ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА СРЕДЊОШКОЛАЦА 2013/2014.

Ниш, 2014.

Организациони одбор 56. Државног такмичења из математике

1. Професор др Александар Липковски, председник ДМС
2. Љиљана Златановић, директор Гимназије „Бора Станковић”
3. Ненад Тотић, професор Гимназије „Бора Станковић”
4. Бранко Антић, професор Гимназије „Бора Станковић”
5. Слађана Кваић, професор Гимназије „Бора Станковић”
6. Славиша Костић, професор Гимназије „Бора Станковић”
7. Славољуб Милосављевић, члан Извршног одбора ДМС
8. Љубиша Динић, председник НО Подружнице математичара Ниш
9. Марко Радовановић, председник Републичке комисије

Покровитељи такмичења

1. Град Ниш
2. Градоначелник Ниша др Зоран Перишић
3. Еуротурс Ниш
4. Дирекција за изградњу Града Ниша
5. Туристичка организација Града Ниша
6. Yumis Ниш
7. Пекара Бранковић
8. Пинк такси
9. Delhaize Србија

Редакција и обрада: Марко Радовановић

Ниш – име, значај, историја...

Ниш, један од најзначајних и најстаријих градова на Балкану познат као „Капија” Истока и Запада због свог географског положаја. Као веома важна раскрсница на којој су се сусретали Исток и Запад, Ниш је одувек био веома битно место и мета потенцијалних освајача. У време антике, Ниш је био чвст и неосвојив римски логор и веома важна стратегијска тачка.

Велики император Константин рођен је у Нишу 274. године и у њему је резиденцију Медијану. За време његове владавине град је био веома снажан војни, административни и економски центар, а сам Константин Велики се радо враћао месту свог рођења. Константин I Велики, римски цар од 306. до 337. године, представља једну од кључних личности у историји Европе и хришћанства. Спровео је читав низ важних административних и војних реформи које су оснажиле Римско царство, уздрмано великом кризом 3. века. Његова улога у даљој историји Европе била је пресудна као први римски владар који је прихватио хришћанство, дотад веру прогоњене мањине, Константин је покренуо христијанизацију Царства, чиме је, уз оснивање Константинопоља, поставио темеље будућем Византијском царству. Као први хришћански цар, велики добротвор и ктитор хришћанске цркве, Константин је након смрти био канонизован. У православним црквама поштује се као светац и равноапостолни цар. У Српској православној цркви свети Константин се слави заједно са својом мајком, светом Јеленом, 3. јуна по новом (грегоријанском), односно 21. јуна по старом (јулијанском) календару.

У временима која су наступила, Ниш је био више пута разаран и освајан. Хуни су освојили и разорили Ниш 441. године, да би га касније обновио Јустинијан Велики. Словени насељавају град 540. године. Након краће колонизације од стране Византије у 11. веку у Ниш продиру Угри, да би након несталног периода у које је град прелазио из грчке у угарске руке, коначно постао српски, али само на кратко.

Након златног периода експанзије српске државе под Немањићима, Ниш бива први на удару турске најезде, тако да га султан Мурат узима од кнеза Лазара 1386. Након пропасти српске кнежевине и краткотрајне владавине Бранковића, град на Нишави коначно бива изгубљен 1448. У периоду турске власти је изграђена тврђава 1723. године и та монументална грађевина спада у једну од најбоље очуваних и најлепших те врсте на Балкану.

У току Првог српског устанка одиграла се чувана битка на Чегру надомак Ниша 31. марта 1809. У њој је погинуло око 3000 српских устаника на челу са храбрим ресавским војводом Стеваном Синђелићем. Као резултат овог пораза настао је стравичан споменик Ћеле Кула, јединствен у свету, до данашњих дана делимично очуван.

Град је за време кнеза Милоша и кнеза Михаила и даље био у турским рукама, а Османлије ће из њега бити заувек отеране 1878. након дугих и тешких борби. Кнез Милан је 11. јануара 1878. ушао у Нишку тврђаву и тим симболично означио почетак нове епохе у историји града.

За време Првог светског рата Ниш постаје престоница Србије. Влада и Народна скупштина су прешли из Београда у Ниш. У њему је, између осталог, примљен телеграм којим је Аустро-Уграска објавила рат Србији а донесена је и чувена Нишка Декларација 7. децембра 1914. године. Након завршетка рата и ослобођења Србије, Ниш постаје центар тога дела државе. Избијањем Другог светског рата и капитулацијом Краљевине Југославије, наступају тешка времена за град Ниш и његове житеље. Као веома битна стратешка тачка на раскрсници путева који су водили ка Грчкој и даље у Африку, Ниш је био од веома великог значаја немачком окупатору. Нацистички окупатори спроводили су репресивну политику према градском живљу и у ту сврху био је оформљен озлоглашени концентрациони логор на Црвеном Крсту, са ког су хиљаде заточеника одвођени на масовна стрељања на Бубњу. У исто време, у околини Ниша, баш као и у читавој земљи, беснео је грађански рат, који је додатно погоршао читаво стање.

Победом комуниста у грађанском рату, као и повлачењем немачких снага са простора Балкана, Ниш је коначно особођен 14. октобра 1944. године од стране Црвене армије и партизана. У последњем периоду, град је постао административни, политички, привредни и културни центар тога дела тадашње СФР Југославије. Данас је културни и привредни центар јужне Србије.

Неколико речи о школи домаћину

Гимназија „Бора Станковић” траје 45 година и може се поносити својим доприносом нашој култури, науци, привреди. Формирана је 1. семтембра 1969. године.

У саставу има 25 одељења и 740 ученика распоређених у три смера: природно-математички, друштвено-језички и информатички. Једно одељење природно-математичког смера је двојезично-енглеско. Информатички смер постоји од 2006. године и додатно популаризује гимназију, нудећи с једне стране осавремењене наставне садржаје, а са друге потпуну рачунарску писменост, задржавајући при том неопходан ниво гимназијског образовања.

Селективна је по избору ученика: од укупног броја ученика који се уписују у први разред, 83% су носиоци Вукове дипломе. Пролазност ученика на крају школске године је скоро 100% , а просечна оцена школе је изнад 4.50. На пријемним испитима за факултете, ученици наше школе заузимају сам врх ранг листа, студенти су генерације, будући креативни и научни потенцијал који додатно афирмише школу и град Ниш.

У периоду од 2001-2014. године ученици наше школе освојили су 210 државних награда из готово свих предмета, а из математике, хемије, биологије и филозофије 6 олимпијских награда, док су на екипном математичком такмичењу „Архимедес” освојене две прве награде и више других. Значајно је да је наш ученик Стефан Стефановић освојио сребрну медаљу на 15. међународној филозофској олипијади која је одржана у Анталији, у Турској, у конкуренцији 55 земаља света. Ученик Иван Дамњановић је школи донео једну олимпијску награду из математике такмичећи се у А категорији.

У школи ради много секција: драмска, рецитаторска, новинарска, математичка, музичка, ликовна и бројне спорцке секције. Сваке године, за Дан школе, организује се седмодневна прослава под називом Борини дани, у којој учествују сви чланови колектива.

Из мноштва ваннаставних активности издвојићемо следеће: Драмска секција је у предходном периоду за Дан школе извела следеће представе: „Запиши то Марија”, „Сви моји ученици”, „Антигона”, „Краљева јесен”, „Власт”, „Женски разговори”, „Урнебесна трагедија”, „Коштана”, „Слово о Арсенију и његовом народу”, „Народни посланик”, „Зла жена”, „Ћелава певачица”, „Радован III”, „Пигмилион”, „Професионалац”, „Мрачна комедија”, „Генерална проба самоубиства”, „Лари Томсон - трагедија једне младости”. Новинарска секција издаје часопис Борополитен од 2005. године. Грчки језик, као вид факултативне наставе изводи се од 2005. године.

Клуб за уједињене нације кроз радионице упознаје ученике са системом Уједињиних нација, а кроз акције обележава међународне празнике проглашене од стране Уједињиних нација (Дан заштите животне средине, Дан људских права, Дан толеранције...)

Једно од обележја школе је рад на међународним и државним пројектима чиме се остварује сарадња са бројним државним и образовним институцијама и невладиним организацијама. Међународни пројекти у које је школа укључена су : PASCH, ACES,CONNECTING CLASSROOMS, Junior Achievement Serbia, „Констатиново сунце слободе”. Заслужује да се наведе и сарадња са бројним државним и образовним институцијама: Једна школа, један споменик, Join Multimedia, Seeli, пројекти сарадње преко Београдске Отворене Школе, Млади Истраживачи Србије...

Због остварених резултата из математике у дугогодишњем периоду, нашој школи је указано поверење Друштва математичара Србије за организовање три значајне манифестација: Републичког такмичења из математике 2004. и 2014. године и Српске математичке олимпијаде 2010. године.

О континуираном квалитетном раду Школе сведоче и награде које је добила као што је „25. мај”, „Учитељ Таса”, а 2004. школа је проглашена за најбољу у Србији из хемије од стране фондације Костић. Поред наведеног, школске 2008/2009. године Министарство просвете прогласило је Гимназију „Бора Станковић” за четврту по популарности у Србији, а за прву у Нишком региону.

РЕПУБЛИЧКА КОМИСИЈА

за такмичења из математике ученика средњих школа, школска година 2013/2014.

1. Балтић мр Владимир, Факултет организационих наука, Београд

2. Баралић др Ђорђе, Математички институт САНУ, Београд

3. Башић др Бојан, ПМФ, Нови Сад

4. Божин др Владимир, Математички факултет, Београд

5. Дорословачки др Раде, ФТН, Нови Сад

6. Дугошија др Ђорђе, Математички факултет, Београд

7. Ђикић Марко, ПМФ, Ниш

8. Ђорић Милош, Математички факултет, Београд

9. Ђукић Душан, Машински факултет, Београд

10. Илић др Александар, ПМФ, Ниш

11. Кнежевић мр Миљан, Математички факултет, Београд

12. Кртинић др Ђорђе, Математички факултет, Београд

13. Лукић др Миливоје, Рајс, САД

14. Маринковић Растко, Књажевачка гимназија, Књажевац

15. Марковић др Петар, ПМФ, Нови Сад

16. Матић др Иван, Дјук, САД

17. Милосављевић Милош, Гимназија „Светозар Марковић”, Ниш

18. Пејчев др Александар, Машински факултет, Београд

19. Петковић др Марко, ПМФ, Ниш

20. Петровић др Никола, Институт за физику, Београд

21. Радовановић Марко, Математички факултет, Београд, председник

22. Сеничић мр Александар, Гимназија, Краљево

23. Стојаковић др Милош, ПМФ, Нови Сад

24. Томић Иванка, Гимназија, Ваљево

25. Шобот др Борис, ПМФ, Нови Сад

Превод на мађарски језик:

1. Пеић др Хајналка, Грађевински факултет, Суботица

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 25.1.2014.

Први разред – А категорија

1. За реалне бројеве a, b, c важе неједнакости

$$|b-c| \geqslant |\,a|,\ \ |c-a| \geqslant |\,b|,\ \ |a-b| \geqslant |\,c|.$$

Доказати да је један од бројева a, b, c једнак збиру преостала два.

2. У троугао ABC са страницама $BC = a, CA = b$ и $AB = c$ уписан је круг. Једна тангента тог круга сече странице AC и BC у тачкама P и Q, редом. Одредити обим троугла PQC.

3. Наћи сва целобројна решења једначине

$$6(6a^2 + 3b^2 + c^2) = 5d^2.$$

4. Нека је $ABCD$ четвороугао такав да важи

$$\sphericalangle BCA + \sphericalangle CAD = 180^\circ \text{ и } AB = AD + BC.$$

Доказати да је $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ACD = \sphericalangle CDA$.

5. На одбојкашком турниру учествовало је 10 екипа. Свака од њих одиграла је по једну утакмицу са сваком од преосталих екипа. На крају турнира, прва екипа имала је x_1 победа и y_1 пораза, друга екипа x_2 победа и y_2 пораза, итд. Доказати да је

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{10}^2.$$

(Одбојкашка утакмица се не може завршити нерешеним резултатом.)

Други разред – А категорија

1. Доказати да за све реалне бројеве α, β, γ важи неједнакост

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqslant 1.$$

2. Наћи све реалне бројеве a за које једначина

$$x^2 + y^2 = a(x+1)(y-1)$$

има решења у скупу реалних бројева.

3. Наћи све узајамно просте природне бројеве a и b такве да важи: ако се децималном запису броја a здесна допише зарез, а затим се напише децимални запис броја b, добија се децимални запис броја $\dfrac{b}{a}$.

4. Кружница k_1 са центром у O_1 и полупречником r и кружница k_2 са центром у O_2 и полупречником $2r$ додирују се изнутра. Тетива AB кружнице k_2 изабрана је тако да додирује кружницу k_1 у тачки T и да је AT^2+BT^2 највећи могућ. Ако је $\sphericalangle ATO_2$ туп, одредити $\sphericalangle ATO_2$.

5. Нека су m и n природни бројеви. Табла димензије $n\times n$ обојена је на шаховски начин, тако да је поље у десном доњем углу бело. Аца и Бане играју следећу игру. У сваком потезу, Аца мења боју свим пољима једне врсте, а затим Бане мења боју свим пољима једне колоне (приликом промене боје, црна поља постају бела, а бела постају црна). Доказати да Бане може играти тако да после m одиграних потеза број црних поља на табли буде паран.

Трећи разред – А категорија

1. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$x^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}}=y^2\cdot\sqrt[3]{y^2},$$
$$y^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}}=\sqrt[3]{x^2}.$$

2. Нека су N и S дијаметрално супротне тачке кружнице $\mathcal{C}$ и нека је t тангента кружнице $\mathcal{C}$ у тачки S. Кружница k са центром у O сече кружницу $\mathcal{C}$ у тачкама A и B и ортогонална је на њу. Праве NA, NB и NO секу праву t у тачкама A', B' и O', редом. Доказати да је тачка O' средиште дужи $A'B'$.
(Кружнице γ_1 и γ_2 су ортогоналне ако се секу у тачкама X и Y и при томе су њихове тангенте у тачки X међусобно нормалне.)

3. Наћи све природне бројеве x за које

$$x\mid\lfloor(x-1)\sqrt{x}\rfloor.$$

(Са $\lfloor x\rfloor$ означен је цео део броја x.)

4. Унутар троугла ABC на симетрали угла ACB уочена је тачка M таква да је

$$\sphericalangle MBA=\sphericalangle MAC=30^\circ.$$

Доказати да је $\sphericalangle ACB\leqslant 60^\circ$.

5. Нека је $n\in\mathbb{N}$. Одредити број различитих начина на који се табла димензије $2\times n$ може поплочати доминама (правоугаоницима димензије 1×2 и 2×1) и квадратима димензије 2×2.
(У поплочавању табле свако поље прекривено је тачно једном домином или квадратом.)

Четврти разред – А категорија

1. Тело T запремине $\alpha \in (0,1)$ садржано је у јединичној коцки I. Доказати да постоје коцке K_1 и K_2 за које важи:

1° $K_1, K_2 \subseteq I$;

2° K_1 и K_2 немају заједничких унутрашњих тачака;

3° збир дужине ивице коцке K_1 и дужине ивице коцке K_2 једнак је 1;

4° запремина дела тела T који се налази у K_1 једнака је запремини дела тела T који се налази у K_2.

2. Кошаркаш гађа кош четири пута. Вероватноћа поготка приликом сваког гађања је $1/2$, осим уколико кошаркаш промаши оба пута у прва два бацања, када је вероватноћа поготка у сваком наредном покушају $2/3$.

а) Одредити расподелу вероватноћа броја погодака у 4 бацања.

б) Колика је вероватноћа да је кошаркаш погодио у трећем покушају ако се зна да је имао тачно три поготка?

3. Наћи све парове различитих простих бројева p и q за које је

$$5pq - 1$$

пети степен целог броја.

4. Нека је $ABCD$ тетивни четвороугао за који важи $AD = AB$ и нека је X тачка на страници CD таква да је $\sphericalangle XAD = \sphericalangle ADB$. Доказати да је

$$AX^2 - XD^2 = BC \cdot XD.$$

5. Једнакокраки трапез чије су основице дужина 1 и 5, а крак дужине $\sqrt{7}$, прекривен је са 10 подударних кругова полупречника r. Доказати да је $r \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Први разред – Б категорија

1. Функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задата је са $f(2x+1) = 4x^2 + 4x$, за $x \in \mathbb{R}$.

а) Одредити $f(3)$.

б) Одредити $f(x)$, за све $x \in \mathbb{R}$.

в) Да ли је функција f 1-1 и на-функција?

2. Испитати да ли је формула

$$(p \Leftrightarrow (q \vee r)) \Rightarrow ((p \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge r))$$

таутологија.

3. Група од 300 људи са одређеним тегобама учествује у испитивању такозваног плацебо ефекта. Одређеном броју људи из ове групе дат је одговарајући лек, а преосталима лажни лек (лек који нема никакво дејство). Наравно, нико није знао да ли је добио прави или лажни лек. Испоставило се да је 20% оних који су добили прави лек рекло да не осећа никакво побољшање, док су преостали рекли да им је боље. Двадесет посто оних који су добили лажни лек је потврдило да им је боље, док су преостали из ове групе рекли да не уочавају никакву промену. Ако је укупно 40% људи који су учествовали у експерименту потврдило побољшање сопственог стања, одредити колико њих је добило прави лек, а колико лажни.

4. Колико има 100-цифрених бројева који се записују цифрама $1, 2$ и 3 тако да им никоје две суседне цифре нису једнаке?

5. Три Енглеза и два Француза заинтересовани су за седам различитих књига: три на енглеском језику (траже их само Енглези), две на француском језику (траже их само Французи) и две на српском језику (траже их и Енглези и Французи). На колико начина сваком од њих можемо поклонити по једну књигу?

Други разред – Б категорија

1. Одредити све комплексне бројеве z такве да важи

$$|z+2| = |1-\overline{z}| \quad \text{и} \quad \operatorname{Re}\left(\frac{z}{2+3i}\right) = \frac{1}{13}.$$

2. Нека је BH висина троугла ABC. Круг k, чији је центар на дужи BH, садржи тачке B и C и сече страницу AB у тачки E ($E \neq B$). Ако је дужина дужи AB једнака 16, а дужина дужи BC једнака 12, одредити дужину дужи AE.

3. Одредити број целобројних решења неједначине

$$|x^2 - 9x - 1| \leqslant \sqrt{21}.$$

4. У конвексном четвороуглу $ABCD$ тачке P, Q, R, S изабране су на правама BC, CD, DA, AB, редом, тако да важи

$$\overrightarrow{BP} : \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CQ} : \overrightarrow{CD} = 1:2, \ \overrightarrow{DR} : \overrightarrow{DA} = 2:1, \ \overrightarrow{AS} : \overrightarrow{AB} = 3:2.$$

Ако се праве AP, BQ, CR, DS секу у тачки O, одредити $AO : OP$.

5. У две једнаке кутије је смештено укупно 65 црвених, зелених, жутих и плавих лопти. Поред тога што су различитих боја, лопте се могу разликовати и по величини. При томе, међу сваких пет лопти исте боје извучених из једне кутије, бар две су исте величине. Доказати да постоје бар три лопте које се налазе у истој кутији и које су исте боје и величине.

Трећи разред – Б категорија

1. За које вредности реалног параметра a систем једначина

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x & - & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & + & 4t & = & 2 \\ x & + & 7y & - & 4z & + & 11t & = & a \end{array}$$

има решења у скупу реалних бројева?

2. Нека је S врх тростране пирамиде $SABC$ такве да је

$$SA = SB = SC = a,\ \sphericalangle ASB = 60^\circ,\ \sphericalangle ASC = 90^\circ,\ \sphericalangle BSC = 120^\circ,$$

где је $a \in \mathbb{R}^+$.

а) Доказати да је троугао ABC правоугли.

б) Одредити површину пирамиде $SABC$.

3. Одредити све природне бројеве x и y за које је

$$2014^x + 11^x = y^2.$$

4. Одредити све реалне бројеве $x \geqslant y \geqslant 1$ за које важи

$$2x^2 - xy - 5x + y + 4 = 0.$$

5. За екипу једне школе у шаху треба изабрати три такмичара од 11 кандидата међу којима је 6 дечака и 5 девојчица. На колико начина се то може учинити ако се зна да у екипи мора бити барем једна девојчица?

Четврти разред – Б категорија

1. За комплексан број z важи

$$\arg(z+3) = \frac{\pi}{3}.$$

Одредити најмању могућу вредност $|z|$.

2. Ротацијом координатне равни за угао α око тачке M тачка $A(1,2)$ се пресликава у тачку $A_1(6,5)$, а тачка $B(1,4)$ у тачку $B_1(4,5)$.

а) Одредити слику тачке $C(1,3)$.

б) Наћи величину угла α и координате тачке M.

3. Нека је n природан број. Ако је цифра десетица броја n^2 непарна, доказати да је цифра јединица тог броја једнака 6.

4. Посматрајмо све функције $f : [1801, 2014] \to \mathbb{R}$ такве да

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|, \text{ за све } x, y \in [1801, 2014],$$

и $f(1801) = f(2014) = 0$. Одредити најмању вредност константе C (ако постоји), тако да за свако $x \in [1801, 2014]$ и све овакве функције f важи $f(x) \leqslant C$.

5. На под собе чија је површина 5 постављено је 9 тепиха. Теписи су произвољног облика, а површина сваког је 1. Очигледно, неки теписи се морају преклапати. Доказати да постоје два тепиха за које је површина њиховог преклопа бар $\dfrac{1}{9}$.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 8.2.2014.

Први разред – А категорија

1. Аца, Бранка, Вера и Горан су од наставника математике добили задатак да израчунају количник два позитивна реална броја, и то: Аца да израчуна $a_1 : a_2$, Бранка да израчуна $b_1 : b_2$, Вера да израчуна $v_1 : v_2$, а Горан да израчуна $g_1 : g_2$. Наставник је на табли израчунао количник $(a_1 + b_1 + v_1 + g_1) : (a_2 + b_2 + v_2 + g_2)$. Испоставило се да ниједан од количника који су добили ученици није био већи од оног који је добио наставник (ученици и наставник су тачно израчунали своје количнике). Да ли количници које су добили Бранка и Горан могу бити различити?

2. Конструисати троугао ABC ако су дате две његове странице a и b тако да је величина угла наспрам једне од ових страница три пута већа од величине угла наспрам друге странице.

3. Одредити све природне бројеве k, m и n за које важи

$$2^k + 10^m - 10^n = 2014.$$

4. У троуглу ABC симетрала угла код темена A сече страницу BC у тачки D. Нормала из тачке B на праву AD сече описану кружницу троугла ABD у тачки $E \neq B$. Доказати да центар O описане кружнице троугла ABC лежи на правој AE.

5. У Лудој шуми живело је 6 вукодлака, 17 једнорога и 55 паукова. Вукодлак може да поједе паука и једнорога, али не и другог вукодлака, паук може да поједе једнорога, али не и вукодлака или другог паука, а једнорог не може да поједе ни вукодлака ни паука ни другог једнорога. Када год вукодлак поједе паука, претвара се у једнорога, а када поједе једнорога, претвара се у паука; такође, када паук поједе једнорога, постаје вукодлак. Колико највише створења може остати у шуми када више нико никог не буде могао да поједе?

Други разред – А категорија

1. Да ли постоје квадратне функције $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да је збир ма које две од њих квадратна функција која има бар једну реалну нулу, а збир све три квадратна функција која нема реалних нула?

2. Нека су AB и CD дужи дужине 1 које се секу у тачки O и при томе важи $\sphericalangle AOC = \dfrac{\pi}{3}$. Доказати да је

$$AC + BD \geqslant 1.$$

3. Одредити највећи заједнички делилац свих бројева из скупа

$$\{(n+2014)^{n+2014} + n^n \mid n \in \mathbb{N},\ n > 2014^{2014}\}.$$

4. Нека је $A_1A_2A_3A_4A_5$ тетивни петоугао чији су сви унутрашњи углови тупи. Нека су S_1, S_2, S_3, S_4 и S_5 центри уписаних кружница троуглова $A_5A_1A_2$, $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_5$ и $A_4A_5A_1$, редом. Доказати да су сви унутрашњи углови петоугла $S_1S_2S_3S_4S_5$ тупи.

5. За становнике планете P, којих можда има и бесконачно много, важи следеће:

(1) сваки становник воли тачно једног и поштује тачно једног становника;

(2) ако становник A воли становника B, онда сви становници који поштују становника A воле становника B;

(3) ако становник A поштује становника B, онда сви становници који воле становника A поштују становника B;

(4) за сваког становника постоји неко ко га воли.

Да ли је обавезно тачно да сваки становник воли онога кога поштује? (Становник може поштовати или волети себе.)

