ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА
СРЕДЊОШКОЛАЦА
2014/2015

Зајечар, 2015

Организациони одбор 57. Државног такмичења из математике

1. Проф. др Александар Липковски, председник ДМС
2. Др Бојан Башић, ПМФ, Нови Сад, председник Државне комисије
3. Срђан Станојевић, директор Гимназије у Зајечару
4. Срђан Милијић, професор Гимназије у Зајечару
5. Наташа Станојевић, професор Гимназије у Зајечару
6. Драгана Секулић, професор Гимназије у Зајечару
7. Ана Пашалић, професор Гимназије у Зајечару
8. Данијела Митов, професор Гимназије у Зајечару
9. Живка Миленовић, професор Гимназије у Зајечару
10. Жељко Антијевић, професор Гимназије у Зајечару
11. Весна Петровић, професор Гимназије у Зајечару
12. Биљана Симоновић, професор Гимназије у Зајечару
13. Виолета Симић, професор Гимназије у Зајечару
14. Сандра Николић, професор Гимназије у Зајечару
15. Љиљана Главонић, професор у пензији

Организацију такмичења помогли

1. ПЗП „Зајечар“ а. д. – Strabag
2. Центар за културу и туризам „Цекит“, Зајечар
3. Позориште „Зоран Радмиловић“, Зајечар
4. Медицинска школа, Зајечар
5. Економско-трговинска школа, Зајечар
6. TF KABLE Фабрика каблова, Зајечар
7. Дом ученика, Зајечар

Редакција и обрада: др Бојан Башић

Зајечар кроз историју

Зајечар се као насеље у историјским изворима помиње још давне 1466. године. У турским тефтерима забелеено је као село са осам породица и „два неожењена“. Народна традиција казује да је прво насеље било преко Црног Тимока, у подножју Белог брега. Зајечар је тада припадао Видинској нахији.

Подаци о Зајечару се могу пронаћи у турским и аустријским изворима. Значајан тренутак за развој Зајечара је ослобађање од турске власти и прикључење Кнежевини Србији. Цивилна и управна власт је успостављена 1833. године. Након тога уследило је оснивање важних варошких институција, тако да је Зајечар исте године добио и прву основну школу, поштанску установу са мензулом, „касапно место“ и „општински кантар“. Наредне године Зајечар је постао и седиште Тимочке епархије. Поред основне школе 1836. године добио је и полугимназију.

Прикључење Зајечара Кнежевини Србији дало је могућност бржем економском развоју. Шездесетих година XIX века, установљењем телеграфске службе и стационирањем војних гарнизона, заокружено је формирање свих институција од значаја за даљи привредни, културни и друштвени развој.

За потребе државних органа и установа у Зајечару пристизао је велики број чиновника и службеника са стране. У потрази за што бољом зарадом у варош су пристизали страни трговци, механџије, Јевреји, Срби „пречани“ и други. Стални прилив становника довео је до урбаног развоја Зајечара, који од типичног сеоског насеља прераста у једну осредњу варош.

Период турске окупације утицао је на даљи демографски, привредни и културни развој ове вароши.

Крајем осамдесетих година XIX века, Зајечар стиче своје прве индустријске објекте, банке, руднике и то захваљујући улагању неколицине зајечарских трговаца. Они су били иницијатори многих културних и хуманитарних акција, оснивачи културно-образовних друштава и удружења.

Привредне, демографске и друштвене промене одразиле су се и на сам изглед вароши. Зајечар, у складу са тадашњим архитектонским променама, почела су да красе нова здања: основна школа, гимназија, општински суд, еснафски дом, болница, артиљеријска касарна. Увођење телефонске везе (1903), електричне струје (1909) и железничке пруге узаног колосека (1912) Зајечар почињу да воде ка модернизацији.

Балкански ратови, Први светски рат и бугарска трогодишња окупација неповољно су утицали на развој Зајечара јер је део грађана напустио варош, а већи део мушке популације био је у редовима српске војске.

Након ових ратних дешавања и формирања Краљевине Срба, Хрвата и Словенаца, уследила је нова етапа у развоју Зајечара. У складу са новом администативном поделом државе (1922), Зајечар је постао седиште Тимочке области са великим жупаном. Ова административна подела била је на снази све до 1929. године, када је Зајечар постао саставни део Моравске бановине са седиштем у Нишу. Након Првог светског рата долази до оживљавања привреде, обнављања и отварања нових радњи, трговачких и занатлијских, али почиње и развој и унапређење млинарске, пиварске, кожарске, стакларске и текстилне индустрије.

Након Другог светског рата Зајечар је и даље задржао примарно место у Тимочкој Крајини.

Гимназија у Зајечару

За развој школства у Србији од великог значаја је први закон о школама, донет 1833. године, којим је било предвиђено да сваки округ у Кнежевини Србији мора имати по две школе о државном трошку, а да свака општина која има цркву мора имати и школу. Тада је одобрењем кнеза Милоша у Крагујевцу отворена Велика школа, која је две године касније прерасла у Гимназију, прву гимназију у Кнежевини Србији, а 1836. и главне школе тј. гимназије у Шапцу, Чачку и Зајечару. За директора свих школа у Србији постављен је Петар Радовановић.

Зајечарска гимназија основана је 22. августа 1836. године, али је своје прве ђаке примила крајем исте године. Професор првих ученика зајечарске школе био је Живојин Керечки. Зајечарска гимназија била је смештена у згради постојеће основне школе.

Политичке прилике у Кнежевени Србији утицале су да кнежевско намесништво 1839. године одлучи да се место столовања тимочког владике пребаци из Зајечара у Неготин, а такође и зајечарска главна школа са целокупним својим инвентаром. Дотадашњи зајечарски ђаци своје школовање наставили су у Неготину, где је школа подигнута на виши ранг четвороразредне полугимназије. Кнез Милош је одобрио да се епископ Доситеј и полугимназија из Неготина поново преместе у Зајечар. Директор обновљене гимназије био је Стојан Бошковић, чијим је залагањем Гимназија добила школску библиотеку. Бошковић је важио за изузетно учену и уважавану личност, не само у Зајечару већ у читавој Србији.

Школске 1878/79. дворазредна зајечарска реалка је прерасла у нижу четвороразредну гимназију.

Народна скупштина Краљевине Србије на свом XXV заседању у Нишу, 10. јуна 1884. године, одлучила је да Зајечар, први од свих градова источне Србије, добије вишу гимназију. Зајечарска гимназија своју нову зграду добила је 1893. године. Њени темељи су постављени 1891. године.

Законом о средњим школама, јула 1898. године, одређено је да средње школе могу бити потпуне, са осам разреда, и непотпуне, са четири и шест разреда. Зајечар је успео да сачува своју гимназију. Пре овог догађаја, Указом од 1. јануара 1899. године, зајечарска гимназија је добила назив „Гимназија Доситеја Обрадовића“, док су остале потпуне гимназије у краљевини носиле, углавном, имена чланова династије Обреновића. Овај назив је укинут указом од 10. априла 1904. године, када јој је враћено старо име „Гимназија у Зајечару“, а након уједињења и стварања Краљевине СХС, „Државна реална гимназија у Зајечару“.

Школске 1912/1913. године, након опште мобилизације, зграда гимназије узета је за болницу и у њој су престала предавања. Сви наставници почели су да извршавају војне задатке. Изузетан допринос у прикупљању помоћи за болесне и рањене дали су и ученици гимназије. Велики рат је зауставио школовање. Опет су се професори и ученици одазвали општој мобилизацији и заједно са српском војском проживели голготу.

У извештају из 1918. године о ратној штети коју је школа претрпела налазе се и подаци да је зграда јако оштећена; од намештаја ништа није остало, учила готово да и нема, а библиотека не постоји. Све ово није омело гимназијалце да, иако у отежаним условима, наставе да стварају и раде.

Политичка превирања у Краљевини Југославији 1941. године одразила су се и на рад зајечарске гимназије. Школска 1941/1942. година прошла је са више прекида наставног процеса. Због нередовних прилика повремено се радило по ученичком домовима.

У складу са реформама које су пратиле школство педесетих година, 1957. уследила је и промена назива школе у „Моша Пијаде“. Гимназија је школске 1959/1960. године, одлуком Савета за просвету Народног одбора Среза, пребачена из своје матичне зграде у адаптирану зграду обласног одбора. Четири године касније, гимназија добија своју новосаграђену зграду у оквиру средњошколског центра, где се и данас налази.

Почетком 1990. године извршена је поновна корекција законских прописа у образовању, која враћа гимназије као тип школе. Школа је своју делатност уписала у судски регистар код Окружног привредног суда у Зајечару под именом Гимназија у Зајечару.

Гимназија данас има три смера – природно-математички, друштвено-језички и информатички – и укупно 16 одељења. Ученици Гимназије у последњих десет година освојили су више од 40 награда на државном и међународном нивоу. Најбољи матуранти новчано се награђују из Фонда мајора Цоловића, некадашњег ђака зајечарске Гимназије, на дан Светог Саве. У школи успешно ради Ђачки парламент, који организује акције посвећене младима и припада Унији ђачких парламената. Школа сарађује са различитим дечјим организацијама, тако да су деца боравила у Швајцарској, Америци, Норвешкој, Немачкој, Аустрији и Француској. У оквиру васпитно-образовне функције школе организују се екскурзије за ученике у Грчкој, Италији, Чешкој итд. Гимназија у Зајечару је једна од школа у Србији која је прешла на учење француског језика помоћу француских наставних метода. Такође, уведен је и нов начин учења енглеског језика по енглеским методама. Као други страни језик, поред француског, ученици Гимназије могу да уче немачки, руски и шпански језик. Школа активно сарађује са Истраживачком станицом у Петници и Центром за таленте у Бору. Библиотека школе има преко 5000 књига.

Кроз зајечарску Гимназију прошли су многи ђаци. Многи од њих су постали учени и познати људи који су превазишли своје учитеље: Никола Пашић, Адам Богосављевић, Јован Атанацковић, Стеван Стојановић Мокрањац, Ђорђе Генчић, Петар Живковић, Милан Гавриловић, Бранко Лазаревић, Зоран Радмиловић и многи други.

ДРЖАВНА КОМИСИЈА

за такмичења из математике ученика средњих школа,
школска година 2014/2015.

1. Балтић мр Владимир, Математичка гимназија, Београд

2. Башић др Бојан, ПМФ, Нови Сад – председник комисије

3. Божин др Владимир, Математички факултет, Београд

4. Дугошија др Ђорђе, Математички факултет, Београд

5. Ђикић Марко, ПМФ, Ниш

6. Ђукић Душан, Машински факултет, Београд

7. Илић др Александар, ПМФ, Ниш

8. Кнежевић др Миљан, Математички факултет, Београд

9. Лукић др Миливоје, Рајс, САД

10. Маринковић Растко, Књажевачка гимназија, Књажевац

11. Марковић др Петар, ПМФ, Нови Сад

12. Матић др Иван, Дјук, САД

13. Милосављевић Милош, Гимназија „Светозар Марковић“, Ниш

14. Пејчев др Александар, Машински факултет, Београд

15. Петковић др Марко, ПМФ, Ниш

16. Петровић др Никола, Институт за физику, Београд

17. Радовановић Марко, Математички факултет, Београд

18. Сеничић мр Александар, Гимназија, Краљево

19. Стојаковић др Милош, ПМФ, Нови Сад

20. Томић Иванка, Гимназија, Ваљево

Превод на мађарски језик:

1. Пеић др Хајналка, Грађевински факултет, Суботица

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 13. 12. 2014.

Први разред – А категорија

1. Доказати да не постоје цели бројеви m и n такви да важи

$$(m+n+2)^2 = 3(mn+1).$$

2. a) Нека је уређена четворка (x, y, z, w) решење једначине

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = xyzw.$$

Доказати да је и $(yzw - x, y, z, w)$ такође решење исте те једначине.

b) Доказати да једначина

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = xyzw$$

има бесконачно много решења у скупу природних бројева.

3. У равни је нацртано неколико правих. Права a сече тачно три од осталих правих, а права b сече тачно четири од осталих правих. Права c сече тачно n од осталих правих, при чему је $n \neq 3$ и $n \neq 4$. Колико је правих нацртано у равни?

4. У конвексном шестоуглу $ABCDEF$ важи $AB \parallel FC \parallel DE$, $BC \parallel AD \parallel EF$ и $CD \parallel BE$. Доказати да важи и $BE \parallel FA$.

5. За округлим столом седи 2014 људи. Свако од њих или увек говори истину, или увек лаже. Свако од људи за столом рекао је следећу реченицу: „Не разматрајући мене и моје прве суседе с леве и десне стране, сви остали људи за овим столом увек лажу“. Колико има људи за столом који увек говоре истину?

Други разред – А категорија

1. Решити једначину

$$x + \sqrt{3 + \sqrt{x}} = 3.$$

2. Доказати да број чији се декадни запис састоји само од нула и двојки не може бити потпун квадрат.

3. На пречнику AB кружнице k налази се тачка C. Нека су P и Q тачке на кружници k са исте стране пречника AB такве да је $\angle PCA = \angle QCB$.

Нека су O_1 и O_2 центри описаних кружница за $\triangle PCA$ и $\triangle QCB$, респективно. Доказати: $O_1O_2 \parallel AB$.

4. Нека су x и y реални бројеви. Ако су $x^2 - y^2$, $x^3 - y^3$ и $x^4 - y^4$ рационални бројеви различити од нуле, да ли тада и број $x - y$ мора бити рационалан?

5. У једном селу, n очајних домаћица истовремено су сазнале укупно n различитих трачева, при чему је свака сазнала тачно по један трач. Затим је уследио низ телефонских разговора, при чему у сваком разговору учествују тачно две домаћице, и оне том приликом међусобно размене све трачеве које су чуле до момента започињања разговора. Колико је минимално потребно телефонских разговора да би свака од n домаћица сазнала свих n трачева?

Трећи разред – А категорија

1. Нека је $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Функција $g : A \to A$ задата је на следећи начин:

$$g(x) = \begin{cases} x+1, & \text{за } x < n; \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

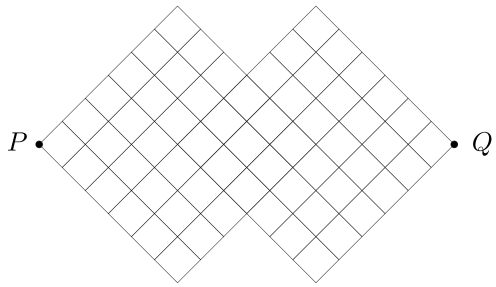
Колико има функција $f : A \to A$ таквих да за све $x \in A$ важи $f(f(x)) = g(x)$?

2. У оштроугли $\triangle ABC$ уписани су квадрати $P_1Q_1R_1S_1$, $P_2Q_2R_2S_2$ и $P_3Q_3R_3S_3$ на следећи начин: тачке P_1 и Q_1 леже на дужи BC, тачка R_1 на CA и тачка S_1 на AB; тачке P_2 и Q_2 леже на дужи CA, тачка R_2 на AB и тачка S_2 на BC; тачке P_3 и Q_3 леже на дужи AB, тачка R_3 на BC и тачка S_3 на CA. Нека је M_1 средиште дужи P_1Q_1, M_2 средиште дужи P_2Q_2 и M_3 средиште дужи P_3Q_3. Доказати да се праве AM_1, BM_2 и CM_3 секу у једној тачки.

3. Одредити највећи природан број n који има особину да је дељив свим природним бројевима који нису већи од $\sqrt[3]{n}$.

4. Нека је дат троугао чије су дужине страница три узастопна природна броја и највећи угао је два пута већи од најмањег. Доказати да је такав троугао јединствен.

5. Колико има путева између тачака P и Q најкраће могуће дужине, при чему је дозвољено кретати се искључиво дуж страница квадратне мреже на цртежу?



Четврти разред – А категорија

1. Дат је природан број n. Нека су $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant 0$ реални бројеви који задовољавају једнакости

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

и

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = x_1.$$

Одредити све могуће вредности броја x_1.

2. Наћи максималан производ природних бројева чији је збир једнак 2013.

3. У квадрат $ABCD$ уписана је кружница k. За сваку тачку T кружнице k, нека су α_T и β_T углови под којима се виде дијагонале AC и BD квадрата. Доказати да за свако $T \in k$ важи $\operatorname{tg}^2 \alpha_T + \operatorname{tg}^2 \beta_T = 8$.

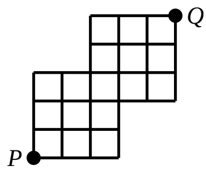
4. Нека је a_0 произвољна цифра. За $n \in \mathbb{N}_0$, нека a_{n+1} представља цифру јединица броја $2^0 a_0 + 2^1 a_1 + \cdots + 2^n a_n$. Доказати да је низ $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ периодичан почев од неког члана.

5. Мерлин, помоћник краља Артура, установио је да постоји 2013 витезова округлог стола, и да притом сваки од њих има тачно два непријатеља међу осталим витезовима. Мерлин је даље утврдио да сви витезови могу сести за округли сто на такав начин да између свака два непријатеља седе тачно 182 друга витеза. Знајући да је могућ овакав распоред за округлим столом, одредити на колико начина може бити одабрана група витезова (групу чини бар 1 витез) у којој никоја два витеза нису у непријатељским односима.

Први разред – Б категорија

1. Одредити највећи природан број n такав да број $25! + 26!$ буде дељив бројем 3^n.

2. Колико има путева између тачака P и Q најкраће могуће дужине, при чему је дозвољено кретати се искључиво дуж страница квадратне мреже на цртежу?



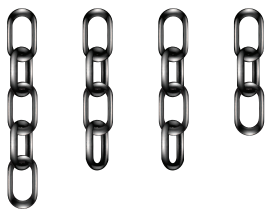
3. На острву живе само два типа људи: витезови (који увек говоре истину) и подлаци (који увек лажу). Туриста је срео два човека који живе на острву и питао вишег од њих да ли су они обојица витезови. Он му је одговорио, али на основу тог одговора туриста није могао да закључи ко су они. Зато је питао нижег да ли је виши витез. Након његовог одговора туриста је знао за сваког од њих двојице ком типу људи припада. Ком типу припадају људи које је туриста срео?

4. Испитати да ли је формула

$$(\neg r \Rightarrow (p \vee q)) \Leftrightarrow (p \vee q \vee r)$$

таутологија.

5. Златар има четири мала ланчића као што је то илустровано на слици:



(Дакле, ланчићи су састављени од 5, 4, 4 и 3 алки.) Његови трошкови су 1 \$ да раскине било коју алку са ових ланчића и 2 \$ да састави опет исту алку. Колики су његови минимални трошкови у \$ ако жели да помоћу ових алки направи затворен ланчић?

Други разред – Б категорија

1. У правоуглом трапезу $ABCD$, с правим угловима у теменима A и D, дужине основица су $AB = a$ и $CD = b$, при чему је $a > b$. Познато је да кружница с пречником AD додирује крак BC. Израчунати површину трапеза $ABCD$ (одговор дати у зависности од вредности a и b).

2. Пера и Мика играју следећу игру. Они додељују вредности коефицијентима a, b и c у једначини

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Пера игра први и уписује произвољан реалан број уместо неког од коефицијената. Затим Мика уписује произвољне бројеве уместо преостала два коефицијента, уз услов да сва три уписана броја морају бити међусобно различита. Мика побеђује ако тако добијена једначина има тачно једно реално решење, а Пера побеђује у свим осталим случајевима. Ко од њих двојице има победничку стратегију?

3. Доказати да постоји природан број који почиње са 1234567890 и који је дељив са 2013.

4. Нека су x, y и z реални бројеви такви да су xy, yz и zx рационални бројеви различити од нуле. Доказати:

a) број $x^2 + y^2 + z^2$ је рационалан;

b) ако је $x^3 + y^3 + z^3$ рационалан број различит од нуле, онда су x, y и z рационални бројеви.

5. Колико има четвороцифрених бројева који се записују помоћу цифара 1, 2 и 3, али тако да се ниједна цифра не појављује више од два пута у запису броја?

Трећи разред – Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{32}.$$

2. Поља табле формата $(2m+1)\times(2n+1)$ обојена су са 2 боје на произвољан начин. Поље те табле називамо *краљевским* ако међу свим пољима у његовој врсти има више оних која су обојена његовом бојом наспрам оних која су обојена супротном бојом. Поље те табле називамо *царским* ако међу свим пољима у његовој колони има више оних која су обојена његовом бојом наспрам оних која су обојена супротном бојом. Доказати да постоји бар $m+n+1$ поља која су истовремено краљевска и царска.

3. Одредити све двоцифрене бројеве дељиве производом својих цифара.

4. Дужа основица једнакокраког трапеза је a, а оштар угао α. Дијагонала трапеза нормална је на крак. Трапез ротира око дуже основице. Наћи запремину добијеног тела.

5. Дечак понедељком и уторком говори истину, суботом увек лаже, док осталим данима у недељи говори истину или лаже насумично. Седам узастопних дана понављано му је питање: „Како се зовеш?“ Првих шест дана давао је редом следеће одговоре: „Иван“, „Марко“, „Драган“, „Тома“, „Петар“, „Тома“. Који одговор је дао седмог дана?

Четврти разред – Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}=2.$$

2. Доказати да за сваки природан број $n>1$ важи неједнакост

$$2!\cdot 4!\cdots(2n)!>((n+1)!)^n.$$

3. Одредити комплексне бројеве z_2 и z_3 тако да је $Oz_1z_2z_3$ ромб са оштрим углом код темена O (координатни почетак) једнаким $45°$, при чему је $z_1=2\sqrt{2}+i$.

4. Доказати да за $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ важи

$$\operatorname{tg}x>x+\frac{x^3}{3}.$$

5. Да ли међу свим шестоцифреним бројевима има више оних који се могу представити као производ нека два троцифрена броја, или више оних који се не могу тако представити?

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 31. 1. 2015.

Први разред – А категорија

1. На табли је записан позитиван реалан број x. У једном кораку дозвољено је урадити следеће: уколико је на табли већ записан број a, дозвол јено је дописати неки од бројева $a+1$ или $\frac{1}{a}$, или, уколико су на табли већ записани бројеви a и b за које важи $a > b$, тада је дозвољено дописати неки од бројева $a+b$ или $a-b$. Доказати да је после коначно много корака могуће добити на табли број x^2.

2. Нека је $P(n)$ производ свих цифара природног броја n. Наћи све природне бројеве n за које важи $n = P(n) + 18$.

3. Нека су a и b природни бројеви. Доказати да природни бројеви c и d такви да важи $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ постоје ако и само ако је бар један од бројева a и b паран.

4. Кружнице k_1 и k_2 секу се у тачкама P и Q, при чему кружница k_1 пролази кроз центар кружнице k_2. Различите тачке A и B леже на делу кружнице k_1 који је унутар k_2 и притом су једнако удаљене од центра кружнице k_2. Ако права PA сече k_2 у тачки $D \not\equiv P$, доказати да тада важи $AD = PB$.

5. У биоскопску салу која има 2015 места ушло је 2014 посетилаца, међу којима је и Мика. Сви ови посетиоци сели су на произвољна места, не обазирући се на то које место им је намењено према карти. На пола филма у салу улази 2015. посетилац. Он жели да седне баш на своје место према карти, и уколико је оно заузето, подићи ће с тог места гледаоца који ту седи. Подигнути гледалац потом гледа које је његово седиште, и ако је оно заузето, и он ће подићи гледаоца који седи на његовом месту. Овакав поступак се наставља све док не буде подигнут гледалац коме је према карти додељено место које је слободно (и он ће тада сести на то место). Нека је a број оних почетних распореда за које ће током читавог овог комешања и Мика у неком моменту бити подигнут, а b број преосталих почетних распореда. Који од следећа три односа важи: $a > b$, $a = b$ или $a < b$?

Други разред – А категорија

1. Решити систем једначина:

$$uv = 3u - v + 1;$$
$$vw = 3v - w + 1;$$
$$wu = 3w - u + 1.$$

2. Пред Рајом Ратком на табли стоји записан природан број у коме су сунђером обрисане две цифре између којих се налази паран број (познатих) цифара. Раја зна остатке полазног броја при дељењу са 9 и са 11 и покушава да открије две обрисане цифре. Испоставило се да Раја није у могућности да открије цифре које недостају, тј. постоји више уређених парова цифара (x, y) таквих да се, за сваки такав уређен пар, уписивањем цифара из тог уређеног пара на место обрисаних цифара добија број који при дељењу са 9 и са 11 даје управо оне остатке који су познати Раји. Одредити између којих могућности за уређен пар (x, y) Раја Ратак не може да се определи.

3. У $\triangle ABC$ важи $\measuredangle BAC = 45^\circ$ и $\measuredangle CBA = 15^\circ$. На продужетку странице AC преко тачке C уочена је тачка M таква да важи $CM = 2AC$. Одредити $\measuredangle AMB$.

4. Дат је $\triangle ABC$ у ком важи $\measuredangle C = 90^\circ$. Нека је P тачка на краћем луку AC кружнице описане око $\triangle ABC$. Нормала из тачке C на праву CP сече праве AP и BP у тачкама K и L, редом. Доказати да однос површина $\triangle BKL$ и $\triangle ACP$ не зависи од избора тачке P.

5. Нека је уочен природан број n дељив са 8. Посматрајмо све подскупове скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ чија је кардиналност дељива са 4 или даје остатак 1 при дељењу са 4. Нека је број таквих подскупова једнак m. Показати да m у бинарном запису садржи тачно две цифре 1.

