ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА

СРЕДЊОШКОЛАЦА

2015/2016

Краљево, 2016

Организациони одбор 58. Државног такмичења из математике

1. Ненад Славковић, руководилац ШУ Краљево – председник
2. Др Драгољуб Даниловић, председник ШО Гимназије Краљево
3. Мр Александар Сеничић, професор математике у Гимназији Краљево
4. Милорад Сенић, професор математике у Гимназији Краљево
5. Смиљка Глишовић Пршић, помоћник директора Гимназије Краљево
6. Сања Милосављевић, педагог у Гимназији Краљево
7. Тања Љубисављевић, библиотекар Гимназије Краљево
8. Предраг Савић, професор физике у Гимназији Краљево
9. Владан Пејовић, професор физике у Гимназији Краљево
10. Др Војислав Андрић, председник ДМС
11. Др Бојан Башић, ПМФ, Нови Сад, председник Државне комисије

Организацију такмичења помогли

1. Град Краљево

Редакција и обрада: др Бојан Башић

Краљево кроз векове

Први помен насеља под називом Рудо Поље среће се 1476. године. Нешто касније, око 1540. године, у употреби је двојни назив: Рудо Поље и Карановац. Приликом посете краља Милана Обреновића Карановцу, на захтев грађана, 19. априла 1882. назив је промењен у Краљево. У кратком послератном периоду (1949–1955) у употреби је назив Ранковићево, да би се потом поново усталио назив Краљево.

Стари Рим и Византија су оставили трагове на овом подручју. Од тада датирају Јанок, Рајановац и у суседству Врњачка Бања. Најстарији помен једног места краљевачког краја налазимо у византијским изворима из 10. века, који помињу густо насељени Јанок, који се вероватно налазио југозападно од Краљева, на подручју данашњег Конарева.

Ови крајеви су у саставу српске државе од њеног настанка и играју важну улогу у привредном, друштвеном и политичком животу, али је овде пре свега духовни центар младе српске државе. Крајем 12. века подигнут је манастир Студеница, задужбина великог жупана Стефана

Немање, оснивача независне српске државе и родоначелника династије Немањића. Почетком 13. века саграђен је манастир Жича, задужбина Стефана Првовенчаног, у којем је он 1217. године крунисан као први српски краљ. Од 1219. године манастир Жича је седиште аутокефалне српске цркве и првог српског архиепископа Светог Саве.

Сматра се да Карановац постаје значајније насеље тек од 1718. године, после потписивања Пожаревачког мира и успостављања аустријско-турске границе дуж Западне Мораве.

Следи убрзан развој Карановца условљен пре свега географским положајем, трговином, занатством и новостеченом административно-управном улогом. Током 19. века израста у значајно градско средиште Србије. Изградњом цркве 1824. године одређен је нови правац и простор за развој града – простор између Старе чаршије и Пљакиног шанца. Први урбанистички план Карановца урадио је Лаза Зубан 1832. године. Реализација плана почела је 1836. године, када су у вароши устројена три главна сокака. До краја 19. века просецањем нових сокака створена је мрежа улица са до данас задржаном карактеристиком правилног укрштања које полазе од централног кружног трга у четири правца.

Данас је Краљево значајни културни центар Србије у коме раде Музеј, Архив, Завод за заштиту споменика културе, Библиотека, Позориште, Удружења књижевника и ликовних уметника.

Гимназија у Краљеву

У другој половини деветнаестог и почетком двадесетог века јавила се потреба за оснивањем Гимназије у Краљеву јер је више десетина, понекад и стотинак ученика похађало наставу у гимназијама суседних градова. На конференцији 18 грађана, која је одржана 28. јуна 1909.

године донета је резолуција о отварању четвороразредне мешовите гимназије у Краљеву. Указом краља Петра I Карађорђевића одобрено је отварање Гимназије, која је почела са радом 1909. године.

У први разред гимназије уписано је те године 47 ученика, 29 дечака и 18 девојчица, а у други разред 10 дечака и две девојчице. Првог септембра 1909. године по јулијанском календару почела је прва школска година Приватне гимназије у Краљеву. За време балканских ратова и у првој години светског рата у краљевачкој гимназији се одржавала настава, али је од 1915. до 1918. године школа морала да прекине са радом. Већина школских зграда била је оштећена, намештај упропашћен а књиге разграбљене.

Краљ Александар I Карађорђевић Ујединитељ је 1. јула 1921. године потписао указ по којем је нижа приватна гимназија у Краљеву претворена у Државну реалну гимназију. Уз Нижу државну гимназију постојала је од 1929. године и Краљевска приватна гимназија, а током тридесетих година двадесетог века уведени су и сви разреди Више гимназије.

Гимназија је и у најтежим условима окупације током II светског рата показивала способност да опстане и одржи знатан број ученика, а настава се одржавала углавном у приватним кућама. У немилосрдној одмазди немачких окупационих снага у Краљеву је од 14. до 20. октобра 1941. године стрељан велики број људи. Међу њима 21 ученик и 6 професора гимназије. Крај Другог светског рата означава почетак новог поглавља у историји краљевачке гимназије. Настава је, без минималних просторних услова за рад, обновљена у фебруару 1945. године.

Честе промене у називу школе биле су повезане са реформама у систему образовања. Школске 1989–90. године Гимназија „Мирко Луковић“ ушла је у састав Образовног центра „Даница Јаснић – Мирко Луковић“, да би тек 1990. године поново добила назив Гимназија.

За време бомбардовања Савезне Републике Југославије од стране НАТО алијансе, од 24. марта до 10. јуна 1999. године прекинута је настава у Гимназији, али је школска година регуларно завршена.

У катастрофалном земљотресу који је погодио Краљево 3. новембра 2010. године у 01:56:56 часова зграда Гимназије је прилично оштећена. Сам град Краљево је био прекривен комадима стакла, бетона и малтера. Снимци наших сигурносних камера су обишле свет. Посебно је уништен кров зграде, који је у наредним данима уз помоћ великог броја војника и радника делом саниран. Принуђени смо да наставу од 24. новембра 2010. до 15. септембра 2011. године, због великог броја ученика, одвијамо у два објекта ван града у отежаним условима.

Током свих ових година школа је неговала талентоване и добре ученике. За њихов успешан рад следиле су награде и похвале. Вукова награда, највеће признање у нашем образовном систему, додељена је први пут 1975. године ученици краљевачке гимназије Радованки Луковић. Најбољи ученици данас су истакнуту стручњаци, професори на факултетима у земљи и иностранству али и у својој школи гимназији.

У Гимназији у Краљеву сада се стиче опште образовање за даље школовање у трајању од четири године. Гимназија има пет смерова: природно-математички, општи тип, друштвено-језички, одељење математичке и филолошке гимназије. Од школске 2014/15. године уписано је одељење седмог разреда ученика надарених за математику, тако да од шк. 2015/16. године у Гимназији има 34 одељења, односно 886 ученика.

У школи је запослено 73 професора, један доктор наука, осам магистара. Такође, изизетно је и да у школи раде четири професора са звањем педагошког саветника. Остварује се интензивна међународна сарадња са гимназијама „Licee Bellevue" и „Sant Marie" из Лиона, која је успостављена 2005. године, и која, поред међусобних посета, од школске 2012/2013. године подразумева да наша четири ученика проводе месец дана у Лиону на усавршавању језика и упознавању школског система и обичаја Француске. Такође, са Гимназијом „Sankt Mihael" из Алена имамо међусобне посете ученика и професора.

За постигнуте резултате у образовању Гимназија је 2005. године добила престижну Вукову награду. По резултатима наших ученика на ФОН-у, већ дуги низ година на том факултету нашу школу убрајају међу првих 10 у Србији, тако да је у децембру 2014. године стигло заслужено признање за изузетно високе резултате наших ученика постигнуте на пријемним испитима.

Ученици и професори Гимназије у Краљеву својим деловањем и утицајем прожимали су свакодневни живот грађана, негујући књижевни језик свог народа, културне, научне и уметничке вредности.

ДРЖАВНА КОМИСИЈА

за такмичења из математике ученика средњих школа,
школска година 2015/2016.

1. Балтић др Владимир, Математичка гимназија, Београд

2. Башић др Бојан, ПМФ, Нови Сад – председник комисије

3. Божин др Владимир, Математички факултет, Београд

4. Варга Б. Јожеф, ОШ „Петар Кочић“, Темерин

5. Гајовић Стеван, Математички факултет, Београд

6. Дугошија др Ђорђе, Математички факултет, Београд

7. Ђикић Марко, ПМФ, Ниш

8. Ђукић Душан, Машински факултет, Београд

9. Илић др Александар, ПМФ, Ниш

10. Кнежевић др Миљан, Математички факултет, Београд

11. Лукић др Миливоје, Универзитет у Торонту, Канада

12. Маринковић Растко, Књажевачка гимназија, Књажевац

13. Марковић др Петар, ПМФ, Нови Сад

14. Матић др Иван, Дјук, САД

15. Милосављевић Милош, Гимназија „Светозар Марковић“, Ниш

16. Петровић др Никола, Институт за физику, Београд

17. Радовановић др Марко, Математички факултет, Београд

18. Сеничић мр Александар, Гимназија, Краљево

19. Стојаковић др Милош, ПМФ, Нови Сад

20. Томић Иванка, Гимназија, Ваљево

Превод на мађарски језик:

1. Пеић др Хајналка, Грађевински факултет, Суботица

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 12. 12. 2015.

Први разред – А категорија

1. Нека су A, B и C коначни скупови за које важи

$$|A\triangle C| + |B\triangle C| = |A\triangle B|.$$

Доказати да тада важи

$$A\cap B \subseteq C \subseteq A\cup B.$$

(За скупове X и Y означили смо $X\triangle Y = (X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)$, што се назива *симетрична разлика* скупова X и Y.)

2. У врсту је поређано 2016 столица. На колико начина је могуће обојити сваку столицу црвеном или плавом бојом на такав начин да број парова суседних столица које имају исту боју буде паран?

3. Дат је $\triangle ABC$. На страници AB су одабране тачке C_1 и C_2 такве да важи

$$AC_1 = \frac{2015}{3015}AB \text{ и } AC_2 = \frac{2015}{3014}AB,$$

на страници BC тачке A_1 и A_2 такве да важи

$$BA_1 = \frac{1007}{2015}BC \text{ и } BA_2 = \frac{1008}{2015}BC,$$

а на страници AC тачке B_1 и B_2 такве да важи

$$AB_1 = \frac{2015}{3031}AC \text{ и } AB_2 = \frac{2015}{3030}AC.$$

Права AA_1 сече праве B_1C_1 и B_2C_2 редом у тачкама M и N, а права AA_2 сече B_1C_1 и B_2C_2 редом у тачкама Q и P. Доказати да се тежиште $\triangle ABC$ налази унутар четвороугла $MNPQ$.

4. Одредити највећу могућу дужину растућег низа $a_1, a_2, a_3\dots$ простих бројева, уз услов да разлика свака два узастопна члана тог низа износи 2 или 4.

5. Нека је $ABCDE$ конвексан петоугао чије су све странице једнаке дужине. Ако се две дијагонале тог петоугла секу под углом од 60°, доказати да су две његове странице паралелне.

Други разред – А категорија

1. У уоченом четвороуглу све странице су дужине мање од 20. Доказати да за било коју тачку унутар тог четвороугла постоји неко његово теме које је од дате тачке на удаљености мањој од 15.

2. Два играча, А и Б, играју следећу игру. Дата је табла $3\times n$, $n>1$, која је на почетку игре празна. Играчи наизменично одабирају по једно празно поље и означавају одабрано поље словом X, уз услов да свако поље на рубу табле, означено или неозначено, може бити сусед највише једном означеном пољу (суседна поља су она поља која имају заједничку страницу). Победник је онај играч после чијег потеза наредни играч више не може одиграти потез. Играч А игра први. За које n играч А има победничку стратегију, а за које n има играч Б?

3. Одредити све тројке природних бројева (x, y, z) за које важи

$$2^x - 2^y = 2016^z.$$

4. Наћи све парове позитивних реалних бројева a и b за које важи

$$(1+a)(8+b)(a+b) = 27ab.$$

5. Кружница уписана у $\triangle ABC$ у ком важи $AB < AC$ додирује странице BC, CA и AB у тачкама D, E и F, редом. Симетрала $\measuredangle BAC$ сече праве DE и DF у тачкама M и N, редом. Нека је K подножје висине из темена A. Доказати да је D центар уписане кружнице у $\triangle MNK$.

Трећи разред – А категорија

1. Решити једначину

$$\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\left(1+\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p_n}\right) = q,$$

где су непознате природан број n и прости бројеви $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и q.

2. За дате природне бројеве n и k, колико има неопадајућих низова дужине k чији су елементи из скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ и чија свака два суседна елемента имају парну разлику?

3. Нека су m и n узајамно прости природни бројеви. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева x таквих да је број $n^x - x^n$ дељив са m.

4. Две кружнице полупречника r_1 и r_2 секу се у тачкама A и B, а једна њихова заједничка тангента их додирује у тачкама C и D. Нека је N тачка пресека правих AB и CD, при чему је B између A и N. Израчунати однос висина $\triangle NAC$ и $\triangle NAD$ спуштених из тачке N.

5. Одредити све комплексне бројеве z који задовољавају следеће две једнакости:

$$\begin{aligned} z^{2015} + z^{2014} + |z| &= 3; \\ 3z^{2015} - |z|^{2014} - z &= 1. \end{aligned}$$

Четврти разред – А категорија

1. Нека су a и b природни бројеви, при чему важи $a > b$. Доказати неједнакост

$$a^3 + ab^2 + b^2 + b \geqslant 2a^2b + a^2.$$

2. Дат је $\triangle ABC_0$ и тачке D_0 и E на дужима AC_0 и AB, редом. За задате тачке C_n и D_n (где $n \in \mathbb{N}_0$) тачке C_{n+1} и D_{n+1} дефинишемо на следећи начин: D_{n+1} је пресек правих C_nE и BD_0, а C_{n+1} је пресек правих AD_{n+1} и BC_0. Означимо $x = \dfrac{AD_0}{D_0C_0}$ и $y = \dfrac{AE}{EB}$. Наћи $\dfrac{AD_{2015}}{D_{2015}C_{2015}}$ у функцији од x и y.

3. Колико има низова дужине 8 чији су елементи из скупа $\{1, 2, 3\}$ и који немају две узастопне јединице?

4. Дата је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таква да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$f(xf(y)) = yf(x).$$

Доказати да је функција f непарна.

5. Доказати да се за сваки природан број n може одабрати природан број m такав да важи $\varphi(m) = n!$.

Први разред – Б категорија

1. Нека су дати скупови A, B и C. Која од инклузија $\subseteq$, $\supseteq$ мора важити за скупове

$$A \setminus (B \cap C) \text{ и } (A \setminus (B \setminus C)) \setminus (B \setminus (C \setminus A))?$$

2. На страници CD квадрата $ABCD$ дата је тачка L. Из темена A и C спуштене су нормале на праву BL и секу је, редом, у тачкама P и Q. Доказати: $CP \cong DQ$.

3. Доказати да је шестоцифрени број $\overline{ababab}$ (где су a и b цифре) дељив са 111, али да није дељив са 107.

4. Дат је скуп $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. На скупу $A \times A$ дефинисана је следећа релација:

$$(x, y)\ \rho\ (z, t) \text{ ако и само ако } 3 \mid (x^2 - z^2)(y - t).$$

Испитати да ли је релација ρ рефлексивна, симетрична и транзитивна, и да ли је то релација еквиваленције.

5. Дато је 2015 једнаких плавих и 3 једнаке беле куглице. На колико начина их можемо поређати у низ од 2018 куглица уз услов да прва и последња куглица у низу буду исте боје?