Трећи разред – А категорија

1. Нека су x, y, z реални бројеви такви да важи $x+y+z=0$. Доказати да важи неједнакост

$$6(x^3+y^3+z^3)^2 \leqslant (x^2+y^2+z^2)^3.$$

2. Нека су $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такви да је $0 \leqslant k \leqslant n$. Доказати да важи

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n+1}{i} + \sum_{i=0}^{n-k} 2^i \binom{n-i}{k} = 2^{n+1}.$$

3. Знајући да важи

$$(4005 \cdot 6!)^3 = (5\,021\,004\,40a\,22b\,000\,000\,000\,000)_6,$$

одредити цифре a и b.
(За целе бројеве $0 \leqslant a_0, a_1, \ldots, a_k \leqslant 5$ ознака $(a_k \ldots a_1 a_0)_6$ представља запис броја у бази са основом 6.)

4. Тачка D унутар оштроуглог троугла ABC изабрана је тако да важи $AD = BD$. Нека је тачка E пресек правих CD и AB. Ако је $AE : EB = CD : CE$, доказати да је $CB = CE$.

5. У некој земљи живи коначно много становника. Сваки од њих воли бар једног и поштује бар једног становника (не обавезно истог). Познато је да:

(1) ако становник A воли становника B, онда сви становници који поштују становника A воле становника B;

(2) ако становник A поштује становника B, онда сви становници који воле становника A поштују становника B.

Доказати да постоји становник који воли себе.

Четврти разред – А категорија

1. Одредити све тројке позитивних реалних бројева (a, b, c) такве да једначина

$$a^x + b^x + c^x = 3$$

има барем три различита решења у скупу реалних бројева.

2. За природне бројеве k и n означимо са $d_k(n)$ број делилаца броја n не мањих од k. Одредити

$$d_1(2015) + d_2(2016) + d_3(2017) + \ldots + d_{2014}(4028).$$

3. Одредити највећи природан број k такав да постоји природан број $n \geqslant k$ за који је сваки од бројева

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{k}$$

потпун квадрат.

4. На кружници k_0 дате су тачке A, B и C. Кружнице k', k'' и k''' нормалне су на кружницу k_0, и притом k' пролази кроз A и B, k'' кроз A и C, а k''' кроз B и C. На кружници k''' дата је тачка $P \notin \{B, C\}$, а потом су повучене кружнице k_1 и k_2 које пролазе кроз P и које су нормалне на k_0, при чему је k_1 нормална и на k', а k_2 на k''. Доказати да су кружнице k_1 и k_2 међусобно нормалне.
(Кружнице γ_1 и γ_2 су нормалне ако се секу у тачкама X и Y и при томе су њихове тангенте у тачки X међусобно нормалне.)

5. Играчи A и B наизменично замењују звездице у

$$\star 1 \star 2 \star 2^2 \star 2^3 \star \ldots \star 2^{999} \star 2^{1000}$$

знацима $+$ и $-$. Играч B побеђује ако је по завршетку игре вредност добијеног израза дељива са 17. У супротном побеђује играч A. Ако играч A почиње игру, како треба да игра да би сигурно победио?

Први разред – Б категорија

1. За скупове A, B, C, нека је

$$P = (A \setminus B) \cup C \quad \text{и} \quad Q = (A \cup C) \setminus B.$$

Испитати да ли за све овакве скупове важи нека од релација $P \subseteq Q$, $P = Q$ или $Q \subseteq P$.

2. Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао код кога је $AB = AF$, $BC = CD$ и $DE = EF$. Доказати да се симетрале углова BAF, BCD и DEF секу у једној тачки.

3. У скупу целих бројева решити једначину

$$9a^2 - b^2 + 6b = 2014.$$

4. Нека је ABC троугао такав да важи $\sphericalangle ABC \geqslant \sphericalangle BCA$. Симетрала угла код темена A овог троугла сече страницу BC у тачки D. Нормала из тачке B на праву AD сече описану кружницу троугла ABD у тачки $E \neq B$. Доказати да центар O описане кружнице троугла ABC лежи на правој AE.

5. На стоваришту се налази 80 балвана. Неки имају дужину 3m, неки 4m, неки 5m, а неки 6m. Познато је да балвана дужине 4m има дупло више од балвана дужине 5m. Укупна дужина свих балвана је 345m. Све балване треба разрезати на комаде дужине 1m. Колико резова треба направити (једним резом може се разрезати само један балван)?

Други разред – Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\sqrt{\frac{7x-1}{x}} > \frac{x-1}{x}\,.$$

2. У скупу реалних бројева решити једначину

$$(x^2+x+3)(x^2+3x+3) = 3x^2.$$

3. У скупу целих бројева решити једначину

$$3a^2+3a+2014 = b^3.$$

4. Нека је I центар уписаног круга, а AE симетрала угла BAC троугла ABC (E је на дужи BC). Доказати да важи

$$\frac{AI}{IE} = \frac{AC+AB}{BC}\,.$$

5. Нека је n природан број већи од 2. Колико има тројки (A, B, C) подскупова скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ таквих да је

$$A \cap B \cap C = \emptyset, \quad |A \cap B| = 2 \quad \text{и} \quad |A \cap C| = 1\,?$$

Трећи разред – Б категорија

1. Нека је $a = -1 + i\sqrt{3}$, $b = -1 - i\sqrt{3}$, $c = 2$ и n природан број који није дељив са 3. Одредити $a^n + b^n + c^n$.

2. Нека су $\vec{m}$ и $\vec{n}$ ненула вектори и $\vec{a} = \vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{b} = 7\vec{m} - 5\vec{n}$, $\vec{c} = \vec{m} - 4\vec{n}$, $\vec{d} = 7\vec{m} - 2\vec{n}$. Ако је $\vec{a} \perp \vec{b}$ и $\vec{c} \perp \vec{d}$:

а) доказати да је $|\vec{m}| = |\vec{n}|$;

б) одредити угао између вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

3. Нека је a рационалан број већи од $\dfrac{4}{3}$. Ако је x реалан број такав да су $x^2 - ax$ и $x^3 - ax$ рационални бројеви, доказати да је x рационалан број.

4. Сваке две од кружница k_1, k_2 и k_3 додирују се међусобно споља и свака од њих додирује кружницу k изнутра. Ако су O_1, O_2, O_3 и O

центри кружница k_1, k_2, k_3 и k, редом, доказати да је O центар кружнице уписане у троугао $O_1O_2O_3$ ако и само ако кружнице k_1, k_2 и k_3 имају једнаке полупречнике.

5. Свака од машина А, Б и В може да прочита картицу на којој је уписан пар целих бројева (m, n) и да затим одштампа нову картицу. При томе,

(1) ако машина А учита картицу на којој је пар (m, n), она штампа нову картицу са паром $(m - n, n)$;

(2) ако машина Б учита картицу на којој је пар (m, n), она штампа нову картицу са паром $(m + n, n)$;

(3) ако машина В учита картицу на којој је пар (m, n), она штампа нову картицу са паром (n, m);

На почетку је дата картица на којој је уписан пар $(19, 81)$. Да ли је могуће употребом ове три машине у произвољном поретку добити картицу на којој је уписан пар:
а) $(7, 13)$; б) $(12, 21)$?

Четврти разред – Б категорија

1. Доказати да за $x > 1$ важи неједнакост

$$\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}\,.$$

2. Нека је $ABCDV$ пирамида чија је основа $ABCD$ конвексан четвороугао са нормалним дијагоналама. При томе, подножје висине пирамиде налази се у пресеку дијагонала четвороугла $ABCD$. Ако су α, β, γ и δ углови које висина заклапа са бочним странама ABV, BCV, CDV и DAV, редом, доказати да је

$$\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\gamma = \operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\delta.$$

3. Нека су x и y цели бројеви такви да је број $3x + 7y$ дељив са 19. Доказати да је и број $43x + 75y$ дељив са 19.

4. Нека је R полупречник споља приписане кружнице која одговара хипотенузи правоуглог троугла ABC. Доказати да је

$$\frac{R}{c} \leqslant \frac{1+\sqrt{2}}{2},$$

где је c дужина хипотенузе троугла ABC.
(Спољa приписана кружница која одговара хипотенузи троугла је кружница која додирује хипотенузу и продужетке катета.)

5. Функција $f : \mathbb{N} \setminus \{1\} \to \mathbb{N}$ дефинисана је на следећи начин: ако су $p_1, p_2, \dots, p_k$ различити прости бројеви и $\alpha_i \in \mathbb{N}$, за $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, онда је

$$f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}) = p_1^{\alpha_1^2} p_2^{\alpha_2^2} \dots p_k^{\alpha_k^2}.$$

Доказати да важи:

а) $f(ab) \leqslant (f(a) \cdot f(b))^2$, за све $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$;

б) $f(a^{2^n}) = (f(a))^{4^n}$, за све $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и $n \in \mathbb{N}$.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 15.3.2014.

Први разред – А категорија

1. За бројеве a, b, c, x, y и z важи $\{a, b, c\} = \{x, y, z\} = \{15, 3, 2014\}$. Да ли број

$$a^{b^c} + x^{y^z}$$

мора бити сложен?
(За $m, n, k \in \mathbb{N}$ је са m^{n^k} означен број $m^{(n^k)}$.)

2. Нека су a, b и c странице, S површина, R полупречник описане кружнице и M тачка у унутрашњости троугла ABC. Означимо са d_a, d_b и d_c растојања тачке M од правих које садрже странице троугла ABC. Доказати да важи неједнакост

$$2S \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{R} \right) > d_a + d_b + d_c.$$

3. На столу се налази гомила са n жетона. Два играча, А и Б, наизменично играју, при чему играч А игра први. У сваком потезу играч или узима један жетон са неке од гомила или дели неку од гомила на неколико гомила (барем две) са међусобно једнаким бројем жетона (ако играч узме последњи жетон са гомиле она престаје да постоји). Победник је играч који узме последњи жетон са стола. За које вредности броја n играч А има победничку стратегију, а за које вредности броја n играч Б има победничку стратегију?

4. Одредити све полиноме $R(x)$ чији су сви коефицијенти из скупа $\{-1, 1\}$ и за које важи $R(3) = 130$ и $R(-2) = -45$.

Други разред – А категорија

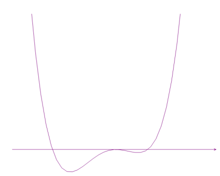
1. Да ли постоји коначно или бесконачно много природних бројева m за које постоје природни бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_{2014}$ такви да је

$$a_1! + a_2! + \ldots + a_{2014}! = m!\,?$$

2. Перица је замислио три реална броја a, b и c и у свесци скицирао график функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ за коју је

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)(cx^2 + bx + a).$$

Његов млађи брат Микица је искористио прилику када Перица није био код куће и са скице избрисао y осу. Наредног дана Перица је приметио да његовој скици недостаје y оса. Покушао је да се присети функције чији је график скицирао. Успео је да се сети да је функција облика $f(x) = (ax^2 + bx + c)(cx^2 + bx + a)$, али није успео да се сети вредности бројева a, b и c. Да ли је могуће да Перица конструише y осу, ако је у свесци пронашао скицу приложену на слици? Претпоставља се да је Перица првобитно тачно скицирао график функције.



3. Нека је M средиште лука BC описане кружнице k троугла ABC који не садржи тачку A. Споља приписана кружница троугла ABC наспрам темена A, са центром S, додирује страницу BC у тачки D. Ако права MD сече кружницу k у тачки P $(P \neq M)$ доказати да је $\sphericalangle APS = 90^\circ$.

4. У низу је дато $n \geqslant 3$ сијалица. Испод сваке сијалице налази се прекидач. Притиском на прекидач испод сијалице са редним бројем i, $1 < i < n$, мења се стање сијалица са редним бројевима $i-1$, i и $i+1$; притиском на прекидач испод прве сијалице мења се стање прве и друге сијалице, док се притиском на прекидач испод сијалице са редним бројем n мења стање сијалица са редним бројевима $n-1$ и n. Одредити све природне бројеве n за које је без обзира на почетно стање сијалица могуће у коначно много потеза добити стање у којем су све сијалице упаљене.

Трећи разред – А категорија

1. У троуглу ABC је $AB = AC$. Тачке D, E и F изабране су на страницама BC, CA и AB, редом, тако да праве EF и BC нису паралелне и да важи $\sphericalangle EDF = \sphericalangle ABC$. Доказати да права BC додирује описану кружницу троугла DEF ако и само ако је D средиште странице BC.

2. За непразне подскупове A и B скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ пишемо $A < B$ ако је сваки елемент скупа A мањи од сваког елемента скупа B. Доказати да је број парова непразних подскупова (A, B) скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ таквих да је $A < B$ једнак $(n-2)2^{n-1} + 1$.

4. Одредити све $n \in \mathbb{Z}$ такве да се из скупа $\{n, n+1, \ldots, n+2014\}$ може избацити један број, тако да се остали бројеви могу поделити на два дисјунктна скупа A и B, за које је $|A| = |B|$ и

$$\sum_{k \in A} k^2 = \sum_{k \in B} k^2.$$

3. Одредити све природне бројеве n такве да

$$3^n - 2^n \mid 6^n + 3^n + 1.$$

Четврти разред – А категорија

1. За целе бројеве a, b и c бројеви $a + b + c$, $a^2 + b^2 + c^2$ и $a^3 + b^3 + c^3$ дељиви су са 2013. Доказати да

$$2013^3 \mid abc(a-b)(b-c)(c-a).$$

2. Дати су позитивни бројеви a, b и c такви да важи $ab + bc + ca = 3$. Доказати неједнакост

$$\frac{1}{4 + (a+b)^2} + \frac{1}{4 + (b+c)^2} + \frac{1}{4 + (c+a)^2} \leqslant \frac{3}{8}\,.$$

3. Права ℓ садржи средиште M странице BC троугла ABC и сече праве AB и AC у тачкама D и E, редом. Нека је K средиште дужи DE. Доказати да растојање од тачке D до праве AK није веће од $BC/2$.

4. На папиру је нацртан правилан шестоугао. Аца и Воја наизменично бирају по једну тачку са руба тог многоугла, при чему Аца тачку увек боји плавом, а Воја црвеном бојом (свака тачка може бити одабрана највише једном). Аца игра први. Игру добија играч који први оствари да међу тачкама које је до тада обојио постоје три које чине темена једнакостраничног или темена једнакокрако правоуглог троугла. Да ли неки од играча има победничку стратегију?

Први разред – Б категорија

1. Нека је $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$p(x) = ax^{2015} + bx^{2013} + cx^{11} + dx^3 + 16x^2 + 3$$

и $p(8) = 2014$. Одредити могуће вредности $p(-8)$.

2. Ако за реалне бројеве a, b, c, x, y и z важи $ax + by + cz = 0$ и ако је израз

$$\frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2 + ab(x-y)^2}$$

дефинисан, доказати да његова вредност не зависи од x, y и z.

3. У скупу природних бројева решити једначину

$$m^m + (mn)^n = 2014.$$

4. Нека су AD и BE висине оштроуглог троугла ABC. Права DE сече описану кружницу троугла ABC у тачкама M и N. Доказати да је $CM = CN$.

5. Посматрајмо све речи дужине 6 састављене од 30 слова азбуке у којима су сва слова различита и поређана у азбучном поретку. Да ли у свим оваквим речима има више појава слова М или слова С?
(На пример АБВГЗШ је таква реч, а ГКЗХИЦ није)

Други разред – Б категорија

1. Да ли постоји комплексан број z који није реалан такав да су бројеви

$$z^{15} - \frac{1}{z^{15}}, \quad z^3 - \frac{1}{z^3} \quad \text{и} \quad z^{2014} - \frac{1}{z^{2014}}$$

реални?

2. Нека је BD висина троугла ABC. Тачке M и N изабране су у равни троугла ABC тако да важи $AN \perp AB$, $CM \perp BC$, $AN = DC$ и $CM = AD$. Доказати да је $BM = BN$.

3. Одредити све природне бројеве m, n и p такве да важи

$$m! + n! = 5^p.$$

(За $k \in \mathbb{N}$ је $k! = k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.)

4. На папиру је нацртана кружница. Аца и Воја наизменично бирају по једну тачку са кружнице, при чему Аца тачку увек боји плавом, а Воја увек црвеном бојом (свака тачка може бити одабрана највише једном). Аца почиње игру. У игри побеђује играч који први оствари да међу тачкама које је до тада обојио постоје три које чине темена једнакостраничног или темена једнакокрако правоуглог троугла. Да ли неки од играча може играти тако да победи без обзира на то како игра други играч?

5. Одредити број различитих начина да топ стигне од левог доњег до десног горњег поља табле 3×7, уколико је дозвољено да се креће само удесно и нагоре.
(Топ је фигура која се у једном потезу помера са поља A на поље које се налази у истој врсти или колони као поље A. Два кретања топа су различита уколико се у другој кретњи топ зауставља на барем једно поље на које се није зауставио у првој кретњи.)

Трећи разред – Б категорија

1. Нека је n природан број. Одредити најмањи природан број a за који систем једначина

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & \dots & + & x_n & = & a \\ {x_1}^{2014} & + & {x_2}^{2014} & + & \dots & + & {x_n}^{2014} & = & a \end{array}$$

нема целобројних решења.

2. У комплексној равни дат је једнакостраничан троугао. Ако једном темену овог троугла одговара комплексан број $\sqrt{3}+5i$, а центру троугла комплексан број $2i$, одредити комплексне бројеве који одговарају преосталим теменима троугла.

3. Наћи све природне бројеве n за које постоји природан број x тако да

$$2014 \mid (3x+16)^n - 2015.$$

4. У равни су дате праве p, q и r и тачке $P_1, P_2, P_3 \in p$, $Q_1, Q_2, Q_3 \in q$ и $R_1, R_2, R_3 \in r$ такве да је P_2 између P_1 и P_3, Q_2 између Q_1 и Q_3, R_2 између R_1 и R_3, при чему важи

$$P_1P_2 : P_2P_3 = Q_1Q_2 : Q_2Q_3 = R_1R_2 : R_2R_3.$$

Доказати да су тежишта $\triangle P_1Q_1R_1$, $\triangle P_2Q_2R_2$ и $\triangle P_3Q_3R_3$ колинеарна.

5. У низ је поређано 2014 сијалица. Испод сваке сијалице налази се прекидач. Притиском на прекидач испод сијалице са редним бројем i, за $1 < i < 2014$, мења се стање сијалица са редним бројевима $i-1$, i и $i+1$; притиском на прекидач испод прве сијалице мења се стање прве и друге сијалице, док се притиском на прекидач испод сијалице са редним бројем 2014 мења стање сијалица са редним бројевима 2013 и 2014.
а) Ако су на почетку све сијалице угашене да ли се низом потеза може добити да све сијалице буду упаљене?
б) Ако је на почетку једна сијалица упаљена, а преосталих 2013 угашено, да ли се без обзира која је сијалица упаљена може доћи до стања у којем су све сијалице упаљене?

Четврти разред – Б категорија

1. Доказати да је број

$$5^n(5^n+1)-6^n(3^n+2^n)$$

дељив са 13 за сваки природан број n.

2. Раван π пресеца бочне ивице правилне четворостране пирамиде у тачкама A, B, C и D које се налазе на удаљеностима a, b, c и d, редом, од врха пирамиде. Доказати да важи једнакост

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\,.$$

3. Доказати да је за сваки природан број n већи од 1 број

$$n\cdot 2^{n-1}+(n-1)\cdot 2^{n-2}+\ldots+3\cdot 2^2+2\cdot 2^1$$

дељив са 2^n.

4. Дат је једнакостранични троугао. Колико има елипси које се могу описати око датог троугла?

5. Три математичара имају шешире на којима су написани неки природни бројеви. Њима је познато да је један од бројева једнак збиру друга два броја, и при томе сваки математичар види бројеве исписане на шеширима друге двојице, али не и на свом. Први каже: „Ја не знам који је број на мом шеширу”, на шта други изјављује: „Ни ја не знам који је број на мом”. Затим први констатује: „Ја сада знам који је број на мом шеширу”, а други закључује: „Онда на мом шеширу мора бити број 2014”. Који су бројеви написани на шеширима?

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 25.1.2014.

Први разред - А категорија

1. Приметимо да бројеви $-a, -b$ и $-c$ такође задовољавају услове задатка, па можемо претпоставити да је барем један од бројева a, b и c ненегативан. Дати услов је симетричан, па, без умањења општости, можемо претпоставити да је $a \leqslant b \leqslant c$. По услову задатка је

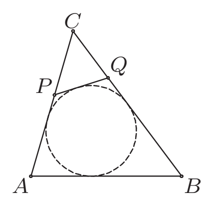
$$|c| + |a| \leqslant |a-b| + |b-c| = b - a + c - b = |c-a|,$$

а из неједнакости троугла, $|c-a| \leqslant |c|+|a|$. Дакле, у свакој од претходних неједнакости мора важити једнакост, па је $c = |c| = |a-b| = b-a$, тј. $b = c + a$.

2. По услову задатка четвороугао $ABQP$ је тангентан, па је $AB + PQ = AP + BQ$, односно

$$AB + PQ = AC - CP + BC - CQ.$$

Самим тим, обим троугла PQC једнак је $a + b - c$. (Тангента 66, стр. 40, зад. 5)



Оп 2014 1А 2

3. Доказаћемо да је $a = b = c = d = 0$ једино решење ове једначине. Претпоставимо супротно, тј. да је четворка целих бројева $(a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)$ решење дате једначине. Нека је $u =$ НЗД (a,b,c,d) и $a = ux, b = uy, c = uz, d = ut$. Дељењем полазне једначине са u^2 добијамо

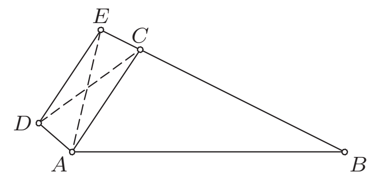
$$6(6x^2 + 3y^2 + z^2) = 5t^2, \qquad (*)$$

при чему је НЗД $(x,y,z,t) = 1$. Из дате једнакости одмах закључујемо да је t дељиво са 6, тј. $t = 6t_1$, $t_1 \in \mathbb{Z}$. Заменом у $(*)$ добијамо $6x^2 + 3y^2 + z^2 = 30t_1^2$, па је $3y^2 + z^2$ паран број, односно y и z су исте парности. Приметимо да квадрати непарних бројева дају остатак 1 при дељењу са 8, а квадрати парних 0 или 4. Ако су y и z непарни бројеви, тада је $3y^2 + z^2 \equiv 4 \pmod 8$, па је и $30t_1^2 - 6x^2 \equiv 4 \pmod 8$, а самим тим и $15t_1^2 - 3x^2 \equiv 2 \pmod 4$. Одавде закључујемо да је $15t_1^2 - 3x^2$ паран број, па су бројеви t_1 и x исте парности. Ако су оба парна, тада је $15t_1^2 - 3x^2 \equiv 0 \pmod 4$, а уколико су оба непарна $15t_1^2 - 3x^2 \equiv 15 - 3 \equiv 0 \pmod 4$, што није могуће. Дакле, бројеви y и z морају бити парни. Нека је $y = 2y_1$ и $z = 2z_1$. Заменом у $(*)$ и дељењем са 12 добијамо

$$3x^2 + 6y_1^2 + 2z_1^2 = 15t_1^2.$$

Дакле, $15t_1^2 - 3x^2$ је паран број, па су x и t_1 исте парности. Како је НЗД$(x,y,z,t) = 1$, то су x и t_1 непарни. Тада је $3x^2 - 15t_1^2 \equiv 4 \pmod 8$, па је $6y_1^2+2z_1^2 \equiv 4 \pmod 8$, односно $3y_1^2+z_1^2 \equiv 2 \pmod 4$. Дакле, y_1 и z_1 су исте парности, па слично као у претходном делу задатка закључујемо да је $3y_1^2+z_1^2 \equiv 0 \pmod 4$, што је контрадикција.

4. Изаберимо тачку E на правој BC тако да важи $E-C-B$ и $EC = AD$. По услову задатка је $\sphericalangle ACE = 180^\circ - \sphericalangle ACB = \sphericalangle DAC$, па су троуглови ACD и CAE подударни ($AD = CE, AC = CA$ и $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ECA$). Дакле, $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BEA$ и $\sphericalangle EAC = \sphericalangle DCA$.



Оп 2014 1А 4

Са друге стране, троугао ABE је једнакокраки, па је $\sphericalangle CDA = \sphericalangle BEA = \sphericalangle BAE = \sphericalangle EAC + \sphericalangle CAB = \sphericalangle ACD + \sphericalangle CAB$, што је и требало доказати.