Трећи разред – А категорија

1. Нека је $p \geqslant 3$ прост број. Доказати:

$$p^2 \mid \left(\frac{p^2+1}{2}\right)^p + ((p-3)!)^{1+(p-1)!}.$$

2. Одредити све вредности параметра c за које систем једначина:

$$x^2 - yz = 1;$$
$$y^2 - zx = 2;$$
$$z^2 - xy = c$$

има решење у скупу ненегативних реалних бројева.

3. У конвексном четвороуглу дужине свих страница и дијагонала су рационални бројеви. Да ли тада и дужине одсечака дијагонала на које их дели њихова пресечна тачка морају бити рационални бројеви?

4. На табли је на почетку записан број 1. У n-том кораку спроводи се следећи поступак: сваки број на табли се обрише и уместо њега се запише низ бројева, и то тако што се, уколико је обрисан број i, уместо њега напише низ $1, 2, \ldots, i-1$ (специјално, уколико је обрисан број 1, уместо њега се у овом моменту не уписује ништа); потом се додатно на таблу допише број $n+1$. Одредити колико ће бројева бити на табли након 2015 оваквих корака.

5. У конвексном четвороуглу $ABCD$ познати су углови: $\measuredangle BCA = 40^\circ$, $\measuredangle BAC = 50^\circ$, $\measuredangle BDA = 20^\circ$ и $\measuredangle BDC = 25^\circ$. Одредити угао који заклапају дијагонале тог четвороугла.

Четврти разред – А категорија

1. Наћи скуп вредности израза

$$\frac{xy + xz + yz}{x + y + z}$$

уз ограничења $x, y, z > 0$ и $xyz = 1$.

2. Наћи све бројеве са 31 012 015 цифара таквих да се изменом ма које цифре увек добија број који није дељив са 11.

3. На бесконачно великој табли записани су сви природни бројеви, сваки тачно по једанпут. У једном кораку дозвољено је избрисати коначно много бројева с табле, рецимо $a_1, a_2, \ldots, a_n$, и уместо њих написати или број

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

или број

$$\frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Доказати да је за ма који позитиван рационалан број q могуће након коначног броја описаних корака добити на табли број q.

4. Нека је C тачка на кружници k_1. Кружница k_2 са центром C сече k_1 у тачкама P и Q. Тангента из центра O кружнице k_1 на кружницу k_2 додирује k_2 у тачки N и сече k_1 у тачкама A и B, при чему важи $AN > BN$. Праве AC и PQ се секу у тачки K, а права NK сече k_2 у тачки $L \not\equiv N$. Доказати: $AL \perp PQ$.

5. Да ли постоји растући низ природних бројева $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ такав да се сваки природан број $m \in \mathbb{N}$ може на јединствен начин представити у облику $m = a_i - a_j$ за неке $i, j \in \mathbb{N}$?

Први разред – Б категорија

1. Дати су скупови $A = \{1, 2\}$ и $B = \{1, \{1\}, \{1, 2\}\}$. Одредити скупове $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$.

2. Нека су AA_1, BB_1 и CC_1 висине у $\triangle ABC$, и нека је H његов ортоцентар. Ако је $\measuredangle A_1HC_1 = 116^\circ$ и $A_1HB_1 = 108^\circ$, одредити $\measuredangle BAC$.

3. Природан број n је потпун квадрат који се не завршава нулом. Брисањем последње две цифре броја n добијамо број који је такође потпун квадрат. Наћи највећу могућу вредност броја n.

4. Одредити колико има уређених парова природних бројева (x, y) таквих да важи НЗС$(x, y) = 6!$.

5. На табли је записано n природних бројева у низу. Доказати да је могуће обрисати неке од њих (могуће је и не обрисати ниједан), а потом испред сваког од преосталих бројева уписати знак „+“ или „−“ на такав начин да резултат добијеног израза буде дељив са $2^n - 3$.

Други разред – Б категорија

1. Решити једначину

$$1 - \frac{2b}{x - a} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + x^2 - 2ax},$$

где су a и b фиксирани реални бројеви, а x је непозната.

2. Дат је $\triangle ABC$ у ком важи $\measuredangle BAC = 60^\circ$, $AB = 2x$ и $AC = 3x$ (где је x нека задата дужина). Да ли је могуће овакав троугао исећи на три дела и од њих саставити правилан шестоугао?

3. Нека су p, q и r прости бројеви за које важи $p+q+1=r^2$. Доказати да је број $pq+34$ сложен.

4. На крацима AB и AC једнакокраког $\triangle ABC$ одређене су тачке P и Q тако да је $\measuredangle PMB = \measuredangle QMC$, где је M средиште основице BC. Доказати да је $BQ = CP$.

5. На такмичењу из математике ученици раде 7 задатака, и на сваком од њих могу остварити 0, 1, 2, 3, 4 или 5 поена. Након прегледања испоставило се да постоји тачно 500 ученика који у скору имају 30 поена. Да ли међу ових 500 ученика морају постојати два који су на сваком задатку остварили подједнак број поена?

Трећи разред – Б категорија

1. Доказати да за све реалне бројеве t важи

$$\lfloor t \rfloor + \left\lfloor t + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor t + \frac{2}{3} \right\rfloor = \lfloor 3t \rfloor.$$

(За реалан број x, са $\lfloor x \rfloor$ означавамо највећи цео број који није већи од x.)

2. У скупу $\mathbb{R}$ решити једначину

$$(\sin x + \sqrt{3}\cos x)\sin 4x = 2.$$

3. На природном броју n спроводимо следећу операцију: последњу цифру декадног записа броја n множимо са 4 и то саберемо са бројем који се добија брисањем те последње цифре (на пример, на тај начин од броја 1345 добијамо број $4 \cdot 5 + 134 = 154$; специјално, уколико је број n једноцифрен, узимамо да нам након брисања те његове једине цифре остаје број 0, па оваквом операцијом од њега добијамо број $4n$). Овај поступак настављамо са сваким новодобијеним бројем, неограничен број пута. Претпоставимо да је у неком кораку добијен број 2015. Доказати да се међу свим бројевима који су били добијени у неком претходном моменту, као и међу свим бројевима који ће тек уследити, не налази ниједан прост број.

4. Нека су AA_1 и CC_1 тежишне дужи у $\triangle ABC$. На страници AC одабрана је произвољна тачка P, и кроз њу су повучене праве паралелне са AA_1 и CC_1. Ове праве секу странице BC и AB у тачкама E и F, редом. Доказати да дужи AA_1 и CC_1 деле дуж EF на три једнака дела.

5. Колико има шестоцифрених бројева са различитим цифрама чија је највећа цифра за осам већа од најмање цифре?

Четврти разред – Б категорија

1. Нека су x, y и z позитивни реални бројеви такви да важи

$$xyz = 2015(x + y + z).$$

Одредити минималну вредност израза $xy + yz + zx$.

2. Нека је $n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_9}$ декадни запис броја n. Колико има непарних деветоцифрених бројева n дељивих са 375 код којих је $a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots \geqslant a_8$?

3. Нека је CD висина правоуглог $\triangle ABC$, $\measuredangle C = 90°$. Кружнице с центрима A и B и полупречником BD секу се у тачки на правој BC. Одредити однос $DB : BC$.

4. Доказати да од свих правих кружних ваљака константне запремине најмању површину има ваљак чија је висина једнака пречнику основице.

5. Доказати да постоји природан број $k > 2015$ такав да $2^{k-2015} \nmid k!$.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28. 2. 2015.

Први разред – А категорија

1. Нека су a, b и c произвољни природни бројеви. Доказати неједнакост

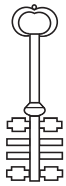
$$\text{НЗД}(a, b-1) \cdot \text{НЗД}(b, c-1) \cdot \text{НЗД}(c, a-1) \leqslant ab + bc + ca - a - b - c + 1,$$

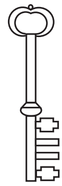
као и да се једнакост достиже за бесконачно много тројки (a, b, c).

2. Дат је једнакокраки $\triangle ABC$, при чему важи $AB = AC$. Унутар $\triangle ABC$ уочена је тачка P таква да важи $\measuredangle BPC = 90° + \frac{\measuredangle BAC}{2}$. Такође је уочена тачка Q таква да важи $\measuredangle BPQ = \measuredangle PQA = 90°$. Нека је R тачка на дужи QB таква да важи $BR = 2RQ$. Доказати да су тачке R, P и C колинеарне.

3. Чувар банке има n сефова које мора да чува и сваки сеф има свој јединствен кључ који га отвара. Кључеви су по изгледу идентични. Чувар је добио на располагање довољан број идентичних кружних металних алки. На сваку алку могуће је закачити произвољан број кључева или других алки (али не могу на истом кључу бити прикачене две алке), при чему су алке такве да се, након што чувар прикачи све што жели, цикличан редослед закачених објеката на алки потом неће реметити. Чувар жели да помоћу алки споји све кључеве у једну целину на такав начин да надаље увек буде у могућности да, на основу распореда кључева и алки, идентификује кључ који му затреба за отварање одређеног сефа (без испробавања кључева на сефу). За задат број $n > 1$, одредити најмањи број алки које су потребне чувару уколико:

a) кључеви имају једну осу симетрије у равни кључа (слика лево);
b) кључеви немају ниједну осу симетрије у равни кључа (слика десно)?





4. Да ли постоји полином $P(x)$ коме нису сви коефицијенти целобројни такав да важи $P(0) = 0$ и да је $\frac{P(a)-P(b)}{a-b}$ цео број за свака два различита цела броја a и b?

Други разред – А категорија

1. Нека је x реалан број такав да је израз $\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x}}}$ дефинисан и важи
$$\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x}}} \leqslant 1.$$
Доказати:
$$\sqrt{x+\sqrt{x-\sqrt{x}}} < 2.$$

2. Нека функција obrt пресликава цифре $0, 1, 2, 5, 6, 8, 9$ у цифре $0, 1, 2, 5, 9, 8, 6$, редом. Природан број $n = \overline{t_k t_{k-1} \cdots t_1 t_0}$ називамо *обртабилан* ако су му све цифре из скупа $\{0, 1, 2, 5, 6, 8, 9\}$ и притом важи $t_0 \neq 0$, и дефинишемо
$$\mathrm{obrt}(n) = \overline{\mathrm{obrt}(t_0)\mathrm{obrt}(t_1) \cdots \mathrm{obrt}(t_{k-1})\mathrm{obrt}(t_k)}$$
(другим речима, функција obrt представља обртање екрана калкулатора за 180°). Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n са следећим особинама:
1° n је обртабилан и $\mathrm{obrt}(n) = n$;
2° n^2 је обртабилан и $\mathrm{obrt}(n^2) = n^2$;
3° $41 \mid n$.

3. На сваком пољу табле $3 \times n$ налази се један жетон који је са једне стране обојен бело а са друге стране црно. У почетку су сви жетони окренути црном страном нагоре. Дозвољено је у једном потезу изабрати произвољно поље и окренути све жетоне на пољима која имају бар једно заједничко теме са изабраним пољем али не и жетон на изабраном пољу.

За које n је могуће да после извесног броја потеза сви жетони буду окренути белом страном нагоре?

4. Дат је оштроугли $\triangle ABC$. Тачка N је таква да важи $\measuredangle NBA = \measuredangle NCA = 90^\circ$, а D и E су тачке на страницама AC и AB, редом, такве да важи $\measuredangle BNE = \measuredangle CND$. Права DE сече праву BC у тачки F, а K је средиште дужи DE. Ако је X тачка пресека кружница описаних око $\triangle ABC$ и $\triangle ADE$ различита од тачке A, доказати да важи $\measuredangle KXF = 90^\circ$.

Трећи разред – А категорија

1. Низ $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ је дефинисан условима $x_0 = 1$ и $x_{i+1} = x_i + y_i - 1$, где је y_i најмањи природан број који не дели x_i. Да ли важи $x_n = 20!$ за неки природан број n?

2. Дат је конвексан петоугао $ABCDE$ такав да су му углови код темена C и E прави и важи $\measuredangle EDA = \measuredangle CDB$. Нека је N подножје висине из темена D у оштроуглом $\triangle ABD$, и нека је M средиште дужи AB. Доказати да су тачке C, M, N и E концикличне.

3. Нека је n фиксиран природан број. Нека је k било који природан број не већи од n и нека је S скуп неких k различитих простих бројева. Марија и Марко играју наизменично следећу игру. Свако од њих бира један природан број већи од 1 чији сви прости делиоци припадају скупу S и који није дељив ниједним од претходно изабраних бројева. Губи онај ко не може да повуче потез. Доказати да Марија има победничку стратегију за бар $\frac{2}{3}n$ могућих вредности параметра k.

4. Ученици трећег разреда су за домаћи имали следећи задатак:

> Одабрати позитивне реалне бројеве a и b и скицирати (у истом координатном систему) графике функција $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинисане са $f(x) = a^x + b$ и $g(x) = b^x + a$.

При прегледу домаћег задатка, дошавши до Перице, професор је рекао: „Перице, не знам које си бројеве a и b одабрао, али ниси добро скицирао графике. Наиме, није могуће да графици оваквих функција имају тачно две заједничке тачке.“ Да ли је професор у праву?

Четврти разред – А категорија

1. Колико најмање различитих комплексних нула може имати полином

$$P(x) = ax^n + x^{2014} + 1,$$

ако је a реалан број а n природан број различит од 2014?

2. Доказати да за сваки природан број n постоји n-тоцифрен природан број чије цифре су из скупа $\{1, 2, 3\}$ и који је дељив збиром својих цифара.

3. Нека је, у $\triangle ABC$, B_1 средиште странице AC, B_0 подножје висине из темена B, а B_2 осносиметрична слика темена B у односу на симетралу $\measuredangle A$. Нека су P и Q тачке додира уписане и споља приписане кружнице са страницом BC, и нека је k кружница над пречником PQ. Тангента t из тачке B_2 додирује кружницу k у тачки T. Доказати да кружница описана око $\triangle B_0B_1T$ додирује праву t.

4. Дато је $2n$ тачака у равни међу којима никоје 3 нису колинеарне. Посматрајмо све могуће одабире од по $2n$ дужи чији су крајеви у датим тачкама (свака тачка је крај тачно једне од тих дужи) и међу којима се никоје две не секу. Доказати да је број таквих одабира бар 2^{n-1}, и одредити за које се све природне бројеве n може достићи једнакост за бар једну почетну конфигурацију од $2n$ тачака.

Први разред – Б категорија

1. Одредити најмањи природан број који има тачно 2015 делилаца.

2. Дата је кружница k, њен пречник AB и тачка C на дужи AB различита од тачака A и B. Тачке X и Y припадају кружници k и симетричне су у односу на AB, при чему још важи $CY \perp AX$. Доказати да је четвороугао $BYCX$ ромб.

3. Вештак на суду треба да из гомиле од 14 новчића издвоји 7 лажних (њему је познато који новчићи су лажни а који прави). Суду је познато да су лажни новчићи лакши од правих и да их има тачно 7. Вештак на располагању има вагу без тегова за извођење својих доказа пред судом. Доказати да у највише 3 мерења вештак може суду да докаже који су новчићи лажни.

4. На колико се начина могу обојити темена петоугла $ABCDE$ помоћу четири боје ако суседна темена не могу бити исте боје?

5. Ако је полином

$$ax^5 + bx^4 + bx^3 + ax^2 + cx - 62$$

дељив полиномом

$$2x^2 - 5x + 2,$$

израчунати $3a + 2b$.

Други разред – Б категорија

1. Одредити све природне бројеве n такве да је

$$\sqrt{n+2015}-\sqrt{n}$$

рационалан број.

2. Унутар квадрата $ABCD$ дата је тачка M за коју важи $\measuredangle MBD = \measuredangle MDC = 28^\circ$. Израчунати $\measuredangle MAD$.

3. Краљица Амазонки Гоба је имала 5 ћерки; 6 од њених женских потомака су имале по 4 ћерке свака, 11 од њених женских потомака су имале по 2 ћерке свака, а преостале нису имале деце. Ако је познато да краљица Гоба није имала мушких потомака, колико је укупно женских потомака имала ова краљица?

4. За које вредности реалног параметра a је скуп решења неједначине

$$x^2 - a(1+a^2)x + a^4 < 0$$

подскуп интервала $(-3,-1)$? (Празан скуп је подскуп било ког скупа.)

5. Нека су a, b и c комплексни бројеви јединичног модула такви да важи $a+b+c=1$. Доказати да је бар један од бројева a, b или c једнак 1.

Трећи разред – Б категорија

1. У скупу природних бројева решити једначину

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{101}.$$

2. Перица има j јабука и k корпи које су распоређене за округлим столом. За које вредности j и k Перица може распоредити јабуке у корпе на такав начин да се за сваке две суседне корпе бројеви јабука у њима разликују тачно за 1?

3. Доказати једнакост

$$16\sin^4 10^\circ + 8\sin^3 10^\circ - 12\sin^2 10^\circ - 4\sin 10^\circ + 1 = 0.$$

4. Позитивни бројеви x и y задовољавају неједнакост

$$\frac{x^2+y^2}{x+2y} \leqslant 2.$$

Доказати да тада важи

$$\frac{x}{2} + y \leqslant 5.$$

5. На раван сто постављене су четири лопте при чему се сваке две додирују. Полупречници три од те четири лопте износе 2, 3 и 6. Израчунати полупречник четврте лопте.

Четврти разред – Б категорија

1. Пет различитих целих бројева a, b, c, d и e задовољавају једнакост

$$(3-a)(3-b)(3-c)(3-d)(3-e) = 12.$$

Израчунати $a+b+c+d+e$.

2. Одредити колико има n-торки $(x_1, x_2, ..., x_n)$ код којих је свака координата из скупа $\{0,1,2\}$ и притом је збир $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ паран.

3. Одредити све могуће вредности параметра $a \in \mathbb{R}$ такве да све нуле полинома

$$P(x) = x^4 + ax^2 + a^2x - 1$$

имају међусобно једнаке модуле.

4. У конвексном четвороуглу $ABCD$ важи $AD = 2$, $\measuredangle ABD = \measuredangle ACD = 90^\circ$ и растојање између центара уписаних кружница у $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$ износи $\sqrt{2}$. Наћи дужину странице BC.

5. Наћи најмању и највећу вредност израза

$$(x-y)^2 + xy,$$

уз услов

$$x^2 + y^2 = 4.$$

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 13. 12. 2014.

Први разред – А категорија

1. За свако $k \in \mathbb{N}$ важи тврђење: $3 \mid k^2 \Rightarrow 3 \mid k$, тј. $3 \mid k^2 \Rightarrow 9 \mid k^2$. Ако би постојали цели бројеви m и n за које важи $(m+n+2)^2 = 3(mn+1)$, следило би $3 \mid (m+n+2)^2$, па и $9 \mid (m+n+2)^2$, тј. и $3 \mid mn+1$. Из $3 \mid mn+1$ следи да ниједан од бројева m и n не може бити дељив са 3, нити оба могу давати једнаке остатке при дељењу са 3. Дакле, један од њих даје остатак 1 при дељењу са 3, а други даје остатак 2. Запишимо $m = 3p+1$ и $n = 3q+2$ за неке p и q. Али тада имамо $m+n+2 = 3(p+q+1)+2$, што је немогуће јер $3 \mid m+n+2$.

Дакле, не постоје цели бројеви m и n такви да важи $(m+n+2)^2 = 3(mn+1)$. (Тангента 72, стр. 14, зад. М1132.)

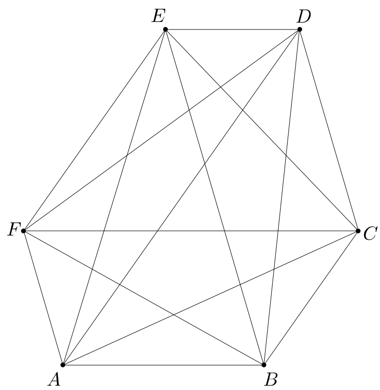
2. а) Претпоставимо да важи $x^2+y^2+z^2+w^2 = xyzw$. Тада имамо

$$\begin{aligned}(yzw-x)^2+y^2+z^2+w^2 &= y^2z^2w^2-2xyzw+x^2+y^2+z^2+w^2\\ &= y^2z^2w^2-xyzw = (yzw-x)yzw.\end{aligned}$$

b) Приметимо да је $(2,2,2,2)$ решење постављене једначине. Нека је (x,y,z,w) такво решење за које важи $2 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant w$. Одатле добијамо $yzw-x \geqslant 4w-x \geqslant 3w > w$. Према делу под а), од решења (x,y,z,w) добијамо решење $(y,z,w,yzw-x)$ (где су, у обе четворке, бројеви сортирани по величини), и добијено решење је различито од претходног будући да је $yzw-x$ веће од w. Почевши од $(2,2,2,2)$, понављањем ове процедуре добијамо бесконачно много различитих решења.

3. Нека је k број нацртаних правих. Како права a сече тачно 3 од њих, међу повученим правима постоје $k-3$ међу којима су сваке две паралелне, и међу којима се налази и права a; означимо скуп ових правих са $\mathscr{A}$. Приметимо да међу њима није ни права b ни права c (јер би у супротном и оне секле тачно 3 друге праве). Дакле, праве b и c су две од три праве које права a сече. Праве b и c нису паралелне, будући да би у том случају оне секле исти број правих, а што је у супротности с условом задатка. Нека је d преостала права коју сече права a, различита од правих b и c. Ако би права d секла обе праве b и c, тада би праве b и c секле подједнак број правих, што је немогуће. Претпоставимо $d \parallel c$. Тада права b сече укупно $k-1$ праву (све праве из класе $\mathscr{A}$, и још праве c и d), одакле имамо $k-1=4$, тј. $k=5$. Права c у том случају сече 2 праве које сачињавају класу $\mathscr{A}$, и још праву b, што је укупно 3 праве, контрадикција. Дакле, преостаје $d \parallel b$. Тада права b сече укупно $k-2$ праве, одакле имамо $k-2=4$, те добијамо решење $k=6$ (права c у том случају сече 3 праве које чине класу $\mathscr{A}$, и још праве b и c, што је укупно 5 правих, па је услов задатка испуњен). (Тангента 73, стр. 48, зад. 24.)

4. Из првог пара паралелности следи $P_{\triangle FAB} = P_{\triangle ABC}$ и $P_{\triangle CDE} = P_{\triangle DEF}$, а из другог пара $P_{\triangle ABC} = P_{\triangle BCD}$ и $P_{\triangle DEF} = P_{\triangle EFA}$. Последња паралелност даје $P_{\triangle BCD} = P_{\triangle CDE}$, па сада имамо $P_{\triangle FAB} = P_{\triangle ABC} = \cdots = P_{\triangle EFA}$. Према томе, тачке E и B су на једнаком растојању од праве FA, тј. $BE \parallel FA$.



Оп 2014 1А 4

5. Прво, немогуће је да за столом нема уопште искрених људи, јер тада би изјава било ког од ових 2014 људи (лажова, дакле) била истинита, што је немогуће јер они стално причају неистину. Затим, пошто сада знамо да имамо бар једног искреног човека, онда је јасно да су сви остали, осим њега и можда његових суседа, лажови. Дакле, постоје највише 3 искрена човека за столом. Претпоставимо да постоје тачно 3 искрена човека. То би морала бити 3 узастопна човека за столом. Означимо их са A, B и C, при чему је B између A и C. Но тада би искази људи A и C били нетачни, што је у контрадикцији с претпоставком да су они искрени људи. Претпоставимо сада да је само 1 искрен човек за столом. Тада би искази његових првих суседа с леве и десне стране били истинити, али то је немогуће јер су они по претпоставци лажови, те не могу давати истините исказе. Дакле, за столом морају седети тачно 2 искрена човека. Распоред у ком ова два човека седе један до другог представља пример да је оваква ситуација заиста могућа.

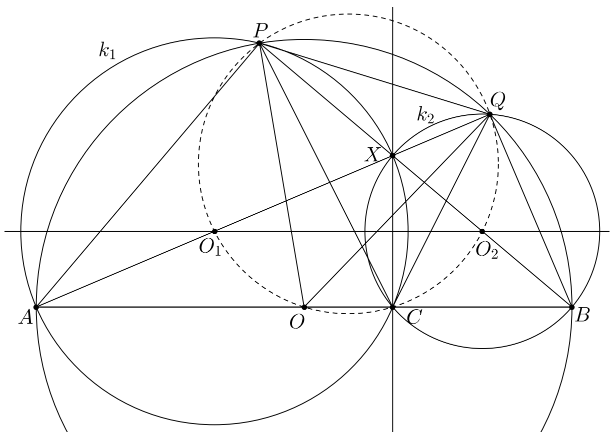
Други разред – А категорија

1. *Прво решење.* Очигледан услов је $x \geqslant 0$. Даље, због $\sqrt{3+\sqrt{x}} = 3-x$ мора важити $x \leqslant 3$. Квадрирањем последње једначине добијамо $3+\sqrt{x} = 9-6x+x^2$, тј. $\sqrt{x} = 6-6x+x^2$. Квадрирамо и ову једначину, уз услов $6-6x+x^2 \geqslant 0$, после чега добијамо $x = x^4-12x^3+48x^2-72x+36$, што се своди на $x^4-12x^3+48x^2-73x+36=0$. Потражимо једноставније факторе полинома на левој страни: налазимо да је дељив са $x-1$ и $x-4$, тј. добијена једначина може се записати у облику $(x-1)(x-4)(x^2-7x+9)=0$.

Одатле, његове нуле су $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = \frac{7-\sqrt{13}}{2}$ и $x_4 = \frac{7+\sqrt{13}}{2}$. Другу и четврту нулу одбацујемо јер не упадају у интервал $[0, 3]$. Трећу нулу такође одбацујемо јер за њу важи $6 - 6x_3 + x_3^2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2} < 0$. Остаје $x = 1$ као једино решење полазне једначине.

