x-1} + 1 - 2^x - 3 \cdot 4^{x-1} \\ &= 4^{x-1} + 1 - 2^x = (2^{x-1} - 1)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

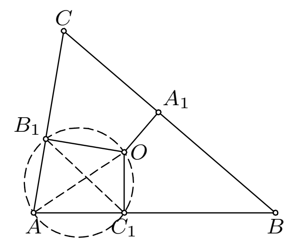
3. Приметимо да је

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 5x^2 + 4 + 63 = (x^2 - 4) \cdot (x^2 - 1) + 63 \\ &= (x-2)(x-1)(x+1)(x+2) + 63. \end{aligned}$$

Како за $x \not\equiv 0 \pmod 3$ важи $3 \mid (x-2)(x-1)$ и $3 \mid (x+1)(x+2)$, следи да за овакве x важи $9 \mid f(x)$, па је збир цифара броја $f(p)$, за сваки прост број $p \neq 3$, бар 9. Како је $f(3) = 103$, тј. збир цифара броја $f(3)$ је 4, следи да је најмањи могући збир 4 и достиже се ако и само ако је $p = 3$.

4. Нека су A_1, B_1, C_1 подножја нормала из тачке O на праве BC, CA, AB, редом. Како је $\sphericalangle AB_1O = \sphericalangle AC_1O = 90°$, то је четвороугао AB_1OC_1 тетиван са пречником AO, па је

$$B_1C_1 = AO \cdot \sin\sphericalangle BAC = OA \cdot \frac{BC}{2R},$$



ДР 2012, 3Б – 4

где је R полупрепречник круга описаног око $\triangle ABC$. Аналогно је $C_1A_1 = OB \cdot \dfrac{CA}{2R}$ и $A_1B_1 = OC \cdot \dfrac{AB}{2R}$, па је због датог услова $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A_1$, што је и требало доказати.

5. а) Троцифрених бројева чије су све цифре непарне има укупно $5^3 = 125$. Приметимо да се у овим бројевима свака од цифара $1, 3, 5, 7, 9$ појављује исти број пута као цифра јединица, десетица и стотина, и то по $\frac{125\cdot 3}{3\cdot 5} = 25$ пута. Дакле, тражени збир је једнак

$$(1 + 3 + 5 + 7 + 9) \cdot (1 + 10 + 100) \cdot 25 = 69375.$$

б) Троцифрених бројева који не садрже цифру 3 има $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$. Како се свака цифра различита од 3 појављује једнак број пута као последња цифра ових бројева, то се свака појављује $\frac{648}{9} = 72$ пута. Самим тим, тражена цифра једнака је последњој цифри броја

$$72 \cdot (0 + 1 + 2 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 72 \cdot 42 = 3024,$$

односно једнака је 4.
(Тангента 66, стр. 38, Писмени задаци, задатак 1)

Четврти разред, Б категорија

1. Како је $P(x)^3$ полином деветог степена, то је $P(x)$ полином трећег степена, па је $P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, за неке $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Посматрањем коефицијента уз x^9 полинома $P(x)^3$ добијамо да је $a^3 = 1$, тј. $a = 1$, а слободног члана добијамо да је $d^3 = 1$, тј. $d = 1$. Одредимо коефицијент уз x полинома $P(x)$. Да бисмо у развоју

$$(ax^3 + bx^2 + cx + d) \cdot (ax^3 + bx^2 + cx + d) \cdot (ax^3 + bx^2 + cx + d)$$

добили моном првог степена, потребно је да из два чинилаца датог производа „изаберемо” d, а из једног cx. Дакле, у развоју постоје $\frac{3\cdot 2}{2!} = 3$ три монома степена 1 и сваки од њих је једнак cd^2x, па је

$3cd^2 = 15$, тј. $c = 5$. Даље, како је збир коефицијената полинома $P(x)^3$ једнак $P(1)^3$ имамо да је $6 = P(1) = 1^3 + b \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 1 = 6$, тј. $b = -1$. Тиме смо добили да је $P(x) = x^3 - x^2 + 5x + 1$.
Даље, из Виетових формула имамо да је $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-1}{1} = -1$ и $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{5}{1} = 5$, па је

$$\begin{aligned} {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2 \cdot (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\ &= (-1)^2 - 2 \cdot 5 = -9. \end{aligned}$$

2. Нека је n неко решење дате једначине. Како је $n \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{7} > 0$, то је $\operatorname{arctg} \frac{n}{11} < \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$. Отуда, како је функција arctg растућа, мора бити $\frac{n}{11} < \frac{1}{n}$, односно $n \leqslant 3$. Дакле, довољно је испитати да ли је неки од бројева $n = 1$, $n = 2$, односно $n = 3$ заиста решење.