5. Свака екипа одиграла је по 9 мечева, а како нема нерешених резултата, то је $x_i + y_i = 9$, за све $1 \leqslant i \leqslant 10$. На сваком мечу победила је тачно једна екипа, па је збир $x_1+x_2+\ldots+x_n$ једнак укупном броју одиграних мечева, тј. $\binom{10}{2} = 45$. Сада је

$$\begin{aligned}
y_1^2+y_2^2+\ldots+y_{10}^2 &= (9-x_1)^2+(9-x_2)^2+\ldots+(9-x_{10})^2\\
&= 10\cdot 81 - 18\cdot(x_1+x_2+\ldots+x_{10}) + x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{10}^2\\
&= x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{10}^2,
\end{aligned}$$

што је и требало доказати. (Тангента 72, М1126)

Други разред - А категорија

1. Дату неједнакост довољно је доказати у случају $\alpha,\beta,\gamma \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, јер за свако $x \in \mathbb{R}$ постоји $x' \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ тако да важи $\sin x' = |\sin x|$ и $\cos x' = |\cos x|$. Тражена неједнакост сада следи из

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma &\leqslant \max\{\sin\gamma,\cos\gamma\}\cdot(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta)\\
&= \max\{\sin\gamma,\cos\gamma\}\cdot\cos(\alpha-\beta) \leqslant 1.
\end{aligned}$$

(Тангента 65, стр. 38, зад. 1)

2. Запишимо једначину као квадратну по y:

$$y^2 - a(x+1)y + (x^2+ax+a) = 0.$$

Њена дискриминанта је

$$D(x) = a^2(x+1)^2 - 4(x^2+ax+a) = (a^2-4)x^2 + (2a^2-4a)x + (a^2-4a).$$

Да би полазна једначина имала реална решења потребно је и довољно да за неко $x \in \mathbb{R}$ важи $D(x) \geqslant 0$. Ако је $|a| > 2$, такво x постоји. Са друге стране, ако је $|a| < 2$, такво x постоји ако и само ако је дискриминанта квадратне једначине $D(x) = 0$ ненегативна. Дакле,

$$0 \leqslant 4(a^2 - 2a)^2 - 4(a^2 - 4)(a^2 - 4a) = 32a(a - 2),$$

па је $a \leqslant 0$. Најзад, за $a = 2$ је $D(x) = -4$ за све x, па тада полазна једначина нема решења, а за $a = -2$ је $D(x) = 16x + 12$, што узима и позитивне вредности, па тада полазна једначина има решења.
Одговор је $a \in (-\infty, 0] \cup (2, \infty)$.

3. Уколико број b има тачно k цифара у децималном запису, дати услов еквивалентан је са

$$a + \frac{b}{10^k} = \frac{b}{a},$$

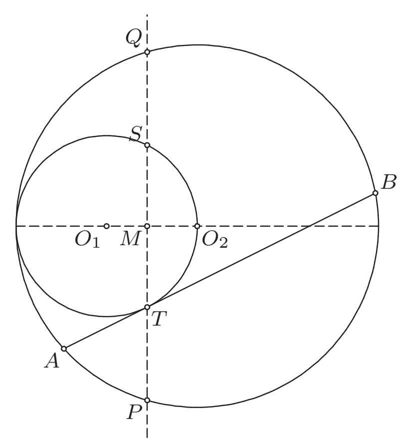
односно $ab = (b - a^2)10^k$. Приметимо да су бројеви b и $b - a^2$ узајамно прости, јер су бројеви b и a^2 узајамно прости. Слично, бројеви a и $b - a^2$ су узајамно прости, па како $b - a^2$ дели ab, то је $b - a^2 = 1$ и $ab = 10^k$. Из прве једнакости је $b > a$, па из друге закључујемо да је $(a, b) = (1, 10^k)$ или $(a, b) = (2^k, 5^k)$ (a и b су узајамно прости). У првом случају добијамо $10^k = 2$, што није могуће. Други случај еквивалентан је са $5^k - 4^k = 1$, односно

$$\frac{5^k}{4^k} - 1 = \frac{1}{4^k}.$$

Приметимо да је за $k > 1$ десна стана претходне једнакости мања од $1/4$, а лева већа од $5/4 - 1 = 1/4$, па је $k = 1$.
Једино решење је пар $(a, b) = (2, 5)$. (Тангента 70, М1090)

4. Нека је PQ тетива кружнице k_2 која пролази кроз T и нормална је на O_1O_2, и нека она сече праву O_1O_2 у тачки M а кружницу k_1 други пут у тачки S. Како је $\sphericalangle BTO_2 = \sphericalangle O_2ST = \sphericalangle O_2TS$, следи $AT = PT$ и $BT = QT$. Нека је $O_1M = x$. Из Питагорине теореме добијамо

$$\begin{aligned} QM^2 &= QO_2^2 - MO_2^2 \\ &= (2r)^2 - (r - x)^2 \\ &= 3r^2 + 2rx - x^2 \\ TM^2 &= TO_1^2 - MO_1^2 = r^2 - x^2. \end{aligned}$$



Оп 2014 2А 4

Како је $PT = PM - TM = QM - TM$ и $QT = QM + TM$, добијамо

$$PT^2 + QT^2 = 8r^2 + 4rx - 4x^2 = 9r^2 - (2x - r)^2.$$

Ова вредност достиже максимум за $x = r/2$. Сада из $\triangle TO_1M$ следи $\sphericalangle TO_1M = 60^\circ$, па је $\triangle TO_1O_2$ једнакостраничан, тј. $\sphericalangle ATO_2 = 150^\circ$.

Друго решење. Нека је $\sphericalangle BTO_2 = \varphi$. Тада је $\sphericalangle O_2TO_1 = 90^\circ - \varphi$, па је $TO_2 = 2r\cos(90^\circ - \varphi)$. Нека је U подножје нормале из O_2 на AB. Тада је $O_2U = TO_2 \sin\varphi = 2r\sin^2\varphi$ и $TU = TO_2\cos\varphi = 2r\sin\varphi\cos\varphi = r\sin 2\varphi$. Сада можемо израчунати и $UB^2 = (2r)^2 - O_2U^2 = 4r^2(1 - \sin^4\varphi)$. Најзад, из $AT = UB - UT$ и $BT = UB + UT$ добијамо

$$\begin{aligned} AT^2 + BT^2 &= 2UB^2 + 2UT^2 = 2(4r^2(1 - \sin^4\varphi) + r^2\sin^2 2\varphi) \\ &= 8r^2(1 - \sin^4\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\varphi) \\ &= 8r^2(1 - 2\sin^4\varphi + \sin^2\varphi) = r^2(9 - (4\sin^2\varphi - 1)^2). \end{aligned}$$

Ова вредност достиже максимум за $\sin^2\varphi = \frac{1}{4}$, тј. за $\sin\varphi = \pm\frac{1}{2}$. Како је φ оштар угао следи $\varphi = 30^\circ$. Одатле је $\sphericalangle ATO_2 = 150^\circ$.

5. Приметимо да су у почетној позицији поља на главној дијагонали табле беле боја, као и да се симетријом у односу на главну дијагоналу бела поља сликају у бела, а црна у црна. Дакле, на почетку је број црних поља паран. Да би остварио свој циљ, Бане може играти на следећи начин: када Аца промени боју пољима i-те по реду врсте гледано од горње ивице, он промени боју пољима i-те по реду колоне гледано слева. Заиста, после сваког одиграног потеза сва поља на главној дијагонали остају беле боје (тачно једном пољу се боја мења и то два пута), а табла остаје симетрична у односу на главну дијагоналу, па је број црних поља паран.

Трећи разред - А категорија

1. Да би дати изрази били дефинисани мора бити $x > 0$ и $y > 0$. Пар $(x, y) = (1, 1)$ је решење датог система. Такође, ако је $x = 1$ тада је $y = 1$, и слично, ако је $y = 1$ тада је $x = 1$. Зато, можемо претпоставити да је $x \neq 1$ и $y \neq 1$. Логаритмовањем (са основом 10) датих једнакости добијамо систем

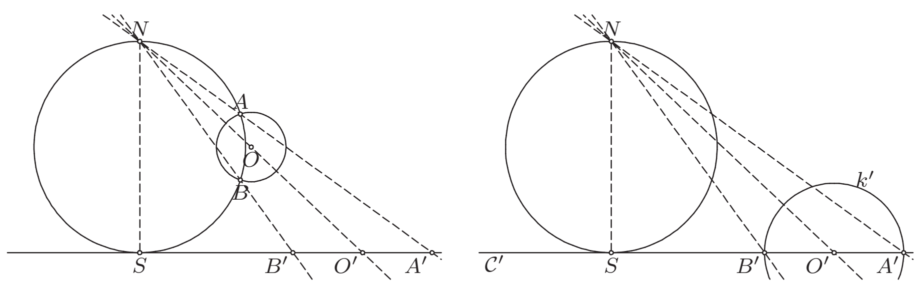
$$\begin{array}{rcl} (\sqrt[4]{x} + \sqrt{y}) \cdot \log x &=& \dfrac{8}{3} \cdot \log y \\ (\sqrt[4]{x} + \sqrt{y}) \cdot \log y &=& \dfrac{2}{3} \cdot \log x \end{array} \quad , \text{ односно } \quad \begin{array}{rcl} \sqrt[4]{x} + \sqrt{y} &=& \dfrac{8\log y}{3\log x} \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt{y} &=& \dfrac{2\log x}{3\log y} \end{array} .$$

Из последњег система добијамо $4 \cdot \log^2 y = \log^2 x$, односно $2 \cdot \log y = \log x$ или $2 \cdot \log y = -\log x$. Ако је $2 \cdot \log y = \log x$, тада $x = y^2$, па из последњег система добијамо $2\sqrt{y} = 4/3$, тј. $(x, y) = (16/81, 4/9)$. Ако је $2 \cdot \log y = -\log x$, тада је $\sqrt[4]{x} + \sqrt{y} < 0$, што није могуће.

Сва решења система су парови $(x, y) = (1, 1)$ и $(x, y) = \left(\dfrac{16}{81}, \dfrac{4}{9}\right)$.

(Тангента 72, М1129)

2. Посматрајмо инверзију са центром у N и полупречником NS. Овом инверзијом се кружница $\mathcal{C}$ пресликава у праву t и обратно, права t у кружницу $\mathcal{C}$. Самим тим се тачке A и B пресликавају у тачке A' и B', редом. Кружница k, нормална на кружницу $\mathcal{C}$, пресликава се у кружницу k', нормалну на праву t. То значи да је центар кружнице k' на правој t и да је дуж $A'B'$ пречник кружнице k'. Права NO пресликава се у саму себе, па како је она нормална на кружницу k, нормална је и на њену слику k'. Другим речима, центар кружнице k' лежи на правој ON. Како центар кружнице k' припада и правој t и правој ON, он се поклапа са O'. Тачка O' је центар кружнице k', а $A'B'$ њен пречник, па је O' заиста средиште дужи $A'B'$. (Тангента 65, М982)



Оп 2014 3А 4

3. Нека су n и m јединствени природни бројеви такви да је $x = n^2 + m$ и $0 \leqslant m \leqslant 2n$. За $x \leqslant 3$ решења задатка су $x = 1$ и $x = 3$, па можемо претпоставити да је $x > 3$.

Приметимо да важи $(n-1)x+1 < (x-1)\sqrt{x}$, јер је то након квадрирања и сређивања еквивалентно са $1 < (2n-3)x(x-1)+mx^2$. Са друге стране је $(x-1)\sqrt{x} < (n+1)x$ (јер је $\sqrt{x} < n+1$ и $x - 1 < x$), па је

$$n - 1 < \frac{\lfloor (x-1)\sqrt{x} \rfloor}{x} < n + 1.$$

Како је по услову задатка $\lfloor (x-1)\sqrt{x} \rfloor$ дељиво са x, то је $\lfloor (x-1)\sqrt{x} \rfloor = nx$, тј. $nx \leqslant (x-1)\sqrt{x} < nx + 1$. Квадрирањем и сређивањем добијамо $0 \leqslant (m-2)x + 1 < 2n + 1/x$. Лева неједнакост даје $m \geqslant 2$, а десна $(m-2)x \leqslant 2n - 1$. Како је $n \geqslant 2$, то је $x \geqslant n^2 > 2n - 1$, па је $m = 2$. Према томе, сва решења су $x = 1$ и $x = n^2 + 2$ за $n \in \mathbb{N}$.

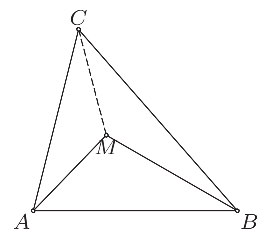
4. Нека је $\gamma = \sphericalangle ACB$. Претпоставимо супротно. Тада је $x+y<60^\circ$, где је $x=\sphericalangle MAB$ и $y=\sphericalangle MBC$. Зато је $\cos(x+y)>1/2$, те је

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2} \leqslant \frac{1-\cos(x+y)}{2} < \frac{1-\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}. \qquad (*)$$

Са друге стране, применом синусне Чевине теореме, имамо

$$\frac{\sin x \sin y \sin \frac{\gamma}{2}}{\sin 30^\circ \sin 30^\circ \sin \frac{\gamma}{2}} = 1,$$

односно $\sin x \sin y = \sin^2 30^\circ = 1/4$. Ово је у супротности са $(*)$, те долазимо до контрадикције.



Оп 2014 3А 4

5. Нека је A_n скуп свих поплочавања и $a_n=|A_n|$. Означимо са ξ горњи-леви угао квадратне табле. Нека је H_n скуп поплочавања у коме је ξ покривено хоризонталном домином, V_n скуп поплочавања у коме је ξ покривено вертикалном домином, и K_n скуп поплочавања у коме је ξ покривено квадратом. Тада је $|A_n|=|H_n|+|V_n|+|K_n|$. Очигледно је да је $|V_n|=a_{n-1}$ и $|K_n|=a_{n-2}$. Ако је ξ покривено хоризонталном домином, онда доњи леви угао такође мора бити покривен хоризонталном домином, па је $|H_n|=a_{n-2}$. Закључујемо да је за $n\geqslant 2$ испуњено

$$a_n = a_{n-1}+2a_{n-2}. \qquad (*)$$

Такође, имамо да је $a_1=1$ и $a_2=3$. Уколико додамо a_n и левој и десној страни једнакости $(*)$ добијамо $a_n+a_{n-1}=2(a_{n-1}+a_{n-2})$, па ако са b_n означимо $b_n=a_n+a_{n-1}$ добијамо да је $b_2=4$ и $b_n=2b_{n-1}$, за $n\geqslant 3$. То значи да је $b_n=4\cdot 2^{n-2}=2^n$, за $n\geq 2$.
Уколико одузмемо $2a_{n-1}$ од леве и десне стране једнакости $(*)$ добијамо $a_n-2a_{n-1}=-(a_{n-1}-2a_{n-2})$. Нека је $c_n=a_n-2a_{n-1}$. Тада је $c_n=-c_{n-1}$, па је $c_n=(-1)^{n-2}c_2=(-1)^n c_2=(-1)^n(a_2-2a_1)=(-1)^n$. Сада можемо закључити да је $a_n=\dfrac{2b_n+c_n}{3}=\dfrac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$, за све $n\in\mathbb{N}$.

Четврти разред - А категорија

1. Нека је $V(X)$ запремина тела X и $f(x)=V(T\cap[0,x]^3)-V(T\cap[x,1]^3)$. Функција f је дефинисана на $[0,1]$. Ако је $x\in[0,1)$ и $d>0$ такво да је $x+d\leqslant 1$, онда је

$$f(x+d)-f(x)=V\big(T\cap\big([0,x+d]^3\setminus[0,x]^3\big)\big)+V\big(T\cap\big([x,1]^3\setminus[x+d,1]^3\big)\big),$$

па важи

$$\begin{aligned} f(x+d)-f(x) &\leqslant V\big([0,x+d]^3\setminus[0,x]^3\big)+V\big([x,1]^3\setminus[x+d,1]^3\big)\\ &= d((x+d)^2+(x+d)d+d^2)\\ &\qquad + d((1-x)^2+(1-x)(1-x-d)+(1-x-d)^2)\leqslant 6d \end{aligned}$$

(јер је $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ и $0 \leqslant d, x+d, 1-x, 1-x-d \leqslant 1$), па је f непрекидна на $[0,1]$. Како је $f(0)=-\alpha<0$ и $f(1)=\alpha>0$, постоји y за које је $f(y)=0$, па су $K_1=[0,y]^3$ и $K_2=[y,1]^3$ коцке које испуњавају услове задатка.

2. а) Нека је X случајна величина која представља број погодака у 4 гађања. На основу редоследа чинилаца и броја сабирака јасно је који је распоред погодака и промашаја у 4 бацања у сваком од наредних случајева:

$$\begin{aligned}
P\{X=0\} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{36};\\
P\{X=1\} &= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{17}{72};\\
P\{X=2\} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{61}{144};\\
P\{X=3\} &= 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4};\\
P\{X=4\} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

Расподела случајне величине X је $X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ \frac{1}{36} & \frac{17}{72} & \frac{61}{144} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16}\end{pmatrix}$.

б) Кошаркаш има три поготка у 4 случаја, при чему сваки има исту вероватноћу. У тачно једном од ових случајева се промашај догодио у трећем бацању, па је тражена вероватноћа $1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$.

(Тангента 68, М1047)

3. Нека је $5pq-1=x^5$, где је $x\in\mathbb{N}$. Тада је

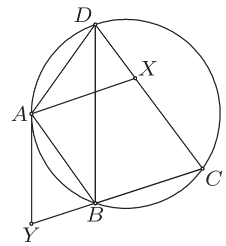
$$5pq=x^5+1=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1). \tag{$*$}$$

По Малој Фермаовој теореми је $x^5 \equiv x \pmod 5$, а из претходне једнакости и $x^5+1\equiv 0 \pmod 5$, па је $x\equiv -1 \pmod 5$. Сада је $x^4-x^3+x^2-x+1\equiv 0 \pmod 5$, па $25 \mid x^5+1$, односно $5 \mid pq$. Како су p и q прости бројеви, закључујемо да је један од њих једнак 5, нпр. $p=5$. Једначина $(*)$ сада постаје $25q=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$. Како је $x+1\geqslant 5$, то је $x^4-x^3+x^2-x+1=x^3(x-1)+x(x-1)+1>5$, па из

$$q=\frac{x+1}{5}\cdot\frac{x^4-x^3+x^2-x+1}{5},$$

закључујемо да је $x+1=5$, а самим тим $q=41$.
Једина решења су парови $(p,q)\in\{(5,41),(41,5)\}$.

4. Изаберимо тачку Y на правој BC тако да важи $Y - B - C$ и да је $\sphericalangle YAB = \sphericalangle ADB$. Четвороугао $ABCD$ је тетиван, па важи $\sphericalangle ABY = 180^\circ - \sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$, а како је $AB = AD$ и $\sphericalangle YAB = \sphericalangle ADX$, то је $\triangle ABY \cong \triangle ADX$. Из ове подударности је $BY = DX$ и $AY = AX$.



Оп 2014 4А 4

Даље, из $\sphericalangle YAB = \sphericalangle ADB$ закључујемо да је AY тангента кружнице описане око четвроугла $ABCD$, па је

$$AX^2 = AY^2 = YB \cdot YC = DX \cdot (DX + BC),$$

одакле добијамо тражену једнакост.

5. Нека је $ABCD$ дати трапез, при чему је $AB = 5$ и $CD = 1$. Висина овог трапеза је $\sqrt{3}$. Уочимо правилан шестоугао $CDA_1A_2A_3A_4$ (A_1 се налази у унутрашњости трапеза) и једнакостраничне троуглове $A_1A_2A_5$ и $A_3A_4A_6$ (A_5 и A_6 се налазе ван шестоугла). Како је $CA_3 = DA_2 = \sqrt{3}$, то се тачке A_2 и A_3, а самим тим и тачке A_5 и A_6, налазе на страници AB. Такође, из $A_2A_5 = A_2A_3 = A_3A_6 = 1$ закључујемо да је $AA_5 = BA_6 = 1$. Означимо са O центар шестоугла.
Посматрајмо 11 тачака $O, A, B, C, D, A_1, \ldots, A_6$. Све оне се налази у трапезу, па су прекривене неким од 10 кругова полупречника r. Самим тим, барем две од њих су прекривене истим кругом, па је њихово растојање највише $2r$. Са друге стране, растојање сваке две од ових 11 тачака је барем 1, па је $2r \geqslant 1$, што је и требало доказати.
(Тангента 65, М986)

Први разред - Б категорија

1. По дефиницији функције f је

$$f(x) = f\left(2 \cdot \frac{x-1}{2} + 1\right) = 4 \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{x-1}{2} = x^2 - 1,$$

за све $x \in \mathbb{R}$. Специјално, $f(3) = 3^2 - 1 = 8$.
Приметимо да је $f(1) = f(-1) = 0$, па функција није 1-1. Такође, за свако $x \in \mathbb{R}$ важи $f(x) = x^2 - 1 \geqslant -1$, па функција није ни „на”. (Тангента 69, стр. 28, зад. 3)

2. Уколико су истинитосне вредности слова $\tau(p) = \top$, $\tau(q) = \bot$ и $\tau(r) = \top$, тада је $\tau(p \Leftrightarrow (q \vee r)) = \top$, а $\tau((p \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge r)) = \bot$, па дата формула није таутологија. (Тангента 65, стр. 34, зад. 1)

3. Нека је x број људи који су добили лажни лек. Тада је њих $300 - x$ добило прави лек. Пошто 20% људи који су добили лажни лек тврде да им је боље, њих има $\frac{x}{5}$. Такође, 80% оних који су добили прави лек тврде да им је боље, па је њих $\frac{4(300-x)}{5}$. Оних који тврде да им је боље има 40% од 300, односно 120. Дакле, $\frac{x}{5}+\frac{4(300-x)}{5}=120$, па је $x=200$. (Тангента 69, М1060)

4. Прву цифру овог броја можемо изабрати на 3 начина. Након одабира прве цифре другу цифру можемо изабрати на два начина (она мора бити различита од прве цифре). Слично, трећу, као и сваку наредну цифру, можемо одабрати на два начина (она мора бити различита од претходно одабране), па је тражени број једнак $3 \cdot 2^{99}$.

5. Имамо три могућности.

1° Оба Француза добила су књигу на француском језику. У овом случају Французима књиге можемо поклонити на 2 начин. Сада, за Енглезе имамо 5 могућих књига, па њима књиге можемо поклонити на $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ начина. Дакле, укупан број начина да се особама поклоне књиге је у овом случају $2 \cdot 60 = 120$.

2° Један Француз је добио књигу на француском језику, а други на српском. У овом случају потребно је изабрати који ће од Француза добити књигу на француском језику, затим изабрати једну од две књиге коју ће он добити, а затим изабрати једну од две књиге на српском језику коју ћемо поклонити другом Французу. Дакле, Французима књиге можемо поклонити на 8 начина. За Енглезе остају 4 књиге (три на енглеском и једна на српском језику), па њима књиге можемо поклонити на $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ начина. Укупан број начина да се особама поклоне књиге у овом случају је $8 \cdot 24 = 192$.

3° Оба Француза добила су књиге на српском језику. У овом случају Французима књиге можемо поклонити на 2 начина. За Енглезе преостале су три књиге, па њима књиге можемо поклонити на $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ начина. Укупан број начина да се особама поклоне књиге у овом случају једнак је $2 \cdot 6 = 12$.

Укупан број начина да се особама поклоне књиге једнак је збиру бројева из случајева $1^\circ, 2^\circ$ и 3°, односно $120+192+12=324$.

Други разред - Б категорија

1. Нека је $z=x+yi$, $x,y \in \mathbb{R}$. Тада је $|z+2|=|x+2+yi|=\sqrt{(x+2)^2+y^2}$ и $|1-\overline{z}|=|1-x+yi|=\sqrt{(1-x)^2+y^2}$, па је прва од датих једначина еквивалентна са $(x+2)^2+y^2=(1-x)^2+y^2$, односно са $x=-1/2$. Са друге стране,

$$\frac{z}{2+3i}=\frac{x+yi}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i}=\frac{2x+3y+(2y-3x)i}{13},$$

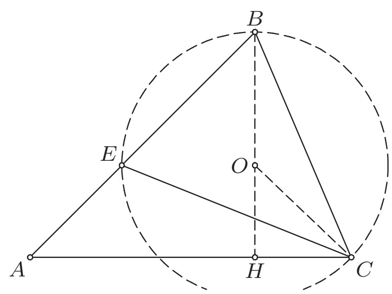
па је друга једначина еквивалентна са $2x + 3y = 1$, тј. (због $x = -1/2$) са $y = 2/3$.

Једино решење датог система једначина је $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} \cdot i$.