Друго решење. Уочавамо да је $x = 1$ једно решење постављене једначине. За $x > 1$ важи $x + \sqrt{3 + \sqrt{x}} > 1 + \sqrt{3 + \sqrt{1}} = 3$, а за $x < 1$ важи $x + \sqrt{3 + \sqrt{x}} < 1 + \sqrt{3 + \sqrt{1}} = 3$. Према томе, $x = 1$ је једино решење. (Тангента 70, стр. 31, зад. II.4.)

2. Нека се посматрани број, означимо га са n, завршава са тачно k нула, где је $k \geqslant 0$. Дакле, $n = x \cdot 10^k$ за неки природан број x који се завршава цифром 2. Приметимо да је број n дељив са 5^k али не и са 5^{k+1}. Дакле, да би n био потпун квадрат, k мора бити паран број. Сада из $n = x \cdot 10^k = x \cdot (10^{\frac{k}{2}})^2$ следи да и x мора бити потпун квадрат. Уколико је број x једноцифрен (дакле, број 2), имамо одмах контрадикцију. Дакле, x има бар две цифре. Но, без обзира на то да ли је претпоследња цифра броја x једнака 0 или 2, у оба случаја добијамо да двоцифрени завршетак броја x није дељив са 4, па закључујемо да је број x дељив са 2 али не и са 4; одатле, x не може бити потпун квадрат, контрадикција. (Тангента 74, стр. 36, зад I.4.)



Оп 2014 2А 3

3. Нека су k_1 и k_2 кружнице описане око $\triangle PCA$ и $\triangle QCB$, редом. Означимо $\measuredangle PCA = \measuredangle QCB = \alpha$ и $\measuredangle PAQ = \measuredangle PBQ = \beta$. У случају да је C средиште дужи AB, тврђење је очигледно због симетрије. Иначе, нека је O други пресек кружнице описане око $\triangle PCQ$ са пречником AB. Имамо $\measuredangle OPQ = \measuredangle QCB = \measuredangle PCA = \measuredangle PQO$, те следи $OP \cong OQ$. Дакле, O се налази на симетрали дужи PQ, која једино може да сече пречник кружнице k у центру, па следи да је O центар кружнице k. Имамо $\measuredangle PCQ = \measuredangle POQ = 2\measuredangle PBQ = 2\beta$, те следи $180° = \measuredangle ACP + \measuredangle BCQ + \measuredangle PCQ = 2\alpha + 2\beta$, тј. $\alpha + \beta = 90°$.

Нека је c нормала у тачки C на AB. Нека је X пресек c и BP. Пошто имамо $\measuredangle XCA = \measuredangle XPA = 90^\circ$, следи да X припада кружници k_1. Даље, пошто имамо $\measuredangle XCP = \measuredangle XAP = \beta$, следи да тачка X припада и дужи AQ. На сличан начин се сада доказује да X припада и кружници k_2, те је CX заједничка тетива две кружница k_1 и k_2. Дакле, $O_1O_2 \perp CX \perp AB$, те следи $O_1O_2 \parallel AB$.

4. Из услова задатка имамо $x^2 + y^2 = \frac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2} \in \mathbb{Q}$; из овога и $x^2 - y^2 \in \mathbb{Q}$ следи $x^2, y^2 \in \mathbb{Q}$. Даље, за неки ненула рационалан број q имамо $x^6 = (x^3)^2 = (y^3 + q)^2 = y^6 + 2qy^3 + q^2$, па како $x^6, y^6 \in \mathbb{Q}$ (због $x^6 = (x^2)^3 \in \mathbb{Q}$), из последње једнакости добијамо $y^3 \in \mathbb{Q}$. Сада из $y^2 \in \mathbb{Q}$ и $y^3 \in \mathbb{Q}$ следи $y \in \mathbb{Q}$. Аналогно се доказује $x \in \mathbb{Q}$.

5. Јасно је да је за $n = 1, 2, 3$ минималан потребан број разговора једнак $0, 1, 3$, редом. Докажимо да за $n \geqslant 4$ минималан број разговора износи $2n - 4$. За $n = 4$ минималан број разговора је 4, што се постиже тако што прва домаћица прича с другом, затим трећа с четвртом, потом прва с трећом и најзад друга с четвртом. Директно се проверава да за $n = 4$ мање од 4 разговора није довољно. Покажимо сада како за $n > 4$ домаћице могу разменити трачеве у $2n-4$ разговора. Издвојимо четири домаћице које ћемо назвати „главне трачаре“. Најпре једна од главних трачара позове преостале $n-4$ домаћице. Потом четири главне трачаре међусобно размене све трачеве (за шта им требају 4 разговора), и затим поново једна од главних трачара позове преостале $n - 4$ домаћице; то чини укупно $n - 4 + 4 + n - 4 = 2n - 4$ разговора.

Преостаје доказати да у случају $n > 4$ домаћице не могу разменити трачеве у мање од $2n-4$ разговора. Претпоставимо супротно, и нека је n најмањи број за који је домаћицама довољно $2n-5$ или мање разговора. Фиксирајмо један такав низ разговора S.

Лема. У низу S неће се догодити да нека домаћица чује сопствени трач од друге домаћице.

Доказ. Претпоставимо супротно: нека постоји домаћица D која ће у једном моменту чути сопствени трач. Тада у низу разговора S можемо уочити подниз $r_1, r_2, \ldots, r_k$ такав да за свако i једна од домаћица које учествују у разговору r_i учествује и у разговору r_{i+1}, и притом домаћица D учествује само у разговорима r_1 и r_k. Сада ћемо од низа S конструисати одређен низ разговора T у ком учествују све домаћице осим домаћице D. Најпре из низа S избришимо разговоре r_1 и r_k. За све остале разговоре r у којима учествује домаћица D и притом разговара нпр. с домаћицом P, уочимо, ако постоји, први од разговора $r_2, r_3, \ldots, r_{k-1}$ који следи након разговора r, нека је то r_i, и означимо са A домаћицу која учествује у разговорима r_i и r_{i-1} – а ако такво i не постоји, означимо са A домаћицу која у разговору r_k прича с домаћицом D; заменимо сада разговор r разговором између домаћице P и домаћице A. Низ разговора T добијен на овакав начин састоји се од не више од $2n-5-2=2(n-1)-5$ разговора, у њему учествује $n-1$ домаћица, и по конструкцији низа T следи да ће на овај начин тих $n-1$ домаћица разменити све трачеве (претпостављајући, наравно, да је низ S такав да ће n домаћица које ту учествују разменити све трачеве). Ово је контрадикција са минималношћу броја n, чиме је лема доказана.

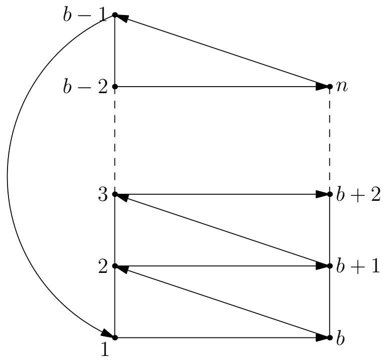
Наставимо сада доказ. Из леме следи да је сваки разговор или истовремено почетни разговор за обе домаћице које учествују у њему, или ни за једну од њих, и исто тако је или истовремено последњи разговор за обе, или ни за једну од њих. Јасно, ниједан разговор не може бити истовремено почетни и последњи (за домаћице које учествују у њему), па укупно има m разговора који су било почетни било последњи за домаћице које ту учествују. Назовимо све преостале разговоре, каквих има највише $n-5$, „средњи“. Посматрајмо како се трачеви шире путем *искључиво* средњих разговора. Како имамо n домаћица а не више од $n-5$ средњих разговора, ових n домаћица можемо поделити на бар 5 класа таквих да никакве информације не стижу од домаћица из једне класе до домаћица из друге класе путем искључиво средњих разговора. Уочимо неку домаћицу D. Посматрајући сада средње и почетне разговоре, трач домаћице D путем њих шири се само кроз две класе (класу домаћице D и класу домаћице с којом је разговарала први пут). Слично, посматрајући средње и последње разговоре, путем њих домаћица D добија информације из само две класе (своје класе и класе домаћице с којом је последњом разговарала). Дакле, за ма коју домаћицу D постоје бар две од посматраних класа такве да разговори унутар тих класа не играју никакву улогу у ширењу трача домаћице D нити информисању домаћице D о туђим трачевима. Означимо са $c(D)$ број разговора који не играју улогу у преношењу трачева домаћици D нити ширењу трача домаћице D.

Да би трач неке домаћице био пренет свима потребно је бар $n-1$ разговора, а да би она била обавештена о свим трачевима потребно је такође бар $n-1$ разговора. Према леми, једини разговори у којима се преноси трач неке домаћице D а који истовремено имају улогу у преношењу туђих трачева домаћици D јесу само они разговори у којима домаћица D учествује (у супротном би домаћица D у неком моменту чула сопствени трач). Дакле, потребно је бар $2n-2-v(D)$ разговора да би се потпуно раширио трач домаћице D и да би се њој саопштили сви трачеви, где је $v(D)$ број разговора у којима она учествује. Како мора важити неједнакост $2n-5 \geqslant 2n-2-v(D)+c(D)$, добијамо $v(D) \geqslant$

$3 + c(D) \geqslant 3$. Одатле закључујемо да свака домаћица мора обавити бар један средњи разговор, па следи да се унутар сваке од класа из претходног пасуса одвио бар један разговор (супротно би било могуће једино ако је домаћица сама у својој класи, тј. уколико уопште није имала средње разговоре, а управо смо видели да то не може бити испуњено). Но, сада из закључка из претходног пасуса следи $c(D) \geqslant 2$ за сваку домаћицу D, па имамо $v(D) \geqslant 3 + c(D) \geqslant 5$ за сваку домаћицу D, али тада укупан број разговора износи бар $\frac{5n}{2}$, контрадикција. Тиме је доказ завршен.

Трећи разред – А категорија

1. За $n = 1$ тривијално имамо једну такву функцију. Надаље претпостављамо $n \geqslant 2$.



Оп 2014 3А 1

Нека је f једна таква функција. Приметимо да је $g = f \circ f$ бијекција. Докажимо да онда и f мора бити бијекција. Ако f не би била „1-1“, постојали би $a, b \in A$ такви да важи $f(a) = f(b)$, па и $f(f(a)) = f(f(b))$, тј. $g(a) = g(b)$, што је немогуће. С друге стране, ако f не би била „на“, постојао би елемент $a \in A$ такав да не важи $f(x) = a$ ни за једно $x \in A$. Међутим тада не би важило ни $g(x) = a$ ни за једно $x \in A$, што је поново контрадикција.

Даље, можемо уочити да за свако $x \in A$ постоји $m \in \mathbb{N}$ такво да важи $x = \underbrace{g(g(\dots g}_{m \text{ пута}}(1)\dots))$ (кажемо: сваки елемент $x \in A$ припада *орбити* елемента 1 за бијекцију g). Одатле следи и да сваки елемент $x \in A$ припада орбити елемента 1 за бијекцију f.

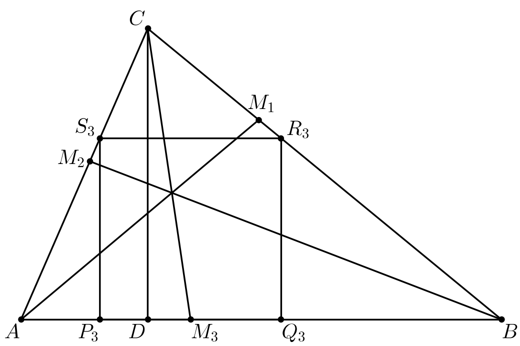
Обележимо $b = f(1)$. Из услова задатка видимо да мора важити $f(b) = g(1) = 2$. Индукцијом показујемо да за све x који испуњавају $x \leqslant n - b + 1$ важи $f(x) = x + b - 1$, а да за све x који испуњавају $x \geqslant b$ важи $f(x) = x - b + 2$. Заиста, за базне случајеве узимамо $x = 1$ и $x = b$; затим, уколико за $x > 1$ важи $x \leqslant n - b + 1$, тада индуктивни корак гласи $f(x) = f(f(x + b - 2)) = g(x + b - 2) = x + b - 1$ (приметимо да су испуњене неједнакости $x + b - 2 \geqslant 2 + b - 2 = b$ и $x + b - 2 \leqslant n - b + 1 + b - 2 = n - 1$, што омогућава приказани рачун), а за $x > b$ слично имамо $f(x) = f(f(x - b + 1)) = g(x - b + 1) = x - b + 2$, чиме је тврдња доказана. Специјално, $f(n) = n - b + 2$, одакле следи $f(n-b+2) = f(f(n)) = g(n) = 1$. Приметимо да важи $f(n) < b$ (ако би важило $f(n) \geqslant b$, следило би $f(f(n)) = f(n) + b - 1 \geqslant 2b - 1$, али с друге стране имамо $f(f(n)) = g(n) = 1$). Пошто је сваки елемент $x \in A$ у орбити елемента 1 за бијекцију f, међу елементима $1, f(1), f(f(1)), \dots, n, n-b+2$ налазе се сви елементи скупа A. Но, приметимо да смо на овај начин, не рачунајући последњи елемент, излистали управо све елементе x за које важи нешто од $1 \leqslant x \leqslant n-b+1$ или $b \leqslant x \leqslant n$ (елементи из „прве групе“ и „друге групе“ јављају се наизменично), тј. укупно смо излистали (рачунајући и последњи) тачно $2(n-b+1)+1$ елемената. Одатле закључујемо $2(n-b+1)+1 = n$, тј. $n = 2b-3$.

Дакле, ако је n паран број, не постоји таква функција f. Ако је n непаран број, она је једнозначно одређена горњим разматрањима, тј.

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{n+1}{2}, & \text{за } x \leqslant \dfrac{n-1}{2}; \\ x - \dfrac{n-1}{2}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

2. Нека је D подножје висине из C на AB, $x = P_3Q_3$, $p = AD = b\cos\alpha$, $q = BD = a\cos\beta$ и $h = CD = b\sin\alpha = a\sin\beta$. Имамо $AP_3 = \frac{px}{h}$ и $BQ_3 = \frac{qx}{h}$, те важи $AM_3 = \frac{px}{h} + \frac{x}{2}$ и $M_3B = \frac{qx}{h} + \frac{x}{2}$, одакле добијамо

$$\frac{AM_3}{M_3B} = \frac{2p+h}{2q+h} = \frac{2b\cos\alpha + b\sin\alpha}{2a\cos\beta + a\sin\beta} = \frac{b}{a}\left(\frac{2\cos\alpha + \sin\alpha}{2\cos\beta + \sin\beta}\right).$$



Оп 2014 3А 2

Очито множење овог и аналогних израза за $\frac{BM_1}{M_1C}$ и $\frac{CM_2}{M_2A}$ даје 1, те се према Чевиној теореми праве AM_1, BM_2 и CM_3 секу у једној тачки.

3. Број 420 има наведену особину: заиста, $420 = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7$ и $7 < \sqrt[3]{420} < 8$. Претпоставимо да је $n > 420$ број који има наведену особину. Тада бројеви 3, 4, 5 и 7 деле n, па следи $n \geqslant 840 > 729 = 9^3$. Одатле још и бројеви 8 и 9 деле n, па следи $n \geqslant 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2520 > 2197 = 13^3$. Закључујемо да још и бројеви 11 и 13 деле n, одакле добијамо $n \geqslant 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 > 6859 = 19^3$. Нека је k природан број такав да важи $19^k \leqslant \sqrt[3]{n} < 19^{k+1}$. Тада бројеви 5^k, 7^k, 9^k, 11^k, 13^k, 16^k, 17^k и 19^k деле n, што нас доводи до следеће контрадикције:

$$\begin{aligned} n &\geqslant 5^k \cdot 7^k \cdot 9^k \cdot 11^k \cdot 13^k \cdot 16^k \cdot 17^k \cdot 19^k \\ &= 19^k(4\cdot 5)^k(3\cdot 7)^k(2\cdot 11)^k(2\cdot 13)^k(3\cdot 17)^k > 19^{6k} \geqslant 19^{3k+3} > n. \end{aligned}$$

Према томе, највећи број с траженом особином је 420. (Тангента 70, стр. 12, зад. М1102.)

4. Нека су дужине страница посматраног троугла једнаке a, $a+1$ и $a+2$. Из синусне теореме и услова задатка имамо $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a+2}{\sin 2\alpha} = \frac{a+2}{2\sin\alpha\cos\alpha}$, одакле добијамо $\cos\alpha = \frac{a+2}{2a}$. Сада на основу косинусне теореме можемо саставити једначину $a^2 = (a+1)^2 + (a+2)^2 - 2(a+1)(a+2)\frac{a+2}{2a}$, што се своди на $0 = a^2 - 3a - 4$. Решења ове једначине су $a_1 = 4$ и $a_2 = -1$. Негативно решење одбацујемо, те остаје $a = 4$, и дужине страница посматраног троугла су 4, 5 и 6. (Тангента 74, стр. 12, зад. М1177.)

5. Сваки најкраћи пут од тачке P до тачке Q мора бити састављен од помераја у неком од смерова „горе-десно“ или „доле-десно“, и обратно, сваки пут од тачке P до тачке Q састављен искључиво од таквих помераја јесте један пут од P до Q најкраће могуће дужине. Посматрајмо четири чвора на вертикалној оси симетрије мреже из поставке. Сваки пут од P до Q мора проћи кроз тачно један од њих. Посматрајмо најпре путеве који пролазе кроз најнижи од тих чворова. Путева од тачке P до тог чвора има $\binom{9}{3} = 84$ (дужина сваког таквог пута износи 9, и од тих 9 помераја тачно 3 морају бити у смеру „горе-десно“); због симетрије, од уоченог чвора до тачке Q постоје такође 84 пута, па закључујемо да тражених путева од тачке P до тачке Q који пролазе кроз уочени чвор има $84^2 = 7056$. Због симетрије, тражених путева од P до Q који пролазе кроз највиши од уочена четири чвора има такође 7056. На сличан начин израчунавамо да, за сваки од средња два чвора, тражених путева од P до Q који пролазе кроз њега има $\binom{9}{4}^2 = 126^2 = 15876$. Дакле, укупан број тражених путева износи $2 \cdot 7056 + 2 \cdot 15876 = 45864$.

Четврти разред – А категорија

1. По услову задатка имамо

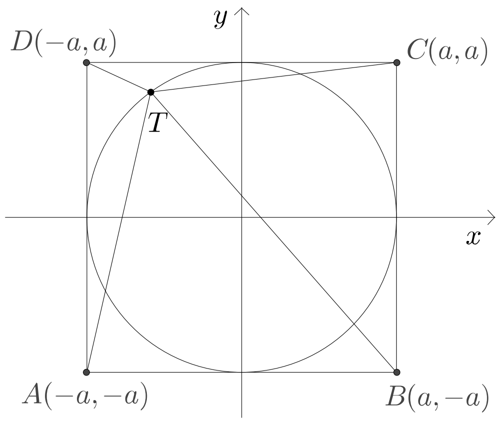
$$\begin{aligned} 0 &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - x_1 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - x_1(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \\ &= x_2(x_2 - x_1) + x_3(x_3 - x_1) + \cdots + x_n(x_n - x_1). \end{aligned}$$

Међутим, како важи $0 \leqslant x_i \leqslant x_1$ за $i = 2, \dots, n$, сви сабирци $x_i(x_i - x_1)$ у горњем изразу су непозитивни. Одатле следи $x_i(x_i - x_1) = 0$, тј. за свако i имамо $x_i = x_1$ или $x_i = 0$. Ако је испуњено $x_1 = x_2 = \cdots = x_k$ и $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$, онда следи $x_1 = \frac{1}{k}$, и тада су услови задатка задовољени. Према томе, могуће вредности броја x_1 су $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$.

2. Означимо са P максимални тражени производ. Јасно је да ниједан од чинилаца производа P није једнак 1. Докажимо да ниједан чинилац не би могао бити ни већи од 4. Заиста, ако би неки његов чинилац, рецимо k, био већи од 4, онда би производ који уместо k има чиниоце 2 и $k-2$ био већи од P (због $2(k-2) > k$ за $k > 4$), а одговарајући збир би такође био 2013. Даље, сваку четворку у производу можемо заменити са две двојке (чиме се не мења ни збир ни производ), па закључујемо $P = 2^a 3^b$ за неке a и b. Најзад, како важи $2^3 < 3^2$ и $2+2+2 = 3+3$, јасно је да двојки не може бити више од две, тј. $a \in \{0, 1, 2\}$. Будући да $3 \mid 2013$ и важи

$$2013 = 3 \cdot 671 = \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{2013 \text{ пута}},$$

закључујемо $P = 3^{671}$. (Тангента 72, стр. 14, зад. M1136.)



Оп 2014 4А 3

3. Поставимо квадрат $ABCD$ у координатни систем као на слици. Нека је $T(x, y)$ произвољна тачка кружнице k. Тада важи $x^2 + y^2 = a^2$. Можемо записати $\overrightarrow{TA} = (-a - x, -a - y)$, $\overrightarrow{TB} = (a - x, -a - y)$, $\overrightarrow{TC} = (a - x, a - y)$ и $\overrightarrow{TD} = (-a - x, a - y)$. Одатле лако израчунавамо

$$\cos^2 \alpha_T = \left(\frac{(-a-x, -a-y)}{\sqrt{(-a-x)^2 + (-a-y)^2}} \cdot \frac{(a-x, a-y)}{\sqrt{(a-x)^2 + (a-y)^2}} \right)^2 = \frac{a^2}{5a^2 - 8xy},$$

затим

$$\cos^2 \beta_T = \left(\frac{(a-x, -a-y)}{\sqrt{(a-x)^2 + (-a-y)^2}} \cdot \frac{(-a-x, a-y)}{\sqrt{(-a-x)^2 + (a-y)^2}} \right)^2 = \frac{a^2}{5a^2 + 8xy},$$

и најзад

$$\operatorname{tg}^2\alpha_T+\operatorname{tg}^2\beta_T=\frac{1}{\cos^2\alpha_T}+\frac{1}{\cos^2\beta_T}-2=\frac{5a^2-8xy}{a^2}+\frac{5a^2+8xy}{a^2}-2=8.$$

(Тангента 71, стр. 16, зад. М1110.)

4. Како је a_n једнако цифри јединица броја $2^0a_0+2^1a_1+\cdots+2^{n-1}a_{n-1}$, закључујемо да је a_{n+1} заправо цифра јединица броја $a_n+2^na_n=(2^n+1)a_n$, а то је цифра јединица производа цифара јединица бројева 2^n+1 и a_n. Обележимо са b_n цифру јединица броја 2^n+1. У низу уређених парова $\{(b_n,a_n):n\geqslant 0\}$ мора доћи до понављања, јер $a_n,b_n\in\{0,1,\ldots,9\}$. Међутим, ако је $n<k$, $b_n=b_k$ и $a_n=a_k$, мора бити и $b_{n+1}=b_{k+1}$ и $a_{n+1}=a_{k+1}$, те добијамо да је $(a_{n+1},a_{n+2},\ldots,a_k)$ један период датог низа.

5. Докажимо најпре следећу лему.

Лема. Нека је L_n број подскупова скупа $\{1,2,3,\ldots,n\}$ у којима се не налазе два узастопна природна броја, као ни бројеви 1 и n истовремено. Тада је $L_1=1$, $L_2=3$ и $L_n=L_{n-1}+L_{n-2}$ за $n\geqslant 3$.

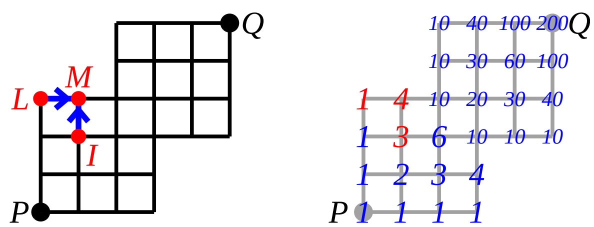
Доказ. За $n=1$ једини скуп с траженом особином је $\varnothing$, а за $n=2$ једина три таква скупа су $\varnothing$, $\{1\}$ и $\{2\}$. Нека је сада $n\geqslant 3$. Посматрајмо подскупове скупа $\{1,2,\ldots,n\}$ који задовољавају услов леме. За сваки такав подскуп, његов пресек са скупом $\{1,n-1,n\}$ може бити само нешто од следећег: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{n-1\}$, $\{n\}$ или $\{1,n-1\}$. Они посматрани подскупови код којих је такав пресек једна од прве три наведене могућности могу се другим речима описати управо као подскупови скупа $\{1,2,\ldots,n-1\}$ у којима се не налазе два узастопна природна броја, као ни бројеви 1 и $n-1$ истовремено, а таквих има L_{n-1}. Размотримо сада посматране подскупове који у пресеку са скупом $\{1,n-1,n\}$ дају $\{n\}$ или $\{1,n-1\}$. Тврдимо да таквих има L_{n-2}. Успоставићемо бијекцију између њих и подскупова скупа $\{1,2,\ldots,n-2\}$ у којима се не налазе два узастопна природна броја, као ни бројеви 1 и $n-2$ истовремено. Заиста, ако посматрамо подскуп који у пресеку са $\{1,n-1,n\}$ даје $\{n\}$, тада уклањањем елемента n добијамо један задовољавајућ подскуп скупа $\{1,2,\ldots,n-2\}$ (који, приметимо, не садржи елемент 1); ако посматрамо подскуп који у пресеку са $\{1,n-1,n\}$ даје $\{1,n-1\}$, тада тај подскуп не садржи елемент $n-2$, па уклањањем елемента $n-1$ добијамо један задовољавајућ подскуп скупа $\{1,2,\ldots,n-2\}$ (који овог пута садржи елемент 1). Јасно је да је овакво пресликавање бијекција, чиме је лема доказана.