- Нека је $n = 1$ и $\alpha_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{11}$, $\beta_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{7}$ и $\gamma_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{1}$. Ако је $\alpha_1 + \beta_1 = \gamma_1$, онда је и $\operatorname{tg}(\alpha_1 + \beta_1) = \operatorname{tg} \gamma_1$, односно $\frac{\frac{1}{11} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{7}} = 1$, што није тачно. Дакле, $n = 1$ није решење.
- Нека је $n = 2$ и $\alpha_2 = \operatorname{arctg} \frac{2}{11}$, $\beta_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{7}$ и $\gamma_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$. Тада је $\operatorname{tg} 2\beta_2 = \frac{2 \operatorname{tg} \beta_2}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta_2} = \frac{7}{24}$, те је

$$\operatorname{tg}(\alpha_2 + 2 \cdot \beta_2) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 + \operatorname{tg} 2\beta_2}{1 - \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \operatorname{tg} 2\beta_2} = \frac{\frac{2}{11} + \frac{7}{24}}{1 - \frac{2}{11} \cdot \frac{7}{24}} = \frac{1}{2} = \operatorname{tg} \gamma_1.$$

  Како су углови $\alpha_2 + 2\beta_2$ и γ_2 оштри ($\alpha_2, 2\beta_2 < \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$), а имају једнаке тангенсе, то је $\alpha_2 + 2 \cdot \beta_2 = \gamma_2$, па је $n = 2$ решење полазне једначине.
- Нека је $n = 3$ и $\alpha_3 = \operatorname{arctg} \frac{3}{11}$, $\beta_3 = \operatorname{arctg} \frac{1}{7}$ и $\gamma_3 = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$. Тада је $\operatorname{tg} 2\beta_3 = \frac{7}{24}$, па је

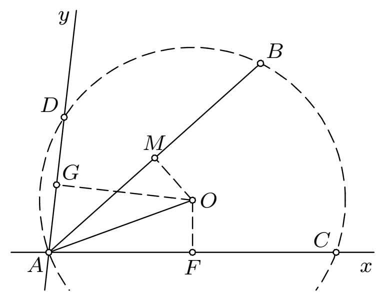
$$\operatorname{tg} 3\beta_3 = \operatorname{tg}(\beta_3 + 2\beta_3) = \frac{\operatorname{tg} \beta_3 + \operatorname{tg} 2\beta_3}{1 - \operatorname{tg} \beta_3 \cdot \operatorname{tg} 2\beta_3} = \frac{73}{161}.$$

  Како $\operatorname{tg} 3\beta_3 > \operatorname{tg} \gamma_3$, то је $3\beta_3 > \gamma_3$, па $n = 3$ није решење посматране једначине.

Овим смо доказали да је $n = 2$ једини природан број који је решење полазне једначине.

3. Нека је k произвољан природан број за који важи $k \leqslant [\frac{999}{12}] = 83$. Докажимо да су цифре јединица и хиљада броја $2012 \cdot k$ међусобно једнаке. Како је $2012 \cdot k = 2000 \cdot k + 12 \cdot k = 1000 \cdot 2 \cdot k + 12 \cdot k$, имајући на уму да је $12 \cdot k$ највише троцифрен број, закључујемо да је цифра хиљада броја $2012 \cdot k$ једнака цифри јединица броја $2 \cdot k$, а она је једнака цифри јединица броја $12 \cdot k$. Дакле, $n \geqslant 2012 \cdot 84$, па како је $84 \cdot 2012 = 169008$, $85 \cdot 2012 = 171020$, $86 \cdot 2012 = 173032$, $87 \cdot 2012 = 175044$, $88 \cdot 2012 = 177056$ и $89 \cdot 2012 = 179068$, добијамо да је најмањи број са наведеним особинама 179068.

4. Нека је O центар кружнице k, а F, G, M средишта дужи $AC\,AD, AB$, редом. Тада је $OF \perp AC, OG \perp AD, OM \perp AB$. Нека је $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle OAB = \beta$, при чему је без умањења општости $\alpha \geqslant \beta$. Тада је $AF = AO \cdot \cos(\alpha - \beta)$ и $AG = AO \cdot \cos(\alpha + \beta)$, па је $AC + AD = 2 \cdot AO \cdot (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$, односно $AC + AD = 4 \cdot AO \cdot \cos\alpha \cos\beta$. Како је $AM = AO \cdot \cos\beta$, то је



ДР 2012, 4Б – 4

$$AC + AD = 2 \cdot AB \cdot \cos\alpha,$$

па не зависи од круга k и доказ је завршен.

5. Италијане можемо сместити у „блок” од 3 суседне особе на $3! = 6$ начина. Овај блок можемо, заједно са 4 Француза, распоредити на $5! = 120$ начина. Немце сада смештамо између, испред или иза распоређених Француза и блока Италијана. Дакле, за њих имамо 6 могућих места и на свако можемо сместити тачно једног од њих (јер не смеју бити један до другог), па их можемо распоредити на $\dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4!} \cdot 4! = 360$ начина. Укупан број распореда је према правилу производа једнак $6 \cdot 120 \cdot 360 = 259200$. (Тангента 66, стр. 16, Наградни задаци, M988)

Садржај