Други разред – Б категорија

1. Одредити све парове простих бројева p, q таквих да $p^2 + q^3$ буде потпун квадрат.

2. Дата је једначина $12x^2 + 12x + 2015 = 0$. Саставити квадратну једначину чија су решења

$$\frac{2x_1 + 1}{x_1 - 2} \text{ и } \frac{2x_2 + 1}{x_2 - 2},$$

где су x_1 и x_2 решења полазне једначине.

3. Мајка је за излет својој деци спремила три врсте воћа: крушке, јабуке и брескве. Сваком детету је на непрозирној корпици коју је добио залепила и налепницу с његовим именом. Потом је деци саопштила да је Ђорђу спремила 2 крушке и 3 јабуке, Рајку 3 јабуке и 1 бресквy, а Пери 3 брескве. Док се Пера купао у реци, Ђорђе и Рајко су заменили налепнице на корпама, при чему ниједна налепница није остала на свом месту. Колико најмање воћа и из којих корпи треба да извуче Пера не завирујући у корпе, како би могао да налепнице врати на своја места? (Пери је позната информација да након Ђорђеве и Рајкове зврчке ниједна налепница није остала на свом месту.)

4. Дат је $\triangle ABC$ за чије странице a, b и c важи

$$a^3 + b^3 + c^3 = ab(a + b) - bc(b + c) + ac(a + c).$$

Доказати да је $\triangle ABC$ правоугли.

5. Нека су A, B и C три произвољне тачке. Нека су A_1 и C_1 тачке осносиметричне тачкама A и C у односу на праве BC и AB, редом. Доказати да су тачке C, A_1 и C_1 колинеарне ако и само ако се права AB, симетрала дужи BC и нормала на праву AC у тачки C секу у једној тачки.

Трећи разред – Б категорија

1. Нека су реални бројеви a, b и c такви да графици функција $y = ax + b$, $y = bx + c$ и $y = cx + a$ имају бар једну заједничку тачку у првом квадранту. Доказати: $a = b = c$.

2. На колико се начина број 2016 може представити као производ једног једноцифреног, једног двоцифреног и једног троцифреног броја, при чему није битан поредак?

3. Решити неједначину

$$6\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{11}{2} > 0.$$

4. У тетраедру $ABCD$ ивица AD је нормална на раван ABC, а такође су и равни BCD и ABD међусобно нормалне. Доказати да је средиште ивице CD центар описане сфере око тетраедра $ABCD$.

5. Одредити колико има природних бројева n за које важи

$$n \leqslant 2016 \text{ и } 2016 \mid n^9 - n^3.$$

Четврти разред – Б категорија

1. Испитати да ли постоје цели бројеви a, b и c такви да важи

$$a^2 - 2015b^2 - 8c = 14.$$

2. У врсту је поређано 2016 столица. На колико начина је могуће обојити сваку столицу црвеном или плавом бојом на такав начин да број плавих столица буде паран?

3. Одредити све вредности параметра k за које постоји коначна гранична вредност:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{k}{\sin 2x} \right).$$

4. За које вредности параметра a једначина

$$1 + \sin^2 ax = \cos x$$

има јединствено решење?

5. Две кружнице полупречника r_1 и r_2 секу се у тачкама A и B, а једна њихова заједничка тангента их додирује у тачкама C и D, при чему је тачка B ближа правој CD од тачке A. Израчунати полупречник кружнице описане око $\triangle ACD$.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23. 1. 2016.

Први разред – А категорија

1. Наћи све природне бројеве n за које је $7 \cdot 2^n + 1$ потпун квадрат.

2. Дат је четвороугао $ABCD$ за који важи $AD \cong BC$ и $\measuredangle A + \measuredangle B = 120^\circ$. Доказати да у њему средишта дијагонала и средиште странице CD одређују једнакостраничан троугао.

3. Укруг је поређано 200 реалних бројева. Збир свих тих бројева износи 200. Збир свака три узастопна броја није већи од 3. Да ли је могуће да ови услови буду испуњени ако је један од датих бројева једнак 3?

4. Да ли је могуће таблицу формата $n \times n$ попунити нулама и јединицама, а да притом за свако i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, апсолутна вредност разлике броја јединица у i-тој врсти и i-тој колони буде једнака 1, за:

a) $n = 2015$;

b) $n = 2016$?

5. Нека је T тежиште оштроуглог $\triangle ABC$. Нека је A' подножје висине из тачке A на BC, а A'' тачка дужи BC за коју важи $BA' = A''C$. Означимо са M и N пресечне тачке полуправих AA'' и TA', респективно, с кружницом описаном око $\triangle ABC$. Доказати: $MN \parallel BC$.

Други разред – А категорија

1. а) Доказати:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

за све позитивне реалне бројеве a и b за које важи $b < a^2$.

b) Да ли је вредност израза

$$\frac{5 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{5 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}$$

рационалан или ирационалан број?

2. Наћи све природне бројеве n за које је $n! - 44$ потпун квадрат.

3. Наћи све парове природних бројева a и b такве да свака од квадратних једначина

$$x^2 + ax + a + b = 0$$

и

$$x^2 + bx + a + b = 0$$

има целобројна решења.

4. У $\triangle ABC$ важи $\measuredangle BAC = \alpha < 90^\circ$. На страницама AC и AB одабране су тачке D и E, редом, такве да важи $\measuredangle ABD = \measuredangle ACE = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Доказати да права DE додирује кружницу уписану у $\triangle ABC$ ако и само ако је $\triangle ABC$ правоугли.

5. У разреду има 16 ученика. Једног дана сваки ученик је дао своју свеску неком другом ученику (исти ученик може да прими више од једне свеске). Доказати да се може издвојити група од 6 ученика таквих да ниједан ученик из те групе није дао свеску другом ученику из групе.

Трећи разред – А категорија

1. У скупу природних бројева решити једначину

$$11x^2 + 2016 = 11x^2y + y^2.$$

2. Одредити број парова природних бројева (a, b) таквих да важи $a \leqslant 2016$, $b \leqslant 2016$ и $a \not\equiv b \pmod{d}$ за сваки прави делилац d броја 2016 (прави делиоци су сви делиоци осим 1 и 2016).

3. Посејдон, грчки водени бог, окупио је 2016 чамџија и предложио им следећу игру. На почетку игре Посејдон ће изабрати двојицу и поставити их на две локације на бесконачно дугачкој реци. Чамџије потом треба да пронађу један другог (тј. да се сусретну на реци). Максимална брзина њихових чамаца износи 1 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$, и могу се кретати било узводно, било низводно. Сваки чамџија у сваком тренутку зна тачан положај свог чамца на реци у односу на своју почетну позицију, као и време протекло од почетка игре. Међутим, ниједан од изабраних чамџија не зна идентитет другог изабраног чамџије. Чамџије (свих 2016) имају могућност да заједнички осмисле стратегију пре почетка игре, али кад игра почне, никаква комуникација међу чамџијама није дозвољена. Доказати да чамџије могу осмислити стратегију која ће им гарантовати успех без обзира на то која двојица су изабрана и без обзира на њихове почетне положаје на реци.

4. Нека је дат $\triangle ABC$. Нека је тачка D средиште странице BC. Кружница γ_1 пролази кроз D и додирује праву AB у тачки B, а кружница γ_2 пролази кроз D и додирује праву AC у тачки C. Кружнице γ_1 и γ_2 се секу у тачки M, $M \not\equiv D$. Доказати да тачка симетрична тачки M у односу на праву BC лежи на правој AD.

5. Функција $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ је задата условима:

- $f(1) = 1$,
- $f(2n) = 2f(n)$ и
- $f(4n+1) = f(4n+3) = f(2n) + f(2n+1)$ за све $n \in \mathbb{N}_0$.

Доказати да за све n важи $f(n) \geqslant \frac{n}{3}$. Када се достиже једнакост?

Четврти разред – А категорија

1. Наћи све природне бројеве n за које је полином $(x+1)^n - x^n - 1$ дељив полиномом

a) $x^2 + x + 1$;

b) $(x^2 + x + 1)^2$.

2. Одредити све тројке (p, q, r) различитих простих бројева за које је

$$\frac{1}{p} + \frac{2}{p+q} + \frac{101}{p+q+r}$$

природан број.

3. Дат је јединични квадрат $ABCD$. Нека $d(U, VW)$ означава растојање тачке U од праве VW. Одредити за коју се тачку X из равни квадрата $ABCD$ достиже минимална вредност израза $AX + BX + d(X, CD)$, и израчунати ту вредност.

4. Нека је функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ дефинисана на следећи начин: ако је $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ канонична факторизација броја n, тада важи

$$f(n) = |\{i \leqslant k : \alpha_i = 1\}|.$$

(На пример: $f(2016) = f(2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^1) = 1$; $f(100) = f(2^2 \cdot 5^2) = 0$.) Да ли је за сваки природан број N могуће наћи N узастопних природних бројева таквих да за сваки број n у том низу важи $f(n) = 2016$?

5. Дато је 10 новчића поређаних у врсту. Међу њима су два лажна, и за њих је познато да су суседни. У једном питању дозвољено је одабрати скуп новчића A и питати колико има лажних међу њима. Могуће је поставити два питања, при чему ће одговори уследити тек након што оба питања буду постављена.

a) Да ли је на овај начин могуће одредити лажне новчиће?

b) Да ли је на овај начин могуће одредити лажне новчиће, уз додатно ограничење да се скуп A мора састојати од неколико узастопних новчића?

Први разред – Б категорија

1. На једном великом математичком такмичењу учествује 2016 ученика. Неки од њих су из исте школе, неки нису. Доказати да је могуће изабрати 32 ученика који су сви из различитих школа, или је могуће изабрати 66 ученика који су сви из исте школе.

2. Одредити све природне бројеве n за које је израз $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2$ дељив са 10.

3. Наћи све тројке (x, y, z) природних бројева за које важи

$$xy^2z^3 = 384;$$
$$x^2y^3z = 1152.$$

4. Нека је a фиксиран реалан број. Решити једначину

$$|2x+a|-ax=2$$

(решење изразити у зависности од параметра a).

5. Дат је $\triangle ABC$ са страницама $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Тачке D и E су дате на страницама AB и AC, редом, при чему је права DE тангента на уписану кружницу у $\triangle ABC$ и важи $DE \parallel BC$. Одредити дужину дужи DE (одговор изразити у функцији од страница a, b и c).

Други разред – Б категорија

1. Да ли је број $2015\sqrt[3]{3}+2016\sqrt{2}$ рационалан или ирационалан?

2. Одредити параметар k такав да решења једначине

$$(k-1)x^2-2kx+4=0$$

можемо обележити са x_1 и x_2 на такав начин да важи $x_1^2-3x_2^2=4$.

3. Нека су a и b природни бројеви. Доказати да бар један од бројева

$$\frac{a}{b}+\frac{2014}{2015} \quad \text{и} \quad \frac{b}{a}+\frac{2016}{2015}$$

није природан број.

4. Нека је дат правоугаоник $ABCD$ и тачка M у његовој равни. Ако важи $AM=40$, $BM=5$ и $CM=21$, одредити дужину дужи DM.

5. Карте означене бројевима 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 постављене су на сто у овом поретку. Влада први прилази столу и мења места неким двема картама, а потом столу прилази Воја те и он мења места неким двема картама. Колико различитих распореда карата је на овај начин могуће добити?

Трећи разред – Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sin 3x+2\cos 2x+3\sin x+4=0.$$

2. Да ли је вредност израза

$$\sqrt[3]{6+\frac{11}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{6-\frac{11}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$$

природан број?

3. Дата је бесконачна табла чија су поља јединични квадратићи. Свако поље обојено је црном или белом бојом, при чему сваки правоугаоник формата 2×3 (или 3×2) садржи тачно два црна поља.

a) Колико све црних поља може имати правоугаоник 1×3?

b) Колико све црних поља може имати квадрат 2016×2016?

4. Дешифровати сабирање

$$\begin{array}{rr} & ОКРУЖНО \\ + & ДОБРО \\ + & ДОБРО \\ + & БРАВО \\ + & БРАВО \\ \hline & ДРЖАВНО \end{array}$$

ако је познато да истим словима одговарају исте а различитим словима различите цифре, и притом је P непарна цифра а B је парна цифра.

5. Одредити све природне бројеве $n \geqslant 5$ такве да за правилан n-тоугао $A_1A_2 \ldots A_n$ важи

$$\left(\frac{A_1A_3}{A_1A_2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{A_1A_5}{A_1A_3} + 3 \cdot \left(\frac{A_1A_2}{A_1A_4}\right)^2.$$

Четврти разред – Б категорија

1. Израчунати запремину праве четворостране пирамиде $ABCDE$ ако је њена основа правоугаоник чије дужине страница износе $AB = 32$ и $AD = 18$, а површине бочних страна налазе се у размери $P(\triangle ABE) : P(\triangle ADE) = 4 : 3$.

2. Нека углови α, β и γ неког троугла задовољавају систем:

$$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = \frac{3-\sqrt{3}}{8};$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta = \frac{3}{2}.$$

Одредити углове тог троугла.

3. Теткица пише по табли следећи број: 23012301..., тј. прво напише цифру 2, па цифру 3, па цифру 0, па цифру 1 и тако укруг. Може се зауставити у било ком тренутку. Да ли она на овај начин може на табли написати број дељив са 2016?

4. Попунити празна поља у таблици тако да бројеви у свакој врсти и свакој колони чине аритметичку прогресију. Колико различитих решења постоји?

				21
	16			
		27		
1				

5. Нека је $P(x)$ полином са реалним коефицијентима степена n чије су све нуле реалне и веће од 1. Доказати да $P(x)$ има нулу која није мања од $1+n\left|\dfrac{P(1)}{P'(1)}\right|$.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 5. 3. 2016.

Први разред – А категорија

1. Нека је операција „$\diamond$“ на скупу $G=\{1,2,3,\ldots,2016\}$ задата доњом таблицом.

$\diamond$	1	2	3	4	$\cdots$	2016
1	5	5	5	5	$\cdots$	5
2	1	2	5	5	$\cdots$	5
3	4	3	5	5	$\cdots$	5
4	5	5	5	5	$\cdots$	5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
2016	5	5	5	5	$\cdots$	5

(Унутар таблице на свим местима која нису експлицитно наведена налази се број 5.) Испитати да ли је операција „$\diamond$“ асоцијативна.

2. Дат је оштроугли $\triangle ABC$ у ком важи $AB<AC$. Тачка D је средиште странице BC, а p је права симетрична правој AD у односу на симетралу $\measuredangle BAC$. Ако је P подножје нормале из темена C на праву p, доказати једнакост $\measuredangle APD=\measuredangle BAC$.

3. Свака тачка тродимензионалног простора је обојена једном од две боје: црвеном или плавом. Притом, ако су три тачке A, B и C обојене истом бојом и важи $AB = AC$, онда је и средиште дужи BC обојено истом том бојом. Доказати да постоји квадар чија су сва темена обојена истом бојом.

4. Производ биномног коефицијента $\binom{64}{21}$ и непознатог непарног броја износи

$$5{*}\,6{*}0\,{*}8{*}\,862\,{*}1{*}\,7{*}7\,{*}4{*}\,4{*}5\,12{*}\,9{*}{*}.$$

Одредити цифре означене звездицом.

Други разред – А категорија

1. Одредити број пресликавања $f : \{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ која задовољавају:

- $f(x,x) = x$ за све $x \in \{1,2,3,4\}$ и
- $f(x, f(x,y)) = f(x,y)$ за све $x \in \{1,2,3,4\}$.

2. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да важи

$$f(x)f(x-y) + f(y)f(x+y) = x^2 + f(y)^2 \text{ за све } x, y \in \mathbb{R}.$$

3. Наћи сва решења (p, a, b, m) једначине

$$p^2 + 4^a 9^b = m^2,$$

где је p прост број и $a, b, m \in \mathbb{N}_0$.