Вратимо се сада на постављени задатак. Нека су витези распоређени за округлим столом на начин који је предвиђен у поставци, и нека су обележени словима $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{2013}$ редом како седе. Приметимо да су међу витезовима $v_1, v_{184}, v_{367}, \ldots, v_{1831}$ непријатељи тачно они витезови који су суседи у овом низу, и додатно витезови v_1 и v_{1831}; одатле, од њих се може формирати група међу којима нема непријатеља на тачно $L_{11} = 199$ начина (при чему смо овде урачунали и празан скуп). На исти начин закључујемо да од витезова $v_2, v_{185}, v_{368}, \ldots, v_{1832}$ можемо формирати групу на тачно L_{11} начина, и тако резонујемо све до низа $v_{183}, v_{366}, v_{549}, \ldots, v_{2013}$. Свим могућим комбинацијама до сада наведених група добијамо број $L_{11}^{\frac{2013}{11}} = 199^{183}$. Како група коју на крају формирамо мора бити непразна, одбацујући тај случај добијамо решење $199^{183} - 1$.

Први разред – Б категорија

1. Дати израз можемо трансформисати као $25! + 26! = 25! \cdot (1 + 26) = 25! \cdot 27 = 25! \cdot 3^3$. Сваки трећи број у производу $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 25$ дељив је са 3, тј. таквих бројева има 8, што засад даје $3^8 \mid 25!$. Бројеви 9 и 18 дељиви су не само са 3 него и са 9, што додаје још по један фактор 3 у броју 25!. Другим речима, имамо $3^{10} \mid 25!$ али $3^{11} \nmid 25!$. Додајући још и три фактора 3 која долазе од другог чиниоца, закључујемо да $3^{13} \mid 25! + 26!$ али $3^{14} \nmid 25! + 26!$, тј. $n = 13$.

2. Приметимо: за било коју тачку M на неком најкраћем путу од P до Q, у тачку M можемо стићи само из тачке L која се налази непосредно лево од M или из тачке I која се налази непосредно испод M (слика лево). Зато је број најкраћих путева од P до M једнак збиру броја најкраћих путева од P до L и броја најкраћих путева од P до I. Непосредним пребрајањем, приказаним на слици десно, добијамо да је број најкраћих путева од P до Q једнак 200. (Заинтересованим ученицима предлажемо да погледају и 5. задатак у 3А разреду на овом такмичењу, што је сложенија верзија овог задатка.)



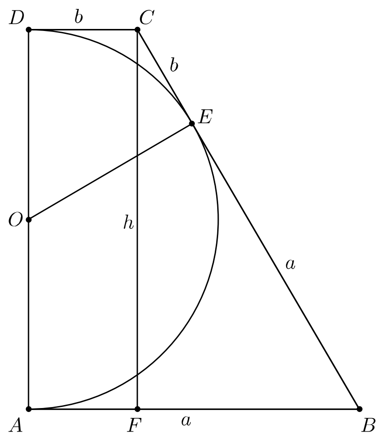
Оп 2014 1Б 2

3. Све могуће комбинације за два човека које је туриста срео јесу: (v, v), (v, p), (p, p) и (p, v) (при чему у свакој загради на првом месту стоји v

уколико је нижи човек витез а p ако је подлац, а друго место на сличан начин карактерише вишег човека). На своје прво питање туриста би добио одговор „не“ само у четвртом случају, а одговор „да“ у свим осталим случајевима. Дакле, пошто туристи одговор на прво питање није био довољан, закључујемо да је тај одговор био „да“ и да важи неки од прва три случаја. На своје друго питање туриста би добио одговор „да“ у првом и трећем случају, а одговор „не“ у другом случају. Пошто је туристи овај одговор био довољан да сазна шта је желео, закључујемо да је одговор био „не“ и да важи други случај, тј. нижи човек је витез а виши подлац. (Тангента 73, стр. 49, зад. 28.)

4. Доказаћемо да обе стране посматране еквиваленције имају исту вредност за ма какве вредности исказних слова p, q и r. Уколико слово r има вредност $\top$, десна страна еквиваленције има вредност $\top$, а вредност леве стране је вредност импликације облика $\bot \Rightarrow \dots$, па је и вредност леве стране једнака $\top$. Даље, уколико неко од слова p или q има вредност $\top$, десна страна еквиваленције има вредност $\top$, а вредност леве стране је вредност импликације облика $\dots \Rightarrow \top$, па је и вредност леве стране једнака $\top$. Најзад, уколико сва три посматрана слова имају вредност $\bot$, тада десна страна еквиваленције има вредност $\bot$, а лева страна има вредност $\neg\bot \Rightarrow \bot \vee \bot$, тј. $\top \Rightarrow \bot$, што је $\bot$. Овим је доказ завршен. (Тангента 73, стр. 33, зад. I.2.)

5. Спајање било која два раздвојена ланчића захтева раскидање и поновно састављање једне алке, што златара кошта 3 \$. Како на почетку имамо четири ланчића, златару треба најмање 9 \$ да би обавио посао. Покажимо да му је 9 \$ и довољно. Златар може да раскине све три алке најмањег ланчића, и две од њих искористи да од прва три ланчића направи један отворен ланчић (од 15 алки: 13 колико укупно та три ланчића имају, плус још 2 узете од трећег ланчића), а трећу искористи за затварање ланчића укруг. (Тангента 73, стр. 51, зад. I.6.)



Оп 2014 2Б 1

Други разред – Б категорија

1. Нека је O центар тог круга, тј. средина странице AD, а E тачка додира тог круга са краком BC. Лако је уочити $\triangle OAB \cong \triangle OEB$ ($OE = OA$ као полупречници поменутог круга, $\measuredangle OAB = \measuredangle OEB = 90^\circ$, $OB = OB$, па подударност следи по ставу ССУ). Одатле добијамо $AB = BE = a$. Аналогно добијамо $DC = CE = b$. Дакле, $BC = a + b$. Нека је F подножје нормале из C на AB. Означимо $CF = h$ (ово је висина посматраног трапеза). Применом Питагорине теореме на $\triangle BCF$ добијамо $(a+b)^2 = h^2+(a-b)^2$; одавде израчунавамо $h^2 = 4ab$, тј. $h = 2\sqrt{ab}$. Дакле, површина посматраног трапеза износи: $P = \frac{h(a+b)}{2} = \frac{2\sqrt{ab}(a+b)}{2} = \sqrt{ab}(a+b)$.

2. Докажимо да Пера (први играч) добија. У свом првом потезу Пера уписује $b = 0$. Тада Мика мора уместо a и c уписати бројеве различите од нуле. Једначина која се тако добија своди се на $x^2 = -\frac{c}{a}$. Ова једначина или има два реална решења или нема ниједно (у зависности од тога да ли је вредност $-\frac{c}{a}$ позитивна или негативна); дакле, Пера побеђује ма како Мика одиграо.

3. Посматрајмо бројеве 12345678900000, 12345678900001, 12345678900002, ..., 12345678902012. Како они представљају 2013 узастопних природних бројева, они дају све могуће остатке при дељењу са 2013. Дакле, међу овим бројевима постоји неки који даје остатак 0 при дељењу са 2013, тј. постоји број дељив са 2013. (Тангента 74, стр. 12, зад. М1175.)

4. a) Из услова задатка добијамо $y^2 = \frac{xy \cdot yz}{zx} \in \mathbb{Q}$ (производ два рационална броја опет је рационалан број, и количник два рационална броја различита од нуле опет је рационалан број). Аналогно добијамо $x^2 \in \mathbb{Q}$ и $z^2 \in \mathbb{Q}$. Како је збир рационалних бројева опет рационалан број, добијамо $x^2 + y^2 + z^2 \in \mathbb{Q}$.

b) Из услова задатка имамо

$$(xyz)^2 = (xy)(yz)(zx) \in \mathbb{Q}.$$

Даље, такође из услова задатка као и дела доказаног под а), добијамо

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \in \mathbb{Q}.$$

Квадрирајмо познат идентитет $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$. Добијамо:

$$(x^3+y^3+z^3)^2 - 6(x^3+y^3+z^3)xyz + 9(xyz)^2 = (x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)^2.$$

Десна страна ове једнакости јесте рационалан број (за први чинилац смо показали да је рационалан, а за други то следи из услова задатка као и дела под а)). Сабирци $(x^3+y^3+z^3)^2$ и $9(xyz)^2$ такође су рационални бројеви. Како је и $x^3 + y^3 + z^3$ рационалан број различит од нуле, да би лева страна била рационалан број (што мора бити, јер смо за десну констатовали да јесте рационалан број) мора важити $xyz \in \mathbb{Q}$. Сада лако добијамо $z = \frac{xyz}{xy} \in \mathbb{Q}$, и аналогно следи $x \in \mathbb{Q}$ и $y \in \mathbb{Q}$. (Тангента 72, стр. 13, зад. М1128.)

5. Како се ниједна цифра не сме појављивати више од два пута, сваки од посматраних четвороцифрених бројева записан је или помоћу две цифре од којих се свака појављује по два пута, или помоћу све три дозвољене цифре међу којима се једна појављује тачно два пута, а преостале две тачно по једном. У првом случају, уколико су те две цифре 1 и 2, тада можемо добити бројеве 1122, 1212, 1221, 2112, 2121 и 2211, тј. шест могућности; исто важи уколико фиксирамо цифре 1 и 3, односно 2 и 3, што све заједно даје 18 могућности у првом случају. У другом случају, уколико се цифра 1 појављује два пута а преостале две цифре по једном, тада можемо добити бројеве 1123, 1132, 1213, 1312, 1231, 1321, 2113, 3112, 2131, 3121, 2311 и 3211, тј. дванаест могућности; исто важи уколико се цифра 2 (а не цифра 1) појављује два пута, као и уколико се цифра 3 (а не цифра 1) појављује два пута, што све заједно даје 36 могућности у другом случају. Дакле, имамо укупно 54 таква броја. (Тангента 74, стр. 36, зад. I.1(а).)

Трећи разред – Б категорија

1. Додаћемо по $2\sin^4 x\cos^4 x = \frac{\sin^4 2x}{8}$ на обе стране. Добијамо $(\sin^4 x + \cos^4 x)^2 = \frac{17}{32} + \frac{\sin^4 2x}{8}$. Такође из $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2}$ добијамо $(1 - \frac{\sin^2 2x}{2})^2 = \frac{17}{32} + \frac{\sin^4 2x}{8}$. Ако уведемо смену $t = \frac{\sin^2 2x}{2}$, после сређивања добијамо квадратну једначину $t^2 - 4t + \frac{15}{16} = 0$. Њена решења су $\frac{15}{4}$ и $\frac{1}{4}$. Прво очито отпада због интервала у ком се налази синус, а из другог добијамо: $\frac{\sin^2 2x}{2} = \frac{1}{4}$, тј. $\sin 2x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, а одавде имамо $2x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$. Дакле, скуп решења је: $x \in \{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} : k \in \mathbb{Z}\}$.

2. У свакој врсти постоји бар $n+1$ краљевских поља, те на целој табли има бар $(2m+1)\cdot(n+1)$ краљевских поља. Аналогно, на целој табли има бар $(2n+1)\cdot(m+1)$ царских поља. Нека је K скуп краљевских поља, а C скуп царских поља. Важи $|K\cup C| = |K| + |C| - |K\cap C|$. Из ове једнакости, затим малочас добијених неједнакости, и најзад неједнакости $|K\cup C| \leqslant (2m+1)(2n+1)$ (јер на табли укупно имамо $(2m+1)(2n+1)$ поља) добијамо

$$\begin{aligned}|K\cap C| &= |K| + |C| - |K\cup C|\\ &\geqslant (2m+1)(n+1) + (2n+1)(m+1) - (2m+1)(2n+1) = m+n+1,\end{aligned}$$

што је и требало доказати.

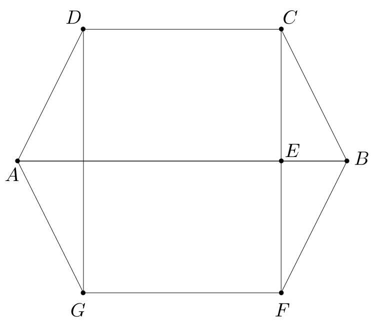
3. Нека је $\overline{xy}$ двоцифрен број дељив производом својих цифара. Тада постоји природан број k такав да важи $10x + y = kxy$, тј. $y = (ky - 10)x$. Одавде закључујемо $x \mid y$, па тиме и $0 < x \leqslant y$.

Ако важи $x = y$, тада следи $11x = kx^2$, те следи $11 = kx$. Једина могућност је $k = 11$ и $x = y = 1$.

Ако важи $x < y$, тада следи $x \leqslant 4$ (у супротном y неће бити цифра). За $x = 4$ добили бисмо $y = 8$, али то није могуће јер би тада важило $48 = 32k$. За $x = 3$ важи $10x = (kx - 1)y$, тј. $30 = (3k - 1)y$. Како имамо $y \leqslant 9$, $3 \mid y$ и $y \mid 30$, закључујемо $y = 6$. За $x = 2$ важи $20 = (2k - 1)y$, и како имамо $y \leqslant 9$, $2 \mid y$ и $y \mid 20$, закључујемо $y = 4$. Коначно, за $x = 1$ следи $10 = (k - 1)y$, па y може узети вредности 2 и 5.

Према томе, услове задатка испуњавају бројеви 11, 12, 15, 24 и 36. (Тангента 73, стр. 14, зад. М1155.)

4. Нека је посматрани трапез $ABCD$, при чему је AB дужа основица. Нека је E подножје нормале из C на основицу AB. Из $AC \perp BC$ добијамо $BC = AB\cos\alpha = a\cos\alpha$. Затим одавде добијамо $CE = BC\sin\alpha = a\cos\alpha\sin\alpha$ и $BE = BC\cos\alpha = a\cos^2\alpha$. Добијено тело може се поделити на две подударне купе, чији полупречници основа износе CE а висине BE, као и један ваљак полупречника основе CE и висине CD. Одатле је тражена запремина једнака:



Оп 2014 3Б 4

$$
\begin{aligned}
V &= 2 \cdot \frac{1}{3} CE^2 \cdot \pi \cdot BE + CE^2 \cdot \pi \cdot CD \\
&= \frac{2}{3}(a\cos\alpha\sin\alpha)^2\pi(a\cos^2\alpha) + (a\cos\alpha\sin\alpha)^2\pi(a - 2a\cos^2\alpha) \\
&= a^3\pi\cos^2\alpha\sin^2\alpha\left(1 - \frac{4\cos^2\alpha}{3}\right).
\end{aligned}
$$

(Тангента 69, стр. 29, зад. III.5.)

5. Ако би међу оних шест узастопних дана током којих је дечак давао нама познате одговоре били и понедељак и уторак, морали бисмо имати два узастопна иста одговора (будући да дечак и понедељком и уторком говори истину), што немамо; дакле, једине две могућности које преостају јесу могућност да је низ питања почео у уторак (а шести одговор добили смо у недељу), као и могућност да је низ питања почео у среду (а шести одговор добили смо у понедељак). Претпоставимо да је посреди друга могућност. Тада смо у суботу добили одговор „Тома“, а у понедељак такође одговор „Тома“; но, ово је немогуће будући да суботом дечак увек лаже, а понедељком увек говори истину. Дакле, остаје једино прва могућност; како је у том случају дечак у уторак дао одговор „Иван“ а уторком увек говори истину, и како је у том случају седми дан понедељак, када дечак опет говори истину, закључујемо да је седмог дана дечак дао одговор „Иван“. (Тангента 73, стр. 52, зад. II.8.)

Четврти разред – Б категорија

1. *Прво решење.* На основу једначине из поставке следи да су $x_1 = \sqrt[4]{x-2}$ и $x_2 = \sqrt[4]{4-x}$ решења неке квадратне једначине облика $x^2 - 2x + q = 0$, за погодно одабрано q. Надаље ћемо користити следеће једнакости: $x_1 + x_2 = 2$ (дато у поставци), $x_1x_2 = q$ (следи из Вијетових формула) и $x_1^4 + x_2^4 = 2$ (директно се уочава). На основу њих имамо $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$, па је $x_1^2 + x_2^2 = 4 - 2q$. Поновним квадрирањем имамо $x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2 = 16 - 16q + 4q^2$, тј. $2 + 2q^2 = 16 - 16q + 4q^2$. Решавањем ове квадратне једначине по q добијамо $q_1 = 7$, за које се види да x_1 и x_2 нису реални, па полазна једначина тада нема решења, а за $q_2 = 1$ имамо $x_1 = x_2 = 1$, па добијамо једино решење $x = 3$.

Друго решење. Као у претходном решењу, означимо $x_1 = \sqrt[4]{x-2}$ и $x_2 = \sqrt[4]{4-x}$. Имамо $x_1 + x_2 = 2$ и $x_1^4 + x_2^4 = 2$. Применом неједнакости између квадратне и аритметичке средине два пута добијамо:

$$1 = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{\frac{x_1^4 + x_2^4}{2}} = \sqrt{\sqrt{\frac{(x_1^2)^2 + (x_2^2)^2}{2}}} \geqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \geqslant \frac{x_1 + x_2}{2} = 1.$$

Одатле, у горњем низу свугде морају важити једнакости, што је могуће само за $x_1 = x_2$. Сада из $\sqrt[4]{x-2} = \sqrt[4]{4-x}$ добијамо $x = 3$.

2. Неједнакост доказујемо математичком индукцијом. За $n = 2$ неједнакост важи (своди се на $2! \cdot 4! > (3!)^2$, тј. $48 > 36$). Претпоставимо да посматрана неједнакост важи за уочен природан број n, и докажимо да она тада важи и за $n+1$, тј. $2! \cdot 4! \cdots (2(n+1))! > ((n+2)!)^{n+1}$. Имамо:

$$\begin{aligned}
2! \cdot 4! \cdots (2(n+1))! &= (2! \cdot 4! \cdots (2n)!) \cdot (2n+2)! > ((n+1)!)^n \cdot (2n+2)! \\
&= ((n+1)!)^n \cdot (n+1)! \cdot ((n+2)(n+3) \cdots (2n+2)) \\
&> ((n+1)!)^n \cdot (n+1)! \cdot (n+2)^{n+1} \\
&= ((n+1)!)^{n+1} \cdot (n+2)^{n+1} = ((n+2)!)^{n+1},
\end{aligned}$$

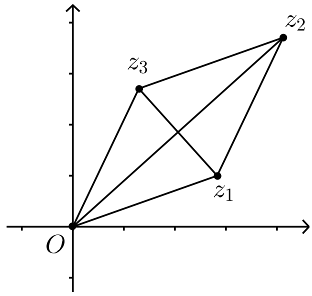
што је и требало доказати. (Тангента 72, стр. 14, зад. М1133.)

3. Из постављених услова закључујемо да се теме z_3 посматраног ромба добија ротацијом темена z_1 око тачке O за $45°$. Другим речима,

$$z_3 = z_1 \cdot (\cos 45° + i \sin 45°) = (2\sqrt{2} + i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4-\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{4+\sqrt{2}}{2}.$$

Теме z_2 можемо добити као централносиметричну слику темена O у односу на пресек дијагонала, тј. у односу на средиште дужи чији су крајеви темена z_1 и z_3 (будући да се дијагонале ромба полове). Тражено средиште је тачка $\frac{z_1+z_3}{2} = \frac{4+3\sqrt{2}}{4} + i \cdot \frac{6+\sqrt{2}}{4}$, одакле добијамо

$$z_2 = 2\left(\frac{4+3\sqrt{2}}{4} + i \cdot \frac{6+\sqrt{2}}{4}\right)$$
$$= \frac{4+3\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{6+\sqrt{2}}{2}.$$



Оп 2014 4Б 3

(Тангента 72, стр. 31, зад. III.4.)

4. Приметимо да за $x = 0$ имамо $\operatorname{tg} 0 = 0$ и $0 + \frac{0^3}{3} = 0$, тј. обе стране посматране неједнакости су једнаке. Докажимо да је функција $f(x) = \operatorname{tg} x - x - \frac{x^3}{3}$ строго растућа у задатом интервалу. Довољно је показати $f'(x) > 0$. Имамо:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2 = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} - x^2 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - x^2 = \operatorname{tg}^2 x - x^2.$$

Уколико покажемо да за $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ важи $\operatorname{tg} x > x$, добијамо $f'(x) > 0$, чиме би доказ био завршен. У ту сврху, дефинишимо $g(x) = \operatorname{tg} x - x$. Како је $g(0) = 0$, довољно је показати да за $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ важи $g'(x) > 0$. И заиста,

$$g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x > 0,$$

што је и требало доказати. (Тангента 69, стр. 32, зад. IV.3.)

5. Постоји 900 троцифрених бројева. Оних шестоцифрених бројева који се могу представити као производ два различита троцифрена броја има највише $\frac{900\cdot 899}{2} = 404550$, а оних шестоцифрених бројева који се могу представити као производ два иста троцифрена броја има највише 900. Одатле, шестоцифрених бројева који се могу представити као производ два троцифрена броја има највише 405450, што је мање од половине укупног броја шестоцифрених бројева (којих има 900000). Дакле, више има оних који се не могу написати као производ два троцифрена броја.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 31. 1. 2015.

Први разред – А категорија

1. Од почетног броја x могуће је добити бројеве $\frac{1}{x}$ и $x+1$, а затим од $x+1$ добити $\frac{1}{x+1}$. Сада због $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2+x}$ можемо добити и број $\frac{1}{x^2+x}$, а онда од њега и број $\frac{1}{\frac{1}{x^2+x}} = x^2+x$. Најзад, од бројева x^2+x и x добијамо $(x^2+x)-x = x^2$.

2. Нека је k број цифара и $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1}$. За $k = 1$ евидентно нема решења. За $k = 2$ имамо $10a_2 + a_1 = a_2 a_1 + 18$, одакле следи $a_2 = \frac{18-a_1}{10-a_1} = 1 + \frac{8}{10-a_1}$, те закључујемо $10 - a_1 \in \{1, 2, 4, 8\}$, тј. $a_1 \in \{9, 8, 6, 2\}$. Дакле, решења за $k = 2$ су: $\{22, 36, 58, 99\}$. Показаћемо да за $k \geqslant 3$ нема решења, тј. да су малочас набројана решења и једина. Заиста, имамо

$$\begin{aligned} P(n) + 18 &= a_k a_{k-1} \cdots a_1 + 18 \leqslant a_k \cdot 9^{k-1} + 18 \leqslant a_k(9^{k-1} + 18) \\ &< a_k \cdot 10^{k-1} \leqslant \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1} = n \end{aligned}$$

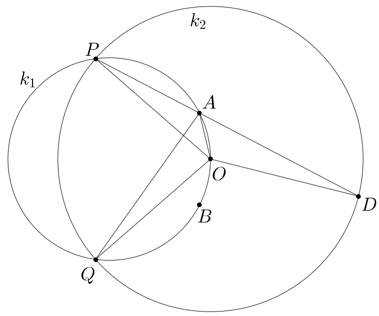
(неједнакост $9^{k-1} + 18 < 10^{k-1}$ за $k \geqslant 3$ директно се показује индукцијом, индукцијски корак је $9^k + 18 < 9(9^{k-1} + 18) < 9 \cdot 10^{k-1} < 10^k$), чиме је задатак решен.

3. Једнакост $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ еквивалентна је са $a^2 + b^2 = (d-c)(d+c)$. Претпоставимо најпре да је један од бројева a и b паран. Уколико је други број непаран, тада је израз $a^2 + b^2$ непаран; у том случају одговарајуће бројеве c и d можемо наћи решавајући систем $d - c = 1$ и $d + c = a^2 + b^2$ (добијају се решења $c = \frac{a^2+b^2-1}{2}$ и $d = \frac{a^2+b^2+1}{2}$, што јесу природни бројеви). Уколико је и други број паран, тада је израз $a^2 + b^2$ дељив са 4, па у том случају одговарајуће бројеве c и d можемо наћи решавајући систем $d - c = 2$ и $d + c = \frac{a^2+b^2}{2}$ (добијају се решења $c = \frac{a^2+b^2}{4} - 1$ и $d = \frac{a^2+b^2}{4} + 1$, што јесу природни бројеви).

Узмимо сада да важи $a^2 + b^2 = (d-c)(d+c)$, и докажимо да је бар један од бројева a и b паран. Претпоставимо супротно: нека су и a и b

непарни бројеви. Тада важи $a^2 \equiv 1 \pmod 4$ и $b^2 \equiv 1 \pmod 4$, па следи $a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod 4$. С друге стране, ако су c и d исте парности, тада су оба израза $d-c$ и $d+c$ парна, па је њихов производ (што је a^2+b^2) дељив са 4, контрадикција; ако су пак c и d различите парности, тада је њихов производ непаран, и поново контрадикција. Тиме је задатак решен.

4. Лукови $\widehat{PB}$ и $\widehat{AQ}$ су једнаке дужине, па је довољно доказати да важи $AD = AQ$. Нека је O центар круга k_2. Како имамо $\measuredangle ADO = \measuredangle PDO = \measuredangle DPO = \measuredangle APO = \measuredangle AQO$, следи $\triangle QAO \cong \triangle DAO$ (јер им је још страница AO заједничка, и важи $\measuredangle DAO = \measuredangle QAO$), па добијамо $AD = AQ$.