(Тангента 73, стр. 34, зад. 5)

2. Нека је O центар круга k и $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCA = \gamma$. Тада је $\sphericalangle OBC = 90° - \gamma$, а како је троугао BOC једнакокраки, то је и $\sphericalangle OCB = 90° - \gamma$. Сада, из збира углова троугла BOC закључујемо да је $\sphericalangle BOC = 180° - 2 \cdot (90° - \gamma) = 2\gamma$. Даље, $\sphericalangle BOC$ је централни а $\sphericalangle BEC$ периферијски угао круга k, па је $2 \sphericalangle BEC = \sphericalangle BOC$, тј. $\sphericalangle BEC = \gamma$. Дакле, $\triangle CBE \sim \triangle ABC$ ($\sphericalangle CBE = \sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle BEC = \sphericalangle BCA$), па је $\dfrac{BC}{BE} = \dfrac{BA}{BC}$, тј. $BE = 9$. Коначно, $AE = AB - BE = 7$.

(Тангента 68, стр. 38, зад. 2)



Оп 2014 2Б 2

3. Неједначина је еквивалентна са $-\sqrt{21} \leqslant x^2 - 9x - 1 \leqslant \sqrt{21}$. Како је

$$\begin{aligned} & 0 \leqslant x^2 - 9x - 1 + \sqrt{21} = (x - 4 - \sqrt{21})(x - 5 + \sqrt{21}) \\ & \quad \Leftrightarrow x \in (-\infty, 5 - \sqrt{21}] \cup [4 + \sqrt{21}, \infty) \\ & 0 \geqslant x^2 - 9x - 1 - \sqrt{21} = (x - 4 + \sqrt{21})(x - 5 - \sqrt{21}) \\ & \quad \Leftrightarrow x \in [4 - \sqrt{21}, 5 + \sqrt{21}], \end{aligned}$$

следи да је решење неједначине $x \in [4 - \sqrt{21}, 5 - \sqrt{21}] \cup [4 + \sqrt{21}, 5 + \sqrt{21}]$. Како је

$$-1 < 4 - \sqrt{21} < 0 < 5 - \sqrt{21} < 1 \text{ и } 8 < 4 + \sqrt{21} < 9 < 5 + \sqrt{21} < 10,$$

следи да су 0 и 9 једини цели бројеви који задовољавају неједначину, тј. неједначина има два целобројна решења.

4. Приметимо да су тачке P, Q и A средишта дужи BC, CD и DR, редом. Нека је $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Тачке O, P, A, односно O, Q, B, су колинеарне, па за неке реалне бројеве $k, l < 0$ је $\overrightarrow{OP} = k \cdot \vec{a}$ и $\overrightarrow{OQ} = l \cdot \vec{b}$. Одавде је

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2} \cdot (-\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}),$$

па је $\overrightarrow{OC} = 2 \cdot \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = 2k \cdot \vec{a} - \vec{b}$. Слично је $\overrightarrow{OD} = 2 \cdot \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OC} = (2l+1) \cdot \vec{b} - 2k \cdot \vec{a}$ и $\overrightarrow{OR} = 2 \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} = (2k+2) \cdot \vec{a} - (2l+1) \cdot \vec{b}$. Вектори $\overrightarrow{OR}$ и $\overrightarrow{OC}$ су колинеарни, па за неко t важи $t \cdot \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OC}$, односно

$$t(2k+2) \cdot \vec{a} - t(2l+1) \cdot \vec{b} = 2k \cdot \vec{a} - \vec{b}.$$

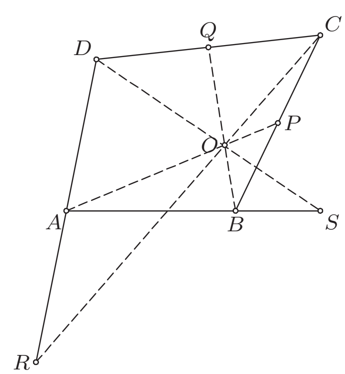
Вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су линеарно независни, па је $t(2k+2) = 2k$ и $t(2l+1) = 1$, односно $(2l+1)k = k+1$. Даље,

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \cdot (-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}),$$

тј. $\overrightarrow{OS} = \frac{3}{2} \cdot \vec{b} - \frac{1}{2} \cdot \vec{a}$. Вектори $\overrightarrow{OS}$ и $\overrightarrow{OD}$ су колинеарни, па за неки реалан број r важи $r \cdot \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OD}$, односно

$$-\frac{r}{2} \cdot \vec{a} + \frac{3r}{2} \cdot \vec{b} = -2k \cdot \vec{a} + (2l+1) \cdot \vec{b}.$$

Дакле, $r = 4k$ и $3r = 2(2l+1)$, односно $6k = 2l+1$. Сада, заменом у претходно добијену једнакост за k и l добијамо $6k^2 = k+1$, тј. $k = -\frac{1}{3}$. Тражени однос једнак је 3.



Оп 2014 2Б 4

5. У две кутије смештено је 65 куглица, па су у једној од њих смештене барем 33 куглице. Све куглице ове кутије су једне од 4 боје, па, по Дирихлеовом принципу, постоји 9 куглица које су исте боје. Претпоставимо да међу ових 9 куглица не постоје три које су исте величине. Тада међу њима постоји барем 5 куглица различитих величина, што је у контрадикцији са условом задатка. (Тангента 73, М1150)

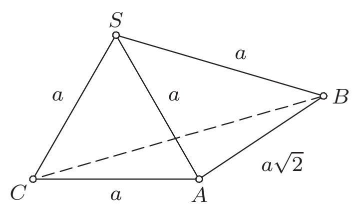
Трећи разред - Б категорија

1. Додавањем друге једначине помножене са -1 трећој, и друге једначине помножене са -2 првој, добијамо следећи еквивалентни систем једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & 4t & = & 2 \\ & & 5y & - & 3z & + & 7t & = & a-2 \\ & & -5y & + & 3z & - & 7t & = & -4. \end{array}$$

Додавањем друге једначине трећој, закључујемо да за $a \neq 6$ систем нема реалних решења. За $a = 6$ једно решење система је четворка $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 0, 0\right)$, па је $a = 6$ једино решење задатка.
(Тангента 70, стр. 30, зад. 5)

2. У троуглу SAB важи $\sphericalangle ASB = 60^\circ$ и $SA = SB$, па је он једнакостраничан, односно $AB = a$. Троугао SCA је једнакокрако-правоугли, па је $AC = a\sqrt{2}$. У троуглу SBC важи $\sphericalangle BSC = 120^\circ$ и $SB = SC$, па је $BC^2 = SB^2 + SC^2 - 2 \cdot SB \cdot SC \cdot \cos 120^\circ$ (по косинусној теореми), односно $BC = a\sqrt{3}$.



Оп 2014 3Б 2

а) Како је $BC^2 = AB^2 + AC^2$, из Питагорине теореме закључујемо да је троугао ABC правоугли (са правим углом код темена A).
б) Нека је са $P(XYZ)$ означена површина $\triangle XYZ$. Из претходног

$$P(SAB) = \frac{1}{2} \cdot SA \cdot SB \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},\ P(SBC) = \frac{1}{2} \cdot SB \cdot SC \cdot \sin 90^\circ = \frac{a^2}{2},$$

$$P(SCA) = \frac{1}{2} \cdot SC \cdot SA \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},\ P(ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 90^\circ = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}.$$

Површина пирамиде једнака је

$$P(SAB) + P(SBC) + P(SCA) + P(ABC) = \frac{a^2(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{2}.$$

(Тангента 65, стр. 35, зад. 2)

3. За $x = 1$ једино решење је пар $(x, y) = (1, 45)$. Претпоставимо да је $x \geqslant 2$. Како је $2014^x + 11^x$ непаран број, закључујемо да је и y непаран. Са друге стране, $4 \mid 2014^x$, па је $y^2 = 2014^x + 11^x \equiv 11^x \pmod 4$, а како квадрат непарног броја даје остатак 1 при дељењу са 4, закључујемо да је $11^x \equiv 1 \pmod 4$. Међутим, $11^x \equiv 3^x \pmod 4$, па 11^x даје остатак 1 при дељењу са 4 акко је x паран број. Тада $11^x \equiv 2^x \equiv 1 \pmod 3$,

па $y^2 = 2014^x + 11^x \equiv 1 + 1 = 2 \pmod 3$, што није могуће, јер квадрат природног броја даје остатак 0 или 1 при дељењу са 3.
Једино решење је пар $(x, y) = (1, 45)$.

4. Бројеви x и $x - y$ су ненегативни, па важи

$$x^2 - xy = x(x - y) \geqslant 1 \cdot (x - y) = x - y.$$

Сада је

$$0 = 2x^2 - xy - 5x + y + 4 = x^2 + x^2 - xy - 5x + y + 4 \geqslant x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2,$$

па је $x = 2$. Заменом у полазну једначину добијамо $y = 2$.
Једино решење једначине је пар $(x, y) = (2, 2)$.

5. По услову задатка, екипа се може састојати од: три девојчице, две девојчице и једног дечака, или једне девојчице и два дечака. У првом случају екипа се може одабрати на $\dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} = 10$ начина. У другом случају екипа се може одабрати на $\dfrac{5 \cdot 4}{2} \cdot 6 = 60$ начина. У трећем случају екипа се може одабрати на $5 \cdot \dfrac{6 \cdot 5}{2} = 75$. Дакле, укупан број начина да се екипа одабере је 145. (Тангента 68, стр. 29, зад. 7)

Четврти разред - Б категорија

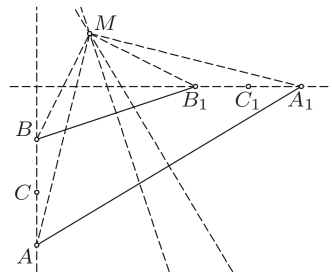
1. Комплексан број $z + 3$ налази се на правој p комплексне равни која пролази кроз координатни почетак и са ненегативним делом реалне осе заклапа угао $\pi/3$. Самим тим, комплексан број z налази се на правој q која је паралална са p и садржи тачку -3, па је минимална вредност броја $|z|$ растојање између праве q и координатног почетка. Права q задата је једначином $y = (x + 3) \cdot \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3} \cdot (x + 3)$, па је тражена минимална вредност једнака $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3 + 1}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

2. Тачка A_1 добија се ротацијом тачке A око тачке M, па је $MA = MA_1$, и M се налази на симетрали дужи AA_1. Нека је $y = k_A \cdot x + c_A$ једначина симетрали дужи AA_1, коју ћемо означити са l_A. Једначина праве AA_1 је $\dfrac{x - 1}{6 - 1} = \dfrac{y - 2}{5 - 2}$, односно $y = \dfrac{3}{5} \cdot x + \dfrac{7}{5}$, па је $k_A = -\dfrac{5}{3}$. Права l_A садржи средиште дужи AA_1, тј. тачку $\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$, па је $\dfrac{7}{2} = -\dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{7}{2} + c_A$, односно $c_A = \dfrac{28}{3}$. Слично, M се налази и на симетрали l_B дужи BB_1. Нека је једначина праве l_B: $y = k_B \cdot x + c_B$. Једначина праве BB_1 је $\dfrac{x - 1}{4 - 1} = \dfrac{y - 4}{5 - 4}$, тј. $y = \dfrac{1}{3} \cdot x + \dfrac{11}{3}$, па је $k_B = -3$. Права l_B садржи и средиште дужи BB_1, тј. тачку $\left(\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right)$, па је $\frac{9}{2} = -3\cdot\frac{5}{2} + c_B$, односно $c_B = 12$. Тачка $M(x_M, y_M)$ налази се у пресеку правих l_A и l_B, па важи

$$y_M = -\frac{5}{3}\cdot x_M + \frac{28}{3},\ y_M = -3\cdot x_M + 12.$$

Решавањем овог система добијамо $x_M = 2$ и $y_M = 6$.

Приметимо да је $\alpha < \pi$, па из $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{A_1M} = (-1,-4)\cdot(4,-1) = 0$, добијамо $\alpha = \pi/2$. При томе, ротација је у позитивном смеру. Приметимо да је тачка C средиште дужи AB. Зато је и тачка C_1 средиште дужи A_1B_1 (ротација је изометријска трансформација), тј. C_1 је тачка $(5,5)$. (Тангента 71, М1111)



Оп 2014 4Б 2

3. Број n можемо записати као $10k + a$, где је $0 \leqslant a \leqslant 9$. Приметимо да је $n^2 = (10k+a)^2 = 100k^2 + 20ka + a^2$, па је цифра десетица броја n^2 једнака цифри десетица броја $20ka + a^2$. Цифра десетица броја $20ka$ је парна, тако да, по услову задатка, цифра десетица броја a^2 мора бити непарна. Провером закључујемо да од бројева a^2, за $0 \leqslant a \leqslant 9$, једино $4^2 = 16$ и $6^2 = 36$ имају непарну цифру десетица. У оба случаја је цифра јединица броја $n^2 = (10k+a)^2$ једнака 6, чиме је доказ завршен. (Тангента 70, стр. 31, зад. 3)

4. Нека је $K = \dfrac{1801 + 2014}{2}$. Ако је $x \in [1801, K]$, следи

$$|f(x)| = |f(x) - f(1801)| \leqslant |x - 1801| \leqslant \frac{2014 - 1801}{2}.$$

Ако је $x \in [K, 2014]$, следи

$$|f(x)| = |f(x) - f(2014)| \leqslant |x - 2014| \leqslant \frac{2014 - 1801}{2}.$$

Дакле, за свако f са наведеним својствима важи $|f(x)| \leqslant \dfrac{2014-1801}{2}$, тј. $C \leqslant \dfrac{2014-1801}{2}$.
Ако је

$$f(x) = \begin{cases} x - 1801, & \text{за } x \in [1801, K] \\ -x + 2014, & \text{за } x \in [K, 2014] \end{cases},$$

онда f задовољава тражена својства и важи $|f(K)| = \dfrac{2014-1801}{2}$, па је $C = \dfrac{2014-1801}{2}$.

5. Претпоставимо да је за свака два тепиха површина преклопа мања од $\frac{1}{9}$. Такође, можемо претпоставити да се теписи у собу додају један по један. Први тепих прекрива површину 1. Под уведеном претпоставком, следећи постављени тепих покрива део пода чија је површина већа од $\frac{8}{9}$. Даље, трећи тепих покрива део пода чија је површина већа од $\frac{7}{9}$, и тако даље. Последњи, девети тепих покрива део пода чија је површина већа од $\frac{1}{9}$. Међутим, како је

$$1 + \frac{8}{9} + \frac{7}{9} + \ldots + \frac{1}{9} = 5,$$

закључујемо теписи покривају поврхину пода која је већа од 5, што није могуће. (Тангента 70, М1084)

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 8.2.2014.

Први разред - А категорија

1. Аца није добио већи количник од наставника, па важи

$$\frac{a_1}{a_2} \leqslant \frac{a_1 + b_1 + v_1 + g_1}{a_2 + b_2 + v_2 + g_2},$$

односно

$$a_1(a_2 + b_2 + v_2 + g_2) \leqslant a_2(a_1 + b_1 + v_1 + g_1).$$

Аналогно тврђење важи и за Бранку, Веру и Горана, па због тога имамо четири неједнакости:

$$\begin{aligned}
a_1(a_2 + b_2 + v_2 + g_2) &\leqslant a_2(a_1 + b_1 + v_1 + g_1),\\
b_1(a_2 + b_2 + v_2 + g_2) &\leqslant b_2(a_1 + b_1 + v_1 + g_1),\\
v_1(a_2 + b_2 + v_2 + g_2) &\leqslant v_2(a_1 + b_1 + v_1 + g_1),\\
g_1(a_2 + b_2 + v_2 + g_2) &\leqslant g_2(a_1 + b_1 + v_1 + g_1).
\end{aligned}$$

Сабирањем ових неједнакости добијамо

$$(a_1 + b_1 + v_1 + g_1)(a_2 + b_2 + v_2 + g_2) \leqslant (a_1 + b_1 + v_1 + g_1)(a_2 + b_2 + v_2 + g_2).$$

Како у овој неједнакости заправо важи једнакост, у свакој од претходне четири неједнакости такође важи знак једнакости. Због тога је $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{g_1}{g_2} = \frac{a_1 + b_1 + v_1 + g_1}{a_2 + b_2 + v_2 + g_2}$, па су Бранка и Горан добили исти количник.

2. Анализа. Нека је $a = BC$, $b = AC$ и $a > b$. По услову задатка је $\sphericalangle BAC = 3 \sphericalangle ABC$. Изаберимо тачку D на станици BC тако да важи $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABD$, тј. $AD = DB$. Тада је $\sphericalangle ADC = \sphericalangle DAB + \sphericalangle ABD = \sphericalangle CAD$, па је и $AC = CD$. Дакле, $DA = a - b$.

Конструкција. Нека је без умањења општости $a \geqslant b$. Конструишимо дуж AC дужине b. Конструишимо кружницу k_1 са центром у C и полупречником b и кружницу k_2 са центром у A и полупречником $a-b$. Нека је D тачка пресека кружница k_1 и k_2. Конструишимо кружницу k_3 са центром у D и полупречником $a-b$. Тачка B је она тачка пресека кружнице k_3 и праве CD за коју важи $C - D - B$.

Доказ. По конструкцији, тачка D налази се на кружници k_1, па важи $CD = b$, и на кружници k_2, па важи $AD = a-b$. Слично, тачка B налази се на кружници k_3, па важи $DB = a-b$. Дакле, троуглови ACD и ADB су једнакокраки, па због $C - D - B$ важи $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CAD + \sphericalangle DAB = \sphericalangle ADC + \sphericalangle DBA = 3 \sphericalangle ABC$, што је и требало доказати.

Дискусија. Ако је $a = b$ задатак нема решења. Ако је $a > b$ кружнице k_1 и k_2 секу се у две различите тачке X и Y. Због симетрије, за $D = X$ и $D = Y$ добијамо подударне троуглове ABC, па задатак у овом случају има јединствено решење. (Тангента 71, М1104)

3. Ако је $k > 1$, $m > 1$ и $n > 1$, лева страна једнакости је дељива са 4, што није могуће јер 2014 није дељив са 4. Дакле, барем један од бројева k, m и n једнак је 1. Ако је $k = 1$, цифра јединица броја са леве стране је 2, што није могуће јер је цифра јединица броја 2014 једнака 4. Ако је $m = 1$, једначина се своди на $2^k - 2004 = 10^n$. Одавде је $2^k > 2004$, тј. $k > 10$. Даље, како 4 дели број $2^k - 2004$, а 8 не дели овај број, закључујемо да је $n = 2$, што није могуће јер 2104 није степен броја 2. Дакле, $n = 1$ и дата једначина еквивалентна је са $2^k + 10^m = 2024$. Одавде је $10^m < 2024$, тј. $m \leqslant 3$. За $m = 1$ и $m = 2$ једначина нема решења, док за $m = 3$ добијамо (једино) решење једначине $(k, m, n) = (10, 3, 1)$.

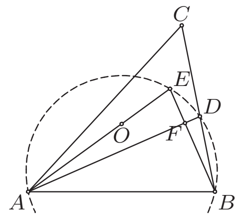
4. Нека је $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCA = \gamma$ и F подножје нормале из тачке B на праву AD.

Размотримо прво случај $\beta \geqslant \gamma$. Тада је $\sphericalangle ABF = 90^\circ - \alpha/2 \leqslant \beta$, па важе распореди $A - F - D$ и $B - F - E$. Даље, из тетивности четвороугла $ABDE$ добијамо $\sphericalangle EAB = \sphericalangle EAD + \sphericalangle DAB = \sphericalangle EBD + \alpha/2 = \beta - \sphericalangle ABF + \alpha/2 = 90^\circ - \gamma$. Са друге стране, $\sphericalangle OAB = (180^\circ - \sphericalangle AOB)/2 = 90^\circ - \gamma$, па како су тачке O и C са исте стране праве AB (јер је $\gamma < 90^\circ$), то су тачке A, O и E колинеарне.

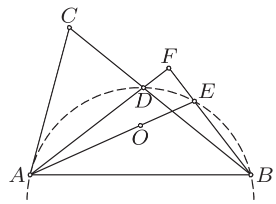
Размотримо сада случај $\beta < \gamma \leqslant 90^\circ$. У овом случају је $\sphericalangle ABD < \sphericalangle ABE$, па важи $A - D - F$. Такође, $\sphericalangle EBD = \sphericalangle ABF - \sphericalangle ABD = 90^\circ - \alpha/2 - \beta = (\gamma - \beta)/2 \leqslant \alpha/2 = \sphericalangle DAB$, па важи распоред $B - E - F$. Доказ завршавамо слично као у претходном случају.

На крају, размотримо случај $\beta < 90^\circ < \gamma$. У овом случају такође важи $A - D - F$ (јер је $\sphericalangle ABD < \sphericalangle ABF$). Међутим, сада је $\sphericalangle FBD = (\gamma - \beta)/2 > \alpha/2 = \sphericalangle FAB$, па важи распоред $F - B - E$. Даље, четвороугао $ABDE$

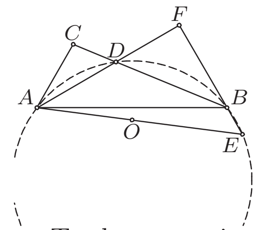
је тетиван, па важи $\sphericalangle BAE = \sphericalangle DAE - \sphericalangle DAB = 180^\circ - \sphericalangle DBE - \alpha/2 = \sphericalangle DBF - \alpha/2 = (\gamma-\beta)/2 - \alpha/2 = \gamma - 90^\circ$. Са друге стране, како су тачке C и O са различитих страна праве AB, важи $\sphericalangle OAB = (180^\circ - \sphericalangle AOB)/2 = (180^\circ - 2(180^\circ - \gamma))/2 = \gamma - 90^\circ$, одакле следи тврђење задатка.



Први случај



Други случај



Трећи случај

5. Одговор је 23.
Из услова задатка примећујемо да на крају може опстати само једна врста. Како после сваког једења парности бројева једнорога и вукодлака остају различите, не могу остати само паукови. Дакле, свих 55 паукова морају да ишчезну, за шта је потребно бар 55 једења. Дакле, могу остати највише 23 створења.
С друге стране, ако 17 паукова одмах поједе једнороге, остају 23 вукодлака и 38 паукова. Нека надаље, кад год вукодлак поједе паука, паук поједе насталог једнорога. После сваког оваквог пара једења, број вукодлака остаје исти, а број паукова се смањује за 2. Тако ће после 19 пута по два једења остати само 23 вукодлака. Овим је доказ завршен.

Други разред - А категорија

1. Доказаћемо да тражене функције постоје. Нека су $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ квадратне функције такве да важи $f(x)+g(x) = 2(x-1)^2$, $g(x)+h(x) = 2x^2$ и $h(x)+f(x) = 2(x+1)^2$, односно (решавањем овог система)

$$f(x) = x^2 + 2, \qquad g(x) = x^2 - 4x, \qquad h(x) = x^2 + 4x.$$

Због начина одабира ових функција збир ма које две има реалну нулу, а збир све три $f(x)+g(x)+h(x) = 3x^2+2$ нема, чиме је доказано да је одговор на постављено питање потврдан.