4. Дат је $\triangle ABC$. Нека је D средиште дужи BC. Нека је k кружница описана око $\triangle ABD$. На луку $\widehat{AB}$ ком не припада тачка D уочимо тачку E такву да важи $\measuredangle EDB = \measuredangle DAC$. Нека нормала из A на AD сече праву BC у тачки F. Нека је G друга пресечна тачка праве FE са k; изузетно, ако је FE тангента на k, тада дефинишимо $G \equiv E$. Доказати: $DG = DB$.

Трећи разред – А категорија

1. Дат је $\triangle ABC$. Симетрала $\measuredangle BAC$ сече страницу BC у тачки D. Нека је M средиште дужи BD. Уочимо кружницу k која пролази кроз тачку A, додирује страницу BC у тачки D, и сече дужи AM и AC у тачкама P и Q, редом ($P, Q \not\equiv A$). Доказати да су тачке B, P и Q колинеарне.

2. Да ли постоји природан број n такав да су $n-2015$ и $\frac{n}{2015}$ природни бројеви који имају тачно 2015 делилаца?

3. У току је велики скуп n мудраца који седе за округлим столом. Сваки мудрац или увек лаже или увек говори истину. Места на којима мудраци седе су нумерисана од 1 до n почевши од неког места и идући редом у смеру казаљке на сату гледано одозго. Новинар, желећи да утврди који су мудраци лажљивци, ишао је редом око стола и интервјуисао мудраце, и за свако k, $k = 1, 2, \ldots, n$, мудрац на k-том месту му је рекао да су следећих k мудраца од њега у смеру казаљке на сату гледано одозго сви лажљивци.

a) За које вредности n је могуће да мудраци дају овај скуп изјава?

b) За које вредности n (међу оним вредностима за које је овакав скуп изјава могућ) новинар и даље неће бити у стању да утврди за сваког мудраца да ли је лажљивац или истинољубац?

c) За $n = 2016$ одредити на којим местима седе мудраци истинољупци.

4. Нека је дата функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ која није константна таква да важи

$$f(x)f(x-y) + f(y)f(x+y) = f(x)^2 + f(y)^2 \text{ за све } x, y \in \mathbb{R}.$$

Доказати: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ за све $x, y \in \mathbb{R}$.

Четврти разред – А категорија

1. Означимо са A', B' и C', редом, подножја висина из темена A, B и C у $\triangle ABC$. Нека су I_A, I_B и I_C центри уписаних кружница у $\triangle AB'C'$, $\triangle BA'C'$ и $\triangle CA'B'$, редом. Доказати да је ортоцентар $\triangle I_AI_BI_C$ уједно и центар уписане кружнице у $\triangle ABC$.

2. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ реални бројеви. Познато је да за свако i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, постоји природан број k такав да важи $x_i + x_{i+1} + \cdots + x_{i+k-1} \geqslant 0$ (где индексе посматрамо циклично по модулу n). Доказати: $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqslant 0$.

3. Дат је природан број n. Доказати да за сваки непаран број x постоји природан број y такав да важи $y^y \equiv x \pmod{2^n}$.

4. Кажемо да се многоугао $\mathscr{M}_0$ у равни може *обмотати са n копија* ако постоје многоуглови $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, \ldots, \mathscr{M}_n$ подударни с многоуглом $\mathscr{M}_0$ такви да важи:

1° свака два многоугла $\mathscr{M}_i$ и $\mathscr{M}_j$, $0 \leqslant i < j \leqslant n$, имају дисјунктне унутрашњости;

2° сваки од многоуглова $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, \ldots, \mathscr{M}_n$ има бар једну заједничку рубну тачку с многоуглом $\mathscr{M}_0$;

3° $\bigcup_{i=0}^{n} \mathscr{M}_i$ је многоугао такав да је строго у његовој унутрашњости садржан многоугао $\mathscr{M}_0$.

Да ли постоји многоугао којим се не може поплочати раван, а који се може обмотати са 8 копија?

Први разред – Б категорија

1. a) Полином $x^8 + x^4 + 1$ представити као производ три полинома степена бар 1.

b) Рационалисати именилац разломка $\dfrac{1}{1 + \sqrt[4]{3} + \sqrt{3}}$.

2. Посматрајмо број

$$122333\ldots\underbrace{99\ldots9}_{9\text{ пута}}\underbrace{1010\ldots10}_{10\text{ пута}}\ldots\underbrace{2020\ldots20}_{20\text{ пута}}$$

(дакле, посматрани број добијен је надовезивањем броја 1 записаног једном, броја 2 записаног два пута, броја 3 записаног три пута итд. до броја 20 записаног двадесет пута). Испитати да ли је посматрани број:

a) дељив са 9;

b) дељив са 11;

c) потпун квадрат;

d) дељив са 16.

3. Да ли постоји пермутација $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ бројева $1, 2, 3, 4, 5$ таква да важи

$$(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)(a_4+a_5)(a_5+a_1) = (a_1+a_3)(a_3+a_5)(a_5+a_2)(a_2+a_4)(a_4+a_1)?$$

4. У једнакокраком $\triangle ABC$, $AB = BC$, тачка M је подножје висине из темена B, а симетрала $\measuredangle BAC$ сече страницу BC у тачки K. Ако важи $2BM = AK$, одредити углове тог троугла.

5. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$. Конструисати праву која пролази кроз теме A и дели тај четвороугао на два дела једнаких површина.

Други разред – Б категорија

1. Решити неједначину

$$\log_{2-\frac{1}{5}x}(x^2-4x+4)<2.$$

2. Решити систем једначина

$$\begin{aligned} 3x^2+2xy+6y^2&=24;\\ x^4+4y^4&=64. \end{aligned}$$

3. Одредити све природне бројеве n за које је

$$1+2\cdot 3^n+10^n+19^n$$

потпун квадрат природног броја.

4. Посматрајмо систем једначина

$$\begin{aligned} y_1+y_2+\cdots+y_{1000}&=2016;\\ y_n&=x_n^{2^{2^n}} \quad \text{за } n=1,2,3,\ldots,1000. \end{aligned}$$

(Дакле, систем има 1001 једначину и укупно 2000 непознатих.) Колико решења $(x_1,x_2,\ldots,x_{1000},y_1,y_2,\ldots,y_{1000})$ има посматрани систем у скупу ненегативних целих бројева?

5. Дат је оштроугли $\triangle ABC$. Конструисати нормалу на страницу AB која дели $\triangle ABC$ на два дела једнаких површина.

Трећи разред – Б категорија

1. Дати су вектори $\vec{a}=(-3,-2,1)$ и $\vec{b}=(1,1,3)$. Одредити, ако постоји, реалан број r такав да вектор $(1,r,-2)$ гради угао од 60° са вектором $\vec{a}\times(\vec{b}-\vec{a})$.

2. Дата је трака 2015×1 подељена на јединичне квадратиће. Два играча наизменично уписују X у произвољан квадратић, под условом да он није већ попуњен. Добија први играч који постигне да након његовог потеза постоје бар 3 узастопна квадратића обележена словом X. Доказати да први играч има победничку стратегију.

3. Природни бројеви a, b и c су такви да је број $a+b+c$ прост и важи

$$ab+bc+ac \mid a^2+b^2+c^2.$$

Доказати: $a = b = c = 1$.

4. У правоуглом троуглу тежишне линије које одговарају катетама заклапају угао φ за који важи $\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{4}$. Наћи углове тог троугла.

5. За позитивне реалне бројеве a и b означимо

$$S(a,b) = \min\left(a, b, \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Наћи највећу могућу вредност за $S(a,b)$ и за које a и b се та вредност достиже.

Четврти разред – Б категорија

1. Дат је полином

$$P(x) = 3x^5 + ax^4 - 35x^3 + bx^2 + 32x + c$$

чије су две нуле $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$, и важи $x_3x_4x_5 = 2$. Наћи коефицијенте a, b и c и преостале нуле.

2. Теткица с Окружног такмичења поново пише по табли, овај пут по следећем обрасцу. На почетку је на табли написана променљива x. У једном кораку теткица бира произвољна два израза која постоје на табли (укључујући могућност да узме исти израз два пута) и на таблу дописује њихов производ. Колико најмање корака је потребно да би се на табли добио израз x^{1025}?

3. Природан број n има следећу особину: за свако k из интервала $2 \leqslant k \leqslant m$ (где је m унапред фиксиран природан број) број kn је потпун k-ти степен (другим речима, $2n$ је потпун квадрат, $3n$ је потпун куб, ..., mn је потпун m-ти степен). Одредити највећи природан број m за који постоји такав природан број n.

4. За које вредности реалних параметара a и b систем

$$\begin{aligned} xyz + z &= a; \\ xyz^2 + z &= b; \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 4 \end{aligned}$$

има јединствено решење у скупу реалних бројева?

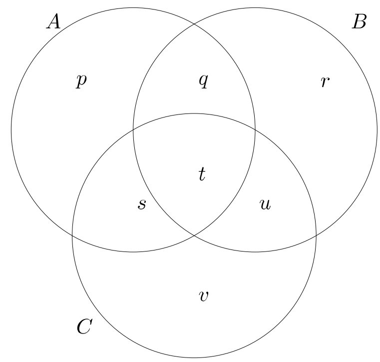
5. Тетраедар $ABCD$ има дужине ивица $AB = 1$ и $BD = 2$, а $\measuredangle BAD$ и $\measuredangle ABC$ су прави. Сфера додирује пљосни ABD и BCD у тачкама A и C, редом. Наћи полупречник те сфере.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 12. 12. 2015.

1. Означимо са p, q, r, s, t, u и v кардиналности одговарајућих делова Веновог дијаграма као на слици. Тада имамо $|A \triangle C| = p+q+u+v$, $|B \triangle C| = q+r+s+v$ и $|A \triangle B| = p+s+r+u$. Дакле, једнакост из поставке преводи се на

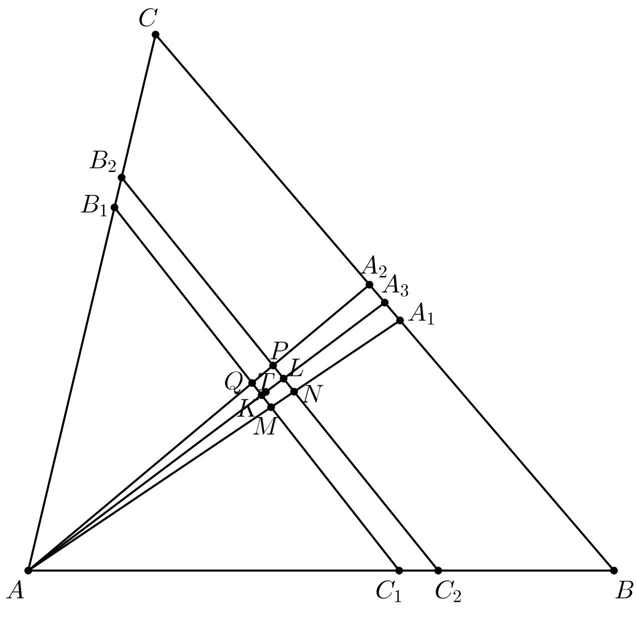
$$p + 2q + r + s + u + 2v = p + s + r + u,$$

што се своди на $2q + 2v = 0$, а одавде добијамо $q = v = 0$. Но, $q = 0$ даје управо $A \cap B \subseteq C$, а $v = 0$ даје $C \subseteq A \cup B$, што је и требало доказати.



Оп 2015 1А 1

2. Обојимо првих 2015 столица произвољно. У тачно једном од два могућа бојења преостале столице број посматраних парова биће паран. Зато је тражени број 2^{2015}.



Оп 2015 1А 3

3. Ако је тачка A_3 средиште дужи A_1A_2, лако се види да је она истовремено средиште странице BC. Стога се у $\triangle ABC$ његово тежиште T налази на дужи AA_3, па ако су K и L пресеци AA_3 са дужима MQ и NP, довољно је доказати да се T налази између K и L (пошто је четвороугао $MNPQ$ очито конвексан). Означимо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{x}$ и $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{y}$. Како се тачка K налази на дужи B_1C_1, важи

$$\overrightarrow{AK} = m\overrightarrow{AC_1} + (1-m)\overrightarrow{AB_1} = \frac{2015m}{3015}\overrightarrow{x} + \frac{2015(1-m)}{3031}\overrightarrow{y}$$

за неко $m \in (0,1)$. С друге стране, пошто је вектор $\overrightarrow{AK}$ колинеаран са $\overrightarrow{AA_3}$, важи

$$\overrightarrow{AK} = q\overrightarrow{AA_3} = \frac{q}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{q}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{q}{2}\overrightarrow{x} + \frac{q}{2}\overrightarrow{y}$$

за неко $q \in (0,1)$. Изједначавањем $\overrightarrow{x}$ и $\overrightarrow{y}$ компоненте добијамо систем $\frac{2015m}{3015} = \frac{q}{2}$ и $\frac{2015(1-m)}{3031} = \frac{q}{2}$, одакле добијамо $q = \frac{4030}{6046}$, то јест

$$\overrightarrow{AK} = \frac{4030}{6046}\overrightarrow{AA_3}.$$

Слично, за $\overrightarrow{AL}$ имамо

$$\overrightarrow{AL} = n\overrightarrow{AC_2} + (1-n)\overrightarrow{AB_2} = \frac{2015n}{3014}\overrightarrow{x} + \frac{2015(1-n)}{3030}\overrightarrow{y}$$

за неко $n \in (0,1)$, а такође и

$$\overrightarrow{AL} = p\overrightarrow{AA_3} = \frac{p}{2}\overrightarrow{x} + \frac{p}{2}\overrightarrow{y}$$

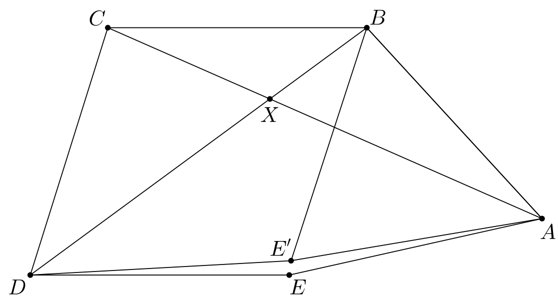
за неко $p \in (0,1)$, па добијемо систем $\frac{2015n}{3014} = \frac{p}{2}$ и $\frac{2015(1-n)}{3030} = \frac{p}{2}$, одакле следи $p = \frac{4030}{6044}$, то јест

$$\overrightarrow{AL} = \frac{4030}{6044}\overrightarrow{AA_3}.$$

Најзад, из једнакости $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_3}$ и неједнакости $\frac{4030}{6046} < \frac{2}{3} = \frac{4030}{6045} < \frac{4030}{6044}$ следи да је T између K и L, па самим тим и унутар четвороугла $MNPQ$.

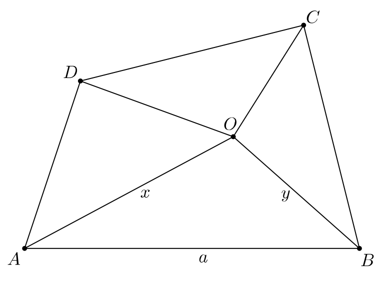
4. Претпоставимо прво $a_1 > 5$. То значи да у посматраном низу не можемо имати три узастопна члана која се разликују за по 2 (тј. k, $k+2$, $k+4$) и исто за 4 (тј. k, $k+4$, $k+8$), јер је један од та три броја дељив са 3, а како су сви чланови низа већи од 3, он не би могао бити прост. Зато, ако је следећи члан низа за 2 већи од претходног, онда члан након њега мора бити већи за 4 и обратно. Дакле, имамо два случаја: у првом случају посматрани низ почиње бројевима $a_1, a_1+2, a_1+6, a_1+8, a_1+12, a_1+14\ldots$, а у другом случају почиње бројевима $a_1, a_1+4, a_1+6, a_1+10, a_1+12, a_1+16, a_1+18\ldots$. У првом случају чланови $a_1, a_1+2, a_1+6, a_1+8, a_1+14$ дају међусобно различите остатке при дељењу са 5, а како су сви већи од 5, међу њима бар један није прост; у другом случају чланови $a_1, a_1+4, a_1+6, a_1+12, a_1+18$ дају међусобно различите остатке при дељењу са 5, па поново бар један међу њима није прост. Према томе, у првом случају низ може имати највише 5, а у другом највише 6 елемената.