Ок 2015 1А 4

5. Важи $a-b = 0$, тј. $a = b$. Доказаћемо да можемо успоставити бијекцију између оних распореда чији смо број обележили са a (назовимо их „распореди типа А“) и оних распореда чији смо број обележили са b (назовимо их „распореди типа Б“). Нека је уочен један распоред типа А, и нека у том распореду Мика седи на седишту M а слободно је седиште S. Овом распореду придружимо распоред у ком Мика седи на седишту S а слободно је седиште M (преостали гледаоци остају где су и били). Није тешко видети да је придружени распоред типа Б (заиста, приметимо да, у моменту када у уоченом распореду типа А Мику подиже неки гледалац, тада ће у том моменту у придруженом распореду тај гледалац управо имати могућност да седне на слободно седиште), као и да је овакво придруживање заиста бијекција између свих распореда типа А и свих распореда типа Б.

Други разред – А категорија

1. Из прве једначине добијамо $v = \frac{3u+1}{u+1}$. Аналогно имамо $u = \frac{3w+1}{w+1}$ и $w = \frac{3v+1}{v+1}$. Сада следи:

$$v = \frac{3u+1}{u+1} = \frac{3 \cdot \frac{3w+1}{w+1} + 1}{\frac{3w+1}{w+1} + 1} = \frac{5w+2}{2w+1} = \frac{5 \cdot \frac{3v+1}{v+1} + 2}{2 \cdot \frac{3v+1}{v+1} + 1} = \frac{17v+7}{7v+3}.$$

Одавде добијамо квадратну једначину $v^2 - 2v - 1 = 0$. Њена решења су $v = 1 + \sqrt{2}$ и $v = 1 - \sqrt{2}$. Израчунавајући u и w који се добијају у ова два случаја, добијамо два решења полазног система: $u = v = w = 1 + \sqrt{2}$ и $u = v = w = 1 - \sqrt{2}$.

2. Нека су (x_1, y_1) и (x_2, y_2) две од могућности између којих Раја не може да се определи. Можемо претпоставити, без умањења општости, $x_1 \leqslant x_2$. Нека су n_1 и n_2 бројеви који се добијају када се обрисане цифре замене цифрама из уређеног пара (x_1, y_1) и (x_2, y_2), респективно. Тада имамо

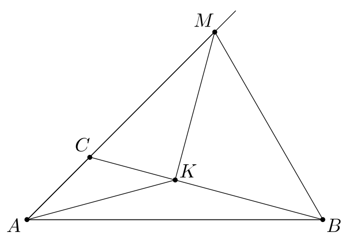
$$n_2 - n_1 = (x_2 - x_1)10^{t+k} + (y_2 - y_1)10^t$$

за неки природан број t и непаран број k (k је непаран број јер се између обрисаних цифара налази $k-1$ цифра, а по услову задатка ова вредност је парна). Како n_1 и n_2 дају исте остатке при дељењу са 9 и такође при дељењу са 11, следи да је разлика $n_2 - n_1$ дељива са 99, па добијамо $99 \mid (x_2 - x_1)10^k + (y_2 - y_1)$. Из $10^2 \equiv 1 \pmod{99}$ због $2 \nmid k$ следи $10^k \equiv 10 \pmod{99}$, па добијамо $99 \mid 10(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)$. Како су x_1, x_2, y_1, y_2 цифре и $x_1 \leqslant x_2$, следи $0 \leqslant x_2 - x_1 \leqslant 9$ и $-9 \leqslant y_2 - y_1 \leqslant 9$, тј.

$$-9 \leqslant 10(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) \leqslant 99.$$

Према томе, $10(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 0$ или $10(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 99$. У првом случају одмах добијамо $x_2 = x_1$ и $y_2 = y_1$, тј. $(x_2, y_2) = (x_1, y_1)$, што је немогуће. Остаје други случај, који се постиже само за $x_2 - x_1 = 9$ и $y_2 - y_1 = 9$, тј. за $x_2 = 9$, $x_1 = 0$, $y_2 = 9$ и $y_1 = 0$.

Дакле, Раја не може да се определи између тачно две могућности, и то су $(0, 0)$ и $(9, 9)$.

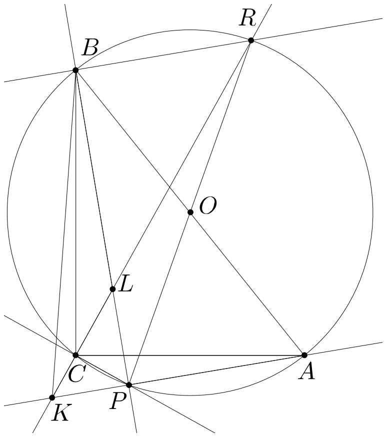


Ок 2015 2А 3

3. *Прво решење.* Израчунавамо $\measuredangle BCA = 120^\circ$. На дужи CB уочимо тачку K такву да важи $CA = CK$. Из $\measuredangle KCM = 60^\circ$ и $CM = 2CK$ добијамо $\measuredangle CKM = 90^\circ$ (јер је $\triangle CMK$ половина једнакостраничног троугла). Будући да је $\triangle ACK$ једнакокрак, следи $\measuredangle KAC = \measuredangle CKA = 30^\circ$. Одатле израчунавамо $\measuredangle MKA = \measuredangle AKC + \measuredangle CKM = 120^\circ$, а сада добијамо и $\measuredangle AMK = 30^\circ$. Закључујемо да је и $\triangle AKM$ једнакокрак, тј. $AK = KM$. Такође имамо $\measuredangle BAK = \measuredangle BAC - \measuredangle KAC = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$, па је и $\triangle AKB$ једнакокрак, тј. $AK = KB$. Одатле је $\triangle MKB$ једнакокрако-правоугли, те следи $\measuredangle KBM = \measuredangle KMB = 45^\circ$. Најзад, $\measuredangle AMB = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$.

Друго решење. Означимо $AC = x$ и $CB = y$. На основу синусне теореме за $\triangle ABC$ имамо: $\frac{x}{\sin 15^\circ} = \frac{y}{\sin 45^\circ}$, па добијамо $x = \frac{y \sin 15^\circ}{\sin 45^\circ} = y\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

(приметимо, $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$). Применом косинусне теореме на $\triangle MBC$ имамо $MB^2 = (2x)^2+y^2-4xy\cos 60^\circ$, па после сређивања остаје $MB^2 = (6-3\sqrt{3})y^2 = \frac{3}{2}(4-2\sqrt{3})y^2$, тј. $MB = \frac{\sqrt{6}}{2}(\sqrt{3}-1)y$. Означимо $\measuredangle AMB = \varphi$. Поново из косинусне теореме имамо $CB^2 = MB^2 + MC^2 - 2MB\cdot MC\cos\varphi$, па после замене ових вредности и скраћивања добијамо $\cos\varphi = \frac{9-5\sqrt{3}}{4\sqrt{6}-6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Одатле закључујемо $\varphi = 75^\circ$.



Ок 2015 2А 4

4. Означимо са R тачку дијаметрално супротну тачки P (кроз њу пролази и права CK, будући да је нормална на CP). Тада имамо $BR \parallel PA$, па следи $P_{\triangle PBK} = P_{\triangle PRK}$, а због тога и $P_{\triangle BKL} = P_{\triangle LPR}$. Пошто важи $PA = BR$, имамо $\measuredangle PCA = \measuredangle BPR = \measuredangle LPR$; такође имамо $\measuredangle CAP = \measuredangle CRP$, па су $\triangle LPR$ и $\triangle PCA$ слични. Дакле, $P_{\triangle BKL} : P_{\triangle PCA} = P_{\triangle LPR} : P_{\triangle PCA} = PR^2 : AC^2 = AB^2 : AC^2$.

5. Означимо са a, b, c и d број подскупова скупа $\{1,2,\ldots,n\}$ чија кардиналност при дељењу са 4 даје остатак 0, 1, 2 или 3, респективно. Број посматраних подскупова који имају паран број елемената једнак је броју посматраних подскупова који имају непаран број елемената (што се може видети на основу, рецимо, биномног развоја израза

$$(1+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j, \tag{1}$$

у ком узимамо $x = -1$; тада збир оних биномних коефицијената испред којих је знак „+“ чини тачно број подскупова с парним бројем елемената, а оних испред којих је знак „−“ управо број преосталих подскупова). Овим смо добили

$$a + c = b + d = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}. \tag{2}$$

Посматрајмо поново биномни развој (1), и узмимо $x = i$, где је i имагинарна јединица. Како важи $(1+i)^8 = ((1+i)^2)^4 = (-2i)^4 = 16$ и n је дељиво са 8, добијамо $(1+i)^n = ((1+i)^8)^{\frac{n}{8}} = 16^{\frac{n}{8}} = 2^{\frac{n}{2}}$, тј.

$$2^{\frac{n}{2}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} i^j. \tag{3}$$

Пошто је i^j једнако 1, i, -1 или $-i$, условљено са $j \equiv 0,1,2,3 \pmod 4$, респективно, изједначавањем реалних делова леве и десне стране једнакости (3) добијамо $a-c=2^{\frac{n}{2}}$, а изједначавањем имагинарних делова добијамо $b-d=0$. (Ове једнакости, које су заправо одређени биномни идентитети, могуће је добити и на други начин, без коришћења комплексних бројева, што остављамо заинтересованим такмичарима за вежбу.) Добијене две једнакости заједно са (2) чине једноставан систем од четири једначине с четири непознате, чијим решавањем добијамо $a=2^{n-2}+2^{\frac{n-2}{2}}$, $c=2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}}$ и $b=d=2^{n-2}$. Дакле, како имамо $a+b=2^{n-1}+2^{\frac{n-2}{2}}$, овај број очито има тачно две јединице у бинарном запису, што завршава доказ.

Трећи разред – А категорија

1. Означимо $s=1+(p-1)!$. На основу Вилсонове теореме имамо $s\equiv 0 \pmod p$, а пошто важи и $s\equiv 1 \pmod{p-1}$, добијамо $s\equiv p \pmod{(p-1)p}$. Како су $(p-3)!$ и p узајамно прости, на основу Ојлерове теореме добијамо $((p-3)!)^{\varphi(p^2)}\equiv 1 \pmod{p^2}$, тј. $((p-3)!)^{(p-1)p}\equiv 1 \pmod{p^2}$. Из претходног и овог закључка следи $((p-3)!)^s\equiv((p-3)!)^p \pmod{p^2}$. Даље, опет применом Вилсонове теореме добијамо $p-1\equiv -1\equiv (p-1)! = (p-1)(p-2)(p-3)!\equiv 2(p-3)! \pmod p$, тј. $(p-3)!\equiv \frac{p-1}{2} \pmod p$. Другим речима, за неки цео број a важи $(p-3)! = ap+\frac{p-1}{2}$. Из свега до сада, уз коришћење биномне формуле, добијамо

$$
\begin{aligned}
((p-3)!)^s \equiv ((p-3)!)^p &= \left(ap+\frac{p-1}{2}\right)^p \\
&\equiv p\cdot ap\cdot\left(\frac{p-1}{2}\right)^{p-1}+\left(\frac{p-1}{2}\right)^p \equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)^p \pmod{p^2}.
\end{aligned}
$$

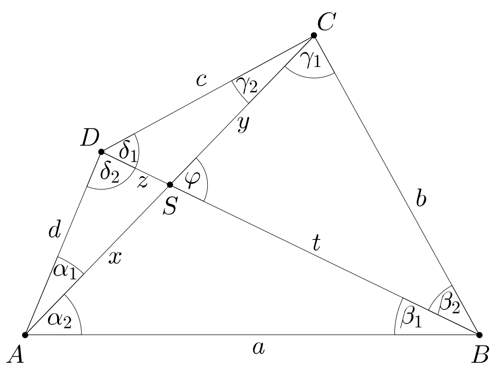
Дакле, постављени задатак своди се на $p^2 \mid \left(\frac{p^2+1}{2}\right)^p+\left(\frac{p-1}{2}\right)^p = \frac{(p^2+1)^p+(p-1)^p}{2^p}$, па је, с обзиром на чињеницу да је p непаран број, довољно доказати $p^2\mid (p^2+1)^p+(p-1)^p$. Из биномне формуле добијамо $(p-1)^p\equiv(-1)^p=-1 \pmod{p^2}$, што уз тривијално $(p^2+1)^p\equiv 1 \pmod{p^2}$ даје $(p^2+1)^p+(p-1)^p\equiv 1+(-1)=0 \pmod{p^2}$, чиме је доказ завршен.

2. Означимо $x^2-yz=a$ и $y^2-zx=b$. Сабирање датих једначина даје $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2(a+b+c)$. Приметимо одмах да мора важити $a+b+c\geqslant 0$ (ово ће бити потребно касније). Даље, одузимањем друге једначине од прве добијамо $(x-y)(x+y+z)=a-b$, а слично следи $(y-z)(x+y+z)=b-c$ и $(z-x)(x+y+z)=c-a$, па квадрирањем и сабирањем ове три једнакости добијамо $2(a+b+c)(x+y+z)^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$. Одавде следи $x+y+z=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{a+b+c}}$. Обележимо ову вредност са s. Из претходних једнакости добијамо $x-y=\frac{a-b}{s}$, $y-z=\frac{b-c}{s}$ и $z-x=\frac{c-a}{s}$. Сада имамо

$$\begin{aligned} x&=\frac{1}{3}(s+(x-y)+(x-z))=\frac{1}{3}\left(s+\frac{a-b}{s}+\frac{a-c}{s}\right)=\frac{s^2+2a-b-c}{3s}\\ &=\frac{1}{3s}\left(\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{a+b+c}+2a-b-c\right)=\frac{a^2-bc}{s(a+b+c)}, \end{aligned}$$

а аналогно и $y=\frac{b^2-ca}{s(a+b+c)}$ и $z=\frac{c^2-ab}{s(a+b+c)}$. Дакле, за $a=1$ и $b=2$ услов $x,y,z\geqslant 0$ своди се на $1-2c\geqslant 0$, $4-c\geqslant 0$, $c^2-2\geqslant 0$ и $a+b+c=c+3>0$, а одавде добијамо $-3<c\leqslant-\sqrt{2}$.

3. Одговор је потврдан. Означимо темена четвороугла A, B, C, D, углове код тих темена α, β, γ, δ, редом, и странице $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$. Нека је S пресек дијагонала. Нека су редом α_1 и α_2 углови на које дијагонала AC дели угао α. Аналогно дефинишемо углове β_1 и β_2, γ_1 и γ_2, δ_1 и δ_2. Нека су одсечци дијагонала $AS=x$, $SC=y$, $DS=z$, $SB=t$, и обележимо још $\measuredangle CSB=\measuredangle ASD=\varphi$, $\measuredangle ASB=\measuredangle CSD=180^\circ-\varphi$. Из косинусне теореме за $\triangle ABC$ добијамо $AC^2=a^2+b^2-2ab\cos\beta$, па је $\cos\beta=\frac{a^2+b^2-AC^2}{2ab}$ рационалан број. Из истог троугла на сличан начин добијамо да су и $\cos\gamma_1$ и $\cos\alpha_2$ рационални бројеви. Применом косинусне теореме и на $\triangle BCD$, $\triangle CDA$ и $\triangle DAB$, добијамо да су косинуси свих углова α, β, γ, δ, α_i, β_i, γ_i, δ_i рационални. Како важи $\alpha_1+\alpha_2=\alpha$ и $\cos\alpha$ је рационалан, преко $\cos\alpha=\cos(\alpha_1+\alpha_2)=\cos\alpha_1\cos\alpha_2-\sin\alpha_1\sin\alpha_2$ и $\cos\alpha_1\in\mathbb{Q}$ и $\cos\alpha_2\in\mathbb{Q}$ добијамо $\sin\alpha_1\sin\alpha_2\in\mathbb{Q}$. Аналогно, $\sin\beta_1\sin\beta_2\in\mathbb{Q}$, $\sin\gamma_1\sin\gamma_2\in\mathbb{Q}$ и $\sin\delta_1\sin\delta_2\in\mathbb{Q}$. Из $\triangle ABD$ имамо $\beta_1+\delta_2=180^\circ-\alpha$, па сада из $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha=-\cos(\beta_1+\delta_2)=-\cos\beta_1\cos\delta_2+\sin\beta_1\sin\delta_2$ добијамо $\sin\beta_1\sin\delta_2\in\mathbb{Q}$. Применом синусне теореме на $\triangle BAS$ и $\triangle ASD$ добијамо $\frac{t}{\sin\alpha_2}=\frac{a}{\sin(180^\circ-\varphi)}=\frac{x}{\sin\beta_1}$ и $\frac{z}{\sin\alpha_1}=\frac{d}{\sin\varphi}=\frac{x}{\sin\delta_2}$. Множењем ових



Ок 2015 3А 3

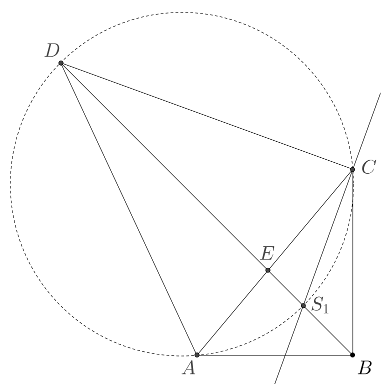
једнакости добијамо $\frac{tz}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2} = \frac{ad}{\sin^2\varphi} = \frac{x^2}{\sin\beta_1 \sin\delta_2}$, а како су вредности $\sin\alpha_1 \sin\alpha_2$, ad и $\sin\beta_1 \sin\delta_2$ рационалне, добијамо $tz = \frac{l}{\sin^2\varphi}$ и $x^2 = \frac{p}{\sin^2\varphi}$ за неке рационалне бројеве l и p. Аналогно добијамо $xy = \frac{q}{\sin^2\varphi}$ и $y^2 = \frac{r}{\sin^2\varphi}$, за неке $q, r \in \mathbb{Q}$. Како важи $x + y \in \mathbb{Q}$ ($x + y = d_1$, где је d_1 дужина дијагонале AC), из једнакости $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 = \frac{p}{\sin^2\varphi} + \frac{2q}{\sin^2\varphi} + \frac{r}{\sin^2\varphi}$ добијамо $\sin^2\varphi \in \mathbb{Q}$. Сада из ранијих израза за x^2 и y^2 добијамо $x^2 \in \mathbb{Q}$ и $y^2 \in \mathbb{Q}$. Коначно, из једнакости $y^2 = (d_1 - x)^2 = d_1^2 - 2d_1x + x^2 \in \mathbb{Q}$ добијамо $x \in \mathbb{Q}$, а тада следи и $y \in \mathbb{Q}$. Исто се доказује и $t \in \mathbb{Q}$ и $z \in \mathbb{Q}$.

4. Тврдимо да ће након 2015 корака на табли бити F_{2016} бројева, где смо са F_{2016} обележили 2016. члан Фибоначијевог низа.

Доказаћемо јаче тврђење: након n корака на табли ће укупно F_{n-1} пута бити записан број 1, затим F_{n-2} пута бити записан број 2, …, F_1 пута бити записан број $n-1$, и једном ће бити записан број $n+1$. Докажимо ово индукцијом по n. У првом кораку бришемо с табле број 1 а дописујемо број 2, тј. након првог корака на табли се налази само број 2, што одговара тврђењу које доказујемо. Претпоставимо сада да тврђење важи за неко задато n, и посматрајмо шта се дешава након корака $n+1$: број 1 ће бити уписан приликом брисања свих бројева од 2 навише, а таквих има $F_{n-2} + F_{n-3} + \cdots + F_1 + 1$; број 2 ће бити уписан приликом брисања свих бројева од 3 навише, а таквих има $F_{n-3} + F_{n-4} + \cdots + F_1 + 1$ итд. Дакле, да бисмо доказали жељено тврђење, довољно је доказати једнакост

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_k + 1 = F_{k+2}.$$

Ову једнакост доказујемо индукцијом по k. За $k = 0$ једнакост важи. Претпоставимо да једнакост важи за задат број k. Из те претпоставке имамо $F_1 + F_2 + \cdots + F_k + F_{k+1} + 1 = F_{k+2} + F_{k+1} = F_{k+3}$, што је и требало доказати. Овим смо показали и жељено тврђење. Према томе, преостаје само да приметимо да се након 2015 корака на табли налази укупно $F_{2014} + F_{2013} + \cdots + F_1 + 1 = F_{2016}$ бројева.



Ок 2015 3А 5

5. Уочавамо да важи $\measuredangle ABC = 90°$. Нека је S_1 пресек симетрале $\measuredangle BCA$ са дијагоналом BD. Тада важи $\measuredangle S_1CA = \measuredangle S_1DA = 20°$ па је четвороугао S_1ADC тетиван, те се S_1 налази на кружници описаној око $\triangle ACD$. На исти начин, ако са S_2 означимо пресек симетрале $\measuredangle BAC$ са дијагоналом BD, добићемо да је четвороугао S_2ADC тетиван, па се и S_2 налази на кругу описаном око $\triangle ACD$. Ово је могуће једино уколико се тачке S_1 и S_2 поклапају. У тој тачки налази се центар уписане кружнице у $\triangle ABC$, па закључујемо да је дијагонала BD симетрала правог угла $\measuredangle ABC$, тј. $\measuredangle DBC = 45°$. Сада се добија да је угао између дијагонала једнак $85°$.

Четврти разред – А категорија

1. Јасно да посматрани израз узима само позитивне вредности. Доказаћемо да може узимати све вредности на $(0,\infty)$. Посматрајмо специјалан случај $x = y = t$, $y = \frac{1}{t^2}$, где $t \in (0,\infty)$. Тада овај израз постаје, после лаког сређивања $f(t) = \frac{2t+t^4}{2t^3+1}$. Очито $\lim_{t\to 0} f(t) = 0$, а $\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$. Такође очито је и $f(t)$ непрекидна на $(0,\infty)$, па узима све вредности на $(0,\infty)$.

2. Одговор: сви бројеви дељиви са 11, и бројеви

$1\,909\,090\ldots 9\,090$, $2\,818\,181\ldots 8\,181$, $3\,727\,272\ldots 7\,272$, $4\,636\,363\ldots 6\,363$, $5\,545\,454\ldots 5\,454$, $6\,454\,545\ldots 4\,545$, $7\,363\,636\ldots 3\,636$, $8\,272\,727\ldots 2\,727$ и $9\,181\,818\ldots 1\,818$.

Сви бројеви дељиви са 11 имају тражено својство. Заиста, како је број дељив са 11 акко је разлика збирова цифара на парним, односно непарним позицијама дељива са 11, и како изменом ма које цифре у броју ову разлику повећавамо или смањујемо највише за 9, јасно је да се изменом ма које цифре увек добија број који није дељив са 11.

Нека је, ради једноставнијег записа, $m = 31\,012\,015$, и претпоставимо сада да број $n = \overline{a_{m-1}a_{m-2}\cdots a_1a_0}$, где $11 \nmid n$, има тражено својство. Важи

$$n \equiv \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} a_{2i} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor -1} a_{2i+1} \equiv b \neq 0 \pmod{11}.$$

Уколико би за неко i, $0 \leqslant i \leqslant \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - 1$ важило $a_{2i} \geqslant b$, заменом цифре a_{2i} са $a_{2i} - b$ добили бисмо број дељив са 11, што је немогуће по претпоставци. Исто важи у случају $a_{m-1} > b$. Даље, уколико би за неко i, $0 \leqslant i \leqslant \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ важило $a_{2i} \leqslant b-2$, заменом цифре a_{2i} са $a_{2i} - b + 11$ опет бисмо добили број дељив са 11. Према томе, једине могућности су $a_{2i} = b-1$ за све i, $0 \leqslant i \leqslant \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - 1$, и $a_{m-1} \in \{b-1, b\}$. Посматрајмо сада цифре на непарним позицијама. Уколико би за неку од њих важило $a_{2i+1} \leqslant 9 - b$, заменом цифре a_{2i+1} са $a_{2i+1} + b$ добили бисмо број дељив са 11. Даље, уколико би за неку од њих важило $a_{2i+1} \geqslant 11 - b$, заменом цифре a_{2i+1} са $a_{2i+1} + b - 11$ добили бисмо број дељив са 11. Према томе, све цифре на непарним позицијама морају износити $10 - b$.

Размотримо могућност $a_{m-1} = b - 1$. Тада имамо

$$\begin{aligned} n &\equiv \left(\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor + 1\right)(b-1) - \left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor(10-b) \\ &= \underbrace{15\,506\,008}_{\equiv 1 \pmod{11}}(b-1) - \underbrace{15\,506\,007}_{\equiv 0 \pmod{11}}(10-b) \equiv b - 1 \pmod{11}, \end{aligned}$$

што је немогуће јер важи $n \equiv b \pmod{11}$. Према томе, остаје $a_{m-1} = b$. Уврштајући сада све могућности $b = 1, 2, \ldots, 9$ добијамо управо бројеве наведене на почетку.