2. Нека је $AO = x$, $BO = y$, $CO = z$, $DO = t$. Из услова задатка је $x + y = 1$ и $z + t = 1$. Даље, применом косинусне теореме на троуглове AOC и BOD добијамо

$$AC^2 = x^2 + z^2 - xz, \qquad BD^2 = y^2 + t^2 - yt.$$

По КА неједнакости је $x^2 + z^2 \geqslant 2\left(\dfrac{x+z}{2}\right)^2$, па је

$$x^2 + z^2 - xz \geqslant 2\left(\frac{x+z}{2}\right)^2 - xz = \frac{x^2+z^2}{2} \geqslant \left(\frac{x+z}{2}\right)^2.$$

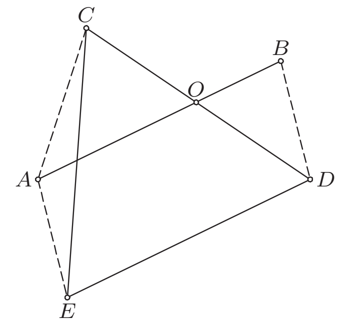
Аналогно је $y^2+t^2-yt \geqslant \left(\frac{y+t}{2}\right)^2$, па је

$$AC+BD=\sqrt{x^2+z^2-xz}+\sqrt{y^2+t^2-yt} \geqslant \frac{x+z}{2}+\frac{y+t}{2}=1.$$

Друго решење. Изаберимо тачку E тако да је троугао CDE једнакостраничан и да се тачке A и E налазе са исте стране праве CD. Тада је $\sphericalangle CDE = \sphericalangle COA$, па је $AB \parallel ED$. Како је и $AB = ED$, то је четвороугао $ABDE$ паралелограм, а самим тим $AE = BD$. Сада је по неједнакости троугла

$$1 = CE \leqslant AC + AE = AC + BD,$$

што је и требало доказати.
(Тангента 73, M1156)



Ок 2014 2А 2

3. Означимо са d тражени број. Доказаћемо да је $d=4$. Нека је

$$x_n=(n+2014)^{n+2014}+n^n, \text{за } n\in\mathbb{N}.$$

Нека је p прост број који не дели 2014 и $n>2014^{2014}$ такво да $p\mid n$. Тада $p\nmid n+2014$, па $p\nmid x_n$. Одавде закључујемо да број d може бити дељив једино простим бројевима из скупа $\{2,19,53\}$.
За $n>2014^{2014}$ такво да $19\cdot 53 \mid n-1$, имамо $x_n\equiv 1+1 \pmod{19}$ и $x_n\equiv 1+1 \pmod{53}$, па $19\nmid d$ и $53\nmid d$. Дакле, $d=2^k$, за неко $k\geqslant 0$.
Ако је n паран број, онда су бројеви $(n+2014)^{n+2014}$ и n^n дељиви са 4, па $4\mid x_n$. Ако је $n\equiv 1 \pmod 4$, онда је $x_n\equiv(-1)^{n+2014}+1^n\equiv 0 \pmod 4$. Слично, за $n\equiv -1 \pmod 4$ добијамо $x_n\equiv 1^{n+2014}+(-1)^n\equiv 0 \pmod 4$. Из свега наведеног закључујемо да је $k\geqslant 2$. Даље, за $n>2014^{2014}$ такво да је $n\equiv 3 \pmod 8$ имамо

$$x_n\equiv 1^{n+2014}+3^n\equiv 1+3\cdot(3^2)^{\frac{n-1}{2}}\equiv 1+3\equiv 4 \pmod 8,$$

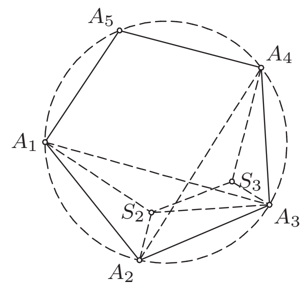
па $8\nmid d$, односно $d=4$.

4. У троуглу $A_1A_2A_3$ важи

$$\begin{aligned}\sphericalangle A_2S_2A_3 &= 180^\circ-(\sphericalangle S_2A_2A_3+\sphericalangle S_2A_3A_2)\\ &=180^\circ-\left(\frac{\sphericalangle A_1A_2A_3}{2}+\frac{\sphericalangle A_2A_3A_1}{2}\right)=90^\circ+\frac{\sphericalangle A_2A_1A_3}{2}.\end{aligned}$$

Аналогно је и $\sphericalangle A_2S_3A_3 = 90° + \dfrac{\sphericalangle A_2A_4A_3}{2}$. Са друге стране, петоугао $A_1A_2A_3A_4A_5$ је тетиван, па је $\sphericalangle A_2A_1A_3 = \sphericalangle A_2A_4A_3$, тј. $\sphericalangle A_2S_2A_3 = \sphericalangle A_2S_3A_3$. Дакле, четвороугао $A_2A_3S_3S_2$ је тетиван, па је

$$\begin{aligned}\sphericalangle A_2S_2S_3 &= 180° - \sphericalangle A_2A_3S_3 \\ &= 180° - \frac{\sphericalangle A_2A_3A_4}{2}.\end{aligned}$$



Ок 2014 2А 4

Аналогно добијамо и $\sphericalangle A_2S_2S_1 = 180° - \dfrac{\sphericalangle A_2A_1A_5}{2}$. Коначно

$$\begin{aligned}\sphericalangle S_1S_2S_3 &= 360° - \sphericalangle A_2S_2S_3 - \sphericalangle A_2S_2S_1 \\ &= \frac{\sphericalangle A_2A_3A_4 + \sphericalangle A_2A_1A_5}{2},\end{aligned}$$

па како су углови $A_2A_3A_4$ и $A_2A_1A_5$ тупи, и њихова аритметичка средина је туп угао. Аналогно добијамо и да су преостали углови петоугла $S_1S_2S_3S_4S_5$ тупи.

5. Посматрајмо становника A. Нека становник D воли становника A, становник A поштује становника B, а становник B воли становника C. По условима задатка, становник A воли становника C, а становник D поштује становника B, одакле следи да становник D воли становника C. Како становник D воли само једног становника, закључујемо да је $A = C$, тј. A воли самог себе. Коначно, становник B воли становника A, али воли и себе, дакле $B = A$, тј. A и поштује самог себе.

Трећи разред - А категорија

1. Можемо претпоставити да су два од бројева x, y и z ненегативна (у супротном доказ вршимо за бројеве $-x$, $-y$ и $-z$). Нека је без умањења општости $x, y \geqslant 0$. Из датог услова је $z = -x - y$, па важи

$$(x^3 + y^3 + z^3)^2 = 9x^2y^2(x + y)^2 \text{ и } (x^2 + y^2 + z^2)^3 = 8(x^2 + y^2 + xy)^3.$$

Како је $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$, то важи $x^2 + y^2 + xy \geqslant 3xy$ и

$$4(x^2 + y^2 + xy) \geqslant 3(x^2 + y^2 + xy) + 3xy = 3(x + y)^2.$$

Коначно,

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2 + z^2)^3 &= 2(x^2 + y^2 + xy)^2 \cdot 4(x^2 + y^2 + xy) \\ &\geqslant 2(3xy)^2 \cdot 3(x + y)^2 = 6(x^3 + y^3 + z^3)^2.\end{aligned}$$

(Тангента 70, М1094)

2. Доказ изводимо индукцијом по $M = n + k$. За $n + k = 0$, тј. $n = k = 0$ обе суме једнаке су 1, па тврђење важи. Претпоставимо зато да тврђење важи за све $n' \geqslant k'$ такве да је $n' + k' \leqslant M$ и докажимо да важи за све $n \geqslant k$ такве да је $n + k = M + 1$. Ако је $n = k$, тада је

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n+1}{i} + \sum_{i=0}^{n-k} 2^i \binom{n-i}{k} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} + 1 = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} = 2^{n+1},$$

а ако је $k = 0$, тада је

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n+1}{i} + \sum_{i=0}^{n-k} 2^i \binom{n-i}{k} = 1 + \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1}.$$

Нека је зато $n > k \geqslant 1$. Коришћењем идентитета

$$\binom{a+1}{b+1} = \binom{a}{b+1} + \binom{a}{b},$$

добијамо

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k} \binom{n+1}{i} &= 1 + \sum_{i=1}^{k} \binom{n+1}{i} = 1 + \sum_{i=1}^{k} \left(\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}, \end{aligned} \tag{1}$$

као и

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-k} 2^i \binom{n-i}{k} &= \sum_{i=0}^{n-k-1} 2^i \left(\binom{n-i-1}{k} + \binom{n-i-1}{k-1} \right) + 2^{n-k} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1-k} 2^i \binom{n-1-i}{k} + \sum_{i=0}^{n-1-(k-1)} 2^i \binom{n-1-i}{k-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Како је $n - 1 \geqslant k$ и $n - 1 + k = M$, то је по индуктивној претпоставци

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{n-1-k} 2^i \binom{n-1-i}{k} = 2^n,$$

а како је $n - 1 \geqslant k - 1$ и $n - 1 + k - 1 = M - 1$, то је по индуктивној претпоставци

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{n-1-(k-1)} 2^i \binom{n-1-i}{k-1} = 2^n.$$

Сада, тражену једнакост добијамо сабирањем једнакости (1) и (2).

Друго решење. Десна страна дате једнакости једнака је броју подскупова скупа $S = \{1, 2, \ldots, n+1\}$. Дакле, довољно је доказати да је и лева страна једнака овом броју.

Прва сума на левој страни једнакости једнака је броју подскупова скупа S који имају највише k елемената. Одатле, довољно је доказати да је друга сума на левој страни једнакости једнака броју подскупова скупа S који имају више од k елемената. Увођењем смене $j = n - i$ добијамо да важи

$$\sum_{i=0}^{n-k} 2^i \binom{n-i}{k} = \sum_{j=k}^{n} 2^{n-j} \binom{j}{k} = L.$$

Нека је j фиксирано, $k \leqslant j \leqslant n$. Тврдимо да је $2^{n-j}\binom{j}{k}$ управо број подскупова скупа S који имају више од k елемената таквих да се на месту $k+1$ по величини налази елемент $j+1$. Заиста, првих k елемената по величини бирамо из скупа $\{1, 2, \ldots, j\}$, што се може учинити на $\binom{j}{k}$ начина; наредни елемент по величини је фиксиран (то је $j+1$), а сви преостали елементи чине произвољан подскуп скупа $\{j+2, j+3, \ldots, n+1\}$, те их можемо одабрати на $2^{n+1-(j+2)+1} = 2^{n-j}$ начина, чиме је тврдња доказана. Како за произвољан подскуп скупа S елемент који је на месту $k+1$ по величини може бити било који од бројева $k+1, k+2, \ldots, n+1$, према претходно реченом добијамо да је L управо број подскупова скупа S који имају више од k елемената. Тиме је доказ завршен.

3. Приметимо да за

$$n = (a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1 a_0)_6 = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 6^i$$

важи $n \equiv \sum_{i=0}^{k} a_i \pmod 5$ и $n \equiv \sum_{i=0}^{k} a_i (-1)^i \pmod 7$. Како је број $(4005 \cdot 6!)^3$ дељив бројем 5, из претходног закључка добијамо

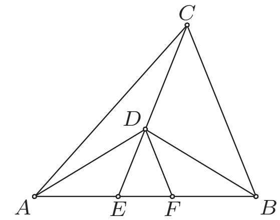
$$0 \equiv 20 + a + b \equiv a + b \pmod 5.$$

Како важи $0 \leqslant a, b \leqslant 5$, следи $0 \leqslant a + b \leqslant 10$, па је $a + b \in \{0, 5, 10\}$. Даље, по Вилсоновој теореми (или директном провером) је $(4005 \cdot 6!)^3 \equiv (1 \cdot (-1))^3 = -1 \pmod 7$, па добијамо

$$-1 \equiv 6 - a + b \pmod 7,$$

одакле је $b - a \equiv 0 \pmod 7$. Из $-5 \leqslant b - a \leqslant 5$ одавде закључујемо да је $b - a = 0$, тј. $a = b$. Дакле, $a = b = 0$ или $a = b = 5$. Најзад, приметимо да је број $(4005 \cdot 6!)^3$ дељив са $(3^4)^3 = 3^{12}$ али не и са 3^{13}, и да је дељив са $(2^4)^3 = 2^{12}$ али не и са 2^{13}. Дакле, он је дељив са 6^{12} али не и са 6^{13}, па се у бази са основом 6 завршава са тачно 12 нула. Следи $b \neq 0$, те коначно имамо $a = b = 5$.

4. Нека је F тачка дужи AB таква да је $AE = BF$. Из услова задатка закључујемо $BF = AE < EB$. Даље, троугао ADB је једнакокраки, па је $\sphericalangle EAD = \sphericalangle FBD$. Дакле, $\triangle AED \cong \triangle BFD$, па је $ED = FD$, а самим тим и $\sphericalangle DEF = \sphericalangle DFE$.



Ок 2014 3А 4

Једнакост размера из задатка даје $BF : BE = AE : BE = CD : CE$, па је по Талесовој теореми $DF \parallel BC$. Сада је $\sphericalangle CBE = \sphericalangle DFE = \sphericalangle DEF$, тј. троугао BCE је једнакокраки.

5. Нека је A_1 један од становника. Даље, низ становника $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ изабран је тако да становник A_{2k-1} поштује становника A_{2k} и становник A_{2k} воли становника A_{2k+1}, за $k \in \mathbb{N}$ (неки становници се у низу могу појављивати више пута). Докажимо индукцијом по d да, за свако непарно (односно парно) $n > d$ становник A_{n-d} воли (односно поштује) становника A_n. Ово је тачно за $d = 1$. Нека је $d > 1$. За непарно (односно парно) $n > d$, по индуктивној претпоставци, становник A_{n-d} поштује (односно воли) становника A_{n-1}, па по услову (2) становник A_{n-d} воли (односно поштује) становника A_n, и индукција је готова.
Означимо број становника са m. У поднизу $A_1, A_3, A_5, \ldots, A_{2m+1}$ неки становник се појављује више пута, рецимо $A_i = A_j$ за непарне $i < j$. На основу доказаног, становник A_i воли становника A_j, тј. самог себе, чиме је доказ завршен.

Четврти разред - А категорија

1. Ако је $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ тада је сваки реалан број x решење ове једначине, па у том случају ова једначина има бесконачно много решења. Претпоставимо да $(a, b, c) \neq (1, 1, 1)$. Нека је $f(x) = a^x + b^x + c^x - 3$. Тада је $f'(x) = a^x \ln a + b^x \ln b + c^x \ln c$ и $f''(x) = a^x(\ln a)^2 + b^x(\ln b)^2 + c^x(\ln c)^2$. Како нису сва три броја a, b, c једнака јединици, за сваки реалан број x је $f''(x) > 0$. Због тога је функција $f'(x)$ строго растућа на читавом скупу $\mathbb{R}$. Као таква, функција $f'(x)$ може имати највише једну нулу у скупу $\mathbb{R}$. Ако $f'(x)$ нема реалних нула, будући да је $f'(x)$ непрекидна на $\mathbb{R}$, следи да је $f'(x)$ истог знака на целом скупу $\mathbb{R}$. Тада је $f(x)$ или строго опадајућа на $\mathbb{R}$ или строго растућа на $\mathbb{R}$, а у оба случаја она може имати највише једну реалну нулу. Дакле, $f'(x)$ има реалну нулу x_0. Функција $f'(x)$ је строго растућа, па је негативна на интервалу $(-\infty, x_0)$, а позитивна на интервалу $(x_0, +\infty)$. Самим тим, функција $f(x)$ је строго опадајућа на интервалу $(-\infty, x_0]$ (јер је непрекидна у x_0) и строго растућа на интервалу $(x_0, +\infty)$, па у сваком од ових интервала $f(x)$ може имати највише једну нулу. Дакле, у овом случају $f(x)$ може имати највише две реалне нуле, те је једино решење задатка $(a, b, c) = (1, 1, 1)$.

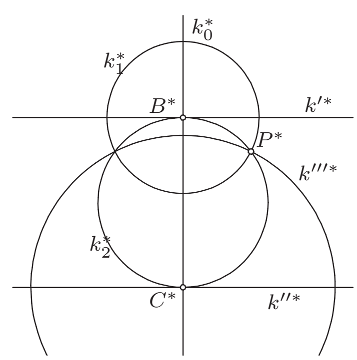
2. Нека су за све $k \in \{1, 2, \dots, 2014\}$ записани сви делиоци броја $2014+k$ не мањи од k. Докажимо да је сваки природан број n од 1 до 4028 записан тачно једном. Ако је $n > 2014$, тада је број n записан за свако $k \in \{1, 2, \dots, 2014\}$ такво да $n \mid k+2014$. Међутим, тада је $n = k+2014$, јер је $2n > 4028 \geqslant k+2014$, па је n записан тачно једном (за $k = n-2014$). Ако је $n \leqslant 2014$, број n записан за свако k такво да важи $n \mid 2014+k$ и $k \leqslant n$. Нека је $2014 = nt+s$, где је $0 \leqslant s \leqslant n-1$, $t \in \mathbb{Z}$. Тада је број n записан за свако $k \leqslant n$ такво да $n \mid nt+s+k$, односно $n \mid s+k$. Како је $s+k < 2n$, закључујемо да је $s+k = n$. Дакле, n је записан само за број $k = n-s$.
Како је сума дата у задатку једнака броју записаних бројева, то је она једнака 4028.

3. За $k = 2$ и $n = 9$ сваки од датих бројева, тј. $\binom{9}{0} = 1$, $\binom{9}{1} = 9$ и $\binom{9}{2} = 36$, је потпун квадрат.
Докажимо да је $k = 2$ највећи број са датом особином. Претпоставимо супротно, тј. да постоји $n \geqslant 3$ такво да је сваки од бројева $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}$ и $\binom{n}{3}$ потпун квадрат. Нека је

$$a^2 = n, \quad b^2 = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad c^2 = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Из $a^2(n-1) = 2b^2$ добијамо да $a \mid b$ и да је $n-1$ паран. Аналогно, из $b^2(n-2) = 3c^2$ добијамо да $b \mid c$ и да је $n-2$ дељив са 3. Дакле, n даје остатак 1 при дељењу са 2, а остатак 2 при дељењу са 3, па је $n = 6s+5$, за неко $s \in \mathbb{Z}$. Сада, заменом у једнакост $a^2(n-1) = 2b^2$ налазимо да је $a^2(3s+2) = b^2$, па је $3s+2$ потпун квадрат, што није могуће.

4. Како су кружнице k' и k_0 међусобно нормалне, тангента у тачки A на кружницу k' пролази кроз центар кружнице k_0. И кружница k'' нормална је на k_0, па тангента у тачки A на k'' такође пролази кроз центар кружнице k_0, тј. ова права заједничка је тангента кружница k' и k''. Одатле закључујемо да се кружнице k' и k'' додирују у тачки A, а аналогно се кружнице k' и k''' додирују у тачки B, односно кружнице k'' и k''' у тачки C.



Ок 2014 4А 4

Посматрајмо инверзију с центром у тачки A и произвољним полупречником. Како кружнице k' и k'' пролазе кроз центар инверзије и додирују се, оне се пресликавају у паралелне праве k'^* и k''^*. Кружница k_0 такође пролази кроз тачку A и нормална је на k' и k'', па се она пресликава у праву k_0^* нормалну на k'^* и k''^*, која их сече у тачкама B^* и C^*, сликама тачака B и C, респективно. Кружница k''' пресликава се у кружницу k'''^* која мора додиривати праве k'^* и k''^*, и чији центар мора припадати правој k_0^* (ово следи због тога што кружница k'''^* мора бити нормална на праву k_0^*) — дакле, кружница k'''^* јесте кружница над пречником B^*C^*.
Нека је P^* слика тачке P, $P^* \in k'''^*$. Кружница k_1 пресликава се у кружницу ${k_1}^*$ која пролази кроз тачку P^* и која мора бити нормална на праве k'^* и k_0^*, па се њен центар налази у пресеку ових правих, тачки B^*. Аналогно, слика k_2^* кружнице k_2 јесте кружница с центром у тачки C^* која пролази кроз тачку P^*. Тврђење задатка биће показано уколико установимо да су кружнице k_1^* и k_2^* међусобно нормалне, тј. да тангента једне од њих у тачки P^* пролази кроз центар друге. И заиста, како је $\sphericalangle B^*P^*C^*$ прав (као угао над пречником B^*C^*), закључујемо да је права B^*P^* тангента на k_2^*, што је и тражено.

5. У првом потезу играч A поставља знак $+$ испред броја 1, а затим игра на следећи начин. Он подели бројеве 2^1 до 2^{1000} у парове: $(2^{8k+1}, 2^{8k+5})$, $(2^{8k+2}, 2^{8k+6})$, $(2^{8k+3}, 2^{8k+7})$, $(2^{8k+4}, 2^{8k+8})$, за све $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 124\}$, и после сваког потеза играча B ставља исти знак као и B, али испред другог елемента пара у односу на онај испред кога је B претходно ставио знак. Како је збир елемената сваког пара дељив са 17, играјући на овај начин играч A постиже да после сваког његовог одиграног потеза, па и на крају игре, вредност израза даје остатак 1 при дељењу са 17. (Тангента 69, M1068)

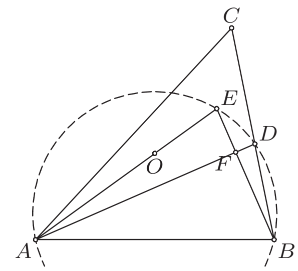
Први разред - Б категорија

1. Докажимо да је $Q \subseteq P$, тако што ћемо доказати да је сваки елемент скупа Q уједно и елемент скупа P. Нека је $x \in Q$. По дефиницији скупа Q важи $x \notin B$ и $x \in A \cup C$. Из друге релације закључујемо да је $x \in A$ или $x \in C$. Ако је $x \in C$, тада је и $x \in P$ (јер је $P = (A \setminus B) \cup C$), а ако је $x \in A$, како $x \notin B$, то је $x \in A \setminus B$, па опет важи $x \in P$.
(Тангента 73, стр. 35, зад. 1)

2. Троугао BAF је једнакокраки, па је симетрала $\sphericalangle BAF$ уједно и симетрала дужи BF. Слично, симетрале $\sphericalangle BCD$ и $\sphericalangle DEF$ су уједно и симетрале дужи BD и DF. Како се симетрале дужи BF, FD и BD секу у центру описане кружнице троугла BDF, тврђење је доказано.
(Тангента 66, стр. 40, зад. 2)

3. Нека су a и b целобројна решења дате једначине. Како број 2014 даје остатак 1 при дељењу са 3, то и број $9a^2 - b^2 + 6b$ даје остатак 1 при дељењу са 3. Бројеви $9a^2$ и $6b$ су дељиви са 3, па закључујемо да b^2 даје остатак 2 при дељењу са 3. Међутим, квадрати целих бројева дају остатак 0 или 1 при дељењу са 3, па дата једначина нема решења у скупу целих бројева.

4. Нека је $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCA = \gamma$ и F подножје нормале из тачке B на праву AD. Како је $\beta \geqslant \gamma$ важи $\sphericalangle ABF = 90^\circ - \alpha/2 \leqslant \beta$, а самим тим и распореди $A - F - D$ и $B - F - E$. Даље, из тетивности четвороугла $ABDE$ добијамо $\sphericalangle EAB = \sphericalangle EAD + \sphericalangle DAB = \sphericalangle EBD + \alpha/2 = \beta - \sphericalangle ABF + \alpha/2 = 90^\circ - \gamma$.



Ок 2014 1Б 4

Са друге стране, $\sphericalangle OAB = (180^\circ - \sphericalangle AOB)/2 = 90^\circ - \gamma$, па како су тачке O и C са исте стране праве AB (јер је $\gamma < 90^\circ$), то су тачке A, O и E колинеарне.

5. Укупна дужина балвана је 345m. Да имамо само један део те дужине, требало би направити 344 резова. Међутим, 80 делова већ постоји, па можемо закључивати као да је почетних 79 резова већ направљено. Значи треба учинити још $344 - 79 = 265$ резова.

Други разред - Б категорија

1. Да би дати израз био дефинисан потребно је да важи $x \neq 0$ и $\dfrac{7x-1}{x} \geqslant 0$, тј. $x \in (-\infty, 0) \cup \left[\dfrac{1}{7}, +\infty\right) = \mathcal{D}$. Даље, свако $x \in \mathcal{D}$ такво да важи $\dfrac{x-1}{x} < 0$ је решење дате неједначине (јер је лева страна увек ненегативна), односно сви $x \in \left[\dfrac{1}{7}, 1\right) = \mathcal{R}_1$ су решења дате неједначине. Нека је даље, $x \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{R}_1$. Тада, дата неједначина је еквивалентна са

$$\frac{7x-1}{x} > \frac{(x-1)^2}{x^2}, \text{ тј. } 0 < \frac{7x-1}{x} - \frac{(x-1)^2}{x^2} = \frac{6x^2+x-1}{x^2}.$$

Последња неједначина је еквивалентна са $6x^2 + x - 1 > 0$. Решења одговарајуће квадратне једначине су $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ и $x_2 = \dfrac{1}{3}$, па су у овом случају решења сви $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup [1, +\infty)$.

Коначно, решења неједначине су сви $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left[\dfrac{1}{7}, +\infty\right)$.

(Тангента 71, стр. 35, зад. 2)

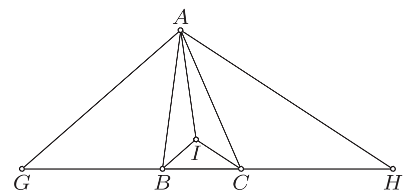
2. Леву страну дате једначине можемо записати као

$$(x^2+x+3)(x^2+3x+3) = (x^2+2x+3-x)(x^2+2x+3+x) = (x^2+2x+3)^2-x^2,$$

па је дата једначина еквивалентна са $(x^2+2x+3)^2 = 4x^2$. Дакле, решења почетне једначине су сва решења једначина $x^2+2x+3 = 2x$ и $x^2+2x+3 = -2x$. Прва квадратна једначина нема решења у скупу реалних бројева, док су решења друге $x_1 = -1$ и $x_2 = -3$. Ово су уједно и сва решења дате једначине. (Тангента 70, стр. 31, зад. 3)

3. Посматрајмо остатак леве стране једнакости при дељењу са 9. Број $3a^2+3a = 3a(a+1)$ даје остатак 0 или 6 при дељењу са 9 (јер a^2+a даје остатак 0 или 2 при дељењу са 3), па лева страна једнкости даје остатак 7 или 4 при дељењу са 9. Са друге стране, трећи степен целог броја при дељењу са 9 даје остатак 0, 1 или 8, па дата једначина нема решења у скупу целих бројева.