Остаје још да испитамо случај $a_1 \leqslant 5$. Тада имамо $a_1 = 3$ или $a_1 = 5$. Уколико важи $a_1 = 5$, додавањем броја 3 на почетак низа постављени услови се не ремете а низ се продужава за један елемент; дакле, довољно је разматрати случај $a_1 = 3$. Тада важи $a_2 = 5$ или $a_2 = 7$. Уколико би важило $a_2 = 7$, додавањем броја 5 на друго место у низу добијамо дужи низ; дакле, довољно је разматрати случај $a_2 = 5$. Сада се испоставља да се наредни чланови низа могу једнозначно одредити на основу услова из поставке, те добијамо низ $3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$, при чему следећи члан више не можемо одабрати према постављеном правилу. На основу изведених закључака примећујемо да је овај низ уједно и максималне могуће дужине, па тражена максимална дужина износи 8.



Оп 2015 1А 5

5. Нека се дијагонале AC и BD секу у тачки X под углом од 60°. Приметимо да не може важити $\measuredangle BXC = 60^\circ$. Заиста, тада бисмо имали $120^\circ = \measuredangle XBC + \measuredangle XCB = (90^\circ - \frac{\measuredangle BCD}{2}) + (90^\circ - \frac{\measuredangle ABC}{2})$, па следи $\measuredangle ABC + \measuredangle BCD = 120^\circ$, што је у контрадикцији са $\measuredangle XBC + \measuredangle XCB = 120^\circ$. Према томе, $\measuredangle BXC = 120^\circ$. Сада имамо $(90^\circ - \frac{\measuredangle BCD}{2}) + (90^\circ - \frac{\measuredangle ABC}{2}) = 60^\circ$, тј. $\measuredangle ABC + \measuredangle BCD = 240^\circ$. Ако је E' тачка таква да је $\triangle ABE'$ једнакостраничан, онда имамо $BE' \parallel CD$ и $BE' \cong CD$, па је $BCDE'$ паралелограм и $AE' = DE' = BC$. Уколико важи $E' \equiv E$, одмах добијамо $DE \parallel BC$; уколико важи $E' \not\equiv E$, тада је $AE'DE$ паралелограм, па следи $AE \parallel DE' \parallel BC$, што опет завршава доказ.



Оп 2015 2А 1

Други разред – А категорија

1. Нека је уочена тачка O у унутрашњости четвороугла $ABCD$ као у поставци. Тада је бар један од $\measuredangle AOB$, $\measuredangle BOC$, $\measuredangle COD$ или $\measuredangle DOA$ прав или туп. Без умањења општости, узмимо $\measuredangle AOB \geqslant 90°$. Означимо дужине $OA = x$, $OB = y$, $AB = a$. Претпоставимо супротно: ниједна од дужи OA, OB, OC, OD није дужине мање од 15; специјално, $x \geqslant 15$ и $y \geqslant 15$. Сада имамо низ неједнакости

$$400 > a^2 \geqslant x^2 + y^2 \geqslant 15^2 + 15^2 = 450,$$

чиме смо добили контрадикцију која завршава доказ.

2. А има победничку стратегију за све непарне n. У првом потезу он одабира средишње поље, а у сваком следећем потезу уписује X у поље централносиметрично пољу које је непосредно пре тога одабрао играч Б (на тај начин, уколико Б може да одигра потез према правилима игре, то ће моћи и играч А после њега). Слично, Б има победничку стратегију за све парне n, тако што на сваки потез играча А играч Б одговара одабиром поља централносиметричног пољу које је играч А управо одабрао (централну симетрију посматрамо у односу на средину табле).

3. Јасно је да важи $x > y$, па напишимо постављену једначину у облику $2^y(2^{x-y} - 1) = 2^{5z}3^{2z}7^z$. Пошто је $2^{x-y} - 1$ непаран број, мора важити $y = 5z$. Заменом $x - 5z = n \in \mathbb{N}$ добијамо једначину $2^n - 1 = 63^z$. Ако би z било парно, тада би следило $63^z + 1 \equiv 2 \pmod 4$, тј. $2^n = 2$, што повлачи $n = 1$ и онда $z = 0$, што није у скупу природних бројева. Према томе, z је непарно, па можемо раставити $2^n = 63^z + 1 = (63 + 1)(63^{z-1} - 63^{z-2} + ... + 1)$. Међутим, како је број $63^{z-1} - 63^{z-2} + ... + 1$ непаран а притом дели 2^n, ово је могуће само уколико је тај број једнак 1, а што је испуњено само за $z = 1$. Одатле добијамо $n = 6$, на основу чега налазимо једино решење постављене једначине: $(x, y, z) = (11, 5, 1)$.

4. По неједнакости између аритметичке и геометријске средине имамо

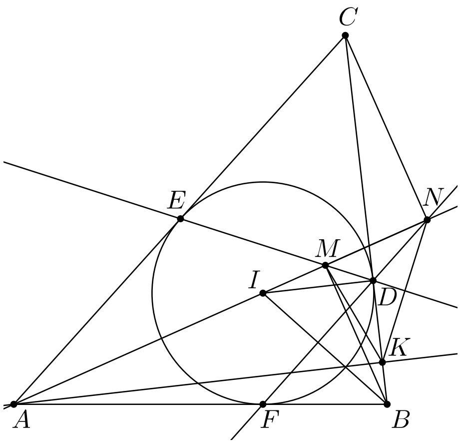
$$1 + a = 1 + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{4}},$$

$$a + b = a + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{ab^2}{4}}$$

и

$$8 + b = b + 4 + 4 \geqslant 3\sqrt[3]{16b}.$$

Множењем добијамо $(1+a)(a+b)(b+8) \geqslant 27ab$. Дакле, једнакост из поставке важи само када у све три примене неједнакости између аритметичке и



Оп 2015 2А 5

геометријске средине важи једнакост, а што даје једино решење $(a, b) = (2, 4)$.

5. Означимо са I центар кружнице уписане у $\triangle ABC$. Докажимо најпре да важи $\measuredangle AMB = 90^\circ$: заиста, $\measuredangle IMD = \measuredangle MAE + \measuredangle MEA = \frac{\alpha}{2} + (90^\circ + \frac{\gamma}{2}) = 180^\circ - \frac{\beta}{2} = 180^\circ - \measuredangle DBI$, па је четвороугао $IMDB$ тетиван и $\measuredangle IMB = \measuredangle IDB = 90^\circ$. Слично имамо $\measuredangle ANC = 90^\circ$. Четвороуглови $AMKB$ и $AKNC$ су сада тетивни, па следи $\measuredangle KMN = \measuredangle KBA = \beta = 2\measuredangle AME = 2\measuredangle DMN$; на исти начин имамо $\measuredangle KNM = 2\measuredangle DNM$, одакле следи тврђење.

Трећи разред – А категорија

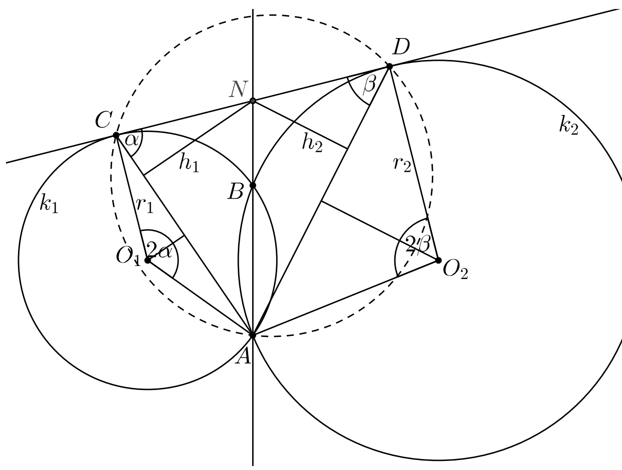
1. Дату једначину можемо записати у облику

$$\frac{p_1+1}{p_1} \cdot \frac{p_2+1}{p_2} \cdots \frac{p_n+1}{p_n} = q.$$

Да би на левој страни био природан број, сваки од простих чинилаца $p_1, p_2, \ldots, p_n$ из именилаца мора делити неки бројилац. Затим, да би након извршених свих таквих скраћивања на левој страни остао прост број (тј. q), сви бројиоци морају бити прости, осим једног, који мора бити производ тачно два проста броја. Дакле, сви бројиоци сем тог једног (нека је тај $p_n + 1$) морају бити једнаки 3 (јер је 3 једини прост број који се може добити увећавањем неког простог броја за 1). Према томе, имамо $p_1 = p_2 = \cdots = p_{n-1} = 2$. Једначина се своди на $\frac{3^{n-1}(p_n+1)}{2^{n-1}p_n} = q$. Одатле добијамо $p_n = 3$ (ниједан други прост број на месту p_n не би се могао скратити ни са чим из бројиоца). Приметимо још да важи $n \geqslant 2$ (јер у супротном број на левој страни не би био природан). Након скраћивања остаје $\frac{3^{n-2}\cdot 2}{2^{n-2}} = q$. За $n \geqslant 4$ лева страна није природан број. У случају $n = 2$ лева страна износи 2, па тиме добијамо решење $(p_1, p_2, q) = (2, 3, 2)$, као и његову пермутацију $(p_1, p_2, q) = (3, 2, 2)$. У случају $n = 3$ лева страна износи 3, па тиме добијамо решење $(p_1, p_2, p_3, q) = (2, 2, 3, 2)$, као и његове пермутације $(p_1, p_2, p_3, q) = (2, 3, 2, 2)$ и $(p_1, p_2, p_3, q) = (3, 2, 2, 2)$. Укупно, дакле, посматрана једначина има пет решења.

2. Приметимо да у неком низу природних бројева свака два суседна елемента имају парну разлику ако и само ако су сви елементи исте парности. Стога ћемо посебно пребројати низове чији су сви елементи парни а посебно низове чији су сви елементи непарни. Како у скупу $\{1, 2, \ldots, n\}$ парних бројева има $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, број неопадајућих низова дужине k чији су сви елементи парни износи $\binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + k - 1}{k}$. Слично, низова са свим непарним члановима има $\binom{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + k - 1}{k}$, па тражени укупан број низова износи $\binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + k - 1}{k} + \binom{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + k - 1}{k}$.

3. За $x = n$ имамо $n^x - x^n = n^n - n^n = 0$, па $m \mid n^x - x^n$. Дакле, довољно је наћи бесконачно много вредности x таквих да важи $x^n \equiv n^n \pmod{m}$ и $n^x \equiv n^n \pmod{m}$. Прва конгруенција је испуњена кад год важи $x = n + km$ за произвољно $k \in \mathbb{Z}$. Друга конгруенција је испуњена кад год важи $x = n + l\varphi(m)$ за произвољно $l \in \mathbb{N}_0$: заиста, тада имамо $n^x = n^{n + l\varphi(m)} = n^n \cdot (n^{\varphi(m)})^l \equiv n^n \cdot 1^l = n^n \pmod{m}$. Дакле, за ма које $d \in \mathbb{N}_0$, број $n + dm\varphi(m)$ испуњава тражене услове, чиме је показано да их има бесконачно много.



Оп 2015 3А 4

4. Означимо кружницу из поставке с полупречником r_1 са k_1 ($C \in k_1$), и нека је њен центар тачка O_1; другу кружницу означимо са k_2 ($D \in k_2$) и нека је њен центар тачка O_2. Означимо још $\measuredangle AO_1C = 2\alpha$ и $\measuredangle AO_2D = 2\beta$. Тада важи $\measuredangle ACD = \alpha$ и $\measuredangle ADC = \beta$. Из синусне теореме примењене на $\triangle ACD$ добијамо $\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{AD}{\sin\alpha} = 2r$, а из једнакокраких $\triangle AO_1C$ и $\triangle AO_2D$ имамо $AC = 2r_1 \sin\alpha$ и $AD = 2r_2 \sin\beta$. Из свега тога добијамо

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\frac{AD}{2\sin\beta}}{\frac{AC}{2\sin\alpha}} = \frac{AD}{AC}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta},$$

тј. $\sqrt{\frac{r_2}{r_1}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. Даље, нека су висине из N на AC и AD, редом, h_1 и h_2.

Важи $h_1 = CN \sin\alpha$ и $h_2 = DN \sin\beta$. Посматрајући потенцију из тачке N добијамо једнакост $CN^2 = NB \cdot NA = DN^2$, тј. $CN = DN$. Сада лако израчунавамо $\frac{h_1}{h_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}$.

5. По неједнакости троугла имамо

$$3 = |z^{2015} + z^{2014} + |z|| \leqslant |z|^{2015} + |z|^{2014} + |z|.$$

Ако би важило $|z| < 1$, имали бисмо $|z|^{2015} < 1$ и $|z|^{2014} < 1$, тј. $|z|^{2015} + |z|^{2014} + |z| < 3$, што није могуће. Дакле, $|z| \geqslant 1$.

Применимо неједнакост троугла и на другу једнакост. Важи

$$3|z|^{2015} = |1 + z + |z|^{2014}| \leqslant 1 + |z| + |z|^{2014}.$$

Ако би важило $|z| > 1$, имали бисмо $|z|^{2015} > |z|$ и $|z|^{2015} > |z|^{2014}$, тј. $3|z|^{2015} > |z|^{2014} + |z| + 1$, што није могуће. Дакле, из претходног и овог закључка добијамо $|z| = 1$.

Приметимо да су за $|z| = 1$ лева и десна страна обе примењене неједнакости међусобно једнаке, тј. достиже се случај једнакости. Како је $|z|$ позитиван реалан број, у првој неједнакости троугла једнакост се може достићи само уколико су и z^{2015} и z^{2014} позитивни реални бројеви. Но, тада је и $\frac{z^{2015}}{z^{2014}}$ позитиван реалан број, тј. z је позитиван реалан број, па сада из $|z| = 1$ следи да је једино решење $z = 1$.

Четврти разред – А категорија

1. *Прво решење.* Важи

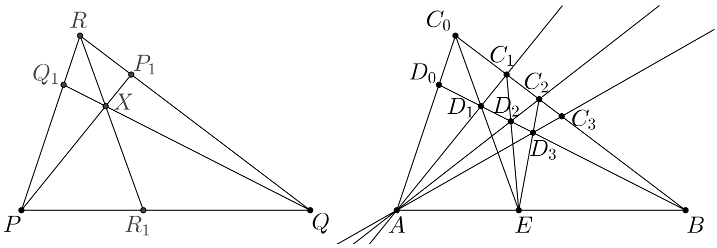
$$\begin{aligned} S &= a^3 + ab^2 + b^2 + b - 2a^2b - a^2 \\ &= a^3 - a^2b - a^2 - a^2b + ab^2 + ab - ab + b^2 + b = (a^2 - ab - b)(a - b - 1). \end{aligned}$$

Треба доказати $S \geqslant 0$. Из $a > b$ и $a, b \in \mathbb{N}$ следи $a - b - 1 \geqslant 0$ и $a^2 - ab - b = a(a - b) - b \geqslant a - b > 0$, чиме је задатак решен.