3. Докажимо најпре да се сваки позитиван рационалан број не већи од 1 може приказати као збир неколико различитих рационалних бројева који сви имају бројилац једнак 1. Нека је задат рационалан број $\frac{x}{y}$, где су x и y узајамно прости и важи $x \leqslant y$. Радићемо индукцијом по x. Уколико је $x = 1$, нема шта да се доказује. Посматрајмо сада највећи рационалан број с бројиоцем једнаким 1, притом не већи од $\frac{x}{y}$; то је број $\frac{1}{\lceil \frac{y}{x} \rceil}$, и можемо записати

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{\lceil \frac{y}{x} \rceil} + \left(\frac{x}{y} - \frac{1}{\lceil \frac{y}{x} \rceil}\right) = \frac{1}{\lceil \frac{y}{x} \rceil} + \frac{x\lceil \frac{y}{x} \rceil - y}{y\lceil \frac{y}{x} \rceil} = \frac{1}{\lceil \frac{y}{x} \rceil} + \frac{(-y) \bmod x}{y\lceil \frac{y}{x} \rceil}.$$

Бројилац разломка $\frac{(-y) \bmod x}{y\lceil \frac{y}{x} \rceil}$ мањи је од x, па се, према индуктивној хипотези, овај разломак може даље представити као тражена сума. Како је овај разломак притом строго мањи од $\frac{1}{\lceil \frac{y}{x} \rceil}$ (уколико би важило супротно, имали бисмо $\frac{x}{y} - \frac{1}{\lceil \frac{y}{x} \rceil} \geqslant \frac{1}{\lceil \frac{y}{x} \rceil}$, тј. $\frac{x}{y} \geqslant \frac{2}{\lceil \frac{y}{x} \rceil} > \frac{1}{\lceil \frac{y}{x} \rceil - 1}$, а ово је у контрадикцији с максималношћу разломка $\frac{1}{\lceil \frac{y}{x} \rceil}$), међу добијеним сабирцима се не јавља $\frac{1}{\lceil \frac{y}{x} \rceil}$, па имамо и тражено представљање разломка $\frac{x}{y}$.

Сада доказујемо да се и рационални бројеви већи од 1 могу представити у облику описаног збира. Нека је задат рационалан број r већи од 1. Пошто важи $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$, можемо одабрати такав број $m \in \mathbb{N}$ за који важи $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i} < r$ али $\sum_{i=1}^{m+1} \frac{1}{i} > r$. Запишимо

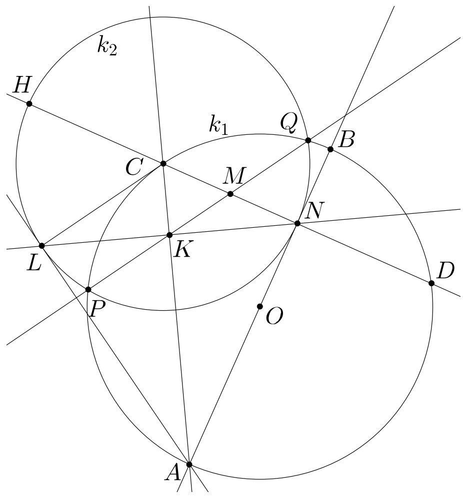
$$r = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i} + \left(r - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i}\right).$$

Како важи $r - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i} < \frac{1}{m+1} < 1$, број $r - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i}$ можемо представити у облику суме посматраног облика, и притом ће имениоци свих добијених сабирака бити већи од $m+1$. Према томе, преко горње једнакости добијамо тражено представљање броја r.

Вратимо се сада на постављени задатак. Да бисмо добили на табли број q, довољно је да рационалан број $\frac{1}{q}$ представимо у облику суме $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$ где $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, и потом нам брисање с табле бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$ омогућује да уместо њих напишемо управо број q (друга од две могућности дозвољене у поставци даје управо резултат $\frac{1}{\frac{1}{q}} = q$). Тиме је задатак решен. (Приметимо да смо заправо доказали и више него што је тражено: постављени циљ можемо обавити у само једном кораку.)

4. Нека права CN поново сече кружницу k_1 у тачки D и кружницу k_2 у тачки H. Тада важи $DN = NC = CH$. Тачка M пресека правих PQ и CN има једнаку потенцију у односу на k_1 и k_2, па следи $CN^2 - MN^2 = CM \cdot MD = NM \cdot MH = CN^2 - CM^2$, што значи да је M средиште дужи CN. Даље, како важи $AK \cdot KC = PK \cdot KQ = NK \cdot KT$, тачке A, N, C, L леже на истој кружници, па добијамо $\measuredangle ALC = \measuredangle ANC = 90°$. Следи да је AL тангента на кружницу k_2, па закључујемо да је $ANCL$ делтоид, одакле следи $AC \perp NL$ и $MN = MC = MK$.

Сада имамо $\measuredangle LAK = \measuredangle KNM = \measuredangle NKM = \measuredangle LKP$, па KP лежи на висини троугла AKL, тј. $KP \perp AL$.



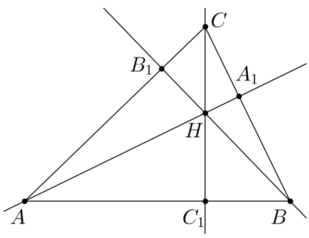
Ок 2015 4А 4

5. Такав низ постоји. Дефинисаћемо га рекурзивно на следећи начин: нека је $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{2n+1} = 2a_{2n}$ и $a_{2n+2} = a_{2n+1} + r_n$, где је r_n најмањи природан број који се не може написати у облику $a_i - a_j$ за неке $i, j \leqslant 2n+1$. Из саме конструкције следи да се сваки природан број може представити у облику $a_i - a_j$ за неке $i, j \in \mathbb{N}$. Докажимо још да је овакво представљање јединствено. Претпоставимо супротно: нека је за неке h, k, l, m за које важи $k > h$ и $m > l$ испуњена једнакост $a_k - a_h = a_m - a_l$; без умањења општости, можемо претпоставити још $m > k$. Уколико је m непаран број, рецимо $m = 2n+1$, тада имамо $a_{2n+1} = a_m = a_l + a_k - a_h < a_l + a_k \leqslant 2a_{m-1} = 2a_{2n} = a_{2n+1}$, контрадикција. Нека је сада

m паран број, рецимо $m = 2n + 2$. Уколико важи $l = m - 1 = 2n + 1$, тада имамо $a_m - a_l = a_{2n+2} - a_{2n+1} = r_n$, али тада важи и $r_n = a_k - a_h$ где је притом $h < k \leqslant m - 1 = 2n + 1$, што је у контрадикцији с одабиром r_n. Уколико важи $k = 2n + 1$, тада слично као малопре имамо $a_m - a_k = r_n$ али одатле и $r_n = a_l - a_h$ (због $a_m - a_k = a_l - a_h$), контрадикција. Најзад, уколико важи $l < 2n+1$ и $k < 2n+1$, тада имамо $a_{2n+2} = a_m = a_l + a_k - a_h < a_l + a_k \leqslant a_{2n} + a_{2n} = a_{2n+1}$, што је опет контрадикција, чиме је доказ завршен.

Први разред – Б категорија

1. У скупу $A \cap B$ налазе се они елементи који припадају и скупу A и скупу B, а такав је само елемент 1, па важи $A \cap B = \{1\}$ (приметити да, рецимо, елемент $\{1\}$ није заједнички за скупове A и B, јер он припада скупу B али не и скупу A). Слично, према дефиницији уније и разлике скупова, добијамо $A \cup B = \{1, 2, \{1\}, \{1, 2\}\}$, $A \setminus B = \{2\}$ и $B \setminus A = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$. (Тангента 73, стр. 33, зад. I.1.)



Ок 2015 1Б 2

2. Израчунавамо $\measuredangle B_1HC_1 = 360^\circ - \measuredangle A_1HC_1 - \measuredangle A_1HB_1 = 136^\circ$. Како збир углова четвороугла AC_1HB_1 износи 360° а његови углови код темена C_1 и B_1 износе по 90°, добијамо $\measuredangle BAC = \measuredangle C_1AB_1 = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \measuredangle B_1HC_1 = 44^\circ$. (Тангента 70, стр. 29, зад. I.2.)

3. Нека је a^2 број који се добија брисањем последње две цифре броја n. Дакле, $n = 100a^2 + b = c^2$ (где важи $0 < b < 100$), одакле добијамо $0 < b = c^2 - 100a^2 = (c - 10a)(c + 10a) < 100$. Имамо неједнакости $c > 10a$ и $c + 10a < 100$, па из њих добијамо $100 > c + 10a > 20a$, тј. $a < 5$. Како највећој могућој вредности броја n одговара највећа могућа вредност броја a, закључујемо $a = 4$. Знамо да важи $c > 10a = 40$. Уколико би важило $c \geqslant 42$, добили бисмо $b = (c - 10a)(c + 10a) \geqslant 2 \cdot 82 = 164$, контрадикција са $b < 100$. Као једина могућност остаје $c = 41$. Тада имамо $n = 41^2 = 1681$ (и брисањем последње две цифре заиста остаје $16 = 4^2$).

4. Пошто важи $6! = 720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1$, напишимо $x = 2^{a_1}3^{b_1}5^{c_1}$ и $y = 2^{a_2}3^{b_2}5^{c_2}$, где се услов из поставке своди на $\max\{a_1, a_2\} = 4$, $\max\{b_1, b_2\} = 2$ и $\max\{c_1, c_2\} = 1$. Дакле, парови (a_1, a_2), (b_1, b_2) и (c_1, c_2) редом могу да се одаберу на 9, 5 и 3 начина (што директно пребрајамо). Према томе, одговор је $9 \cdot 5 \cdot 3 = 135$.

5. Посматрајмо све подскупове бројева записаних на табли, рачунајући и празан скуп. Њих има 2^n. По Дирихлеовом принципу, постоје бар два од ових подскупова, рецимо A и B, такви да сума елемената скупа A и сума елемената скупа B имају исти остатак при дељењу са $2^n - 3$. Испред бројева који се налазе у скупу A а не налазе се у B напишемо знак „+“, испред бројева који се налазе у скупу B а не налазе се у A напишемо знак „−“, а све остале бројеве обришемо с табле. Вредност израза добијеног на тај начин једнака је суми бројева из скупа A умањеној за суму бројева из скупа B (заиста, приметимо да се приликом рачунања разлике ове две суме испотиру они бројеви који се налазе и у скупу A и у скупу B, будући да они учествују у обе суме, а тиме нам остаје управо израз добијен на табли); пошто ове суме дају исти остатак при дељењу са $2^n - 3$, њихова разлика дељива је са $2^n - 3$, чиме је доказ завршен.

Други разред – Б категорија

1. Постављена једначина еквивалентна је са

$$\frac{x-a-2b}{x-a} = \frac{a^2-b^2}{(x-a)^2},$$

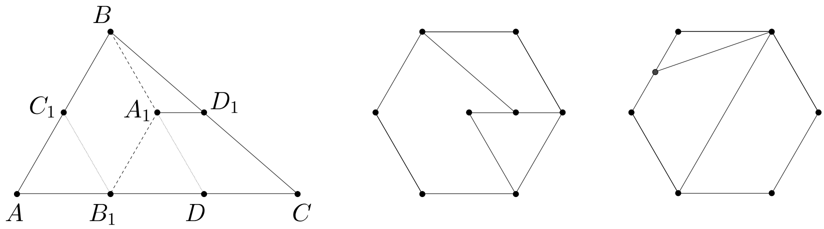
а ово се даље своди на

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{a^2-b^2}{(x-a)^2} - \frac{x-a-2b}{x-a} = \frac{a^2-b^2-(x-a-2b)(x-a)}{(x-a)^2} \\ &= \frac{-b^2-x^2+2ax+2xb-2ab}{(x-a)^2} = \frac{2a(x-b)-x(x-b)+b(x-b)}{(x-a)^2} \\ &= \frac{(x-b)(-x+2a+b)}{(x-a)^2}. \end{aligned}$$

Према томе, решења су $x = b$ или $x = 2a + b$, уз услов $x \neq a$. (Тангента 70, стр. 29, зад. II.1.)

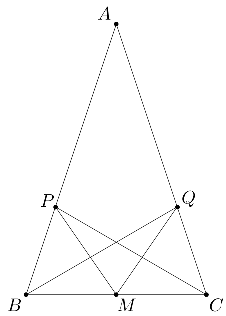
2. *Прво решење.* Могуће је. На страници AC уочимо тачку D такву да важи $AD = AB = 2x$. Нека су A_1, B_1, C_1 и D_1 средишта дужи BD, DA, AB и BC, редом, као на слици лево. Од једнакостраничног $\triangle AC_1B_1$, трапеза DCD_1A_1 и неконвексног шестоугла $D_1BC_1B_1DA_1$ можемо саставити правилан шестоугао као на слици у средини.

Друго решење. Уочимо исте тачке као у претходном решењу. Од $\triangle A_1BD_1$, трапеза $B_1CD_1A_1$ и трапеза A_1BAB_1 можемо саставити правилан шестоугао као на слици десно.



Ок 2015 2Б 2

3. За $c = 2$ не постоје одговарајући a и b. За $c = 3$ једина могућност је $a = 3$ и $b = 5$ (или обратно), а тада добијамо $ab + 34 = 49$, што јесте сложен број. Претпоставимо сада да важи $c > 3$. Како је c прост број, важи $c = 6k \pm 1$. Тада $6 \mid c^2 - 1 = a + b$. Немогуће је $a = 2$ (јер би тада b био паран, тј. једнак 2, а ово не одговара услову), као ни $a = 3$ (јер би тада и b био дељив са 3, тј. једнак 3, а ни ово не одговара услову). Следи да је један од бројева a и b једнак $6l+1$ а други $6m-1$. Тада важи $ab+34 = (6l+1)(6m-1) + 34 = 36lm - 6l + 6m + 33$, тј. збир $ab + 34$ дељив је са 3, па је сложен.



Ок 2015 2Б 4

4. Пошто важи $\measuredangle MBP = \measuredangle MCQ$, $\measuredangle BMP = \measuredangle CMQ$ и $BM = CM$, по ставу УСУ следи $\triangle MBP \cong \triangle MCQ$, а одатле добијамо $BP = CQ$. Сада по ставу СУС имамо $\triangle BCQ \cong \triangle CBP$, а одатле следи $BQ = CP$. (Тангента 70, стр. 29, зад. I.4.)

5	4	3	2	1	0	број начина
6					1	7
5	1			1		$21 \cdot 2 = 42$
5		1	1			$21 \cdot 2 = 42$
4	2		1			$35 \cdot 3 = 105$
4	1	2				$35 \cdot 3 = 105$
3	3	1				$35 \cdot 4 = 140$
2	5					21
		укупно:				462

5. У приложеној таблици приказане су све могуће комбинације како је могуће остварити 30 бодова на овом такмичењу (у сваком реду приказана је по једна могућност у зависности од тога на колико задатака је ученик остварио 5, 4, 3, 2, 1 и 0 бодова). Пошто важи $462 < 500$, по Дирихлеовом принципу морају постојати бар 2 ученика са истим распоредом поена по задацима.

Трећи разред – Б категорија

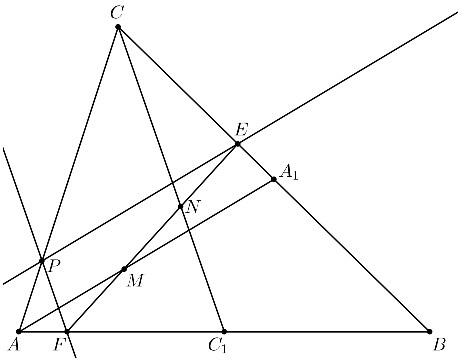
1. Запишимо $t = \lfloor t \rfloor + r$, при чему важи $0 \leqslant r < 1$. Уколико важи $r < \frac{1}{3}$, тада имамо $\lfloor t \rfloor = \lfloor t + \frac{1}{3} \rfloor = \lfloor t + \frac{2}{3} \rfloor$, тј. лева страна посматране једнакости износи $3\lfloor t \rfloor$, док десна износи $\lfloor 3(\lfloor t \rfloor + r) \rfloor = \lfloor 3\lfloor t \rfloor + 3r \rfloor = 3\lfloor t \rfloor$ (будући да имамо $0 \leqslant 3r < 1$), па је у овом случају једнакост доказана. Уколико важи $\frac{1}{3} \leqslant r < \frac{2}{3}$, тада имамо $\lfloor t \rfloor = \lfloor t + \frac{1}{3} \rfloor$ и $\lfloor t + \frac{2}{3} \rfloor = \lfloor t \rfloor + 1$, тј. лева страна посматране једнакости износи $3\lfloor t \rfloor + 1$, док десна износи $\lfloor 3(\lfloor t \rfloor + r) \rfloor = \lfloor 3\lfloor t \rfloor + 3r \rfloor = 3\lfloor t \rfloor + 1$ (будући да имамо $1 \leqslant 3r < 2$), па је и у овом случају једнакост доказана. Најзад, уколико важи $\frac{2}{3} \leqslant r < 1$, тада имамо $\lfloor t + \frac{1}{3} \rfloor = \lfloor t + \frac{2}{3} \rfloor = \lfloor t \rfloor + 1$, тј. лева страна посматране једнакости износи $3\lfloor t \rfloor + 2$, док десна износи $\lfloor 3(\lfloor t \rfloor + r) \rfloor = \lfloor 3\lfloor t \rfloor + 3r \rfloor = 3\lfloor t \rfloor + 2$ (будући да имамо $2 \leqslant 3r < 3$), чиме је доказ комплетиран. (Тангента 71, стр. 37, зад. I.4(а).)

2. Пошто важи

$$(\sin x + \sqrt{3}\cos x)\sin 4x = 2\left(\frac{\sin x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)\sin 4x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin 4x,$$

постављена једначина еквивалентна је са $\sin(x + \frac{\pi}{3})\sin 4x = 1$. Како за све α важи $|\sin\alpha| \leqslant 1$, остају само две могућности: i) $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = 1$ и истовремено $\sin 4x = 1$, или ii) $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = -1$ и истовремено $\sin 4x = -1$. У првом случају добијамо $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ и истовремено $x = \frac{\pi}{8} + \frac{l\pi}{2}$, што очито није могуће. У другом случају добијамо $x = \frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi$ и истовремено $x = \frac{\pi}{8} + \frac{(2l+1)\pi}{4}$, што очито опет није могуће. Дакле, ова једначина нема решења.

3. После броја 2015 у овом низу следи број 221, а после њега 26. Након тога сви наредни чланови овог низа су једнаки 26, јер важи $4 \cdot 6 + 2 = 26$. Дакле, након броја 2015 неће се појавити прост број. Докажимо да су сви чланови низа пре броја 2015 дељиви са 13. Посматрајмо неки број у низу n. Нека је b његова цифра јединица, а a број који настаје када броју n избришемо последњу цифру. Тада је после броја $n = 10a + b$ следећи члан низа $m = a + 4b = \frac{10a+40b}{10} = \frac{n+39b}{10}$. Уколико $13 \mid m$, тада $13 \mid 10m$, и даље добијамо $13 \mid 10m - 39b = n$. Другим речима, уколико је број m у низу дељив са 13, тада је и његов претходник дељив са 13. Како је 2015 дељиво са 13, добијамо да су и сви претходници дељиви са 13. Остаје једино проверити може ли се број 13 појавити у низу. То је немогуће јер би у том случају следећи члан био $4 \cdot 3 + 1 = 13$, па би и сви наредни чланови били једнаки 13, те се у низу никада не би појавио број 2015. Дакле, сви чланови пре 2015 дељиви су са 13 а нису једнаки 13, па не могу бити прости.



Ок 2015 3Б 4

4. Нека је $PC = \lambda AC$, $PA = (1-\lambda)AC$, где важи $0 < \lambda < 1$. Из Талесове теореме добијамо $AF = (1-\lambda)AC_1 = \frac{1-\lambda}{2}AB$ и $CE = \lambda CA_1 = \frac{\lambda}{2}CB$. Уведимо векторе $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{c}$. Добијамо $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1+\lambda}{2}\overrightarrow{a} - (1-\frac{\lambda}{2})\overrightarrow{c}$. Даље, нека су N и M пресечне тачке EF са CC_1 и AA_1, редом. Тада важи $\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{EC} + \alpha\overrightarrow{CC_1}$, где је α неки реални коефицијент, а како важи $\overrightarrow{CC_1} = \frac{\overrightarrow{a}}{2} - \overrightarrow{c}$, добијамо $\overrightarrow{EN} = \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{c} + \alpha(\frac{\overrightarrow{a}}{2} - \overrightarrow{c}) = \frac{\alpha\overrightarrow{a}}{2} - (\alpha - \frac{\lambda}{2})\overrightarrow{c}$. Вектори $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{EN}$ су колинеарни, па су им одговарајући коефицијенти уз $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{c}$ сразмерни, тј. важи $\frac{1+\lambda}{\alpha} = \frac{2-\lambda}{2\alpha-\lambda} = k$, из чега се добија $3\lambda\alpha = \lambda + \lambda^2$, тј. $\alpha = \frac{1+\lambda}{3}$, а одатле следи $k = 3$, тј. $\overrightarrow{EF} = 3\overrightarrow{EN}$. Аналогно добијамо $\overrightarrow{FE} = 3\overrightarrow{FM}$, чиме је тврђење доказано.

5. Раздвајамо два случаја: i) највећа цифра је 9 а најмања 1; ii) највећа цифра је 8 а најмања 0. (То су једине две могућности.) У првом случају јединица може доћи на било коју од 6 позиција, а потом деветка на било коју од преосталих 5 позиција. Даље, на прву од преостале четири позиције може доћи било која од цифара $2, 3, \ldots, 8$, што је 7 могућности, за наредну позицију имамо 6 могућности, за позицију после ње 5 могућности и за последњу преосталу позицију 4 могућности. Тиме смо набројали укупно $6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 25\,200$ бројева у првом случају. Посматрајмо сада други случај. Постоји 5 могућих позиција на којима се може наћи нула (јер нула не може бити водећа цифра), а након постављања нуле имамо 5 могућих позиција за осмицу. Даље резонујемо слично као у претходном случају, и израчунавамо да у овом случају имамо укупно $5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 21\,000$ бројева. Дакле, решење задатка је $25\,200 + 21\,000 = 46\,200$ бројева. (Тангента 72, стр. 33, зад. 13.)

Четврти разред – Б категорија

1. Посматрана једнакост еквивалентна је са $\frac{1}{yz} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} = \frac{1}{2015}$. Из неједнакости аритметичке и хармонијске средине за бројеве xy, yz и zx имамо

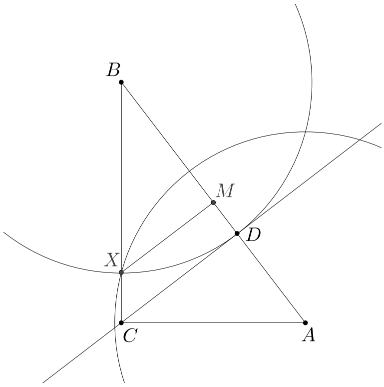
$$\frac{xy + yz + zx}{3} \geqslant \frac{3}{\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{zy}} = \frac{3}{\frac{1}{2015}} = 6045,$$

тј. $xy + yz + zx \geqslant 18\,135$. Минимум се достиже за $xz = xy = yz = 6045$, тј. за $x = y = z = \sqrt{6045}$.

2. Пошто важи $375 = 3 \cdot 125$, следи да је n дељив са 375 ако и само ако је дељив са 3 и са 125. Да би број био дељив са 125, потребно је и довољно да му троцифрени завршетак буде дељив са 125; према томе, $\overline{a_7a_8a_9} \in \{125, 375, 625, 875\}$. Прве две могућности отпадају јер није испуњен услов $a_7 \geqslant a_8$, па остају последње две. Размотримо прво случај $\overline{a_7a_8a_9} = 875$. Једине могућности за $\overline{a_2a_3a_4a_5a_6}$ такве да буде испуњен услов $a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots \geqslant a_8$ јесу 88888, 98888, 99888, 99988, 99998 и 99999, тј. шест могућности. Преостаје још да пребројимо на колико начина можемо одабрати цифру a_1. У зависности од остатка који збир $a_2 + a_3 + \cdots + a_9$ даје при дељењу са 3, за цифру a_1 можемо изабрати неку од цифара из скупа $\{3, 6, 9\}$, односно $\{2, 5, 8\}$, односно $\{1, 4, 7\}$ (цифру a_1 бирамо тако да збир свих цифара добијеног броја буде дељив са 3); дакле, увек имамо избор између тачно три могућности за цифру a_1, па можемо закључити да у случају $\overline{a_7a_8a_9} = 875$ имамо $6 \cdot 3 = 18$ могућих вредности за n.

Посматрајмо сада случај $\overline{a_7a_8a_9} = 625$. Пребројмо колико постоји могућности за $\overline{a_2a_3a_4a_5a_6}$. Свака од ових пет цифара јесте једна од цифара 6, 7, 8 или 9. Приметимо да било какав одабир укупно пет од ових цифара једнозначно одређује $\overline{a_2a_3a_4a_5a_6}$, будући да је поредак задат. Користећи ово запажање, сада рачунамо: уколико бирамо само једну цифру пет пута, ту имамо 4 могућности; уколико бирамо две цифре, њих можемо изабрати на 6 начина, а оне могу бити расподељене на 4 начина ($1+4$, $2+3$, $3+2$ и $4+1$), што даје $6 \cdot 4 = 24$ могућности; уколико бирамо три цифре, њих можемо изабрати на 4 начина, а оне могу бити расподељене на 6 начина ($1+1+3$, $1+3+1$, $3+1+1$, $1+2+2$, $1+2+1$ и $2+1+1$), што даје $4 \cdot 6 = 24$ могућности; најзад, уколико све четири цифре буду узете, оне могу бити расподељене на 4 начина (једна ће бити узета два пута а остале по једном). Тиме смо набројали 56 могућности за $\overline{a_2a_3a_4a_5a_6}$. Као и раније, за сваку од њих цифра a_1 може бити одабрана на тачно 3 начина. Према томе, у овом случају имамо укупно $56 \cdot 3 = 168$ могућих вредности за n, те је решење задатка $18 + 168 = 186$. (Тангента 72, стр. 36, зад. II.18.)