4. Нека су G и H тачке на правој BC такве да важи $AG \parallel BI$ и $AH \parallel CI$. Тада је $\sphericalangle GAB = \sphericalangle ABI = \sphericalangle IBE = \sphericalangle AGB$, па је $AB = GB$. Слично је $CH = AC$. Даље, из Талесове теореме имамо $\dfrac{EI}{AI} = \dfrac{EB}{BG} = \dfrac{EB}{AB}$, $\dfrac{EI}{AI} = \dfrac{EC}{CH} = \dfrac{EC}{AC}$,



Ок 2014 2Б 4

па је $\dfrac{EI}{AI} = \dfrac{BE+EC}{AB+AC} = \dfrac{BC}{AB+AC}$, што је и требало доказати.

5. Сваки елемент скупа $\{1,2,\ldots,n\}$ је у скупу A, B, C или $(A\cup B\cup C)^c$, па је тражени број једнак броју распореда бројева $\{1,2,\ldots,n\}$ у ова четири скупа тако да су задовољени дати услови. Одредимо број ових распореда.

Елемент који припада скупу $A\cap C$ можемо изабрати на n начина. Изаберимо затим два елемента који припадају скупу $A\cap B$. Ови елементи различити су од елемента који се налази у $A\cap C$ (јер је $A\cap B\cap C = \emptyset$), па њих можемо изабрати на $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ начина. Сваки од преосталих $n-3$ можемо сместити: 1) или само у скуп A (тј. у скуп $A\setminus(B\cup C)$); 2) или само у скуп B (тј. у скуп $B\setminus(A\cup C)$); 3) или само у скуп C (тј. у скуп $C\setminus(A\cup B)$); 4) или у скуп $B\cap C$; 5) или ни у један од скупова A,B,C. Дакле, за њихово размештање имамо 5^{n-3} начина, па тражене подскупове можемо одабрати на

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2}\cdot 5^{n-3}$$

начина.

Трећи разред - Б категорија

1. Представимо комплексне бројеве a и b у тригонометријском облику, тј. $a = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ и $b = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$. По Муавровој формули имамо $a^3 = 8(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 8$ и $b^3 = 8(\cos 4\pi + i\sin 4\pi) = 8$. Сада, ако је n облика $3k+1$ имамо

$$\begin{aligned}a^n + b^n + c^n &= a^{3k+1} + b^{3k+1} + c^{3k+1}\\&= a\cdot(a^3)^k + b\cdot(b^3)^k + c\cdot(c^3)^k = 8^k(a+b+c) = 0,\end{aligned}$$

а ако је n облика $3k+2$ имамо

$$\begin{aligned}a^n + b^n + c^n &= a^{3k+2} + b^{3k+2} + c^{3k+2}\\&= a^2\cdot(a^3)^k + b^2\cdot(b^3)^k + c^2\cdot(c^3)^k = 8^k(a^2+b^2+c^2) = 0.\end{aligned}$$

Дакле, ако n није дељиво са 3 важи $a^n + b^n + c^n = 0$.

2. Из услова задатка је

$$\begin{aligned}0 = \vec{a}\cdot\vec{b} &= (\vec{m}+3\vec{n})\cdot(7\vec{m}-5\vec{n}) = 7\vec{m}\cdot\vec{m} + 16\vec{m}\cdot\vec{n} - 15\vec{n}\cdot\vec{n}\\&= 7|\vec{m}|^2 + 16\vec{m}\cdot\vec{n} - 15|\vec{n}|^2\\0 = \vec{c}\cdot\vec{d} &= (\vec{m}-4\vec{n})\cdot(7\vec{m}-2\vec{n}) = 7\vec{m}\cdot\vec{m} - 30\vec{m}\cdot\vec{n} + 8\vec{n}\cdot\vec{n}\\&= 7|\vec{m}|^2 - 30\vec{m}\cdot\vec{n} + 8|\vec{n}|^2.\end{aligned}$$

Из прве једнакости добијамо да је $\vec{m}\cdot\vec{n} = \dfrac{15|\vec{n}|^2 - 7|\vec{m}|^2}{16}$, а из друге да је $\vec{m}\cdot\vec{n} = \dfrac{7|\vec{m}|^2 + 8|\vec{n}|^2}{30}$, па је $30(15|\vec{n}|^2 - 7|\vec{m}|^2) = 16(7|\vec{m}|^2 + 8|\vec{n}|^2)$, тј. $|\vec{m}| = |\vec{n}|$. Нека је α угао између вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$. Тада је $\vec{m}\cdot\vec{n} = |\vec{m}|^2\cos\alpha$, па из прве једнакости добијамо $|\vec{m}|^2\cos\alpha = |\vec{m}|^2/2$, тј. $\alpha = \pi/3$.
(Тангента 70, стр. 30, зад. 2)

3. Нека је $x^2 - ax = b$ и $x^3 - ax = c$. Тада је $c = x^3 - ax = x(ax+b) - ax = ax^2 + (b-a)x = a(ax+b) + (b-a)x = (a^2-a+b)x + ab$, тј. $c - ab = (a^2-a+b)x$. Према томе, ако је $a^2 - a + b \neq 0$, тада је $x = \dfrac{c-ab}{a^2-a+b}$, па како су $c-ab$ и a^2-a+b рационални бројеви (јер је $a,b,c\in\mathbb{Q}$), то је и x рационалан број.
Дакле, довољно је доказати да $a^2 - a + b \neq 0$. Претпоставимо супротно, тј. да је

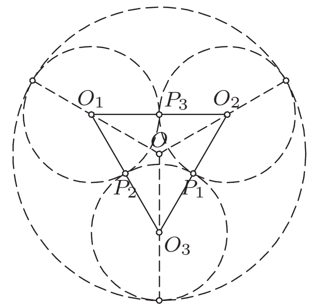
$$a^2 - a + b = x^2 - ax + (a^2 - a) = 0.$$

Дискриминанта ове квадратне једначине (по x) је

$$D = a^2 - 4(a^2 - a) = a(4 - 3a),$$

па како је $a > \dfrac{4}{3}$, то је $D < 0$, односно добијена квадратна једначина нема реалних решења, што је контрадикција.

4. Ако су k_1, k_2 и k_3 истог полупречника, троугао $O_1O_2O_3$ је једнакостраничан и O му је центар. Дакле, треба доказати обратно тврђење. Обележимо са P_1, P_2 и P_3 тачке додира кружница k_2 и k_3, k_3 и k_1, k_1 и k_2, редом.



Ок 2014 3Б 4

Нека су полупречници кружница k_1, k_2 и k_2, редом r_1, r_2, r_3, и нека је $O_1O_2 = c$, $O_2O_3 = a$ и $O_3O_1 = b$. Тада је $O_1O_2 = O_1P_3 + P_3O_2 = r_1 + r_2$, и слично $O_2O_3 = r_2 + r_3$, $O_3O_1 = r_3 + r_1$.
Решавањем овог система добијамо да је $r_1 = \dfrac{b+c-a}{2}$, $r_2 = \dfrac{c+a-b}{2}$ и $r_3 = \dfrac{a+b-c}{2}$, односно P_1, P_2 и P_3 су тачке у којима уписани круг троугла $O_1O_2O_3$ додирује странице O_2O_3, O_3O_1 и O_1O_2, редом.
Тачка O је центар уписаног круга троугла $O_1O_2O_3$, па из Питагорине теореме добијамо $OO_1^2 = r^2 + r_1^2$, $OO_2^2 = r^2 + r_2^2$ и $OO_3^2 = r^2 + r_3^2$, где је r полупречник круга уписаног у троугао $O_1O_2O_3$. Са друге стране, кружница k додирује кружнице k_1, k_2 и k_3, па важи $OO_1 + r_1 = R$, $OO_2 + r_2 = R$ и $OO_3 + r_3 = R$, где је R полупречник кружнице k. Сада је $r^2 + r_1^2 = OO_1^2 = (R - r_1)^2 = R^2 - 2Rr_1 + r_1^2$, па је $r_1 = \dfrac{R^2 - r^2}{2R}$, и слично $r_2 = r_3 = \dfrac{R^2 - r^2}{2R}$, чиме је тврђење доказано.

5. а) Дати број се може добити на следећи начин (слово изнад стрелице назначава која је машина употребљена)

$$(19,81) \to^{\text{В}} (81,19) \to^{\text{Б}} (62,19) \to^{\text{Б}} (43,19) \to^{\text{Б}} (24,19) \to^{\text{Б}} (5,19)$$
$$\to^{\text{В}} (19,5) \to^{\text{Б}} (14,5) \to^{\text{Б}} (9,5) \to^{\text{Б}} (4,5) \to^{\text{В}} (5,4) \to^{\text{Б}} (1,4) \to^{\text{В}} (4,1)$$
$$\to^{\text{А}} (5,1) \to^{\text{А}} (6,1) \to^{\text{В}} (1,6) \to^{\text{А}} (7,6) \to^{\text{В}} (6,7) \to^{\text{А}} (13,7) \to^{\text{В}} (7,13).$$

б) Докажимо следеће: ако смо употребом неке од три машине од пара (m,n) добили пар (m',n') такав да су m' и n' дељиви са 3, тада су и m и n дељиви са 3.
Да бисмо доказали ово тврђење, довољно је размотрити три случаја у зависности од тога коју смо машину употребили. Ако смо употребили машину А тада је $m' = m - n$, а $n' = n$. Дакле, $m = m' + n'$ и $n = n'$, па су бројеви m и n дељиви са 3. Слично, ако смо употребили машину Б важи $m = m' - n'$ и $n = n'$, а ако смо употребили машину В важи $m = n'$ и $n = m'$, па су m и n заиста дељиви са 3.
У датом примеру број 19 није дељив са 3, тако да се употребом датих машина не може добити број $(12,21)$. (Тангента 70, М1082)

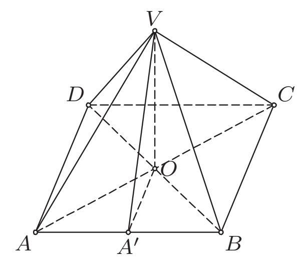
Четврти разред - Б категорија

1. Дата неједнакост еквивалентна је са $\ln x - \dfrac{2(x-1)}{x+1} > 0$, за $x > 1$. Нека је $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, дефинисана са $f(x) = \ln x - \dfrac{2(x-1)}{x+1}$. Тада је

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2(x+1) - 2(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}\,.$$

Како је $f'(x) > 0$ за $x > 1$, функција f је растућа на $(1, +\infty)$, па како је непрекидна у 1 добијамо $f(x) > f(1) = 0$ за $x > 1$. (Тангента 66, M999)

2. Нека је O пресек дијагонала четвороугла $ABCD$, тачке A', B', C', D' подножја нормала из O на странице AB, BC, CD, DA, редом, и $OA' = a', OB' = b', OC' = c', OD' = d'$. По теореми о три нормале је $\sphericalangle A'VO = \alpha, \sphericalangle B'VO = \beta, \sphericalangle C'VO = \gamma, \sphericalangle D'VO = \delta$, па је из одговарајућих правоуглих троуглова



Ок 2014 4Б 2

$$\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\gamma = \frac{H^2}{a'^2} + \frac{H^2}{c'^2},\ \operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\delta = \frac{H^2}{b'^2} + \frac{H^2}{d'^2},$$

где је H дужина висине пирамиде. Двострука површина правоуглог троугла AOB једнака је $a' \cdot AB = AO \cdot BO$, па је

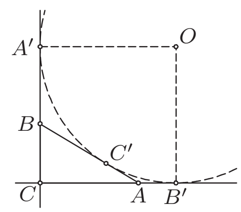
$$\frac{1}{a'^2} = \frac{AB^2}{AO^2 \cdot BO^2} = \frac{AO^2 + BO^2}{AO^2 \cdot BO^2} = \frac{1}{BO^2} + \frac{1}{AO^2}.$$

Слично добијамо $1/b'^2 = 1/BO^2 + 1/CO^2$, $1/c'^2 = 1/CO^2 + 1/DO^2$ и $1/d'^2 = 1/DO^2 + 1/AO^2$, одакле следи тврђење задатка.

3. Број $3x + 7y$ дељив је са 19, па је и број $8(3x + 7y) = 24x + 56y$ дељив са 19. Сада, како су бројеви $24x + 56y$ и $19x + 19y$ дељиви са 19 закључујемо да је и њихов збир, тј. $43x + 75y$ дељив са 19, што је и требало доказати. (Тангента 66, стр. 39, зад. 4)

4. Нека је AB хипотенуза троугла ABC и нека споља приписана кружница k која одговара хипотенузи додирује праве AB, BC, CA у тачкама C', A', B', редом. Ако је O центар кружнице k, тада важи $OA' \perp BC$, $OB' \perp CA$, $A'C \perp BC'$ и $OA' = OB' = R$, па је четвороугао $OA'CB'$ квадрат.

Са друге стране, BA' и BC' су тангенте из B на k, па је $BA' = BC'$. Слично је и $AB' = AC'$, па је $c = BC' + AC' = BA' + AB' = CA' - BC + CB' - AC = 2R - a - b$, где је $a = BC$ и $b = AC$. Дакле, $2R = a + b + c$. Како је $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$, то је



Ок 2014 4Б 4

$$R = \frac{a+b}{2} + \frac{c}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \frac{c}{2} = c\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) = c \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

5. а) Нека је $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ и $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$, где су p_i, за $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, различити прости бројеви, али притом дозвољавамо да неки од бројева α_i, β_i буду нуле (у случају да неки од бројева a и b има просте чиниоце које други нема). Приметимо да ако дозволимо да су неки од њих нуле, то не утиче на дефиницију функције f, јер за сваки прост број p важи $p^{0^2} = 1$.
Сада је $ab = p_1^{\alpha_1+\beta_1} p_2^{\alpha_2+\beta_2} \dots p_k^{\alpha_k+\beta_k}$, па је

$$f(ab) = p_1^{(\alpha_1+\beta_1)^2} p_2^{(\alpha_2+\beta_2)^2} \dots p_k^{(\alpha_k+\beta_k)^2}.$$

С друге стране је $f(a) = p_1^{\alpha_1^2} p_2^{\alpha_2^2} \dots p_k^{\alpha_k^2}$ и $f(b) = p_1^{\beta_1^2} p_2^{\beta_2^2} \dots p_k^{\beta_k^2}$, па је

$$(f(a) \cdot f(b))^2 = p_1^{2(\alpha_1^2+\beta_1^2)} p_2^{2(\alpha_2^2+\beta_2^2)} \dots p_k^{2(\alpha_k^2+\beta_k^2)}.$$

По неједнакости између аритметичке и квадратне средине, за све $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ важи $(\alpha_i + \beta_i)^2 \leqslant 2(\alpha_i^2 + \beta_i^2)$, одакле добијамо тражену неједнакост.
б) Нека је $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, где су p_i различити прости бројеви и $\alpha_i \in \mathbb{N}$, за $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Тада је

$$\begin{aligned} f\left(a^{2^n}\right) &= f\left(p_1^{2^n\alpha_1} p_2^{2^n\alpha_2} \dots p_k^{2^n\alpha_k}\right) = p_1^{(2^n\alpha_1)^2} p_2^{(2^n\alpha_2)^2} \dots p_k^{(2^n\alpha_k)^2} \\ &= p_1^{4^n\alpha_1^2} p_2^{4^n\alpha_2^2} \dots p_k^{4^n\alpha_k^2} = \left(p_1^{\alpha_1^2} p_2^{\alpha_2^2} \dots p_k^{\alpha_k^2}\right)^{4^n} = f(a)^{4^n}. \end{aligned}$$

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 15.3.2014.

Први разред, А категорија

1. Доказаћемо да број $S = a^{b^c} + x^{y^z}$ мора бити сложен број.
Ако $3 \mid a$ и $3 \mid x$, то $3 \mid S$, па је S сложен број јер је већи од 3. Ако $3 \mid b$ и $3 \mid y$, број S се може записати као $S = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$, где су α и β природни бројеви већи од 1. Како је $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 > 1$, закључујемо да је и у овом случају S сложен број.
У преосталим случајевима је

$$S \in \{2014^{3^{15}} + 3^{2014^{15}}, 2014^{15^3} + 3^{2014^{15}}, 2014^{3^{15}} + 15^{2014^3}, 2014^{15^3} + 15^{2014^3}\}.$$

Број 2014^{15} је дељив са 4, па је $3^{2014^{15}} \equiv 1 \pmod 5$. Сада, како је $2014 \equiv -1 \pmod 5$, а 3^{15} и 15^3 непарни бројеви, то су прва два елемента датог скупа дељива са 5 и већа од 5, па су сложени бројеви.
Даље, $2014^3 \equiv 5^3 \equiv -1 \pmod 7$, па како су 3^{14} и $5 \cdot 15^2$ непарни бројеви то је

$$2014^{3^{15}} = \left(2014^3\right)^{3^{14}} \equiv -1 \pmod 7 \text{ и } 2014^{15^3} = \left(2014^3\right)^{5\cdot 15^2} \equiv -1 \pmod 7.$$

Како је $15^{2014^3} \equiv 1 \pmod 7$, то су последња два елемента датог скупа дељива са 7 и већа од 7, па су сложени бројеви.

2. Без умањења општости можемо претпоставити да је $a \leqslant b \leqslant c$. Нека је са $S(XYZ)$ означена површина троугла XYZ. Ако саберемо двоструке површине троуглова AMB, BMC и CMA добијамо

$$\begin{aligned} 2S &= 2S(AMB) + 2S(BMC) + 2S(CMA) = a \cdot d_a + b \cdot d_b + c \cdot d_c \\ &\geqslant a(d_a + d_b + d_c). \end{aligned} \tag{3}$$

Такође, $b \leqslant 2R$ и $c \leqslant 2R$ (b и c су тетиве, а $2R$ пречник кружнице описане око троугла ABC), при чему је барем једна од ових неједнакости строга. Зато је $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} > \dfrac{1}{R}$, па из неједнакости (3) закључујемо

$$2S \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{R}\right) = \frac{2S}{a} + 2S \cdot \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{R}\right) > d_a + d_b + d_c.$$

3. Докажимо најпре да се игра мора завршити после коначно много потеза. Претпоставимо супротно. Приметимо да се после сваког потеза или број жетона смањује за 1, или број жетона остаје исти а број гомила повећава за барем 1. Дакле, како се у највише n потеза број жетона може смањивати, то се од неког тренутка у сваком потезу

број гомила повећава. Међутим, како на почетку имамо n жетона, то у сваком тренутку може постојати највише n гомила, што нас доводи до контрадикције.
Доказаћемо да ако је n непаран прост број онда играч Б има победничку стратегију, а да у супротном играч А има победничку стратегију.
Ако је n парно, играч А може поделити гомилу на 2 дела и надаље играти симетрично играчу Б (шта год Б урадио са једном гомилом, то А уради са другом). На овај начин он сигурно побеђује, јер после сваког потеза играча Б он може одиграти потез, а игра се завршава.
Ако је n непаран прост број, онда у првом потезу играч А има две могућности: или да узме жетон са гомиле или да подели гомилу на n гомила од по једног жетона. Ако играч А узме један жетон, онда на столу остаје паран број жетона, па играч Б на већ описани начин сигурно побеђује. Ако играч А подели гомилу на n гомила са по једним жетоном, тада у сваком наредном потезу играчи уклањају по један жетон, па игру завршава Б (јер је n непаран).
Коначно, нека је n непаран сложен број и p произвољан прост делилац броја n. Тада играч А може победити тако што игра на следећи начин. У првом кораку он дели гомилу на n/p гомила од по p жетона. Надаље, играч А сваку гомилу третира као засебну „партију”, тј. на сваки потез играча Б игра одговарајући потез у „партији”. Како сваку од „партија” започиње Б, то према претходном А може играти тако да завши сваку „партију”, па самим тим и почетну игру.

4. Нека је $R(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ полином са наведеним особинама. Очито $R(x)$ није константан полином. Ако је $a_n = -1$, тада важи

$$130 = R(3) \leqslant -3^n + 3^{n-1} + 3^{n-2} + \ldots + 3^1 + 1 = -3^n + \frac{3^n - 1}{2} < 0,$$

што није могуће. Зато је

$$130 = R(3) \geqslant 3^n - (3^{n-1} + 3^{n-2} + \ldots + 3^1 + 1) = 3^n - \frac{3^n - 1}{2} = \frac{3^n + 1}{2}\,.$$

Из неједнакости $130 \geqslant \dfrac{3^n + 1}{2}$ добијамо $n \leqslant 5$. За $n < 5$ важи

$$130 = R(3) \leqslant 3^4 + 3^3 + 3^2 + 3^1 + 1 = 121,$$

те је $n = 5$. Како је $3^4 > 3^3 + 3^2 + 3^1 + 1$ и $130 < 3^5$ закључујемо да је $a_4 = -1$. Сада је

$$130 = R(3) = 3^5 - 3^4 + 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0,$$

односно $27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 = -32$. На сличан начин налазимо да важи $a_3 = -1$, $a_2 = -1$, $a_1 = 1$ и $a_0 = 1$. Дакле, једини полином који може да задовољава све услове задатка је

$$R(x) = x^5 - x^4 - x^3 - x^2 + x + 1.$$

Непосредном провером утврђујемо да за њега важи и $R(-2) = -45$, те је он једини полином са траженим особинама.

Други разред - А категорија

1. Нека је m број са датом особином. Тада за свако $i \in \{1, 2, \ldots, 2014\}$ важи $a_i < m$, тј. $a_i \leqslant m - 1$. Према томе важи

$$m! = a_1! + a_2! + \ldots + a_{2014}! \leqslant (m-1)! + (m-1)! + \ldots + (m-1)! = 2014 \cdot (m-1)!$$

тј. $m \leqslant 2014$, па постоји коначно много природних бројева m са датом особином.

2. Са датог графика можемо приметити да функција f има три реалне нуле $x_1 < x_2 < x_3$ за које је $x_2 - x_1 > x_3 - x_2$, те да је $f(x) > 0$ за $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_3, +\infty)$.
Нека су $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функције дефинисане са

$$g(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{и} \quad h(x) = cx^2 + bx + a.$$

Ове функције нису идентички једнаке нули, па свака од њих има највише две реалне нуле. Докажимо да је $ac \neq 0$. Претпоставимо супротно. Нека је без умањења општости $c = 0$. Ако је и $b = 0$, тада функција g има највише једну реалну нулу, док функција h нема реалних нула, па f има највише једну реалну нулу, што је контрадикција. Дакле, $b \neq 0$. Слично, важи и $a \neq 0$, па је

$$f(x) = g(x)h(x) = abx\left(x + \frac{b}{a}\right)\left(x + \frac{a}{b}\right).$$

Дакле, за $x > \max\{0, -b/a, -a/b\}$ знак функције f исти је као и знак броја ab, а за $x < \min\{0, -b/a, -a/b\}$ знак функције f супротан је знаку броја ab, што је супротно условима задатка. Дакле, $ac \neq 0$.
Квадратне функције g и h имају једнаке дискриминанте D. Уколико важи $D \leqslant 0$ функција има највише две реалне нуле, што није случај. Дакле, важи $D > 0$, па функције g и h имају по две реалне (и различите) нуле. Како функција f има 3 реалне нуле, то се једна нула функције g и једна нула функције h поклапају, односно квадратне једначине $g(x) = 0$ и $h(x) = 0$ имају тачно једно заједничко реално решење α.
Дакле, $a \neq c$ и важи

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \text{ и } c\alpha^2 + b\alpha + a = 0.$$

Одузимањем ових једнакости имамо $(a - c)(\alpha^2 - 1) = 0$. Како је $a \neq c$, добијамо $\alpha = \pm 1$. Из Вијетових формула преостале две нуле функције f су бројеви c/a и a/c за $\alpha = 1$, односно $-c/a$ и $-a/c$ за $\alpha = -1$. Зато

$$f(x) = ac(x-1)^2\left(x - \frac{c}{a}\right)\left(x - \frac{a}{c}\right) \text{ или } f(x) = ac(x+1)^2\left(x + \frac{c}{a}\right)\left(x + \frac{a}{c}\right).$$

Одавде закључујемо да је у првом случају за $x > \max\{1, c/a, a/c\}$, односно у другом за $x > \max\{-1, -c/a, -a/c\}$, знак функције f исти као и знак броја ac, па је $ac > 0$. Дакле, бројеви ± 1, $\pm c/a$ и $\pm a/c$ су истог знака, па како важи $(\pm 1)^2 = (\pm c/a)(\pm a/c)$, то је $x_2 = \pm 1$.
Ако је $x_2 = 1$, тада из услова $1 - x_1 > x_3 - 1$ закључујемо $1 - \dfrac{c}{a} > \dfrac{a}{c} - 1$ или $1 - \dfrac{a}{c} > \dfrac{c}{a} - 1$, па важи $2 > \dfrac{c}{a} + \dfrac{a}{c}$. Међутим, по неједнакости између аритметичке и геометријске средине имамо

$$\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geqslant 2\sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c}} = 2,$$

па је $x_2 = -1$.
Нека су A, B и C тачке на x оси које одговарају нулама x_1, x_2 и x_3, редом. Остаје да конструишемо координатни почетак O, при чему знамо да важи распоред $A - B - C - O$ и $OB^2 = OA \cdot OC$. Одавде је

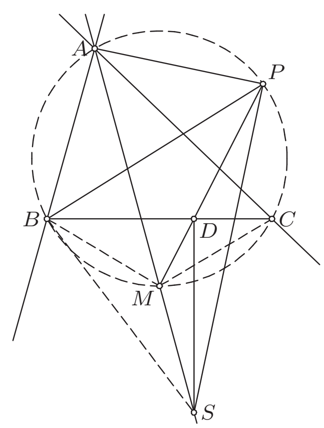
$$\frac{AO}{BO} = \frac{BO}{CO} = \frac{AO - BO}{BO - CO} = \frac{AB}{BC},$$

па је $\dfrac{BO}{CO} - 1 = \dfrac{AB}{BC} - 1$, односно $\dfrac{BC}{CO} = \dfrac{AB - BC}{BC}$. Користећи ову једнакост и Талесову теорему можемо конструишемо дуж CO. Тиме је одређен координатни почетак O, а y осу конструишемо као нормалу на x осу у тачки O.