Друго решење. Запишимо $a = b + k$ ($k \in \mathbb{N}$). Уврштавањем овога у постављену неједнакост и сређивањем добијених израза установљавамо да преостаје још доказати неједнакост $k^3 + bk^2 + b - k^2 - 2bk \geqslant 0$. Она следи из неједнакости $k^3 - k^2 = k^2(k-1) \geqslant 0$ и $bk^2 - 2bk + b = b(k-1)^2 \geqslant 0$, чиме је задатак решен.

2. Докажимо најпре следећу лему.

Лема. Нека је дат $\triangle PQR$ и тачке R_1, P_1 и Q_1 на страницама PQ, QR и PR, редом, такве да се праве PP_1, QQ_1 и RR_1 секу у тачки X. Тада важи $\frac{PX}{XP_1} = \frac{PR_1}{R_1Q} + \frac{PQ_1}{Q_1R}$.



Оп 2015 4А 2

Доказ. Применом Менелајеве теореме на $\triangle PQP_1$ и праву RR_1 добијамо $\frac{P_1R}{RQ} = \frac{XP_1}{PX} \cdot \frac{PR_1}{R_1Q}$, а применом на $\triangle PRP_1$ и праву QQ_1 добијамо $\frac{P_1Q}{RQ} = \frac{XP_1}{PX} \cdot \frac{PQ_1}{Q_1R}$. Сабирањем ове две једнакости, коришћењем чињенице $P_1R + P_1Q = RQ$ и сређивањем доказујемо лему.

Сада узастопним примењивањем ове леме на $\triangle ABC_n$ за $n = 0, 1, 2\dots$ индукцијом директно показујемо $\frac{AD_n}{D_nC_n} = x+ny$; одатле имамо $\frac{AD_{2015}}{D_{2015}C_{2015}} = x + 2015y$.

3. Означимо са S_n скуп низова дужине n чији су елементи из скупа $\{1, 2, 3\}$ и који немају две узастопне јединице. Ако два различита низа из S_n почињу двојком, јасно је да преосталих $n-1$ елемената тих низова чине два различита низа из S_{n-1}. Обратно, ако узмемо два различита низа из S_{n-1} и додамо им двојку на почетак, добијамо два различита низа из S_n који почињу двојком. Према томе, низова из S_n који почињу двојком има $|S_{n-1}|$. На сличан начин добијамо и да низова из S_n који почињу тројком има $|S_{n-1}|$.

Ако низ из S_n почиње јединицом, други елемент низа мора бити двојка или тројка. Сличним закључивањем као у претходним случајевима констатујемо да низова из S_n који почињу јединицом има $2|S_{n-2}|$. Према томе, добијамо $|S_n| = 2(|S_{n-1}| + |S_{n-2}|)$. Сада почев од $|S_1| = 3$ и $|S_2| = 8$ директно израчунавамо $|S_8| = 3344$.

4. Ако важи $f \equiv 0$, тврђење је тривијално. Претпоставимо сада $f \not\equiv 0$, тј. $f(a) \neq 0$ за неко a. Приметимо да из $f(x_1) = f(x_2)$ следи $x_1f(a) = f(af(x_1)) = f(af(x_2)) = x_2f(a)$, тј. $x_1 = x_2$; дакле, функција f је ињективна. Даље имамо $f(f(x)) = f(1 \cdot f(x)) = xf(1)$; одавде за $x = 1$ добијамо $f(f(1)) = f(1)$, па због ињективности следи $f(1) = 1$ и онда $f(f(x)) = x$. Сада имамо $f(xy) = f(yf(f(x))) = f(x)f(y)$, па одатле $f(-1)^2 = f((-1)^2) = 1$, али због $f(-1) \neq f(1) = 1$ мора бити $f(-1) = -1$. Најзад, $f(-x) = f(-1)f(x) = -f(x)$, чиме је задатак решен.

5. Дефинишимо низ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ рекурзивно на следећи начин: $a_1 = 2$ и, за $n \geqslant 2$,

$$a_n = \begin{cases} (n+1)a_{n-1}, & \text{ако је } n+1 \text{ прост број;} \\ na_{n-1}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тврдимо да за све $n \in \mathbb{N}$ важи $\varphi(a_n) = n!$. Доказ спроводимо индукцијом. За $n = 1$ и $n = 2$ тврђење очигледно важи ($\varphi(a_1) = \varphi(2) = 1 = 1!$ и $\varphi(a_2) = \varphi(6) = 2 = 2!$). Претпоставимо да тврђење важи за све бројеве мање од датог n, $n \geqslant 3$. Ако је n прост број, тада имамо $a_n = na_{n-1} = n^2 a_{n-2}$, при чему прост број n не дели a_{n-2} (заиста, из дефиниције посматраног низа очито је да се прост фактор n први пут појављује тек у a_{n-1}); одатле, преко $\varphi(n^2) = n(n-1)$ (јер је n прост број) и $\varphi(a_{n-2}) = (n-2)!$ (по индуктивној хипотези), имамо $\varphi(a_n) = \varphi(n^2)\varphi(a_{n-2}) = n!$. Нека је сада n сложен број. Уколико је $n+1$ прост број, још лакше него малопре добијамо $\varphi(a_n) = \varphi((n+1)a_{n-1}) = \varphi(n+1)\varphi(a_{n-1}) = n \cdot (n-1)! = n!$. Преостао је случај када је и $n+1$ сложен број. Нека је $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ проста факторизација броја n. Приметимо да сваки од ових фактора p_i дели a_{n-1} (ово следи из $p_i \mid a_{p_i - 1}$ и $a_u \mid a_v$ за све $u \leqslant v$). Према томе, можемо записати $a_n = na_{n-1} = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} q_1^{\gamma_1} q_2^{\gamma_2} \cdots q_l^{\gamma_l}$, где за све i, $1 \leqslant i \leqslant k$, важи $\beta_i \geqslant \alpha_i + 1$, а са $q_1, q_2, \ldots, q_l$ означени су прости фактори који деле a_{n-1} али не деле n. Најзад израчунавамо:

$$\begin{aligned}
\varphi(a_n) &= \varphi(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} q_1^{\gamma_1} q_2^{\gamma_2} \cdots q_l^{\gamma_l}) \\
&= p_1^{\beta_1 - 1}(p_1 - 1) p_2^{\beta_2 - 1}(p_2 - 1) \cdots p_k^{\beta_k - 1}(p_k - 1) \\
&\qquad \cdot q_1^{\gamma_1 - 1}(q_1 - 1) q_2^{\gamma_2 - 1}(q_2 - 1) \cdots q_l^{\gamma_l - 1}(q_l - 1) \\
&= np_1^{\beta_1 - \alpha_1 - 1}(p_1 - 1) p_2^{\beta_2 - \alpha_2 - 1}(p_2 - 1) \cdots p_k^{\beta_k - \alpha_k - 1}(p_k - 1) \\
&\qquad \cdot q_1^{\gamma_1 - 1}(q_1 - 1) q_2^{\gamma_2 - 1}(q_2 - 1) \cdots q_l^{\gamma_l - 1}(q_l - 1) \\
&= n\varphi(p_1^{\beta_1 - \alpha_1} p_2^{\beta_2 - \alpha_2} \cdots p_k^{\beta_k - \alpha_k} q_1^{\gamma_1} q_2^{\gamma_2} \cdots q_l^{\gamma_l}) = n\varphi(a_{n-1}) = n \cdot (n-1)! \\
&= n!,
\end{aligned}$$

чиме је доказ завршен.

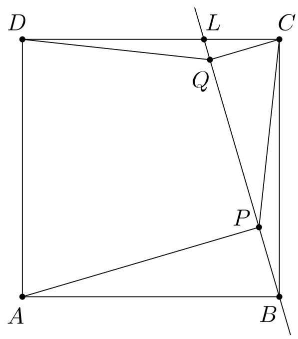
Први разред – Б категорија

1. Нека је U неки скуп такав да су A, B и C његови подскупови (на пример, $U = A \cup B \cup C$). Са $\overline{A}$, $\overline{B}$ и $\overline{C}$ означаваћемо комплемент скупова A, B и C у односу на скуп U (тј. $\overline{A} = U \setminus A$ и слично за B и C). Сада имамо:

$$\begin{aligned}
(A \setminus (B \setminus C)) \setminus (B \setminus (C \setminus A)) &= (A \setminus (B \cap \overline{C})) \setminus (B \setminus (C \cap \overline{A})) \\
&= (A \cap \overline{(B \cap \overline{C})}) \setminus (B \cap \overline{(C \cap \overline{A})}) \\
&= (A \cap \overline{(B \cap \overline{C})}) \cap \overline{(B \cap \overline{(C \cap \overline{A})})} \\
&= (A \cap (\overline{B} \cup C)) \cap (\overline{B} \cup (C \cap \overline{A})) \\
&= (A \cap (\overline{B} \cup C) \cap \overline{B}) \cup (A \cap (\overline{B} \cup C) \cap C \cap \overline{A}) \\
&= (A \cap \overline{B}) \cup (\varnothing \cap (\overline{B} \cup C) \cap C) = (A \cap \overline{B}) \cup \varnothing \\
&= A \cap \overline{B} = A \setminus B.
\end{aligned}$$

Дакле, пошто важи $B \cap C \subseteq B$, добијамо $A \setminus (B \cap C) \supseteq A \setminus B$, тј.

$$A \setminus (B \cap C) \supseteq (A \setminus (B \setminus C)) \setminus (B \setminus (C \setminus A)).$$



Оп 2015 1Б 2

2. За $\triangle ABP$ и $\triangle BCQ$ важи $AB \cong BC$, $\measuredangle APB = \measuredangle BQC = 90^\circ$ и $\measuredangle BAP = 90^\circ - \measuredangle ABP = \measuredangle CBQ$, па добијамо $\triangle ABP \cong \triangle BCQ$; одатле следи $BP \cong CQ$. Сада за $\triangle BCP$ и $\triangle CDQ$ важи $BC \cong CD$, $BP \cong CQ$ и $\measuredangle CBP = 90^\circ - \measuredangle BCQ = \measuredangle DCQ$, па добијамо $\triangle BCP \cong \triangle CDQ$. Из овога следи $CP \cong DQ$, што је и требало доказати.

3. Приметимо да важи

$$\begin{aligned}
\overline{ababab} &= \overline{ab0000} + \overline{ab00} + \overline{ab} \\
&= \overline{ab} \cdot 10000 + \overline{ab} \cdot 100 + \overline{ab} = \overline{ab} \cdot 10101.
\end{aligned}$$

Из $10101 = 91 \cdot 111$ следи да је број $\overline{ababab}$ дељив са 111. С друге стране, 107 је прост број који не дели ни 10101, ни $\overline{ab}$ (због $\overline{ab} < 107$), па 107 не дели ни $\overline{ababab}$.

4. За све $(x, y) \in A \times A$ важи $(x, y)\ \rho\ (x, y)$, јер имамо $(x^2 - x^2)(y - y) = 0$ и $3 \mid 0$. Дакле, релација ρ јесте рефлексивна. Даље, за све $(x, y), (z, t) \in A \times A$ важи

$$(x^2 - z^2)(y - t) = (-(z^2 - x^2))(-(t - y)) = (z^2 - x^2)(t - y),$$

одакле лако видимо да важи $(x, y)\ \rho\ (z, t)$ ако и само ако важи $(z, t)\ \rho\ (x, y)$, па добијамо да релација ρ јесте симетрична. Најзад, релација ρ

није транзитивна: на пример, важи $(1,2)\ \rho\ (3,2)$ (јер $3 \mid (1^2-3^2)(2-2)=0$) и $(3,2)\ \rho\ (3,3)$ (јер $3 \mid (3^2-3^2)(2-3)=0$), али $(1,2)$ није у релацији ρ са $(3,3)$ (јер $3 \nmid (1^2-3^2)(2^2-3^2)=40$). Како ова релација није транзитивна, она није релација еквиваленције.

5. Разликујемо 2 случаја. Ако су прва и последња куглица у низу плаве, од преосталих 2016 позиција у низу треба одабрати 3 на којима ћемо распоредити беле куглице (док на осталим позицијама распоређујемо плаве), што је могуће на $\binom{2016}{3} = \frac{2016!}{3!\cdot 2013!} = \frac{2016\cdot 2015\cdot 2014}{3!} = 336\cdot 2015\cdot 2014$ начина. У другом случају, ако су прва и последња куглица у низу беле, на преосталих 2016 места имамо тачно још једну белу куглицу, а њу је могуће распоредити на 2016 начина. Дакле, решење задатка је

$$336 \cdot 2015 \cdot 2014 + 2016.$$

Други разред – Б категорија

1. Ако важи $p^2+q^3=x^2$, тј. $q^3=x^2-p^2=(x-p)(x+p)$, онда због $x-p<x+p$ следи $(x-p,x+p)=(1,q^3)$ или $(x-p,x+p)=(q,q^2)$. У првом случају добијамо $2p=q^3-1=(q-1)(q^2+q+1)$, а једина два начина да се лева страна прикаже као производ два чиниоца су $1\cdot 2p$ и $2\cdot p$, што води до $q-1\in\{1,2\}$, тј. $q\in\{2,3\}$; за $q=2$ имамо $2p=2^3-1=7$, што је немогуће, а за $q=3$ имамо $2p=3^3-1=26$, одакле добијамо решење $(p,q)=(13,3)$. У другом случају добијамо $2p=q^2-q=(q-1)q$, те опет следи $q=2$ или $q=3$, и поново отпада могућност $q=2$, док за $q=3$ добијамо $2p=3^2-3$, па добијамо решење $(p,q)=(3,3)$. Дакле, имамо два решења: $(p,q)\in\{(13,3),(3,3)\}$.

2. Из Вијетових формула за почетну једначину важи $x_1+x_2=-1$ и $x_1x_2=\frac{2015}{12}$. Саставићемо квадратну једначину $y^2+py+q=0$ чија решења задовољавају $y_1=\frac{2x_1+1}{x_1-2}$ и $y_2=\frac{2x_2+1}{x_2-2}$. Из Вијетових формула за ову једначину имаћемо $-p=y_1+y_2=\frac{2x_1+1}{x_1-2}+\frac{2x_2+1}{x_2-2}=\frac{4x_1x_2-3(x_1+x_2)-4}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}=\frac{4\cdot\frac{2015}{12}-3\cdot(-1)-4}{\frac{2015}{12}-2\cdot(-1)+4}=\frac{8048}{2087}$, тј. $p=-\frac{8048}{2087}$, и $q=y_1y_2=\frac{2x_1+1}{x_1-2}\cdot\frac{2x_2+1}{x_2-2}=\frac{4x_1x_2+2(x_1+x_2)+1}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}=\frac{4\cdot\frac{2015}{12}+2\cdot(-1)+1}{\frac{2015}{12}-2\cdot(-1)+4}=\frac{8048}{2087}$. Дакле, тражена квадратна једначина (једна од више могућих) гласи:

$$y^2-\frac{8048}{2087}y+\frac{8048}{2087}=0.$$

3. Пера ће из корпе на којој пише *Рајко* извући само једну воћку. Та корпа је или Ђорђева (у њој су тада 2 крушке и 3 јабуке) или Перина (у њој су тада 3 бресксве). Ако је Пера извукао крушку или јабуку, јасно је да је та корпа Ђорђева; тада корпа на којој пише *Пера* припада Рајку, а корпа на којој пише *Ђорђе* припада Пери. Ако је Пера извукао бресксву, та корпа је његова, па је корпа на којој пише *Пера* у ствари Ђорђева, а корпа на којој пише *Ђорђе* припада Рајку.