3. Означимо са M средиште дужи AB, а са X пресечну тачку посматраних кружница. Тада је $\triangle BMX$ правоугли ($XM \perp AB$ јер је заједничка тетива кружница које се секу нормална на дуж која спаја њихове центре) и важи $\triangle BMX \sim \triangle BCA$, одакле добијамо $\frac{AB}{BC} = \frac{BX}{BM} = 2\frac{BD}{AB}$, тј. $AB^2 = 2BC \cdot BD = 2BC \cdot \frac{BC^2}{AB}$ (последња једнакост лако следи из $\triangle BDC \sim \triangle BCA$), а одавде добијамо $\frac{AB^3}{BC^3} = 2$, тј. $\frac{AB}{BC} = \sqrt[3]{2}$. Из



Ок 2015 4Б 3

$\triangle BDC \sim \triangle BCA$ коначно добијамо $\frac{DB}{BC} = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

4. Нека је уочен ваљак полупречника основице r и висине h, чија је запремина једнака задатој константи V. Из једнакости $V = r^2\pi h$ добијамо $h = \frac{V}{r^2\pi}$. Површина овог ваљка износи $2r^2\pi + 2r\pi h = 2r^2\pi + 2r\pi\frac{V}{r^2\pi} = 2r^2\pi + \frac{2V}{r}$. Посматрајмо овај израз као функцију по r и потражимо први извод. Први извод износи $4r\pi - \frac{2V}{r^2}$. Први извод једнак је нули када важи $2r^3\pi = V$, позитиван је када важи $2r^3\pi > V$ а негативан када важи $2r^3\pi < V$. Дакле, посматрана површина је минимална када важи $2r^3\pi = V$, и тада имамо $h = \frac{V}{r^2\pi} = \frac{2r^3\pi}{r^2\pi} = 2r$, што је и требало доказати. (Тангента 70, стр. 32, зад. IV.3.)

5. Прво ћемо показати да се у броју $(2^n)!$ прост чинилац 2 појављује на степен $2^n - 1$. И заиста, међу свим бројевима од 1 до 2^n бројева дељивих са 2 има 2^{n-1}, бројева дељивих са 4 има 2^{n-2}, ..., дељивих са 2^n има 1. Према томе, у броју $(2^n)!$ прост чинилац 2 појављује се на степен $2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 = 2^n - 1$, што смо и тврдили. Одатле сада следи да се у броју $(2^n - 1)!$ прост чинилац 2 појављује на степен $2^n - 1 - n$. Према томе, уколико узмемо $k = 2^n - 1$ где је n произвољан број већи од 2015, тада се у броју $k! = (2^n - 1)!$ прост чинилац 2 појављује на степен $2^n - 1 - n = k - n$, а пошто важи $k - n < k - 2015$, добијамо $2^{k-2015} \nmid k!$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28. 2. 2015.

Први разред – А категорија

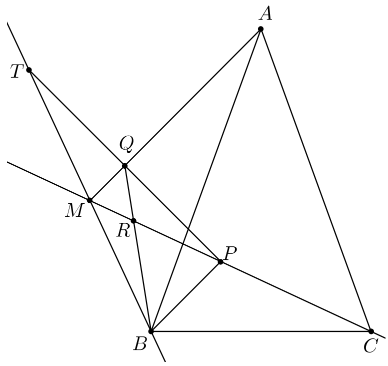
1. Ради краћег записа, нека је $d = \text{НЗД}(a, b-1)$, $e = \text{НЗД}(b, c-1)$ и $f = \text{НЗД}(c, a-1)$.

Како $d \mid a$, $e \mid b$ и $f \mid c$, производ def дели abc. Такође, $d \mid b-1$, $e \mid c-1$ и $f \mid a-1$, тако да def дели $(a-1)(b-1)(c-1)$. Дакле, def дели $abc - (a-1)(b-1)(c-1) = ab + bc + ca - a - b - c + 1$, одакле следи тражена неједнакост.

С друге стране, узмимо $(a, b, c) = (n, n+1, n+2)$. Како је $def = n(n+1) \cdot \text{НЗД}(n+2, n-1) = n(n+1) \cdot \text{НЗД}(n+2, 3)$ и $ab + bc + ca - a - b - c + 1 = 3n(n+1)$, једнакост важи ако $3 \mid n+2$.

2. Нека је T тачка симетрична тачки P у односу на Q, а M пресек правих CP и BT. Тачка R је тежиште $\triangle BPT$, па је довољно доказати да је PM тежишна дуж тог троугла.

По услову задатка је $\measuredangle MPB = 180^\circ - \measuredangle BPC = \measuredangle ABC$, па је $\measuredangle MCB = \measuredangle MPB - \measuredangle PBC = \measuredangle ABP = \measuredangle MAB$ (последња једнакост следи због $MA \parallel BP$). Следи да је четвороугао $MACB$ тетиван, па је $\measuredangle MBP = \measuredangle MBA + \measuredangle ABP = \measuredangle MCA + \measuredangle MCB = \measuredangle ACB = \measuredangle MPB$, тј. $MP = MB$. С друге стране, M лежи на симетрали дужи PT, па је такође $MP = MT$. Према томе, M је центар описане кружнице правоуглог $\triangle BPT$, те је M средиште дужи BT.



Др 2015 1А 2

3. a) Са једном или две алке није могуће разликовати кључеве због симетрије. Међутим, циљ можемо постићи са три алке: довољно је да на једну алку алку накачимо две алке једну до друге, и то једну са једним кључем и другу без кључева, а затим све остале кључеве закачимо за полазну алку.

b) За $n > 2$ довољна је једна алка: сви кључеви су на истој алци, али је један кључ обрнут, што даје оријентацију алке и почетну тачку бројања кључева. За $n = 2$ једна алка је недовољна због симетрије, док са две постижемо циљ на тај начин што на полазну алку закачимо другу алку и два исто оријентисана кључа

4. Постоји. Потражићемо тражени полином у облику

$$P(x) = \frac{x^m + x^n}{2} \text{ за } m, n \in \mathbb{N},\ m > n > 1.$$

Имамо $\frac{P(a)-P(b)}{a-b} = \frac{1}{2}\left(\frac{a^m-b^m}{a-b} + \frac{a^n-b^n}{a-b}\right)$, при чему је

$$\frac{a^k - b^k}{a-b} = a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1} \equiv a + b + (k-2)ab \pmod 2$$

за сваки цео број $k \geqslant 2$. Зато је $2 \cdot \frac{P(a)-P(b)}{a-b} \equiv (a+b+(m-2)ab) + (a+b+(n-2)ab) \equiv (m+n)ab \pmod 2$.

Специјално, ако су m и n исте парности и већи од 1, из претходног следи да је $2 \cdot \frac{P(a)-P(b)}{a-b}$ паран број, тј. $\frac{P(a)-P(b)}{a-b}$ је цео број за све целе a, b, $a \neq b$.

Други разред – А категорија

1. Да би посматрани изрази били дефинисани, мора да важи $x \geqslant 0$. Из услова задатка имамо $x-\sqrt{x} < x-\sqrt{x-\sqrt{x}} \leqslant 1$, па следи

$$\sqrt{x+\sqrt{x-\sqrt{x}}} \leqslant \sqrt{1+2\sqrt{x-\sqrt{x}}} < \sqrt{1+2} = \sqrt{3} < 2.$$

Напомена. Показује се да је под датим условима $\max\sqrt{x+\sqrt{x-\sqrt{x}}} \approx 1{,}4526$.

2. Посматрајмо бројеве облика

$$m_i = 10^i + 1 = 1\underbrace{00\cdots00}_{i-1}1.$$

Очито, $\mathrm{obrt}(m_i) = m_i$. Даље, имамо $m_i^2 = 10^{2i} + 2\cdot 10^i + 1$, па су, за $i \geqslant 1$, све цифре у децималном запису броја m_i^2 једнаке 0, 1 или 2, и важи $\mathrm{obrt}(m_i^2) = m_i^2$. Но, испоставља се да ниједан од њих није дељив са 41.

Разрађујући горњу идеју, посматрајмо бројеве облика

$$n_i = 10^{2i+2} + 111\cdot 10^i + 1 = 1\underbrace{00\cdots00}_{i-1}111\underbrace{00\cdots00}_{i-1}1.$$

Очито, $\mathrm{obrt}(n_i) = n_i$. Даље, имамо

$$n_i^2 = 10^{4i+4} + 222\cdot 10^{3i+2} + 12521\cdot 10^{2i} + 222\cdot 10^i + 1,$$

па су, за $i \geqslant 3$, све цифре у децималном запису броја n_i^2 једнаке 0, 1, 2 или 5, и важи $\mathrm{obrt}(n_i^2) = n_i^2$. Како $41 \mid n_1 = 11111$ и $10^5 \equiv 1 \pmod{41}$, добијамо $n_{5i+1} \equiv n_1 \equiv 0 \pmod{41}$, чиме је доказано да тражених бројева има бесконачно много.

Напомена 1. Горњу конструкцију је могуће уопштити. Наиме, за све бројеве облика $n_{k,l} = 10^{2k+2l} + 10^{k+2l} + 10^{k+l} + 10^k + 1$ такве да $\frac{k}{l} \notin \{\frac{1}{2}, 1, 2\}$ важи $\mathrm{obrt}(n_{k,l}) = n_{k,l}$ и $\mathrm{obrt}(n_{k,l}^2) = n_{k,l}^2$. Дакле, довољно је међу њима потражити оне који су дељиви са 41, а може се доказати да су такви сви за које важи $k \equiv l \not\equiv 0 \pmod 5$ или $(k,l) \bmod 5 \in \{(1,3),(2,1),(3,4),(4,2)\}$.

Напомена 2. Може се показати да сваки природан број дељив са 41 има збир цифара бар 5. У том смислу су конструисани примери и најједноставнији могући.

3. Одговор: могуће је за све n који нису облика $8k+3$ ($k \in \mathbb{N}_0$).

Редослед потеза је небитан, тако да је довољно извршити операцију на сваком пољу највише једном. Да би жетон на неком пољу имао белу страну горе, потребно је да број његових суседа (тј. поља с којима дели теме) на којима је извршена операција буде непаран. Задатак се своди на бојење неког броја поља тако да свако поље (обојено или не) има непаран број обојених суседа.

Јасно је да су боје у свакој колони, почев од друге, једнозначно одређене бојама у претходним колонама. (Заиста, уколико необојена поља обележимо бројем 0 а обојена бројем 1, и ако су ове вредности у тренутно посматраној колони једнаке x, y и z, тада треба да по модулу 2 буду испуњене следеће једнакости: $x+y=a$, $x+y+z=b$ и $y+z=c$, где су a, b и c константе чије вредности имамо из распореда боја у претходним колонама; овај систем има јединствено решење по модулу 2.) То значи да је бојење целе таблице потпуно одређено првом колоном. Тако у зависности од бојења прве колоне добијамо (до на симетрију и цикличне помераје) следеће периодичне низове колона са периодом 8:

(1)

		•	•	•	•		
	•	•			•	•	
		•	•	•	•		

,

(2)

•			•		•	•	
	•	•			•	•	
•			•		•	•	

,

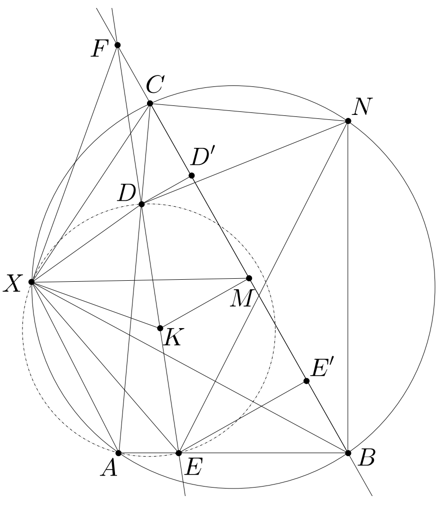
(3)

•	•	•	•	•		•	
		•				•	
	•		•				

.

Тражено бојење табле одговара поднизу једног од ових низова у коме су нулта и $(n+1)$-ва колона празне. Тако нам низ (1) даје решења за $n \equiv 0, 1, 6, 7 \pmod 8$, низ (2) за $n \equiv 0, 2, 4, 7 \pmod 8$, и низ (3) за $n \equiv 0, 1, 5, 7 \pmod 8$. Према томе, решење постоји кад год је $n \not\equiv 3 \pmod 8$.

4. Означимо са M средиште странице BC. Ако са D' и E' означимо редом пројекције тачака D и E на праву BC, онда је $BE' = BE\cos\beta = BN\operatorname{tg}x\cos\beta$ и аналогно $CD' = CN\operatorname{tg}x\cos\gamma$, где је $x = \measuredangle BNE = \measuredangle CND$, па како је по синусној теореми $\frac{BN}{CN} = \frac{\sin(90^\circ-\beta)}{\sin(90^\circ-\gamma)} = \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}$, следи $BE' = CD'$ и одатле $MD' = ME'$. Према томе, пројекција тачке K на праву CD је тачка M.



Др 2015 2А 4

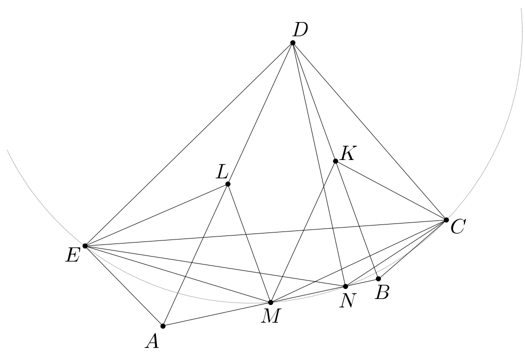
Како је $\measuredangle XED = \measuredangle XAC = \measuredangle XBC$ (претпостављајући да је X на краћем луку AC) и слично $\measuredangle XDE = \measuredangle XCB$, $\triangle XBC$ и $\triangle XED$ су слични. Зато су и $\triangle XKD$ и $\triangle XMC$ слични, па је $\measuredangle XKF =$

$\measuredangle XKD = \measuredangle XMC = \measuredangle XMF$. Следи да су тачке X, K, M и F концикличне, па је $\measuredangle KXF = \measuredangle KMF = 90^\circ$.

Трећи разред - А категорија

1. Одговор је *да*. Претпоставимо супротно, тј. да за неко n важи $x_n < 20! < x_{n+1}$. Нека је $x_n = 20! - r$. Како је $y_n > r+1$, број x_n је дељив са $r+1$, али $r+1 \nmid r$, одакле следи да $r+1 \nmid x_n + r = 20!$. Сада је $y_n > r > 20$, па НЗС$(1,2,\dots,20) = A \mid x_n$. Али онда $A \mid 20! - x_n = r$, тј. $r \geqslant A$, па НЗС$(1,2,\dots,A) = B \mid x_n$, тако да је $B \leqslant x_n < 20!$. С друге стране, $A = 2^4 \cdot 3^2 \cdots > 110$, па је B дељиво са свим простим бројевима између 20 и 110, а њих је 21. Зато је $B > 20^{21} > 20!$, што је контрадикција.

2. Нека су K и L редом средишта дужи BD и AD. Тада важи $CK = BK = ML$ и $KM = LA = LE$, па како је још $\measuredangle CKM = \measuredangle CKB + \measuredangle BKM = 2\measuredangle CDB + \measuredangle BDA = 2\measuredangle ADE + \measuredangle BDA = \measuredangle ALE + \measuredangle MLA = \measuredangle MLE$, добијамо $\triangle CKM \cong \triangle MLE$ и одатле $MC = ME$.



Др 2015 3А 2

Из тетивности четвороуглова $DNAE$ и $DNBC$ добијамо $\measuredangle ANE = \measuredangle ADE = \measuredangle CDB = \measuredangle CNB$, па је AB спољна симетрала $\measuredangle ENC$. Зато је M тачка пресека спољне симетрале $\measuredangle ENC$ и симетрале дужи EC, па је M средиште лука $\widehat{ENC}$ кружнице описане око $\triangle ENC$.

3. Најпре докажимо индукцијом по k да је игра коначна, тј. да у сваком бесконачном низу $a_1, a_2, \dots$ природних бројева чији су сви прости фактори у $S = \{p_1, \dots, p_k\}$ постоје индекси $i < j$ такви да је $a_i \mid a_j$. За $k = 1$ ово је тривијално. Нека је $k \geqslant 2$. Са $v_i(x)$ ћемо означавати експонент броја p_i у канонској факторизацији броја x. Ако $a_1 \mid a_n$ за неко n, доказ је готов. У супротном, за свако n имамо $v_i(a_n) < v_i(a_1)$ за неко $1 \leqslant i \leqslant k$. За бар једно i ова неједнакост важи бесконачно много пута, одакле следи да, за неке i и m, важи $v_i(a_n) = m$ за бесконачно много бројева n. Нека је $n_1, n_2, \dots$ растући низ свих таквих бројева n. Сви прости фактори бројева $b_j = \frac{a_{n_j}}{p_i^m}$ $(j \in \mathbb{N})$ су у скупу $S \setminus \{p_i\}$. Међутим, по индуктивној претпоставци за $k-1$ постоје индекси $r < s$ такви да $b_r \mid b_s$, а тада такође $a_{n_r} \mid a_{n_s}$. Индукција је завршена.

Вратимо се на задатак. За $k = 1$ Марија одмах побеђује бирајући дати прост број. За $k = 2$, нека су p и q дати прости бројеви. Марија бира pq, након чега су дозвољени само степени бројева p и q. Ако Марко изабере један од бројева p^s или q^s, Марија бира онај други, чиме осигурава победу јер након сваког Марковог потеза може да одигра свој.

Тврђење задатка ће следити ако покажемо да, ако Марко има победничку стратегију за $k = s$, онда Марија има победничку стратегију за $k = s + 1$ и $k = s + 2$.

За $k = s + 1$ Марија почиње избором простог броја $p \in S$. Након овога су дозвољени само бројеви са простим факторима у $S \setminus \{p\}$, при чему Марија игра друга, па побеђује следећи Маркову стратегију за $k = s$.

За $k = s + 2$ Марија почиње избором броја pq, где су $p, q \in S$ прости бројеви. У наредним потезима, кад год Марко одабере један од бројева из пара $\{p^n A, q^n A\}$ за $n \geqslant 1$ и НЗД$(A, pq) = 1$, Марија бира други. С друге стране, ако Марко одабере број који није овог облика (такав број није дељив ни са p ни са q), Марија ће одговорити следећи Маркову стратегију за $k = s$. Играјући по овим правилима она побеђује.

4. Професор није у праву. Ставимо $0 < a < 1$ и $b = a^2$. Број пресечних тачака посматраних графика једнак је броју решења једначине

$$a^x + a^2 = a^{2x} + a, \qquad (*)$$

што се сменом $a^x = t$ своди на $t^2 - a^2 = t - a$. Одавде је $t = a$ или $t = 1 - a$, па једначина $(*)$ за $a \neq \frac{1}{2}$ има тачно два решења: $x = 1$ и $x = \log_a(1 - a)$.

Четврти разред - А категорија

1. Ако је $n = 1007$ и $a = 2$, полином $P(x) = (x^{1007} + 1)^2$ има тачно 1007 различитих нула.

Претпоставимо да за неке n и a полином $P(x)$ има мање од 1007 различитих нула. Како је $\deg P \geqslant 2014$, бар једна нула овог полинома, рецимо z, мора имати вишеструкост бар 3. Тада је z уједно и нула полинома $P'(x)$ и $P''(x)$, тј.

$$naz^{n-1} + 2014z^{2013} = 0$$

и

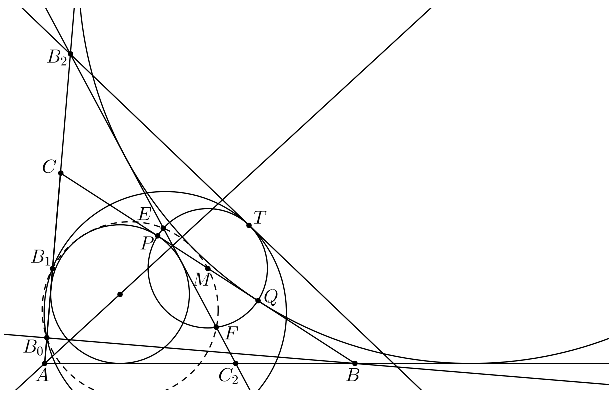
$$n(n-1)az^{n-2} + 2014 \cdot 2013x^{2012} = 0.$$

Како важи $P(0) = 1$, следи $z \neq 0$. Изражавајући a из прве од ове две једначине и уврштајући то у другу добијамо $2014z^{2012}(2014-n) = 0$, што је немогуће с обзиром на $z \neq 0$ и $n \neq 2014$. Овим је задатак решен.

2. Једноставном индукцијом се показује да за свако $k \in \mathbb{N}$ постоји (јединствен) k-тоцифрен број m_k који се састоји од цифара 1 и 2 и дељив је са 2^k. Заиста, $m_1 = 2$, а за $k > 1$ (ако постоји m_{k-1}) тачно један од бројева $\overline{1m_{k-1}} = 10^{k-1} + m_{k-1}$ и $\overline{2m_{k-1}} = 2 \cdot 10^{k-1} + m_{k-1}$ је дељив са 2^k.

Сваки број са збиром цифара 2^k који се завршава са m_k задовољава услове. За фиксирано k број цифара таквог броја може бити било који између $\frac{2^k-k}{3} + k = \frac{2^k+2k}{3}$ и $(2^k - 2k) + k = 2^k - k$ јер збир цифара броја m_k припада интервалу $[k, 2k]$. Овако смо доказали да тражени број постоји за свако n које припада интервалу $[\frac{2^k+2k}{3}, 2^k - k]$ за неко k. Како је $2^k - k \geqslant \frac{2^{k+1}+2(k+1)}{3}$ за $k \geqslant 5$, задатак смо решили за све n осим $n \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 13\}$.

Најзад, за наведене вредности n имамо примере 2, 12, 112, 2312, 112112, 1111112 и 1111111122112.



Др 2015 4А 3

3. *Прво решење.* Нека је k' Ојлерова кружница за $\triangle ABC$. Како је $BQ = CP = \frac{a+b-c}{2}$, где су a, b и c дужине страница (ово је познато тврђење), следи да је средиште странице BC, рецимо M, уједно и средиште дужи PQ, тј. кружница k' пролази кроз центар кружнице k. Посматрајмо инверзију у односу на кружницу k. Како су уписана и споља приписана кружница за $\triangle ABC$ нормалне на кружницу k, оне се посматраном инверзијом пресликавају у себе. Како кружница k' пролази кроз центар кружнице k, и како се она, према Фојербаховој теореми, додирује изнутра са уписаном кружницом а споља са споља приписаном, посматраном инверзијом кружница k' слика се у једну од две заједничке унутрашње тангенте уписане и споља приписане кружнице. Једна таква тангента је права BC, а друга је њена осносиметрична слика у односу на симетралу $\measuredangle A$. Како права BC пролази кроз центар кружнице k, она не може бити тражена слика кружнице k', па је тражена слика управо права B_2C_2 (где је са C_2 означена осносиметрична слика темена C у односу на симетралу $\measuredangle A$). Одатле, ако са E и F означимо пресечне тачке кружница k и k', добијамо да и права B_2C_2 пролази кроз тачке E и F. Посматрањем сада потенције тачке B_2 у односу на кружнице k' и k добијамо $B_2B_1 \cdot B_2B_0 = B_2E \cdot B_2F = B_2T^2$. Но, опет из особина потенције, сада примењених на тачку B_2 и кружницу описану око $\triangle B_0B_1T$, следи да је ово могуће само када кружница описана око $\triangle B_0B_1T$ додирује праву t, што је и требало доказати.

Друго решење. Уз ознаке из првог решења имамо $B_2B_1 = \frac{2c-b}{2}$, $B_2B_0 = B_2A - B_0A = c(1-\cos\alpha) = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2b}$ и $MT = MP = \frac{|c-b|}{2}$. Даље је $BB_2 = 2c\sin\frac{\alpha}{2}$, тј. $BB_2^2 = 2c^2(1-\cos\alpha) = \frac{c(2bc-b^2-c^2+a^2)}{b}$ и $B_2M^2 = \frac{2(c-b)^2+2BB_2^2-a^2}{4} = \frac{2b^3-6b^2c+6bc^2-2c^3-a^2b+2a^2c}{4b}$, и најзад $B_2T^2 = B_2M^2 - MT^2 = \frac{b^3-4b^2c+5bc^2-2c^3-a^2b+2a^2c}{4b} = \frac{(b-2c)(b^2-2bc+c^2-a^2)}{4b} = B_2B_0 \cdot B_2B_1$.

4. Тврђење доказујемо индукцијом. За $n \leqslant 2$ оно се директно проверава. Нека је $n \geqslant 3$ и нека је A једна од тачака на конвексном омотачу датих тачака. Преосталих $2n-1$ тачака ћемо означити са $A_1, A_2, \ldots, A_{2n-1}$ тако да су полуправе $AA_1, AA_2, \ldots, AA_{2n-1}$ поређане у смеру казаљке на сату. Проценимо број могућих одабира дужи које укључују дуж AA_{2i-1} за $i = 1, 2, \ldots, n$. По индуктивној претпоставци, за $i \in \{1, n\}$ преостале тачке се могу спојити дужима на бар по 2^{n-2} начина. За $2 \leqslant i \leqslant n-1$ права AA_{2i-1} дели преостале тачке на скупове са $2(i-1)$ и $2(n-i)$ тачака, и у њима се могу повући дужи на 2^{i-2} и 2^{n-i-1} начина. Према томе, укупан број одабира дужи је бар $2 \cdot 2^{n-2} + \sum_{i=2}^{n-1} 2^{i-2} \cdot 2^{n-i-1} > 2^{n-1}$.

Једнакост из задатка се може достићи само за $n = 1$ (за било које две тачке) и $n = 2$ (за темена конвексног четвороугла).