3. Нека је $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ и $\sphericalangle ACB = \gamma$, и нека је без умањења општости $\beta > \gamma$.
Докажимо прво да је $MB = MC = MS$. Како је $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MBC$, то је $\sphericalangle SBM = (180^\circ - \beta)/2 - \sphericalangle MBC = \gamma/2$. Такође, $\sphericalangle BMS = \sphericalangle MBA + \sphericalangle BAM = (\beta + \alpha/2) + \alpha/2 = 180^\circ - \gamma$, па је $\sphericalangle BSM = \gamma/2$, а самим тим и $MB = MS$. Аналогно је $MC = MS$.

Приметимо да је $\sphericalangle MPB = \sphericalangle MCB = \sphericalangle MBD$, па како је и $\sphericalangle BMP = \sphericalangle DMB$, то су троуглови MPB и MBD слични. Самим тим, $MP \cdot MD = MB^2 = MS^2$. Како троуглови MPS и MSD имају заједнички угао, из претходне једнакости добијамо да су и они слични, па важи

$$\begin{aligned}\sphericalangle MPS &= \sphericalangle MSD \\ &= \sphericalangle BSD - \sphericalangle MSB \\ &= (90^\circ - \sphericalangle SBD) - \sphericalangle SBM \\ &= (\beta - \gamma)/2.\end{aligned}$$



Др 2014 2А 3

Сада је

$$\sphericalangle APS = \sphericalangle APM + \sphericalangle MPS = \sphericalangle ACM + \sphericalangle MPS = \gamma + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta - \gamma}{2} = 90^\circ.$$

4. Докажимо да је број n решење задатка ако и само ако при дељењу са 3 даје остатак 0 или 1. Докажимо прво да бројеви који дају остатак 0 или 1 при дељењу са 3 јесу решење задатка. Доказ спроводимо математичком индукцијом са кораком 3. Ознака $\circ$ представљаће упаљену сијалица, а $\bullet$ угашену сијалицу.

Докажимо тврђење за $n = 3$. У зависности од почетног стања сијалица на следеће начине можемо добити да су све сијалице упаљене: 1) $\circ\circ\circ$; 2) $\circ\bullet\bullet \to \circ\circ\circ$; 3) $\circ\circ\bullet \to \bullet\bullet\bullet \to \circ\circ\circ$; 4) $\circ\bullet\circ \to \circ\circ\bullet$ (даље као у 3)). Преостали случајеви су симетрични овим случајевима, те је доказ за $n = 3$ завршен. За $n = 4$ почетна стања са првом упаљеном сијалицом су: 1) $\circ\circ\circ\circ$; 2) $\circ\circ\circ\bullet \to \bullet\bullet\circ\bullet \to \circ\circ\bullet\bullet \to \circ\circ\circ\circ$; 3) $\circ\circ\bullet\circ \to \bullet\bullet\bullet\circ \to \circ\circ\circ\circ$; 4) $\circ\circ\bullet\bullet$ (као у 2)); 5) $\circ\bullet\circ\circ$ (аналогно са 3)); 6) $\circ\bullet\circ\bullet \to \circ\circ\bullet\circ$ (као у 3)); 7) $\circ\bullet\bullet\circ \to \bullet\circ\bullet\circ \to \circ\bullet\circ\circ$ (као у 5)); 8) $\circ\bullet\bullet\bullet \to \circ\circ\circ\circ$. Сви преостали случајеви (они код којих је прва сијалица угашена) се притиском прекидача испод прве сијалице своде на већ анализиране случајеве. Овим је база индукције доказана.

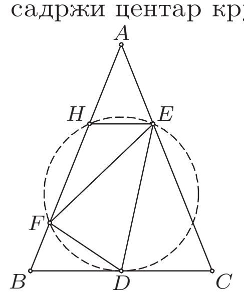
Претпоставимо сада да се из произвољног почетног стања за n сијалица може доћи у стање са свим угашеним сијалицама и докажимо да је такво тврђење тачно и када имамо $n + 3$ сијалице. Поступајмо на следећи начин. Најпре, низом потеза угасимо последње три сијалице (у случају $n = 3$ смо доказали да је то могуће), а потом на првих n сијалица применимо индуктивну хипотезу. Након овога је првих n сијалица упаљено, док су последње три у једном од два стања: 1) $\circ\bullet\bullet$ или 2) $\bullet\bullet\bullet$. У првом случају притиском на прекидач испод последње, а у другом испод претпоследње, постижемо да су и последње три сијалице упаљење, при чему нисмо променили стање првих n сијалица. Овим је доказ за бројеве n који дају остатак 0 или 1 при дељењу са 3 комплетиран.

Докажимо сада да бројеви n који дају остатак 2 при дељењу са 3 нису решења задатка. Приметимо прво да уколико неки прекидач притиснемо паран број пута, то је исто као и да нисмо притисли тај прекидач, а уколико га притиснемо непаран број пута то је исто као да смо га притисли само једном. Такође, редослед коришћења прекидача не утиче на коначну позицију. Докажимо да се из позиције где је првих $n-1$ сијалица упаљено, а последња угашена, не може доћи у позицију да су све сијалице упаљене. Без умањења општости, због наведених особина, можемо претпоставити да прекидаче активирамо са лева на десно. Нека је i први активирани прекидач. Ако је $i > 1$, тада сијалица $i-1$ постаје угашена и даљим низом потеза не може бити упаљена, те се не могу све упалити. Зато је први прекидач упаљен и имамо позицију $\bullet\bullet\circ\circ\ldots\circ\bullet$. Сада је нужно активирати други прекидач, па долазимо до $\circ\circ\bullet\circ\ldots\circ\bullet$. У овој позицији не може да се притисне трећи прекидач (јер ће друга сијалица остати угашена), па је нужно притиснути четврти и добијамо позицију $\circ\circ\circ\bullet\bullet\circ\circ\ldots\circ\bullet$. Сада морамо активирати пети прекидач чиме стижемо до $\circ\circ\circ\circ\circ\bullet\circ\circ\ldots\circ\bullet$. Настављајући на овај начин добијамо да се мора доћи до позиције $\circ\circ\circ\ldots\circ\bullet\circ\bullet$, при чему је последњи притиснути прекидач са редним бројем $n-3$. У овој позицији морамо притиснути претпоследњи прекидач, али онда, без обзира да ли последњи активирамо или не, добијамо позицију где нису све сијалице упаљене. Овим смо доказали да бројеви n који дају остатак 2 при дељењу са 3 нису решења задатка.

Трећи разред - А категорија

1. Претпоставимо прво да права BC додирује кружницу описану око троугла DEF. Тада је $\sphericalangle DFE = \sphericalangle CDE$, па како је и $\sphericalangle EDF = \sphericalangle ECD$, то су троуглови CDE и DFE слични, и важи $CD/DF = DE/EF$. Аналогно је $\triangle BDF \sim \triangle DEF$, а одатле и $BD/DF = DE/EF$. Из ове две једнакости следи $BD = CD$.

Претпоставимо да је $BD = CD$. Ако кружница k описана око троугла DEF додирује странице AB и AC, тада AD садржи центар кружнице k, па је BC њена тангента у тачки D. Нека зато, без умањења општости, кружница k сече праву AB у тачкама F и $H \neq F$. Претпоставимо да важи $B-F-H$. Тада је $\sphericalangle FHE = 180^\circ - \sphericalangle FDE = 180^\circ - \sphericalangle ABC$. Из $\sphericalangle BAC = 180^\circ - 2\sphericalangle ABC$, закључујемо да важи $F-H-A$ и $\sphericalangle AHE = 180^\circ - \sphericalangle FHE = \sphericalangle ABC$, тј. $HE \parallel BC$.



Др 2014 3А 1

Како је AD висина троугла ABC, то је $AD \perp HE$, па је D средиште лука HE кружнице описане око троугла FED, а самим тим BC тангента у D ове кружнице. Доказ у случају распореда $A-H-F$ се изводи слично.

Друго решење. Нека је $\sphericalangle ABC = \sphericalangle EDF = \beta$, $\sphericalangle EFD = x$, $\sphericalangle FED = y$, $\sphericalangle BDF = z$ и $\sphericalangle CDE = t$. Применом синусне теореме на троуглове BDF и CDE имамо

$$\frac{BD}{DF} = \frac{\sin(\beta+z)}{\sin\beta} \quad \text{и} \quad \frac{CD}{DE} = \frac{\sin(\beta+t)}{\sin\beta}\,.$$

Дељењем ових једнакости добијамо $\dfrac{BD}{CD}\cdot\dfrac{DE}{DF} = \dfrac{\sin(\beta+z)}{\sin(\beta+t)}$. Одавде, примењујући синусну теорему на троугао EDF, добијамо

$$\frac{BD}{CD}\cdot\frac{\sin(\beta+y)}{\sin(\beta+x)} = \frac{\sin(\beta+z)}{\sin(\beta+t)}. \tag{†}$$

Ако је права BC тангента кружнице описане око троугла EDF, као у првом решењу имамо $x = t$ и $y = z$, па на основу (†) важи $BD = CD$.
Нека је D средиште BC. Довољно је доказати да је $x = t$ и $y = z$. Како је $x + y = z + t$, из (†) добијамо $\cos(2\beta + y + t) = \cos(2\beta + x + z)$, па важи

$$\sin\left(2\beta + \frac{x + y + z + t}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{y + t - (x + z)}{2}\right) = 0. \qquad (‡)$$

Како је $2\beta + \dfrac{x + y + z + t}{2} = 180^\circ + \beta$, то је $\sin\left(2\beta + \dfrac{x + y + z + t}{2}\right) \neq 0$, па важи $\sin\left(\dfrac{y + t - (x + z)}{2}\right) = 0$. Одавде, уз

$$\left|\frac{y + t - (x + z)}{2}\right| < 180^\circ - \beta,$$

добијамо да је $y + t = x + z$. Из ове једнакости и $x + y = z + t$, налазимо $x = t$ и $y = z$, чиме је доказ комплетиран.

2. За $n = 1$ тврђење је очигледно тачно. Нека је зато $n > 1$.
Одредимо колико има тражених парова (A, B) за које је $|A \cup B| = m$. Ако је $A \cup B$ фиксирани m-точлани скуп, тада скупове A и B можемо одредити на $m - 1$ начина (ако је $|A| = k$, тада скуп A чини најмањих k елемената скупа $A \cup B$, а важи $1 \leqslant k \leqslant m - 1$). Како m-точлани подскуп скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ можемо изабрати на $\dbinom{n}{m}$ начина, број оваквих парова је $\dbinom{n}{m}(m - 1)$, па је тражени број парова једнак

$$\sum_{m=2}^{n} \binom{n}{m}(m - 1) = \sum_{m=2}^{n} \binom{n}{m} m - \sum_{m=2}^{n} \binom{n}{m}.$$

Како је

$$\binom{n}{m} m = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot (n - m + 1)}{m!} \cdot m = n \binom{n - 1}{m - 1},$$

то за прву суму важи

$$\sum_{m=2}^{n} \binom{n}{m} m = \sum_{m=2}^{n} n \binom{n - 1}{m - 1} = n \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n - 1}{m} = n(2^{n-1} - 1).$$

Друга сума једнака је $\displaystyle\sum_{m=2}^{n} \binom{n}{m} = 2^n - n - 1$, па је тражени број једнак $n(2^{n-1} - 1) - (2^n - n - 1) = (n - 2)2^{n-1} + 1$, што је и требало доказати.

Друго решење. За $n = 1$ тврђење је очито тачно. Нека је зато $n > 1$, (A, B) пар такав да је $A < B$ и $k < n$ највећи елемент скупа A. Тада се скуп A може одабрати на 2^{k-1} начина, а скуп B на $2^{n-k}-1$ (B не може бити празан скуп). Отуда је укупан број тражених уређених парова једнак

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1}(2^{n-k}-1) &= \sum_{k=1}^{n-1} 2^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = (n-1)2^{n-1} - (2^{n-1}-1)\\ &= (n-2)\cdot 2^{n-1}+1.\end{aligned}$$

Треће решење. Обележимо са x_n број уређених парова (A,B) подскупова скупа $\{1,2,...,n\}$ таквих да је $A<B$.
Израчунајмо број x_{n+1} у зависности од x_n. Парова скупова (A,B) за које важи $A,B\subseteq\{1,2,\ldots,n+1\}$, $A<B$ и $n+1\notin B$ има x_n. Ако је $B=\{n+1\}$, онда се A може одабрати на 2^n-1 начина; ако $B\neq\{n+1\}$, онда се пар (A,B) може одабрати на x_n начина. Дакле,

$$x_{n+1}=2x_n+2^n-1.$$

Низ задат са $x_1=0$ и овом рекурентом једначином јединствено је одређен, па како $x_n=(n-2)\cdot 2^{n-1}+1$ задовољава ове услове, доказ је завршен.

3. Докажимо да свако $n\in\mathbb{Z}$ има тражену особину.
Нека је

$$\begin{aligned}&S=\{-1007,\ldots,-2,-1,1,2,\ldots,1007\},\\ &C=\{-1,-2,3\}\cup\{4k,-(4k+1),-(4k+2),4k+3 \,\big|\, 1\leqslant k\leqslant 251\},\\ &D=\{1,2,-3\}\cup\{-4k,4k+1,4k+2,-(4k+3) \,\big|\, 1\leqslant k\leqslant 251\}.\end{aligned}$$

За овако одабране скупове важи $|C|=|D|=1007$, $C\cap D=\emptyset$, $C\cup D=S$, као и

$$\sum_{k\in C} k = 0 = \sum_{k\in D} k, \qquad \sum_{k\in C} k^2 = \sum_{k\in D} k^2.$$

За $n\in\mathbb{Z}$, нека је $m=n+1007$ и

$$A=\{m+c\,|\,c\in C\}, \qquad B=\{m+d\,|\,d\in D\}.$$

Скупови A и B су „транслације” скупова C и D за m, па важи $|A|=|B|=1007$, $A\cap B=\emptyset$, $A\cup B=\{n,n+1,\ldots,n+2014\}\setminus\{m\}$ и

$$\begin{aligned}\sum_{k\in A} k^2 &= \sum_{j\in C}(n+j)^2 = 1007n^2+2n\sum_{j\in C} j+\sum_{j\in C} j^2\\ &= 1007n^2+2n\sum_{j\in D} j+\sum_{j\in D} j^2 = \sum_{j\in D}(n+j)^2 = \sum_{k\in B} k^2,\end{aligned}$$

чиме је доказ завршен.

4. Приметимо да је $n=1$ решење задатка. Претпоставимо зато да неко $n>1$ задовољава услове задатка.

Како је $6^n \equiv 9^n \pmod{3^n - 2^n}$, дати услов еквивалентан је са

$$3^n - 2^n \mid 9^n + 3^n + 1.$$

Ако је n непаран број, из

$$9^n + 3^n + 1 = (3^n - 1)^2 + 3^{n+1},$$

закључујемо да је $9^n + 3^n + 1$ збир два квадрата. Са друге стране, $3^n - 2^n \equiv -1 \pmod 4$, па је $3^n - 2^n$ дељив неким простим бројем p облика $4k+3$. Како прост број облика $4k+3$ дели збир два квадрата ако и само ако дели сваки од њих, закључујемо да $p \mid 3^n - 1$ и $p \mid 3^{\frac{n+1}{2}}$. Међутим, из другог услова је $p = 3$, што не задовољава први услов.
Према томе, број n је паран, па важи $n = 2t$ за неко $t \in \mathbb{N}$. Дакле, $3^2 - 2^2 = 5$ дели $3^n - 2^n$, па је и број $9^n + 3^n + 1$ дељив са 5. Међутим, ово није могуће, јер важи

$$9^n + 3^n + 1 \equiv (-1)^{2t} + (-1)^t + 1 = 2 + (-1)^t \pmod 5.$$

Једино решење је $n = 1$.

Четврти разред - А категорија

1. Докажимо најпре следеће тврђење.

> *Тврђење.* Ако је $p > 3$ прост број који дели бројеве $a+b+c$, $a^2+b^2+c^2$ и $a^3+b^3+c^3$, онда p дели и бројеве a, b и c.
>
> *Доказ.* Нека је $t = a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$. Тада важи $p \mid (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) - (a^3+b^3+c^3) = t$, па из
>
> $$p \mid (a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = 3t + 6abc,$$
>
> добијамо $p \mid 6abc$. Како је НЗД$(p, 6) = 1$, то $p \mid abc$, па без умањења општости можемо претпоставити да $p \mid c$. Тада је $b \equiv -a \pmod p$, па из $0 \equiv a^2 + b^2 + c^2 \equiv a^2 + a^2 + 0 \pmod p$, добијамо да $p \mid 2a^2$, тј. $p \mid a$. Коначно, из $p \mid a + b + c$, имамо и $p \mid b$, чиме је доказ тврђења завршен.

Применом доказаног тврђења за $p = 11$, односно $p = 61$, добијамо $11^3 \cdot 61^3 \mid abc$. Дакле, довољно је доказати да $3^3 \mid abc(a-b)(b-c)(c-a)$. Ако бројеви a, b и c дају различите остатке при дељењу са 3, тада је $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 0^2 + 1^2 + 2^2 \equiv 2 \pmod 3$, што је у супротности са $3 \mid a^2 + b^2 + c^2$. Дакле, без умањења општости, можемо претпоставити да је $b \equiv c \pmod 3$. Сада из $0 \equiv a+b+c \equiv a+2b \equiv a-b \pmod 3$ добијамо да је $a \equiv b \pmod 3$. Овим смо доказали да су бројеви $a-b$, $b-c$ и $c-a$ дељиви са 3, па $3^3 \mid abc(a-b)(b-c)(c-a)$.

2. Како важи $3(a^2+b^2+2ab)\leqslant 4(a^2+b^2+ab)$, то из датог услова добијамо

$$\begin{aligned}4+(a+b)^2 &= \frac{4}{3}\cdot(ab+bc+ca)+a^2+b^2+2ab\\ &\leqslant \frac{4}{3}\cdot(ab+bc+ca+a^2+b^2+ab)=\frac{4}{3}\cdot(a+b)(a+b+c).\end{aligned}$$

Одавде је

$$\frac{4}{4+(a+b)^2}=1-\frac{(a+b)^2}{4+(a+b)^2}\leqslant 1-\frac{3(a+b)^2}{4(a+b)(a+b+c)}=1-\frac{3(a+b)}{4(a+b+c)}.$$

Сабирањем аналогних неједнакости добијамо тражену неједнакост.
Коментар. Једнакост важи ако и само ако је $a=b=c=1$.

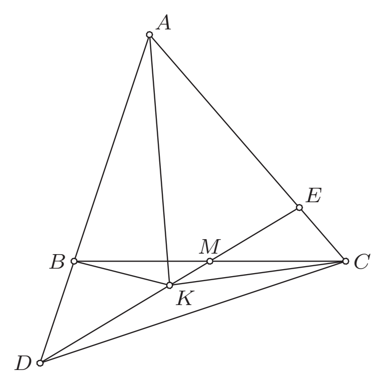
3. Нека је за многоугао $\mathcal{M}$ са $S(\mathcal{M})$ означена његова површина.
Нека је d растојање тачке D до праве AK и нека тачка E припада унутрашњости дужи AC (доказ у случају да тачка D припада унутрашњости дужи AB се изводи аналогно).
Приметимо да је $\sphericalangle DBM > \sphericalangle ECM$, што уз $BM=CM$ даје $DM>EM$, па се тачка K налази ван троугла ABC. Даље, важи $AK\cdot d=2\cdot S(ADK)$, а како је K средиште дужи DE, то је и $2\cdot S(ADK)=S(ADE)$. Такође,

$$S(ADE)=S(BKD)+S(BKEA)=S(BKD)+S(BKCA)-S(KCE).$$

Тачка K је средиште дужи DE, па је $S(KCE)=S(KDC)$, а тачка M средиште дужи BC, па је $S(KDC)=S(MDC)-S(MKC)=S(MDB)-S(MKB)=S(KDB)$. Из ове две једнакости је $S(KCE)=S(KDB)$, тј. $AK\cdot d=S(ADE)=S(BKCA)$. Коначно,

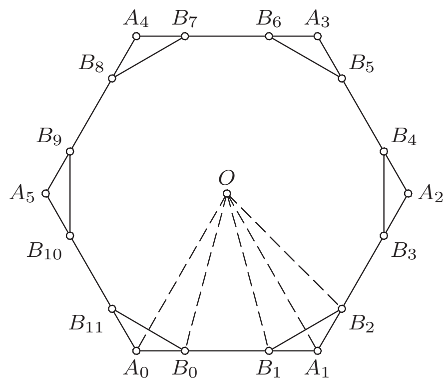
$$\begin{aligned}2AK\cdot d&=2S(BKCA)\\ &=AK\cdot BC\cdot\sin\varphi\leqslant AK\cdot BC\end{aligned}$$

(φ је угао између правих AK и BC), па је $d\leqslant BC/2$, што је и требало доказати.



Др 2014 4А 3

4. Доказаћемо да Аца има победничку стратегију. Нека је O центар датог шестоугла $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ ($A_6\equiv A_0$). Уочимо на страницама A_kA_{k+1}, за $0\leqslant k\leqslant 5$, тачке B_{2k} и B_{2k+1} такве да је $\sphericalangle A_kOB_{2k}=15^\circ$ и $\sphericalangle B_{2k+1}OA_{k+1}=15^\circ$. Троуглови $A_kB_{2k}O$, $A_{k+1}B_{2k+1}O$, за $0\leqslant k\leqslant 5$, имају једнаке углове и при томе су дужи OA_k, за $0\leqslant k\leqslant 5$, подударне, па су троуглови $A_kB_{2k}O, A_{k+1}B_{2k+1}O$, за $0\leqslant k\leqslant 5$, подударни. Одавде закључујемо да су дужи OB_k, за $0\leqslant k\leqslant 11$, подударне, те како је $\sphericalangle B_kOB_{k+1}=30^\circ$, за $0\leqslant k\leqslant 11$, закључујемо да је $B_0B_1\ldots B_{11}$ правилан дванаестоугао. Сада доказујемо да Аца користећи тачке $B_0, B_1, \ldots, B_{11}$ може победити.



Др 2014 4А 4

Нека Аца прво одабере тачку B_0. Докажимо да Воја тада мора изабрати неку од тачака B_3, B_6 или B_9. Заиста, уколико Воја одабере ма коју другу тачку, Аца у другом потезу бира тачку B_6 и без обзира на други Војин потез, одабиром B_3 или B_9 прави једнакокрако правоугли троугао.
Нека је Воја у првом потезу одабрао тачку B_6. Аца након тога бира тачку B_8. Тада је Воја принуђен да одабере тачку B_4, јер би је у супротном Аца одабрао у наредном потезу и добио игру. У трећем потезу Аца бира тачку B_2. Без обзира на трећи Војин потез, којим он не може добити игру, Аци на располагању остаје бар једна од тачака B_5 или B_{11}, те одабиром неке од њих добија игру.
Нека је Воја у првом потезу одабрао тачку B_3 (аналогно расуђујемо и ако је одабрао тачку B_9). Аца у другом потезу бира тачку B_4, чиме је Воја принуђен да одабере тачку B_8. Сада Аца бира тачку B_{10} и у наредном потезу добија игру формирајући једнакокрако правоугли троугао $B_4B_{10}B_1$ или $B_4B_{10}B_7$.