4. Из једнакости дате у поставци добијамо:

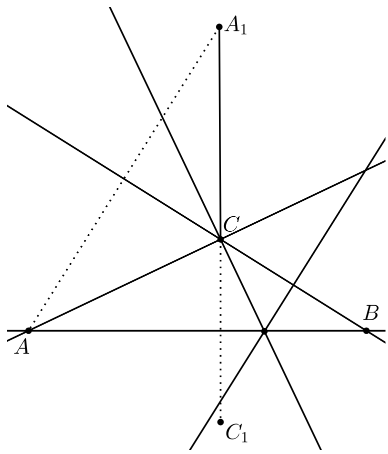
$$\begin{aligned} 0 &= a^3+b^3+c^3-a^2b-ab^2+b^2c+bc^2-a^2c-ac^2 \\ &= a(a^2-b^2-c^2)+b(b^2-a^2+c^2)+c(c^2+b^2-a^2) \\ &= (a-b-c)(a^2-b^2-c^2). \end{aligned}$$

Како су a, b и c странице троугла, важи $a-b-c<0$. Одатле, да би горња једнакост била испуњена, мора важити $a^2-b^2-c^2=0$, тј. $a^2=b^2+c^2$, а ово управо значи да је $\triangle ABC$ правоугли са хипотенузом a.

5. Обележимо углове у $\triangle ABC$ са α, β и γ. Размотримо прво случај када се тачке A_1 и C налазе са исте стране праве AB. У том случају важи $\alpha+\beta<90°$, тј. γ је туп угао.

Тачке C, A_1 и C_1 су колинеарне ако и само је права A_1C нормална на праву AB, тј. ако и само ако важи $\measuredangle ACA_1 - \measuredangle CAB = 90°$, што се своди на $90° = (\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)-\alpha = \alpha+2\beta$.

Права AB, симетрала дужи BC и нормала на праву AC у тачки C секу у једној тачки ако и само ако је троугао који образују права AB, права BC и нормала на праву AC у тачки C једнакокраки с основицом BC. Ово важи ако и само ако важи $\gamma-90°=\beta$, тј. $180°=\alpha+\beta+\gamma=\alpha+\beta+\beta+90°$, што се своди на $90°=\alpha+2\beta$. Како је исти овај потребан и довољан услов добијен и у претходном пасусу, тиме је задатак решен у случају када се тачке A_1 и C налазе са исте стране праве AB.



Оп 2015 2Б 5

Случај када се тачке A_1 и C налазе са разних страна праве AB решава се на сличан начин.

Трећи разред – Б категорија

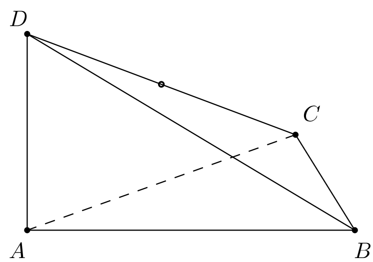
1. *Прво решење.* Нека је тачка (x_0, y_0) заједничка за посматране графике, где важи $x_0, y_0 > 0$. Тада имамо $y_0 = ax_0 + b$, $y_0 = bx_0 + c$ и $y_0 = cx_0 + a$. У случају да важи $a = b$, из $ax_0 + b = y_0 = bx_0 + c$ добијамо $b = c$, тј. $a = b = c$, што је и требало доказати. Претпоставимо сада $a \neq b$. Размотримо најпре случај $a < b$. Тада из $ax_0 < bx_0$ и $ax_0+b = y_0 = bx_0+c$ добијамо $b > c$, а потом из $bx_0 > cx_0$ и $bx_0 + c = y_0 = cx_0 + a$ добијамо $c < a$, тј. све заједно $c < a < b$, но сада из $y_0 = cx_0 + a < ax_0 + b = y_0$ имамо контрадикцију. Најзад, ако је испуњено $a > b$, тада поново имамо контрадикцију на потпуно аналоган начин, чиме је задатак решен.

Друго решење. Из једнакости $ax_0 + b = bx_0 + c$, $bx_0 + c = cx_0 + a$ и $cx_0+a = ax_0+b$ добијамо $(a-b)x_0 = c-b$, $(c-b)x_0 = c-a$ и $(c-a)x_0 = b-a$, а одавде даље следи $b - a = (c - a)x_0 = (c - b)x_0^2 = (a - b)x_0^3$, што се може записати и као $(a-b)(x_0^3+1) = 0$. Како важи $x_0^3+1 > 0$, добијамо $a-b = 0$, тј. $a = b$. Аналогно се доказује и $b = c$.

(За заинтересоване ученике, напоменимо да се задатак може решити и без услова да тачка (x_0, y_0) припада првом квадранту. Наиме, горње решење функционише у свим случајевима осим у случају $x_0^3 + 1 = 0$, тј. $x_0 = -1$, али тада се посматране једнакости своде на $y_0 = -a + b$, $y_0 = -b + c$ и $y_0 = -c + a$, а одавде опет лако следи $a = b = c$.)

2. Запишимо $2016 = abc$, где је a једноцифрен, b двоцифрен а c троцифрен број. Претпоставимо $a \geqslant 2$. Тада имамо $bc \leqslant 1008$, но како је најмањи двоцифрен делилац броја 2016 број 12, следи $bc \geqslant 12 \cdot 100 = 1200$, контрадикција. Дакле $a = 1$. Пронађимо првих неколико двоцифрених делилаца броја 2016: $12, 14, 16, 18, 21\ldots$ (они се могу добити из просте факторизације броја 2016: $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$). За $b = 12$ имамо $c = 168$; за $b = 14$ имамо $c = 144$; за $b = 16$ имамо 126; за $b = 18$ имамо $c = 112$. Тиме смо нашли засад 4 тражена представљања. За $b \geqslant 21$ имамо $c \leqslant \frac{2016}{21} = 96$, тј. c није више троцифрен број. Дакле, тражени број начина износи 4.

3. Користећи формулу $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, наша неједначина постаје $-\sin^2 x + 6\sin x - 5 > 0$. Увођењем смене $t = \sin x$ и решавањем по t добијамо решење $t \in (1, 5)$. Но, како имамо ограничење $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, јасно да ни за које x не добијамо $\sin x$ у траженом интервалу, па почетна неједначина нема решења.



Оп 2015 3Б 4

4. Довољно је доказати да су $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ правоугли са хипотенузом CD

(заиста, тада сфера с центром у средишту дужи CD и пречником CD пролази кроз тачке A и B, што је и требало доказати). Како је ивица AD нормална на раван ABC, добијамо $AD \perp AC$, одакле је $\triangle ACD$ заиста правоугли. Даље, поново из ортогоналности дужи AD на раван ABC добијамо и да су равни ABD и ABC међусобно нормалне, што уз ортогоналност равни BCD и ABD (дату у поставци) води до закључка да је ивица BC нормална на раван ABD (ово следи јер се равни ABC и BCD секу по правој BC). Но, одавде имамо $BC \perp BD$, па је и $\triangle BCD$ правоугли, чиме је доказ завршен.

5. Раставимо $n^9 - n^3 = n^3(n^3-1)(n^3+1)$. Кубови целих бројева при дељењу са 7 могу давати следеће остатке: $0^3 = 0$, $(\pm 1)^3 = \pm 1$, $(\pm 2)^3 = \pm 8 \equiv \pm 1 \pmod 7$ или $(\pm 3)^3 = \pm 27 \equiv \mp 1 \pmod 7$, тј. 0, 1 или -1, одакле следи да је број $n^3(n^3-1)(n^3+1)$ увек дељив са 7. Слично утврђујемо да кубови целих бројева при дељењу са 9 могу давати само остатке 0, 1 или -1, одакле следи да је број $n^3(n^3-1)(n^3+1)$ увек дељив са 9. Дакле, да би тај број био дељив са 2016, довољно је испитати када је дељив са $\frac{2016}{7\cdot 9}$, тј. са 32.

Ако је n паран број, тада су n^3-1 и n^3+1 непарни, па је посматрани број дељив са 32 ако и само ако $32 \mid n^3$, а што је испуњено ако и само ако $4 \mid n$. Ако је n непаран број, тада су n^3-1 и n^3+1 парни, од чега је један дељив са 2 али не и са 4, па други онда мора бити дељив са 16 (да бисмо имали жељену дељивост са 32), а растављањем $n^3-1 = (n-1)(n^2+n+1)$ и $n^3+1 = (n+1)(n^2-n+1)$ и уочавањем да су n^2+n+1 и n^2-n+1 непарни бројеви, долазимо до услова $16 \mid n-1$ или $16 \mid n+1$. Све заједно, посматрани број је дељив са 32 ако и само ако при дељењу са 16 даје неки од остатака 0, 4, 8, 12, 1 или -1. Одатле, на сваких 16 узастопних природних бројева имамо тачно 6 за које важи $32 \mid n^9 - n^3$ (а тиме и $2016 \mid n^9 - n^3$), па бројева тражених у поставци има $\frac{2016}{16} \cdot 6 = 756$.

Четврти разред – Б категорија

1. Квадрати целих бројева при дељењу са 8 могу давати следеће остатке: $0^2 = 0$, $(\pm 1)^2 = 1$, $(\pm 2)^2 = 4$, $(\pm 3)^2 = 9 \equiv 1 \pmod 8$ или $4^2 = 16 \equiv 0 \pmod 8$, тј. 0, 1 или 4. Ако би тражени бројеви постојали, из $a^2 - 2015b^2 - 8c \equiv a^2 + b^2 \pmod 8$ и $14 \equiv 6 \pmod 8$ добили бисмо $a^2 + b^2 \equiv 6 \pmod 8$, али ово није могуће постићи уколико a^2 и b^2 узимају вредности 0, 1 или 4 (по модулу 8). Дакле, тражени бројеви не постоје.

2. Обојимо првих 2015 столица произвољно. У тачно једном од два могућа бојења преостале столице број плавих столица биће паран. Зато је тражени број 2^{2015}.

3. Приметимо прво:

$$\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{k}{\sin 2x} = \frac{x}{\frac{\cos x}{\sin x}} - \frac{k}{\sin 2x} = \frac{x \sin x}{\cos x} - \frac{k}{\sin 2x} = \frac{2x\sin^2 x}{2\sin\cos x} - \frac{k}{\sin 2x}$$
$$= \frac{2x\sin^2 x - k}{\sin 2x}.$$

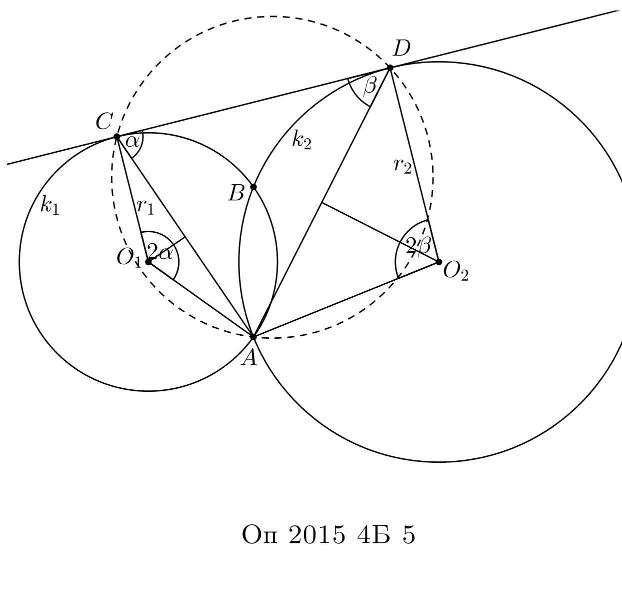
Када $x \to \frac{\pi}{2}$, именилац овог разломка тежи 0, а за $k \neq \pi$ бројилац не тежи 0, па израз тада не може имати коначну граничну вредност. Остаје да проверимо случај $k = \pi$. Испуњени су услови за примену Лопиталовог правила, па тада имамо:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2x\sin^2 x - \pi}{\sin 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 x + 4x\sin x\cos x}{2\cos 2x} = \frac{2+0}{-2} = -1.$$

Дакле $k = \pi$ је једина вредност параметра k за коју је ова гранична вредност коначна.

4. Очито је лева страна $\geqslant 1$, а десна $\leqslant 1$, па да би важила једнакост, мора бити $\sin ax = 0$ и $\cos x = 1$. Одатле следи $ax = m\pi$ и $x = 2k\pi$ за неке $m, k \in \mathbb{Z}$. Једно решење је увек $x = 0$. Да не би постојало ниједно друго, не сме важити једнакост $m = 2ak$ ни за које целе бројеве m и k, $k \neq 0$. Ако би параметар a био рационалан, број $2ak$ ће бити цео за неко k, па тада посматрана једначина има више решења. Ако је број a ирационалан, тада је и број $2ak$ ирационалан за сваки цео број $k \neq 0$, па не може бити цео, што смо и желели да постигнемо. Дакле, посматрана једначина има јединствено решење ако и само ако је a ирационалан број.

5. Нека је r тражени полупречник. Означимо кружницу из поставке с полупречником r_1 са k_1



Оп 2015 4Б 5

$(C \in k_1)$, и нека је њен центар тачка O_1; другу кружницу означимо са k_2 $(D \in k_2)$ и нека је њен центар тачка O_2. Означимо још $\measuredangle AO_1C = 2\alpha$ и $\measuredangle AO_2D = 2\beta$. Тада важи $\measuredangle ACD = \alpha$ и $\measuredangle ADC = \beta$. Из синусне теореме примењене на $\triangle ACD$ добијамо $\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{AD}{\sin\alpha} = 2r$, а из једнакокраких $\triangle AO_1C$ и $\triangle AO_2D$ имамо $AC = 2r_1 \sin\alpha$ и $AD = 2r_2 \sin\beta$. Из свега тога добијамо

$$r^2 = \frac{AC}{2\sin\beta} \cdot \frac{AD}{2\sin\alpha} = \frac{2r_1\sin\alpha \cdot 2r_2\sin\beta}{4\sin\beta\sin\alpha} = r_1r_2,$$

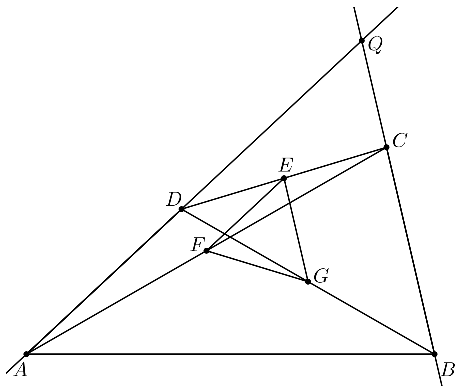
тј. $r = \sqrt{r_1r_2}$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23. 1. 2016.

Први разред – А категорија

1. Једнакост $7{\cdot}2^n{+}1 = x^2$ трансформишемо у облик $7{\cdot}2^n = (x{-}1)(x{+}1)$. Пошто су бројеви $x-1$ и $x+1$ исте парности и тачно један од њих је дељив са 4, добијамо $\{x-1, x+1\} = \{2, 7\cdot 2^{n-1}\}$ или $\{x-1, x+1\} = \{2^{n-1}, 14\}$. Како очигледно важи $2 < 7 \cdot 2^{n-1}$, у првом случају одмах имамо $x-1 = 2$, одакле даље добијамо $4 = x+1 = 7\cdot 2^{n-1}$, што је немогуће. У другом случају разликујемо две могућности. Уколико важи $x+1 = 14$, тада имамо $12 = x-1 = 2^{n-1}$, што је немогуће. Уколико пак важи $x-1 = 14$, тада следи $16 = x+1 = 2^{n-1}$, одакле директно добијамо једино решење $n = 5$.