Напомена. Овако се може доказати да је број могућих одабира дужи бар $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, при чему се једнакост достиже ако су дате тачке темена конвексног $2n$-тоугла.

Први разред – Б категорија

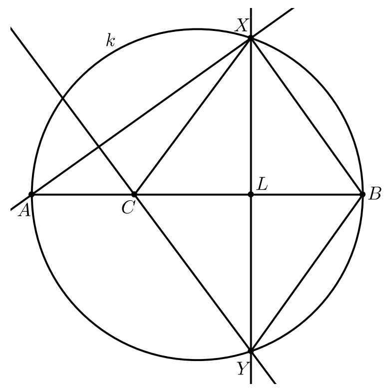
1. Користићемо следеће познато тврђење: ако се природан број n раставља на просте чиниоце као $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, тада је број делилаца броја n једнак

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1).$$

Да бисмо нашли најмањи природан број n за који је овај израз једнак 2015, најпре приметимо да су, будући да важи $2015 = 5\cdot 13\cdot 31$, сви могући начини да се број 2015 запише као производ неколико бројева већих од

1 следећи: $2015 = 403\cdot 5 = 155\cdot 13 = 65\cdot 31 = 31\cdot 13\cdot 5$. Дакле, најмањи број тражен у поставци мора бити један од следећих: 2^{2014}, $2^{402}\cdot 3^4$, $2^{154}\cdot 3^{12}$, $2^{64}\cdot 3^{30}$ или $2^{30}\cdot 3^{12}\cdot 5^4$ (јасно, за просте бројеве у основи бирали смо најмање просте бројеве). Међусобним упоређивањем ових бројева (што се може постићи нпр. посматрањем количника свака два од њих) видимо да је одговор на постављено питање број $2^{30}\cdot 3^{12}\cdot 5^4$.

2. Нека се дужи AB и XY секу у тачки L. По ставу СУС добијамо $\triangle CXL \cong \triangle CYL$ и $\triangle BXL \cong \triangle BYL$, а одатле следи $CX = CY$ и $BX = BY$. Како је AB пречник, следи $\measuredangle AXB = 90°$. Из овог закључка, уз задато $YC \perp XA$, добијамо $CY \parallel BX$, одакле следи $\measuredangle CYL = \measuredangle BXL$; како важи и $\measuredangle CLY = \measuredangle BLX = 90°$ и $XL = YL$, по ставу УСУ следи $\triangle CLY \cong \triangle BLX$. Из те подударности добијемо $BX = CY$. Све заједно, $BY = BX = CY = CX$, па је четвороугао $BYCX$ ромб.



Др 2015 1Б 2

3. У првом мерењу вештак ће на леви тас ваге ставити прави, а са десне стране лажни новчић. Како ће леви тас превагнути, суд ће имати означен један прави и један лажни новчић. У следећем мерењу доказано лажни новчић са десног таса ће придружити доказано правом на левом тасу, док ће на десни ставити два нова лажна новчића. Како ће опет претегнути лева страна за коју се зна да садржи један прави и један лажни новчић, јасно ће бити да су оба новчића на десном тасу лажна. Дакле, после другог мерења биће идентификована 3 лажна новчића и један прави. У трећем мерењу ће сва та 3 идентификована лажна и онај 1 прави ставити на леви тас, а на десни она преостала 4 лажна. Но лева страна ће опет превагнути, а како је сада познато да су на њој 3 лажна и 1 прави, једино ће бити могуће да су сва 4 новчића са десне стране лажни. Тиме је вештак идентификовао свих 7 лажних новчића.

4. Претпоставимо прво да су темена A и C исте боје. За то постоје 4 могућности. Теме B мора бити различито од њих, за шта постоје 3 могућности, тј. имамо досад укупно $4\cdot 3 = 12$ могућности. За теме D бирамо једну боју различиту од боје темена C, за шта постоје 3 могућности, а потом за теме E бирамо боју различиту од боја темена A и D, за шта преостају две могућности. Укупно, дакле, имамо $12\cdot 3\cdot 2 = 72$ могућности у овом случају.

Посматрајмо сада случај када су темена A и C различите боје. За то постоји $4 \cdot 3 = 12$ могућности. Теме B мора бити различите боје од њих, за шта преостају две могућности, што досад чини $12 \cdot 2 = 24$ могућности. Ако је D исте боје као A, тада нам за E преостају три могућности; ако је D различите боје од A, тада имамо 2 могућности за D и 2 могућности за E, тј. $2 \cdot 2 = 4$ могућности за боје темена D и E. Укупно, дакле, имамо $24 \cdot (3+4) = 168$ могућности у овом случају.

Према томе, решење задатка је $72 + 168 = 240$.

5. *Прво решење.* Означимо $P(x) = ax^5 + bx^4 + bx^3 + ax^2 + cx - 62$ и $Q(x) = 2x^2 - 5x + 2$. Приметимо да се полином $Q(x)$ може факторисати као $Q(x) = (x-2)(2x-1)$, тј. његове нуле су 2 и $\frac{1}{2}$. Будући да је полином $P(x)$ дељив полиномом $Q(x)$, и његове нуле су, између осталих, 2 и $\frac{1}{2}$. Услови $P(2) = 0$ и $P(\frac{1}{2}) = 0$ своде се на $36a + 24b + 2c - 62 = 0$ и $\frac{9a}{32} + \frac{3b}{16} + \frac{c}{2} - 62 = 0$. Уведимо смену $t = 3a + 2b$. Тада се добијене једначине своде на $12t + 2c - 62 = 0$ и $\frac{3t}{32} + \frac{c}{2} - 62 = 0$. Из прве једначине добијамо $c = 31 - 6t$, па увршћањем овога у другу једначину добијамо $\frac{3t}{32} + \frac{31-6t}{2} - 62 = 0$, тј. $\frac{-93t}{32} = \frac{93}{2}$. Одавде добијамо $t = -16$.

Друго решење. Дељењем полинома $P(x)$ са $Q(x)$ добија се остатак

$$R(x) = \left(\frac{127}{16}(2b + 3a) + c\right) x - 62 - \frac{31}{8}(2b + 3a).$$

Да би остатак био 0 морају му коефицијент уз x и слободан члан бити 0, па добијемо $-62 - \frac{31}{8}(2b + 3a) = 0$, тј. $3a + 2b = -16$.

Други разред – Б категорија

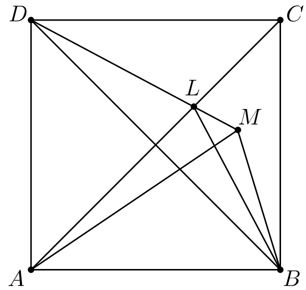
1. Нека важи $\sqrt{n + 2015} - \sqrt{n} = r$, где је r рационалан број. Сада имамо

$$\begin{aligned} \sqrt{n+2015} + \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+2015} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2015} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+2015} - \sqrt{n}} \\ &= \frac{n + 2015 - n}{r} = \frac{2015}{r}, \end{aligned}$$

па је и $\sqrt{n+2015} + \sqrt{n}$ рационалан број; означимо га са r_1. Сада добијамо $\sqrt{n+2015} = \frac{r+r_1}{2}$ и $\sqrt{n} = \frac{r-r_1}{2}$, па су и ово рационални бројеви. Уколико означимо $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, где су p и q узајамно прости, тада из $n = \frac{p^2}{q^2}$ следи $q \mid p$, а ово је могуће само уколико важи $q = 1$. Дакле, $\sqrt{n}$ је природан број. На исти начин закључујемо и да је $\sqrt{n+2015}$ природан број. Сада уводећи ознаке $n + 2015 = a^2$ и $n = b^2$ добијамо $a^2 - b^2 = 2015$, тј. $(a-b)(a+b) = 2015$. Како важи $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, добијамо следеће четири могућности:

- $a+b=2015$ и $a-b=1$, одакле израчунавамо $a=1008$, $b=1007$ и $n=1007^2$;
- $a+b=403$ и $a-b=5$, одакле израчунавамо $a=204$, $b=199$ и $n=199^2$;
- $a+b=155$ и $a-b=13$, одакле израчунавамо $a=84$, $b=71$ и $n=71^2$;
- $a+b=65$ и $a-b=31$, одакле израчунавамо $a=48$, $b=17$ и $n=17^2$.

2. Лако се налази $\measuredangle MDB=17^\circ$, а затим из $\triangle DMB$ имамо $\measuredangle DMB=135^\circ$. Означимо $MD\cap AC=\{L\}$. Приметимо да је $\triangle DLB$ једнакокрак па следи $\measuredangle LBD=\measuredangle LDB=17^\circ$. Одатле израчунавамо $\measuredangle MBL=28^\circ-17^\circ=11^\circ$. Како важи $\measuredangle LMB+\sphericalangle BAL=135^\circ+45^\circ=180^\circ$, добијамо да је четвороугао $ABML$ тетиван, па следи $\measuredangle MAL=\measuredangle MBL=11^\circ$. Коначно: $\sphericalangle MAD=\sphericalangle CAD+\sphericalangle MAL=45^\circ+11^\circ=56^\circ$.



Др 2015 2Б 2

3. Сваки Гобин потомак је нечија ћерка. Стога је довољно избројати колико ћерки је укупно поменуто у поставци (с обзиром на услов да нико сем набројаних потомака није имао децу). Према томе, укупан број женских потомака износи $1\cdot5+6\cdot4+11\cdot2=51$.

4. Решења одговарајуће квадратне једначине су a и a^3 (што се установљава директном провером), па је решење посматране квадратне неједначине интервал (a,a^3) или (a^3,a), у зависности од тога који је од бројева a или a^3 већи. У оба случаја, да би тај интервал био подскуп интервала $(-3,-1)$, мора бити и $-3\leqslant a\leqslant -1$ и $-3\leqslant a^3\leqslant -1$. Као решење овог система од две неједначине добијамо $-\sqrt[3]{3}\leqslant a\leqslant -1$. Како је празан скуп подскуп сваког скупа, треба придодати и случајеве када ова неједначина нема решења, тј. када су оба интервала (a,a^3) и (a^3,a) празни скупови, а то се дешава када важи $a^3=a$, тј. $a\in\{-1,0,1\}$. Дакле, коначно добијамо да је услов задатка испуњен за $a\in[-\sqrt[3]{3},-1]\cup\{0,1\}$.

5. Како су бројеви a, b и c јединичног модула, једнакост у поставци можемо трансформисати на следећи начин:

$$1=\overline{a+b+c}=\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},$$

те множењем обе стране са abc добијамо $abc=ab+bc+ca$. Из ове једнакости можемо добити

$$(a-1)(b-1)(c-1)=abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c)-1=a+b+c-1=0,$$

одакле следи тврђење задатка.

Трећи разред – Б категорија

1. *Прво решење.* Уколико важи $x = y$, тада одмах добијамо решење $x = y = 101$. Претпоставимо сада, без умањења општости, $x < y$. Уочавамо да мора важити $x < 101 < y$, јер у случајевима $x < y \leqslant 101$ и $101 \leqslant x < y$ имамо $\frac{2}{101} < \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, односно $\frac{2}{101} > \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$. Сада множењем са $202xy$ добијамо $4xy - 202x - 202y = 0$; додавање 101^2 обема странама једнакости даје

$$4xy - 202x - 202y + 101^2 = (2x - 101)(2y - 101) = 101^2.$$

Како је број 101 прост, једини позитивни делиоци броја 101^2 су 1, 101 и 101^2. Како важи $x < 101 < y$, не могу оба чиниоца $2x - 101$ и $2y - 101$ бити негативна, па морају бити оба позитивна и важи $2x-101 < 2y-101$. Дакле, једина могућност је $2x - 101 = 1$ и $2y - 101 = 101^2$. Одатле следи $x = \frac{101+1}{2} = 51$ и $y = 101 \cdot \frac{101+1}{2} = 5151$.

Да закључимо, решења су: $(x, y) \in \{(101, 101), (51, 5151), (5151, 51)\}$.

Друго решење. Радимо под претпоставком $x < 101 < y$ (као у првом решењу). Задату једначину помножимо са $101xy$, чиме добијамо $2xy = 101(x + y)$. Како је број 101 прост и важи $x < 101$, да би лева страна била дељива са 101 мора важити $y = 101k$ за неко $k \in \mathbb{N}$. Сада једначина постаје $2xk = x+101k$, тј. $x(2k-1) = 101k$. Опет закључујемо $2k-1 = 101m$ за неко $m \in \mathbb{N}$, па добијамо: $xm = k = \frac{101m+1}{2}$. У случају $m > 1$ лева страна једнакости је дељива са m а десна није, па закључујемо да мора важити $m = 1$. Одатле добијамо $k = 51$, а затим и $y = 5151$ и $x = 51$. Преостала решења уочавамо као малопре.

2. Одговор: Може кад год је k паран број и $j \geqslant \frac{k}{2}$, при чему су j и $\frac{k}{2}$ исте парности.

Означимо са p број јабука у првој корпи. Прво покажимо да за непарно k, тј. $k = 2m + 1$, такав распоред не постоји. У корпама на непарним позицијама су бројеви исте парности као и p, а у корпама на парним позицијама су бројеви различите парности од p. Али тада су прва и $(2m + 1)$-ва корпа суседне, а у њима су бројеви исте парности, што је у супротности са претпоставком да се количина јабука у суседним корпама разликује за 1.

Претпоставимо сада $k = 2m$, и одредимо за које вредности j постоје тражени распореди. Прво, уочимо да најмањи број јабука који укупно можемо имати у две суседне корпе износи 1 (у једној 0, а у другој 1). Стога је минималан број јабука m. Даље, у m корпи ће бити непаран број јабука, а у преосталих m корпи (које су између ових првих) биће паран број јабука. Стога је укупан број јабука j исте парности као и m. Покажимо још да за свако $j \geqslant m$ које је исте парности као и m Перица може распоредити јабуке на описани начин.

С обзиром на досадашње услове, укупан број јабука, j, можемо записати на следећи начин: $j = (2s+1)m + 2d$, за неко $s \in \mathbb{N}_0$ и $0 \leqslant d < m$. Тада Перица може у све корпе на непарним позицијама (њих има m) ставити $s+1$ јабука, у првих d корпи на парним позицијама ставити по $s+2$ јабуке, а у преостале корпе ставити по s јабука. Тада је свих j јабука распоређено према условима задатка: заиста, $m \cdot (s+1) + d \cdot (s+2) + (m-d) \cdot s = (2s+1)m + 2d = j$.

3. На основу идентитета $\sin 3x = -4\sin^3 x + 3\sin x$ имамо

$$\frac{1}{2} = \sin 30^\circ = -4\sin^3 10^\circ + 3\sin 10^\circ.$$

Користећи ову једнакост добијамо

$$\begin{aligned}
&16\sin^4 10^\circ + 8\sin^3 10^\circ - 12\sin^2 10^\circ - 4\sin 10^\circ + 1 \\
&= -4\sin 10^\circ(-4\sin^3 10^\circ + 3\sin 10^\circ) - 2(-4\sin^3 10^\circ + 3\sin 10^\circ) + 2\sin 10^\circ + 1 \\
&= -4\sin 10^\circ \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} + 2\sin 10^\circ + 1 = 0,
\end{aligned}$$

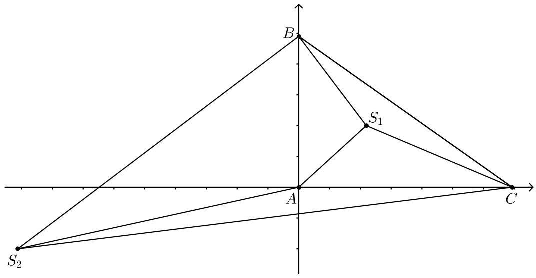
што је и требало доказати.

4. Неједнакост $\frac{x^2+y^2}{x+2y} \leqslant 2$ еквивалентна је са $x^2 + y^2 \leqslant 2x + 4y$, тј. $(x-1)^2 + (y-2)^2 \leqslant 5$. Уведимо смене $u = x-1$, $v = y-2$, којима се задата неједнакост своди на $u^2+v^2 \leqslant 5$. С овим сменама неједнакост коју треба доказати гласи $\frac{u+1}{2} + (v+2) \leqslant 5$, тј. $u+2v \leqslant 5$. Претпоставимо супротно: $u+2v > 5$. Како из услова задатка следи $v \leqslant \sqrt{5}$, имамо $u > 5-2v > 0$, а одатле добијамо $u^2 > (5-2v)^2$. Но, сада имамо

$$u^2 + v^2 > (5-2v)^2 + v^2 = 25 - 20v + 5v^2 = 5(5 - 4v + v^2) = 5(1 + (2-v)^2) > 5,$$

контрадикција.

5. Нека су O_1, O_2, O_3 и O центри датих лопти, а $R_1 = 2$, $R_2 = 3$, $R_3 = 6$ и R њихови полупречници. Нека су тачке S, A, B и C редом пројекције тачака O, O_1, O_2 и O_3 на сто. Према Питагориној теореми имамо $AB = \sqrt{(R_2+R_1)^2 - (R_2-R_1)^2} = 2\sqrt{R_1R_2} = 2\sqrt{6}$. Слично добијамо $AC = 2\sqrt{12}$ и $BC = 2\sqrt{18}$, као и $SA = 2\sqrt{2R}$, $SB = 2\sqrt{3R}$ и $SC = 2\sqrt{6R}$. Користећи обрат Питагорине теореме добијамо да је $\triangle ABC$ правоугли, са правим углом код темена A. Поставимо овај троугао у координатни систем тако да је A координатни почетак, B на координатама $(0, 2\sqrt{6})$ и C на координатама $(2\sqrt{12}, 0)$. Нека тачка S има координате (x, y). Њене координате одредићемо из услова $\frac{SB}{SA} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ и $\frac{SC}{SA} = \sqrt{3}$ (чиме ће бити задовољено и $\frac{SC}{SB} = \sqrt{2}$). Дакле, имамо систем од следеће две једначине:



Др 2015 3Б 5

$$\frac{3}{2} = \frac{SB^2}{SA^2} = \frac{x^2 + (y - 2\sqrt{6})^2}{x^2 + y^2};$$

$$3 = \frac{SC^2}{SA^2} = \frac{(x - 2\sqrt{12})^2 + y^2}{x^2 + y^2}.$$

Прва једначина еквивалентна је са $x^2 + y^2 + 8\sqrt{6}y = 48$, а друга са $x^2 + y^2 + 4\sqrt{3}x = 24$. Решавањем овог система добијамо

$$(x, y) \in \{(4\sqrt{2} - 2\sqrt{3}, 2), (-4\sqrt{2} - 2\sqrt{3}, -2)\}.$$

Одавде, користећи једнакост $SA^2 = 2\sqrt{2R}$, добијамо да постоје две могућности за полупречник четрвте лопте, наиме $R = 6 \pm 2\sqrt{6}$.

Четврти разред – Б категорија

1. Како су бројеви a, b, c, d и e различити, морају и бројеви $3 - a$, $3 - b$, $3 - c$, $3 - d$ и $3 - e$ бити различити. Делиоци броја 12 су ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6 и ± 12. Пет заграда наведених у поставци представљају пет различитих делилаца броја 12 чији је производ једнак 12. Приметимо да међу њима не могу бити ± 4, ± 6 ни ± 12 (јер би у супротном број 1 или број -1 морао бити узет више пута). Такође, међу њима не могу истовремено бити 3 и -3 (јер им је производ једнак -9, што не дели 12). Дакле, четири од задатих пет заграда једнаке су 1, -1, 2 и -2. Пета заграда тада мора бити једнака 3. Другим речима, бројеви $3 - a$, $3 - b$, $3 - c$, $3 - d$ и $3 - e$ једнаки су -1, 1, -2, 2 и 3 (у неком редоследу), па су бројеви a, b, c, d и e једнаки 4, 2, 5, 1 и 0 (у неком редоследу), те добијамо $a + b + c + d + e = 4 + 2 + 5 + 1 + 0 = 12$.

2. Означимо са A_n скуп тражених n-торки а са B_n скуп оних n-торки код којих је посматрани збир непаран. Означимо са a_n и b_n број елемената скупа A_n и B_n, редом. Како је збир $a_n + b_n$ једнак укупном броју n-торки с координатама из скупа $\{0, 1, 2\}$, добијамо $a_n + b_n = 3^n$. Посматрајмо на који начин, за неко $n > 1$, од елемената из скупа A_{n-1} и B_{n-1} можемо добити елемент скупа A_n. За произвољан елемент скупа A_{n-1}, додавањем још једне координате на последње место, и то једнаке 0 или 2, добијамо елемент скупа A_n; слично, за произвољан елемент скупа B_{n-1}, додавањем још једне координате на последње место, и то једнаке 1, добијамо елемент скупа A_n. Одавде следи

$$a_n = 2a_{n-1} + b_n = a_{n-1} + b_{n-1} + a_{n-1} = 3^{n-1} + a_{n-1}.$$

Како важи $a_1 = 2$, имамо

$$\begin{aligned} a_n &= 3^{n-1} + a_{n-1} = 3^{n-1} + 3^{n-2} + a_{n-2} = \cdots = 3^{n-1} + 3^{n-2} + ... + 3^1 + a_1 \\ &= 3 \cdot \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} + 2 = \frac{3^n - 3}{2} + 2 = \frac{3^n + 1}{2} + 2. \end{aligned}$$

3. Нека је a тражена вредност параметра и нека су x_1, x_2, x_3 и x_4 нуле датог полинома. Из Вијетових формула имамо $x_1x_2x_3x_4 = -1$, одакле следи $|x_1|^4 = |x_1x_2x_3x_4| = |-1| = 1$. Одатле добијамо $|x_1| = |x_2| = |x_3| = |x_4| = 1$. Посматрајмо функцију $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, дефинисану са $P(x) = x^4 + ax^2 + a^2x - 1$. Ова функција је непрекидна, па како важи $P(0) = -1 < 0$ и $\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty$, закључујемо да она има бар једну нулу на интервалу $(0, \infty)$. Међутим, како су све нуле јединичног модула, добијамо да број 1 мора бити нула посматраног полинома. Из $P(1) = 0$ налазимо $a = 0$ или $a = -1$. Остаје да за ове две вредности проверимо да ли су заиста решења задатка. За $a = 0$ полазни полином једнак је $P(x) = x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$, па су заиста све његове нуле истог модула. За $a = -1$ полазни полином једнак је $P(x) = x^4 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^3+x^2+1)$. Полином $Q(x) = x^3 + x^2 + 1$ има бар једну реалну нулу, као полином непарног степена са реалним коефицијентима. Како важи $Q(1) \neq 0$ и $Q(-1) \neq 0$, то он има реалну нулу која није јединичног модула, што значи да нису све нуле полинома $P(x)$ истог модула, а тиме $a = -1$ није решење. Јединa вредност траженог параметра a је $a = 0$.

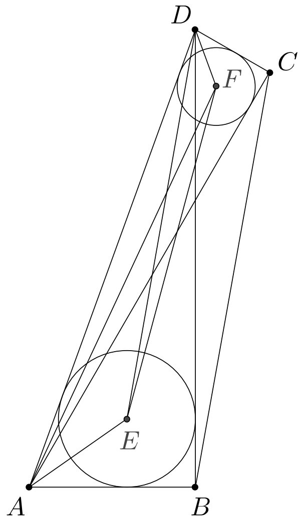
4. Очито тачке A, B, C и D леже на кружници чији је пречник AD (дакле, полупречник јој је $R = 1$). Нека је $\measuredangle BAC = \alpha = \measuredangle BDC$. Из синусне теореме за $\triangle BCA$ имамо $BC = 2R \sin\alpha = 2\sin\alpha$. Израчунавамо

$$\measuredangle AED = 180^\circ - \frac{1}{2}(\measuredangle BAD + \measuredangle BDA) = 180^\circ - \frac{90^\circ}{2} = 135^\circ,$$

и слично

$$\measuredangle AFD = 180^\circ - \frac{1}{2}(\measuredangle CAD + \measuredangle CDA) = 180^\circ - \frac{90^\circ}{2} = 135^\circ,$$

па је и четвороугао $ADFE$ тетиван; означимо са R_1 полупречник његове описане кружнице. Опет из синусне теореме за $\triangle AED$ имамо $2 = AD = 2R_1 \sin 135^\circ = 2R_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$, одакле добијамо $R_1 = \sqrt{2}$, а сада из $\triangle EFA$ добијамо $\sqrt{2} = EF = 2R_1 \sin \measuredangle EAF = 2\sqrt{2} \sin \measuredangle EAF$, тј. $\sin \measuredangle EAF = \frac{1}{2}$. Како је $\measuredangle EAF$ оштар, следи $\measuredangle EAF = 30^\circ$. Како важи $\measuredangle EAF = (\alpha - \frac{\measuredangle BAD}{2}) + \frac{1}{2}(\measuredangle BAD - \alpha) = \frac{\alpha}{2}$, добијамо $\alpha = 60^\circ$, па из ранијег рачуна следи $BC = 2 \sin \alpha = \sqrt{3}$.



Др 2015 4Б 4

5. Из неједнакости између аритметичке и геометријске средине добијамо $4 = x^2 + y^2 \geqslant 2\sqrt{x^2y^2} = 2|xy|$, тј. $|xy| \leqslant 2$. Одатле следи $-2 \leqslant xy \leqslant 2$ (обе једнакости се достижу: десна за $x = \sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$, а лева за $x = y = \sqrt{2}$; приметимо да у оба случаја важи, наравно, $x^2 + y^2 = 4$). Сада из $(x-y)^2 + xy = x^2 - 2xy + y^2 + xy = x^2 + y^2 - xy = 4 - xy$ одмах следи да је најмања вредност посматраног израза једнака 2, а највећа 6.

Садржај