Први разред - Б категорија

1. Из услова задатка добијамо

$$2014 = a \cdot 8^{2015} + b \cdot 8^{2013} + c \cdot 8^{11} + d \cdot 8^3 + 16 \cdot 8^2 + 3. \qquad (\dagger)$$

Такође, важи

$$p(-8) = a \cdot (-8)^{2015} + b \cdot (-8)^{2013} + c \cdot (-8)^{11} + d \cdot (-8)^3 + 16 \cdot 8^2 + 3, \qquad (\ddagger)$$

па сабирањем једнакости (†) и (‡) добијамо $2014 + p(-8) = 2054$, тј. $p(-8) = 40$.

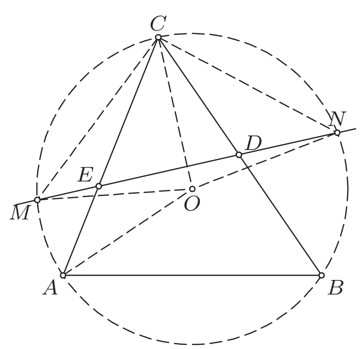
2. Из датог услова је $(ax+by+cz)^2 = 0$, тј. $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2 = -2abxy-2bcyz-2cazx$, па именилац датог разломка можемо записати као

$$\begin{aligned}
&bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2 + ab(x-y)^2 \\
&\qquad = bcy^2 + bcz^2 - 2bcyz + caz^2 + cax^2 - 2cazx + abx^2 + aby^2 - 2abxy \\
&\qquad = bcy^2 + bcz^2 + caz^2 + cax^2 + abx^2 + aby^2 + a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 \\
&\qquad = x^2(ca+ab+a^2) + y^2(bc+ab+b^2) + z^2(bc+ca+c^2) \\
&\qquad = (ax^2+by^2+cz^2)(a+b+c).
\end{aligned}$$

Дакле, дати разломак једнак је $\dfrac{1}{a+b+c}$, па не зависи од x, y и z. (Тангента 67, М1013)

3. Нека су m и n решења дате једначине. Како су m и n природни бројеви, то је $m^m < 2014$ и $n^n \leqslant (mn)^n < 2014$. Како за $k \geqslant 5$ важи $k^k \geqslant 5^5 > 2014$, из претходних неједнакости закључујемо да је $m \leqslant 4$ и $n \leqslant 4$. Ако је $m = 3$ онда је лева страна једнакости дељива са 3, а десна није, па $m \in \{1, 2, 4\}$. Ако је $m = 1$, тада је $n^n = 2013$, што није могуће. Ако је $m = 2$, тада је $(2n)^n = 2010$. Јасно је да $n = 1$ није решење ове једначине, док је за $n \geqslant 2$ лева стана претходне једнакости дељива са 4, а десна није. Дакле, за $m = 2$ једначина нема решења. За $m = 4$ једначина се своди на $4^4 + (4n)^n = 2014$, што није могуће, јер је лева страна дељива са 4, а десна није. Дакле, дата једначина нема решења у скупу природних бројева.

4. Нека је $\sphericalangle ABC = \beta$. Како је $AE \perp EB$ и $AD \perp BD$, то тачке E и D леже на кругу са пречником AB. Самим тим, $\sphericalangle CED = 180^\circ - AED = \sphericalangle ABD = \beta$. Ако је O центар описане кружнице k троугла ABC, онда је $\sphericalangle ACO = \sphericalangle CAO = 90^\circ - \beta$, па је $\sphericalangle ACO + \sphericalangle CED = 90^\circ$, тј. $CO \perp DE$. Како је троугао MON једнакокраки, то је висина која одговара страници MN уједно и симетрала дужи MN, па је CO симетрала дужи MN. Коначно, тачка C се налази на симетрали дужи MN, па је $CM = CN$.



Др 2014 1Б 4

5. Докажимо да се свако слово појављује исти број пута у речима са описаним својством. Нека је x произвољно слово. Речи са описаним својством у којима се појављује слово x има колико и петочланих скупова слова који не садрже x. Заиста, за сваки такав скуп на јединствен начин можемо поређати његове елементе и x у реч дужине 6 чија су слова у азбучном поретку, и на тај начин добити тачно једну реч која задовољава тражене услове. Дакле, број појављивања сваког слово у речима са датом особином једнак је броју петочланих подскупова скупа са 29 елемената.

Други разред - Б категорија

1. Приметимо да је комплексан број w реалан ако и само ако је $w=\overline{w}$. Зато за $t\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ важи

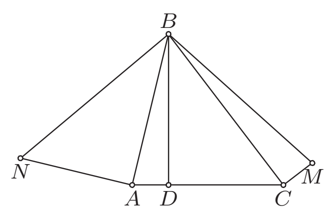
$$t-\frac{1}{t}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow t-\frac{1}{t}=\overline{t-\frac{1}{t}}.$$

Како је

$$t-\frac{1}{t}=\overline{t-\frac{1}{t}}\Leftrightarrow t-\frac{1}{t}=\overline{t}-\frac{1}{\overline{t}}\Leftrightarrow t-\overline{t}-\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\overline{t}}\right)=0\Leftrightarrow t-\overline{t}-\frac{\overline{t}-t}{t\overline{t}}=0$$
$$\Leftrightarrow (t-\overline{t})\left(1+\frac{1}{|t|^2}\right)=0\Leftrightarrow (t=\overline{t}\wedge t\neq 0)\Leftrightarrow t\in\mathbb{R}\setminus\{0\},$$

то су бројеви $z^{15}-\frac{1}{z^{15}}$, $z^3-\frac{1}{z^3}$ и $z^{2014}-\frac{1}{z^{2014}}$ реални ако само ако важи $z^{15},z^3,z^{2014}\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Међутим, тада је и број $z=\frac{z^{2014}}{(z^3)^{671}}$ реалан, па не постоји број $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ са траженом особином.

2. Применом Питагорине теореме на правоугле троуглове NAB и MCB добијамо $NB^2=NA^2+AB^2=CD^2+AB^2$ и $MB^2=MC^2+BC^2=AD^2+BC^2$. Применом Питагорине теореме на троуглове ABD и CBD добијамо $AD^2=AB^2-BD^2$ и $CD^2=BC^2-BD^2$. Заменом у претходне једнакости добијамо



Др 2014 2Б 2

$$NB^2=AB^2+BC^2-BD^2=MB^2,$$

што је и требало доказати.

Коментар. На слици је приказан случај у коме су тачке M и N са исте стране праве AC као и тачка B. Тачка M, односно N, се може налазити и са супротне стране праве AC у односу на тачку B. Приметимо да дати доказ не зависи од положаја тачака M и N, па није потребно засебно разматрати сваки од четири могућа распореда.

3. За $k\geqslant 2$ број $k!$ је паран, јер се у производу $k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$ број 2 појављује као чинилац. Како је 5^p непаран број, закључујемо да барем један од бројева m и n једнак 1. Нека је $m = 1$. Тада је $n! = 5^p - 1$. Приметимо да десна страна ове једнакости није дељива са 5, па није ни лева. Самим тим је $n \leqslant 4$, јер је у супротном број $n!$ дељив са 5 (у производу $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ се 5 налази као чинилац). Једноставном провером утврђујемо да једино за $n = 4$ дата једначина има решења. Сва решења дате једначине су $(m, n, p) = (1, 4, 2)$ и $(m, n, p) = (4, 1, 2)$. (Тангента 70, стр. 31, зад. 4)

4. Нека је $B_0B_1 \ldots B_{11}$ правилан дванаестоугао уписан у дату кружницу. Докажимо да Аца има победничку стратегију. Нека Аца прво одабере тачку B_0. Докажимо да Воја тада мора изабрати неку од тачака B_3, B_6 или B_9. Заиста, уколико Воја одабере ма коју другу тачку, Аца у другом потезу бира тачку B_6 и без обзира на други Војин потез, одабиром B_3 или B_9 прави једнакокрако правоугли троугао.
Нека је Воја у првом потезу одабрао тачку B_6. Аца након тога бира тачку B_8. Тада је Воја принуђен да одабере тачку B_4, јер би је у супротном Аца одабрао у наредном потезу и добио игру. У трећем потезу Аца бира тачку B_2. Без обзира на трећи Војин потез, којим он не може добити игру, Аци на располагању остаје бар једна од тачака B_5 или B_{11}, те одабиром неке од њих добија игру.
Нека је Воја у првом потезу одабрао тачку B_3 (аналогно расуђујемо и ако је одабрао тачку B_9). Аца у другом потезу бира тачку B_4, чиме је Воја принуђен да одабере тачку B_8. Сада Аца бира тачку B_{10} и у наредном потезу добија игру формирајући једнакокрако правоугли троугао $B_4B_{10}B_1$ или $B_4B_{10}B_7$.

5. Означимо са k, $1 \leqslant k \leqslant 3$, редни број врсте гледано одоздо нагоре, а са n, $1 \leqslant n \leqslant 7$, редни број колоне гледано слева надесно. У наредној табели уписаћемо на колико начина се од доњег левог поља може стићи до поља (k, n) (ово је поље које се налази у пресека k-те врсте и n-те колоне). Нека је овај број означен са $t(k, n)$. Приметимо да за било коју путању од поља $(1, 1)$ до поља (k, n) претпоследње заустављање може бити на пољу (k, l), за неко $1 \leqslant l \leqslant n-1$, или на пољу (l, n), за неко $1 \leqslant l \leqslant k-1$. Дакле, свакој путањи топа до поља (k, n) одговара једна путања до поља (k, l), за неко $1 \leqslant l \leqslant n-1$, или до поља (l, n), за неко $1 \leqslant l \leqslant k-1$, тј. важи

$$t(k,n) = t(k,1) + t(k,2) + \ldots + t(k,n-1) + t(1,n) + t(2,n) + \ldots + t(k-1,n).$$

Приликом попуњавања табеле, ову формулу можемо интерпретирати на следећи начин: сваки број у табели једнак је збиру бројева који се налазе лево од њега и у истој врсти као он, и бројева испод њега и у истој колони као он. Јасно је да важи $t(1, 1) = t(2, 1) = t(1, 2) = 1$, а остатак табеле попуњавамо на основу претходно описаног правила.

$k \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7
3	2	5	14	37	94	232	560
2	1	2	5	12	28	64	144
1	1	1	2	4	8	16	32

Тражени број једнак је 560.

Трећи разред - Б категорија

1. Нека је $1 \leqslant a \leqslant n$. Тада је $x_1 = \ldots = x_a = 1$ и $x_{a+1} = \ldots = x_n = 0$ једно решење датог система. Дакле, за све $a \in \{1, 2, \ldots, n\}$ дати систем има решења. Докажимо да за $a = n+1$ дати систем нема решења.
Претпоставимо супротно, тј. да је $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ једно решење датог система за $a = n+1$. Из прве једначине система закључујемо да не могу сви x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, бити једнаки нула или један, јер је тада $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant n$. Зато, за неко $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ важи $x_i \notin \{0, 1\}$. Приметимо да за сваки цео број x важи $x^{2014} \geqslant x$, при чему једнакост важи ако и само ако је $x \in \{0, 1\}$. Заиста, ово је тачно за $x \in \{-1, 0, 1\}$, док за $|x| > 1$ важи $x^{2014} = |x| \cdot |x|^{2013} > |x| \geqslant x$. Дакле, како нису сви x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, из скупа $\{0, 1\}$, то је

$$n + 1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n < x_1^{2014} + x_2^{2014} + \ldots + x_n^{2014} = n + 1,$$

што је контрадикција.
На основу претходног разматрања закључујемо да је најмањи природан број a за који дати систем нема решења једнак $n+1$.

2. Нека $\sqrt{3} + 5i$ одговара темену C, $2i$ центру O, а $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, темену A датог једнакостраничног троугла ABC. Тада је $AO^2 = CO^2$, па важи

$$a^2 + (b-2)^2 = (\sqrt{3})^2 + 3^2 = 12. \tag{$\dagger$}$$

Такође, како је $AO = 2\sqrt{3}$ полупречник описане кружнице, то је $AB = AC = 6$, па важи

$$(a - \sqrt{3})^2 + (b-5)^2 = 36. \tag{$\ddagger$}$$

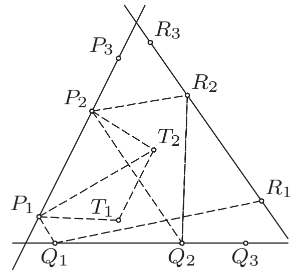
Даље, из $(\dagger) - (\ddagger)$ је $a\sqrt{3} + 3b = 0$, тј. $a = -\sqrt{3}b$. Коначно, заменом у $(\dagger)$ добијамо $b^2 - b - 2 = 0$. Решења ове једначине су $b_1 = -1$ и $b_2 = 2$, а њима одговарајуће вредности за a су $a_1 = \sqrt{3}$ и $a_2 = -2\sqrt{3}$. Приметимо да и тачка B задовољава једначине које смо користили за добијање тачке A, па једно од ових решења одговара тачки A, а друго тачки B. Дакле, преосталим теменима троугла одговарају комплексни бројеви $\sqrt{3} - i$ и $-2\sqrt{3} + 2i$. (Тангента 65, М969)

3. Како 2015 даје остатак 1 при дељењу са 2014, дати услов еквивалентан је са $(3x + 16)^n \equiv 1 \pmod{2014}$. Приметимо да последње важи за све x такве да је $3x + 16 \equiv 1 \pmod{2014}$. Једно такво x је 2009, па за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји x са траженом особином.

4. Нека је $k = P_1P_2 : P_2P_3$. Из услова задатка имамо да је $\overrightarrow{P_1P_2} = k\overrightarrow{P_2P_3}$, $\overrightarrow{Q_1Q_2} = k\overrightarrow{Q_2Q_3}$ и $\overrightarrow{R_1R_2} = k\overrightarrow{R_2R_3}$. Нека су T_1, T_2 и T_3 тежишта троуглова $P_1Q_1R_1$, $P_2Q_2R_2$ и $P_3Q_3R_3$, редом.

Приметимо да важи $\overrightarrow{T_1T_2} = \overrightarrow{T_1P_1} + \overrightarrow{P_1T_2} = \overrightarrow{T_1P_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2T_2}$. Аналогно добијамо следеће две једнакости:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{T_1T_2} &= \overrightarrow{T_1P_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2T_2}\\ &= \overrightarrow{T_1Q_1} + \overrightarrow{Q_1Q_2} + \overrightarrow{Q_2T_2}\\ &= \overrightarrow{T_1R_1} + \overrightarrow{R_1R_2} + \overrightarrow{R_2T_2}.\end{aligned}$$



Др 2014 3Б 4

Сабирањем ових једнакости, узимајући у обзир да је $\overrightarrow{T_1P_1} + \overrightarrow{T_1Q_1} + \overrightarrow{T_1R_1} = \overrightarrow{0}$ и $\overrightarrow{P_2T_2} + \overrightarrow{Q_2T_2} + \overrightarrow{R_2T_2} = \overrightarrow{0}$ (јер су T_1 и T_2 тежишта троуглова $P_1P_2P_3$ и $Q_1Q_2Q_3$) добијамо $3\overrightarrow{T_1T_2} = \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{Q_1Q_2} + \overrightarrow{R_1R_2}$. Аналогно имамо и $3\overrightarrow{T_2T_3} = \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{Q_2Q_3} + \overrightarrow{R_2R_3}$, па је

$$\overrightarrow{T_1T_2} = \frac{\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{Q_1Q_2} + \overrightarrow{R_1R_2}}{3} = k\frac{\overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{Q_2Q_3} + \overrightarrow{R_2R_3}}{3} = k\overrightarrow{T_2T_3},$$

што значи да су тачке T_1, T_2 и T_3 колинеарне.

5. а) Притиском првог и последњег прекидача добијамо позицију ○○••...••○○, где ○ и • означавају, редом, упаљену и угашену сијалицу. Све угашене сијалице, којих има 2010, поделимо у групе од по три узастопне сијалице. Притиском на средњи прекидач у свакој групи постижемо да све сијалице буду упаљене.

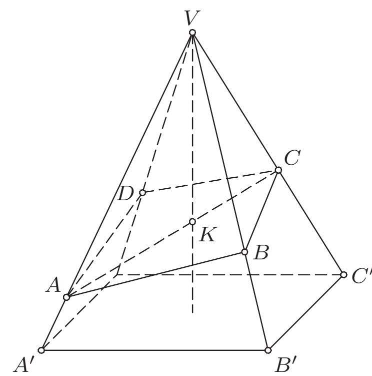
б) Доказаћемо да је без обзира која је сијалица упаљена могуће добити позицију у којој су све сијалице упаљене. Размотримо најпре случај када десно од упаљене сијалице постоје још бар три сијалице. Тада низом потеза добијамо $\bullet\ldots\bullet\underbrace{\circ\bullet\bullet}\bullet\ldots\bullet \to \bullet\ldots\bullet\bullet\underbrace{\circ\circ\bullet}\ldots\bullet \to \bullet\ldots\bullet\bullet\bullet\bullet\circ\ldots\bullet$. Овим смо упаљену сијалицу „померили” за три позиције десно, при чему су све остале сијалице угашене. Настављајући овакво „померање” можемо доћи до позиције у којој је једина упаљена сијалица једна од последње три. Уколико пак у почетном стању десно од упаљене сијалице немамо бар три угашене сијалице, то значи да се она већ налази на једној од последње три позиције. Дакле, доказали смо да без обзира на почетну позицију можемо доћи до једне од следеће три позиције: 1)•...•○•; 2)•...••○; 3)•...○••. Из позиције 1) притиском на прекидач испод последње сијалице долазимо у позицију 2). Докажимо да позицију 2) можемо довести до позиције са свим упаљеним сијалицама. Заиста, ако све угашене сијалице поделимо у групе од по три узастопне, онда активирањем средњег прекидача у свакој групи добијамо да су све сијалице упаљене. У позицији 3) активирањем последња два прекидача долазимо до ситуације да су све сијалице угашене. Према доказаном делу а) оваква позиција се може трансформисати у позицију са свим упаљеним сијалицама.

Овим је доказано да се без обзира која је сијалица упаљена у почетном тренутку може доћи до позиције са свим упаљеним сијалицама.

Четврти разред - Б категорија

1. Дати број једнак је $A = 25^n + 5^n - 18^n - 12^n$. Како је $25 \equiv 12 \equiv -1 \pmod{13}$, то је $25^n \equiv 12^n \pmod{13}$, па је $25^n - 12^n$ дељиво са 13. Слично је $18 \equiv 5 \pmod{13}$, тј. $18^n \equiv 5^n \pmod{13}$, па је и $5^n - 18^n$ дељиво са 13. Како је A збир два броја дељива са 13, то је и A дељив са 13.
(Тангента 71, стр. 36, зад. 5)

2. Нека је $VA'B'C'D'$ дата правилна пирамида, при чему је $A \in VA'$, $B \in VB'$, $C \in VC'$, $D \in VD'$. Означимо са α угао који образује висина пирамиде са њеним бочним ивицама и са K пресек висине пирамиде и равни π. Приметимо да се равни VAC и $VA'C'$ поклапају, па обе садрже висину пирамиде. Дакле, VK се налази у овој равни, па $K \in AC$. Ако $P(XYZ)$ означава површину троугла XYZ, из претходног добијамо



Др 2014 4Б 2

$$P(ACV) = P(AKV) + P(KCV), \text{ тј. } \frac{ac}{2} \cdot \sin 2\alpha = \frac{ak}{2} \cdot \sin\alpha + \frac{kc}{2} \cdot \sin\alpha,$$

где је $k = VK$. Коришћењем формуле за синус двоструког угла, из претходне једнакости добијамо $2ac\cos\alpha = ak + ck$, тј. $\dfrac{2\cos\alpha}{k} = \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{a}$.
Аналогно, из троугла BDV добијамо $\dfrac{2\cos\alpha}{k} = \dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{b}$.
Изједначавањем претходне две једнакости, добијамо тражену једнакост, тј. $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{d}$.

3. Означимо дату суму са S_n. Тада је $2S_n = n \cdot 2^n + (n-1) \cdot 2^{n-1} + \ldots + 3 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2$, па важи

$$\begin{aligned}
S_n &= 2S_n - S_n \\
&= n \cdot 2^n + (n-1)2^{n-1} + \ldots + 2 \cdot 2^2 - (n \cdot 2^{n-1} + (n-1)2^{n-2} + \ldots + 2 \cdot 2^1) \\
&= n \cdot 2^n - (2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2^2) - 2 \cdot 2^1 \\
&= n \cdot 2^n - \frac{2^n - 1^n}{2-1} - 1 = (n-1) \cdot 2^n,
\end{aligned}$$

одакле следи тврђење задатка.

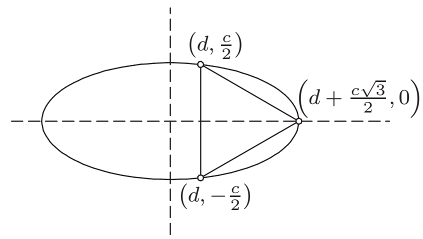
4. Доказаћемо да елипси са датом особином има бесконачно много. Нека је c дужина странице једнакостраничног троугла, а $d > 0$

произвољан број. Поставимо једнакостраничан троугао у координатну раван тако да једно његово теме буде тачка $\left(d+\frac{c\sqrt{3}}{2},0\right)$, а преостала два $\left(d,\frac{c}{2}\right)$ и $\left(d,-\frac{c}{2}\right)$. Докажимо да око овог троугла можемо описати елипсу чији је центар координатни почетак, а полуосе a и b припадају координатним осама. Нека је $a=d+\frac{c\sqrt{3}}{2}$. На овај начин обезбедили смо да се једно теме троугла налази на елипси.

Дакле, елипса је описана око једнакостраничног троугла ако и само ако садржи и преостала два темена, тј. ако и само ако важи

$$\frac{d^2}{a^2}+\frac{(\frac{c}{2})^2}{b^2}=1$$

за неко $b>0$.



Др 2014 4Б 4

Последња једнакост је еквивалентна са $b^2=\dfrac{c^2\cdot(d+\frac{c\sqrt{3}}{2})^2}{3c^2+4\sqrt{3}cd}$, те очито постоји $b>0$ које задовољава овај услов, па и елипса са траженом особином.

Приметимо да смо на овај начин за свако $d>0$ конструисали једну елипсу са траженом особином. При томе, овако добијене елипсе су различите, тако да их заиста има бесконачно много.

Коментар. У литератури се појављују две различите дефиниције елипсе: једна по којој је кружница елипса и друга по којој није. Дато решење одговара првој дефиницији, тј. доказано је да се око једнакостраничног троугла може описати бесконачно много елипси од којих неке могу бити и кружнице. Како се око сваког троугла може описати само једна кружница, из датог доказа закључујемо да се око једнакостраничног троугла може описати и бесконачно много елипси које одговарају другој дефиницији.

5. Нека је x број на првом, y на другом, а z на трећем шеширу. Тада, по услову задатка важи $x=y+z$, $y=z+x$ или $z=x+y$, па је $x=y+z$ или $x=|y-z|$. Зато, први математичар може одредити број на свом шеширу ако и само ако једна од ове две једнакости није могућа. Како на почетку први математичар не може одредити који је број на његовом шеширу, то су обе једнакости могуће, а самим тим важи $|y-z|\in\mathbb{N}$, тј. $y\neq z$. Други математичар такође не може одредити која од једнакости $y=z+x$ и $y=|z-x|$ важи, па слично као у претходном делу закључујемо да $z\neq x$. Међутим, из одговора другог математичара можемо закључити и више. Наиме, како важи $y\neq z$, други математичар може одбацити једнакост $y=|z-x|$, ако важи $x=2z$, па то није случај, тј. $x\neq 2z$. Дакле, $x\notin\{z,2z\}$ и $y\neq z$, и на основу ових информација први математичар може утврдити број x, тј. он може одбацити једну од једнакости $x=y+z$ и $x=|y-z|$.

Како за $x = y + z$ свакако важи $x \notin \{z, 2z\}$ и $y \neq z$, то он одбацује другу једнакост, тј. $|y - z| \in \{z, 2z\}$. Како је други математичар (касније) утврдио да је $y = 2014$, то не важи $y = 3z$, па из претходног закључујемо да је $y = 2z$. Коначно, $z = 1007$ и $x = y + z = 3021$.

Садржај