2. Нека се праве AD и BC секу у тачки Q. Нека је E средиште странице CD а F и G средишта дијагонала AC и BD, редом. Тада је EF средња линија $\triangle ACD$, па важи $EF \parallel AD$ и $EF \cong \frac{1}{2}AD$. Слично, EG је средња линија $\triangle BCD$, па важи $EG \parallel BC$ и $EG \cong \frac{1}{2}BC$. Сада имамо $EF \cong \frac{1}{2}AD \cong \frac{1}{2}BC \cong EG$ и $\measuredangle FEG = \measuredangle AQB = 180^\circ - (\measuredangle BAD + \measuredangle ABC) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, одакле следи да је $\triangle EFG$ једнакостраничан.



Ок 2016 1А 2

3. Означимо дате бројеве са $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{200}$, редом по кругу, и нека важи $x_1 = 3$. Из неједнакости $x_1+x_2+x_3 \leqslant 3$ и $x_{199}+x_{200}+x_1 \leqslant 3$ добијамо $x_2+x_3 \leqslant 0$ и $x_{199}+x_{200} \leqslant 0$.

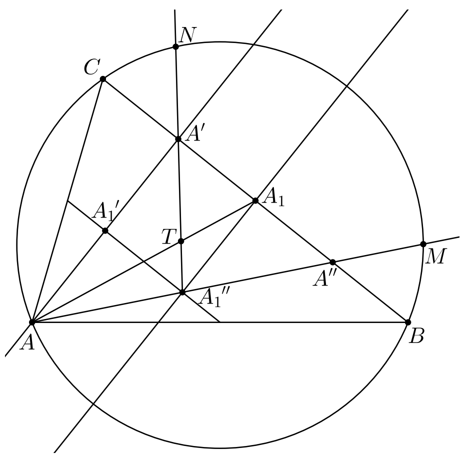
Одатле следи $x_4 + x_5 + \cdots + x_{197} + x_{198} \geqslant 197$ (будући да је збир свих посматраних бројева једнак 200). С друге стране, имамо

$$\begin{aligned} x_4 + x_5 + \cdots + x_{197} + x_{198} &= (x_4 + x_5 + x_6) + \cdots + (x_{196} + x_{197} + x_{198}) \\ &\leqslant \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{65 \text{ пута}} = 195. \end{aligned}$$

Из добијене контрадикције следи да услове из поставке није могуће испунити.

4. a) Одговор је не. Како је укупан број јединица у свим колонама исти као укупан број јединица у свим врстама, оних бројева i за које је разлика броја јединица у i-тој врсти и i-тој колони једнака 1 има исто као и оних бројева i за које је ова разлика једнака -1; дакле, не може укупно бити 2015 вредности i које задовољавају неки од ова два услова.

b) Одговор је да. Попунимо таблицу на следећи начин: упишемо јединице у пресек врсте $2j - 1$ и колоне $2j$ за све j, $1 \leqslant j \leqslant 1008$, а на сва остала места упишемо нуле. Заиста, тада за све непарне i у i-тој врсти имамо једну јединицу а у i-тој колони немамо ниједну, па посматрана разлика износи 1, а за све парне i у i-тој врсти немамо ниједну јединицу а у i-тој колони имамо једну, па посматрана разлика износи -1, тј. апсолутна вредност је опет 1.



Ок 2016 1А 5

5. Означимо са A_1 средиште дужи BC, а са A_1'' средиште дужи AA''. Из услова $BA' = A''C$ закључујемо да је A_1 уједно и средиште дужи $A'A''$, па пошто T дели дуж AA_1 у односу $2:1$, следи да је T уједно и тежиште $\triangle AA'A''$, одакле добијамо $T \in A'A_1''$.

Према томе, N је пресечна тачка полуправе $A_1''A'$ са кружницом описаном око $\triangle ABC$. Праве $A_1''A'$ и $A_1''A''$ су симетричне у односу на $A_1''A_1$. Тачке B и C су такође симетричне у односу на праву $A_1''A_1$. На основу тога закључујемо $BM = NC$ и $BMNC$ је једнакокраки трапез, из чега следи тражено тврђење.

Други разред – А категорија

1. а) Очигледно су обе стране позитивне, па је довољно проверити једнакост након квадрирања. Након квадрирања лева страна постаје $a \pm \sqrt{b}$, а десну трансформишемо на следећи начин:

$$\begin{aligned}\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2} \pm 2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} + \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}&\\ = a \pm \sqrt{a^2-(a^2-b)} = a \pm \sqrt{b}.&\end{aligned}$$

Тиме је једнакост доказана.

b) Користећи резултат под а), израз трансформишемо на следећи начин:

$$\begin{aligned}
&\frac{5+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{5-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\\
&= \frac{5+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{2+\sqrt{2^2-3}}{2}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{2^2-3}}{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{5-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{2+\sqrt{2^2-3}}{2}}-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2^2-3}}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\\
&= \frac{5+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{5-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\\
&= \frac{5+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}+1} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{5-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\\
&= \frac{(5+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{9-3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{(5-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{1-3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\\
&= \frac{12-2\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{8-6\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{12-2\sqrt{3}-3\cdot(4-3\sqrt{3})}{3\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{7}{3}.
\end{aligned}$$

Дакле, посматрани број је рационалан.

2. *Прво решење.* При дељењу са 7 потпун квадрат може имати само остатке 0, 1, 2 и 4. Уколико важи $n \geq 7$, тада $n! - 44$ даје остатак 5 по модулу 7. Дакле, $n! - 44$ није потпун квадрат за $n \geq 7$. Сада се провером једноставно добија да је $n = 6$ једино решење (тада имамо $6! - 44 = 676 = 26^2$).

Друго решење. За $n \geqslant 8$ важи $2^5 \mid n!$, тј. $n! = 32m$. Тада, ако је $n! - 44$ потпун квадрат, онда је потпун квадрат и $\frac{n!-44}{4} = 8m - 11 = 8(m-2) + 5$, али ово је немогуће јер потпун квадрат не може давати остатак 5 при дељењу са 8. Према томе, мора важити $n \leqslant 7$. Директним испробавањем налазимо да је једино решење $n = 6$.

3. Претпоставимо, без умањења општости, $a \geqslant b$. Дискриминанта прве једначине износи $a^2 - 4a - 4b$. Према услову задатка, ова вредност је потпун квадрат, рецимо d_1^2. Приметимо да је d_1^2 исте парности као a^2 и да притом важи $d_1^2 < (a-2)^2$, па одатле добијамо $d_1^2 \leqslant (a-4)^2$, што се своди на $a^2 - 4a - 4b \leqslant (a-4)^2$, а ово је еквивалентно са $a - b \leqslant 4$. Сада можемо разликовати пет могућности. Пре њих, приметимо да важи $d_1^2 = a^2 - 4a - 4b = (a-4)^2 - 4(4-a+b)$, одакле добијамо $(a-4-d_1)(a-4+d_1) = 4(4-(a-b))$.

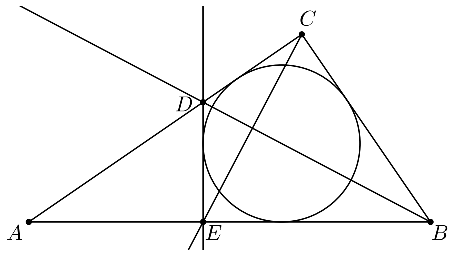
- У случају $a - b = 0$ имамо $(a-4-d_1)(a-4+d_1) = 16$. Дакле, на левој страни је производ $2 \cdot 8$ или $4 \cdot 4$ (не може бити $1 \cdot 16$ јер чиниоци морају бити исте парности), па добијамо $a = 9$ (и $b = 9$) или $a = 8$ (и $b = 8$).
- У случају $a - b = 1$ имамо $(a-4-d_1)(a-4+d_1) = 12$. Дакле, на левој страни је производ $2 \cdot 6$, па добијамо $a = 8$, али проверавамо да пар $(a, b) = (8, 7)$ није решење.
- У случају $a - b = 2$ имамо $(a-4-d_1)(a-4+d_1) = 8$. Дакле, на левој страни је производ $2 \cdot 4$, па добијамо $a = 7$, али проверавамо да пар $(a, b) = (7, 5)$ није решење.
- У случају $a - b = 3$ имамо $(a-4-d_1)(a-4+d_1) = 4$. Дакле, на левој страни је производ $2 \cdot 2$, па добијамо $a = 6$, али проверавамо да пар $(a, b) = (6, 3)$ није решење.
- У случају $a - b = 4$ имамо $(a-4-d_1)(a-4+d_1) = 0$, што не даје корисне закључке. Ако са d_2^2 означимо дискриминанту друге једначине ($d_2 \in \mathbb{Z}$), имамо $d_2^2 = b^2 - 4a - 4b = (a-4)^2 - 4a - 4(a-4) = a^2 - 16a + 32 = (a-8)^2 + 32$, одакле следи $(a-8-d_2)(a-8+d_2) = 32$. Дакле, на левој страни је производ $2 \cdot 16$ или $4 \cdot 8$, па добијамо $a = 17$ (и $b = 13$) или $a = 14$ (и $b = 10$).

Према свему до сада, скуп решења је:

$$(a, b) \in \{(8,8), (9,9), (10,14), (14,10), (13,17), (17,13)\}.$$

4. Докажимо прво да су праве BD и CE нормалне. Заиста, ако са β и γ означимо углове код темена B и C у $\triangle ABC$, директно израчунавамо $\measuredangle BCE + \measuredangle CBD = (\gamma - (45^\circ - \frac{\alpha}{2})) + (\beta - (45^\circ - \frac{\alpha}{2})) = \alpha + \beta + \gamma - 90^\circ = 90^\circ$, одакле следи тврђење.

Претпоставимо да права DE додирује кружницу уписану у $\triangle ABC$. Докажимо да тада важи $BC = CD$ или $BC = BE$. Претпоставимо $BC \neq CD$. Четвороугао $BCDE$ је тангентан, па важи $BC + DE = BE + CD$, тј.



Ок 2016 2А 4

$BC - CD = BE - DE$. Даље, из $BD \perp CE$ следи $BC^2 + DE^2 = BE^2 + CD^2$, што је еквивалентно са $BC^2 - CD^2 = BE^2 - DE^2$, тј. $(BC - CD)(BC + CD) = (BE - DE)(BE + DE)$, па како по претпоставци имамо $BC \neq CD$, на основу ове и претходне једнакости након скраћивања остаје $BC + CD = BE + DE$. Сабирањем овога са $BC - CD = BE - DE$ добијамо $2BC = 2BE$, тј. $BC = BE$, чиме је тврђење показано. Према томе, уколико важи, без умањења општости, $BC = BE$, тада је BD симетрала $\measuredangle EBC$ (јер је то висина једнакокраког троугла), па имамо $\beta = 2\measuredangle ABD = 2(45^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 90^\circ - \alpha$, тј. $\gamma = 90^\circ$, што је и требало показати.

Претпоставимо сада да је $\triangle ABC$ правоугли. Не умањујући општост, узмимо $\gamma = 90^\circ$. Тада имамо $\measuredangle CBD = 90^\circ - \measuredangle CDB = 90^\circ - (\measuredangle BAD + \measuredangle ABD) = 90^\circ - (\alpha + (45^\circ - \frac{\alpha}{2})) = 45^\circ - \frac{\alpha}{2} = \measuredangle ABD$, тј. BD је симетрала $\measuredangle ABC$. Из $BD \perp CE$ следи да су тачке C и E симетричне у односу на праву BD. Одатле су и праве DC и DE симетричне у односу на BD, па како DC додирује уписану кружницу, следи да и DE додирује уписану кружницу.

5. Посматрајмо највећу такву групу ученика G. Пошто се више ниједан ученик не може убацити у ту групу, сви остали су или примили свеску од неког из G (скуп таквих ученика зовемо A), или дали свеску некоме у G (скуп таквих ученика зовемо B). Притом, наравно, скупови A и B не морају бити дисјунктни.

Очигледно важи $|A| \leqslant |G|$. С друге стране, у групи B ниједан ученик није дао свеску другоме унутар исте групе, па због максималности групе G мора важити $|B| \leqslant |G|$. Према томе, $16 \leqslant |G| + |A| + |B| \leqslant 3|G|$, одакле следи $|G| \geqslant 6$.

Трећи разред – А категорија

1. *Прво решење.* За $x = 1$ постављена једнакост се своди на $y^2 + 11y - 2027 = 0$. Дискриминанта ове квадратне једначине износи $11^2 + 4 \cdot 2027 = 8229$, што није потпун квадрат (број 8229 је дељив са 3, али није са 9). Надаље претпостављамо $x \geqslant 2$.

Важи

$$2015 = 11x^2y + y^2 - 11x^2 - 1 = 11x^2y - 11x^2 + y^2 - y + y - 1 = (11x^2 + y + 1)(y - 1).$$

Из $x \geqslant 2$ следи $11x^2+y+1 \geqslant 46$, тј. $y-1 \leqslant 43$. Пошто $y-1 \mid 2015$, добијамо $y-1 \in \{1,5,13,31\}$. За $y-1=1$ имамо $2015 = 11x^2+y+1 = 11x^2+3$, па овде нема решења. За $y-1=5$ имамо $403 = 11x^2+y+1 = 11x^2+7$, па овде добијамо решење $(x,y)=(6,6)$. За $y-1=13$ имамо $155 = 11x^2+y+1 = 11x^2+15$, па овде нема решења. За $y-1=31$ имамо $65 = 11x^2+y+1 = 11x^2+33$, па овде нема решења.

Дакле, једино решење задатка је пар $(x,y)=(6,6)$.

Друго решење. Како очигледно важи $11x^2y \geqslant 11x^2$, на основу једнакости из поставке добијамо $y^2 \leqslant 2016$, тј. $y \leqslant 44$. Такође имамо $y^2 \equiv 2016 \equiv 3 \pmod{11}$, одакле следи $y \equiv \pm 5 \pmod{11}$ (што налазимо директном провером могућих остатака по модулу 11). Пошто из полазне једнакости имамо $x = \sqrt{\frac{2016-y^2}{11(y-1)}}$, праволинијским испробавањем могућих вредности $y \in \{5,6,16,17,27,28,38,39\}$ налазимо да је x цео број једино за $y=6$, наиме $x=6$. Дакле, $(x,y)=(6,6)$ је једино решење.

2. *Прво решење.* Докажимо најпре да је услов из задатка довољно проверавати само за $d \in \{2,3,7\}$. На основу факторизације $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ примећујемо да мора важити $a \not\equiv b \pmod 2$, $a \not\equiv b \pmod 3$ и $a \not\equiv b \pmod 7$, али то је и довољно, будући да је сваки прави делилац d броја 2016 облика $2^x3^y7^z$ при чему је бар један од бројева x, y, z већи од 0, па онда добијамо $a \not\equiv b \pmod{2^x3^y7^z}$. Прво број a можемо изабрати на 2016 начина, а даље рачунамо број бројева b између 1 и 2016 за које важи бар једна од конгруенција $a \equiv b \pmod 2$, $a \equiv b \pmod 3$ или $a \equiv b \pmod 7$. Ово радимо применом принципа укључења-искључења, и добијамо резултат

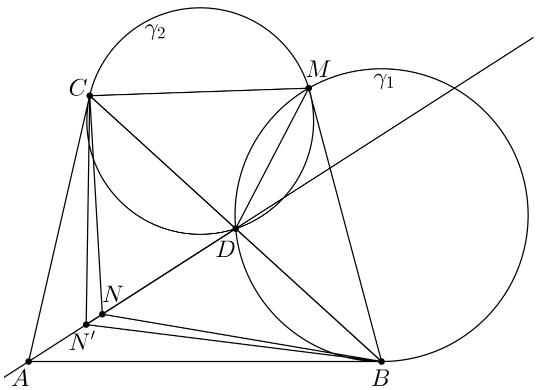
$$\frac{2016}{2}+\frac{2016}{3}+\frac{2016}{7}-\frac{2016}{6}-\frac{2016}{14}-\frac{2016}{21}+\frac{2016}{42}=1440.$$

Дакле, број бројева b за које не важи ниједна од ових конгруенција (при чему је a фиксиран) износи $2016-1440=576$, па је број парова тражених у поставци једнак $2016 \cdot 576$.

Друго решење. Број начина за одабир броја b (након што одаберемо број a) може се израчунати и другачије. Наиме, услови $a \not\equiv b \pmod 2$, $a \not\equiv b \pmod 3$ и $a \not\equiv b \pmod 7$ еквивалентни су са НЗД$(a-b, 2016)=1$. Како разлике $a-1, a-2, \ldots, a-2016$ чине потпун систем остатака по модулу 2016, међу њима има тачно $\varphi(2016) = 2016(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{7}) = 576$ оних које испуњавају тражени услов. Следи да се b може одабрати на 576 начина (за дато a), па је број тражених парова једнак $2016 \cdot 576$.

3. Чамџије треба да се договоре на следећи начин: сваки чамџија имаће одређену своју брзину кретања, при чему су сваке две брзине међусобно различите (нпр. брзине могу бити $\frac{1}{2016}\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $\frac{2}{2016}\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $\frac{3}{2016}\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $\ldots$,

$1\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$). Чамџије које буду изабране потом треба да се крећу по следећем обрасцу: најпре иду 1 секунд узводно, потом 2 секунда низводно, онда 3 секунда опет узводно, затим 4 секунда низводно и тако даље (наравно, сваки од њих креће се „својом“ брзином, према претходном договору). Докажимо да ће се они заиста сусрести на овај начин. Поставимо референтан систем везан за једног од њих двојице. Како се чамџије у сваком тренутку крећу у истом смеру (будући да обојица прате исти, описани образац кретања) али различитим, константним брзинама, у постављеном референтном систему један чамџија мирује (јер је референтни систем везан за њега) а други се креће константном брзином, мењајући смер као у описаном обрасцу. Међутим, приметимо да је описани образац кретања тако конципиран да ће чамџија који по њему поступа, ма којом се брзином кретао, стићи до произвољне тачке на реци након коначног времена. Према томе, чамџије ће се сусрести након коначног времена.



Ок 2016 3А 4

4. Нека је тачка N симетрична тачки M у односу на праву BC. Посматрајмо тачку N' на полуправој DA за коју важи $DN' \cdot DA = DB^2 = DC^2$. Тада имамо $\triangle DBN' \sim \triangle DAB$ и $\triangle DCN' \sim \triangle DAC$. Следи $\measuredangle BN'D = \measuredangle ABD = \measuredangle BMD = \measuredangle BND$ и слично $\measuredangle CN'D = \measuredangle CND$, па закључујемо $N' \equiv N$, што завршава доказ.

5. За почетак, из другог услова имамо $f(0) = 2f(0)$, што даје $f(0) = 0$. Означимо $g(n) = f(2n+1) - f(2n)$. Из трећег услова добијамо $f(4n+1) - 2f(2n) = f(2n+1) - f(2n)$; десна страна износи $g(n)$, а из другог услова видимо да је лева страна једнака $f(4n+1) - f(4n)$, тј. $g(2n)$, па смо добили једнакост

$$g(2n) = g(n).$$

Из трећег услова такође добијамо $f(4n+3) - 2f(2n+1) = f(2n) - f(2n+1)$; десна страна износи $-g(n)$, а из другог услова видимо да је лева страна једнака $f(4n+3) - f(4n+2)$, тј. $g(2n+1)$, па смо добили једнакост

$$g(2n+1) = -g(n).$$

Најзад, имамо и $g(0) = f(1) - f(0) = 1 - 0 = 1$. Према свему до сада можемо лако уочити да важи $g(n) = (-1)^{e(n)}$, где је $e(n)$ број јединица у бинарном запису броја n.

Узмимо сада $n = 2^{i_0} + 2^{i_1} + \cdots + 2^{i_k}$, где су $i_0 > i_1 > \cdots > i_k \geqslant 0$ цели бројеви. По претходном добијамо

$$f(n) = 2^{i_k} f\left(\frac{n}{2^{i_k}}\right) = 2^{i_k} f\left(\frac{n}{2^{i_k}} - 1\right) + 2^{i_k}(-1)^k = f(n - 2^{i_k}) + 2^{i_k}(-1)^k.$$

Настављајући овај поступак добијамо

$$f(n) = 2^{i_0} - 2^{i_1} + 2^{i_2} - \cdots + 2^{i_k}(-1)^k.$$

Из неједнакости $2^{i_0} + 2^{i_1} \leqslant 3(2^{i_0} - 2^{i_1})$, $2^{i_2} + 2^{i_3} \leqslant 3(2^{i_2} - 2^{i_3})$ итд. сабирањем одмах следи тражено тврђење. Једнакост се достиже кад год је испуњено $2 \nmid k$ и $i_0 - i_1 = i_2 - i_3 = \cdots = i_{k-1} - i_k = 1$, тј. када су јединице у бинарном запису броја n груписане у блокове парне дужине.

Четврти разред – А категорија

1. а) Означимо $P(x) = (x+1)^n - x^n - 1$. Нека је ε нула полинома $x^2 + x + 1$. Приметимо да важи $\varepsilon^3 - 1 = (\varepsilon - 1)(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) = 0$, тј. $\varepsilon^3 = 1$. Имамо

$$P(\varepsilon) = (\varepsilon + 1)^n - \varepsilon^n - 1 = (-\varepsilon^2)^n - \varepsilon^n - 1 = (-1)^n \varepsilon^{2n} - \varepsilon^n - 1.$$

Дакле, пошто је за $3 \mid n$ испуњено $\varepsilon^n = 1$, тада добијамо $P(\varepsilon) = (-1)^n - 2 \neq 0$, па у том случају $x^2 + x + 1 \nmid P(x)$. С друге стране, за $3 \nmid n$ имамо $\{1, \varepsilon^n, \varepsilon^{2n}\} = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$, па следи $P(\varepsilon) = (1 + (-1)^n)\varepsilon^{2n} - \varepsilon^{2n} - \varepsilon^n - 1 = (1 + (-1)^n)\varepsilon^{2n}$, што је једнако 0 ако и само ако $2 \nmid n$. Према томе, $x^2 + x + 1 \mid P(x)$ ако и само ако важи $n \equiv \pm 1 \pmod 6$.

b) Да би тражени услов био испуњен, према делу а) мора важити $n \equiv \pm 1 \pmod 6$. У том случају имамо $P'(\varepsilon) = n(\varepsilon + 1)^{n-1} - n\varepsilon^{n-1} = n(-\varepsilon^2)^{n-1} - n\varepsilon^{n-1} = n\varepsilon^{n-1}(\varepsilon^{n-1} - 1)$, па је ε двострука нула полинома P ако и само ако важи још $3 \mid n - 1$. Према томе, овде су одговор сви природни бројеви n за које важи $n \equiv 1 \pmod 6$.

2. Важи

$$\frac{1}{p} + \frac{2}{p+q} + \frac{101}{p+q+r} = \frac{(p+q)(p+q+r) + 2p(p+q+r) + 101p(p+q)}{p(p+q)(p+q+r)},$$

па је тражени услов еквивалентан са $p(p+q)(p+q+r) \mid (p+q)(p+q+r) + 2p(p+q+r) + 101p(p+q)$. Специјално, важи $p+q \mid 2p(p+q+r) = 2p(p+q) + 2pr$, па и $p+q \mid 2pr$. Како $p \nmid p+q$ (у супротном $p \mid q$, што је немогуће), закључујемо $p + q \mid 2r$, тј. $p + q = r$ или $p + q = 2r$. Размотримо ова два случаја.

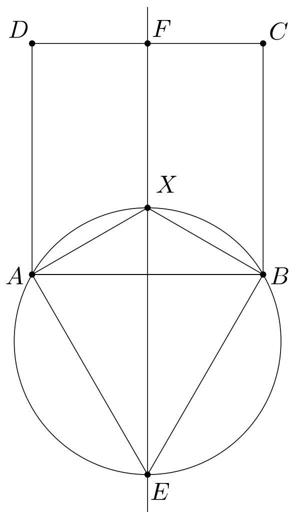
- $p+q=r$:
  Почетна дељивост се тада своди на $2pr^2 \mid 2r^2+105pr$, тј. $2pr \mid 2r+105p$. Одавде добијамо $p \mid 2r$ и $r \mid 105p$, па следи $p=2$ и $r \in \{5,7\}$. Тако добијамо тројке $(p,q,r) \in \{(2,3,5),(2,5,7)\}$, за које директно проверавамо да јесу решења.
- $p+q=2r$:
  Почетна дељивост се тада своди на $6pr^2 \mid 6r^2+208pr$, тј. $3pr \mid 3r+104p$. Одавде добијамо $p \mid 3r$ и $r \mid 104p$, па следи $p=3$ и $r=13$ (немогуће је $r=2$). Тако добијамо тројку $(p,q,r)=(3,23,13)$, за коју директно проверавамо да јесте решење.

Дакле, укупно имамо три решења: $(p,q,r) \in \{(2,3,5),(2,5,7),(3,23,13)\}$.

3. Нека је са спољне стране квадрата $ABCD$ конструисан једнакостраничан $\triangle ABE$. Из Птоломејеве неједнакости имамо $AX \cdot BE + BX \cdot AE \geqslant EX \cdot AB$, тј. $AX+BX \geqslant EX$, при чему се једнакост достиже ако и само ако је $AXBE$ тетиван четвороугао, тј. ако и само ако је тачка E на краћем луку $\widehat{AB}$ кружнице описане око $\triangle ABC$. Даље, очигледно имамо $EX + d(X,CD) \geqslant EF$, где је F средиште CD (и уједно подножје нормале из E на CD), где се једнакост достиже ако и само ако је X на дужи EF. Свеукупно,

$$AX+BX+d(X,CD) \geqslant EX+d(X,CD) \geqslant EF = 1+\frac{\sqrt{3}}{2},$$

при чему се ова вредност достиже када је тачка X средиште краћег лука $\widehat{AB}$.



Ок 2016 4А 3

4. Одговор је негативан. Одаберимо $N = p_1^2 p_2^2 \cdots p_{2017}^2$, где су $p_1, p_2, ..., p_{2017}$ различити прости бројеви (нпр. првих 2017). У било ком низу од N узастопних природних бројева појављују се сви остаци по модулу N, па неки број n међу тих N даје остатак $p_1 p_2 \cdots p_{2017}$ при дељењу са N. Но, тада за њега важи $f(n) \geqslant 2017$ (сви прости фактори $p_1, p_2, \ldots, p_{2017}$ појављују се с експонентом 1, јер је за све те просте бројеве n дељив са p_i али није са p_i^2).

5. Означимо са x и $x+1$ позиције лажних новчића. Одговор на питање о скупу новчића A је број $|A \cap \{x, x+1\}|$, који може да буде 0, 1 или

2. Дакле, позиције новчића можемо одредити ако и само ако постоје скупови A_1 и A_2 такви да су парови $p_x = (|A_1 \cap \{x, x+1\}|, |A_2 \cap \{x, x+1\}|)$ међусобно различити за $x = 1, 2, 3, \ldots, 9$.

а) Могуће је. То можемо постићи нпр. одабиром скупова $A_1 = \{1, 2, 3, 7, 8\}$ и $A_2 = \{1, 5, 6, 7, 8\}$.

b) Није могуће. Могућих парова p_x има 9, па за тражени погодан одабир скупова A_1 и A_2 сви ови парови морају бити покривени (сваки тачно по једном). Међутим, како 5 од тих парова садржи број 1, а за сваки од скупова A_1 и A_2 постоје највише по две вредности x за које је пресек тог скупа са $\{x, x+1\}$ једноелементан, следи да је могуће покрити само четири од уочених пет парова које садрже број 1, па није могуће извршити задатак.

Први разред – Б категорија

1. Уколико су ученици на том такмичењу дошли из укупно 32 или више различитих школа, тада очигледно можемо одабрати групу од 32 ученика који су сви из различитих школа. Претпоставимо сада да је укупан број школа из којих су дошли ученици 31 или мањи. Уколико би из сваке школе било не више од 65 ученика, тада би укупан број ученика био највише $31 \cdot 65 = 2015$, али ученика има 2016; дакле, у овом случају мора постојати група од 66 ученика који су сви из исте школе.

2. Приметимо да важи

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 = 4n^2 + 12n + 14 = (2n+3)^2 + 5,$$

Да би овај израз био дељив са 10, потребно је и довољно да се $(2n+3)^5$ завршава цифром 5, тј. да се $2n+3$ завршава цифром 5. Другим речима, $2n+3 = 10k+5$ за неко k, $k \in N_0$, па следи $n = 5k+1$. Дакле, одговор су сви природни бројеви који се завршавају цифром 1 или 6.

3. Факторишимо десне стране једначина на просте чиниоце: $384 = 2^7 \cdot 3$, $1152 = 2^7 \cdot 3^2$. Квадрирањем прве једначине и потом дељењем са другом добијамо $yz^5 = \frac{(xy^2z^3)^2}{x^2y^3z} = \frac{384^2}{1152} = 2^7 = 128$ (дељење се може лако извести имајући у виду уочене факторизације). Одатле следи $z = 1$ или $z = 2$. У случају $z = 1$ имамо $y = 128$, али то је у контрадикцији с обе једнакости из поставке. Остаје $z = 2$, и тада добијамо $y = 4$ и најзад $x = 3$. Дакле, једино решење је тројка $(x, y, z) = (3, 4, 2)$.

4. Разликујемо два случаја.

- $2x + a \geqslant 0$, тј. $x \geqslant -\frac{a}{2}$:
  Постављена једначина се своди на $2x + a - ax = 2$, што је еквивалентно са $2(x-1) + a(1-x) = 0$, тј. $(2-a)(x-1) = 0$. Уколико важи

$a = 2$, решење су сви бројеви x који испуњавају услов овог случаја, тј. $x \geqslant -\frac{2}{2} = -1$. Уколико важи $a \neq 2$, тада је једино могуће решење $x = 1$, и притом ово решење постоји само уколико важи $1 \geqslant -\frac{a}{2}$, тј. $a \geqslant -2$.

- $2x + a < 0$, тј. $x < -\frac{a}{2}$:
  Постављена једначина се своди на $-(2x + a) - ax = 2$, што је еквивалентно са $2(1 + x) + a(1 + x) = 0$, тј. $(2 + a)(1 + x) = 0$. Уколико важи $a = -2$, решење су сви бројеви x који испуњавају услов овог случаја, тј. $x < -\frac{-2}{2} = 1$. Уколико важи $a \neq -2$, тада је једино могуће решење $x = -1$, и притом ово решење постоји само уколико важи $-1 < -\frac{a}{2}$, тј. $a < 2$.

Добијени закључци обједињени су у доњој табели.

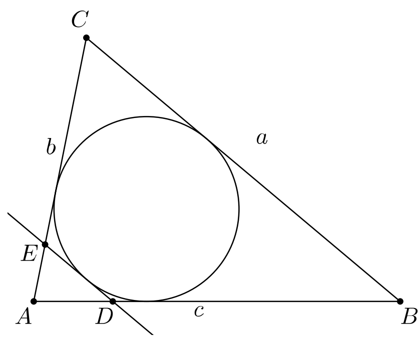
$a < -2$	$a = -2$	$-2 < a < 2$	$a = 2$	$a > 2$
$x = -1$	$x \in (-\infty, 1]$	$x \in \{-1, 1\}$	$x \in [-1, \infty)$	$x = 1$

5. Из Талесове теореме имамо $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = k$. Четвороугао $DBCE$ је тангентан, па следи $BC + DE = BD + CE$. Но, како имамо

$$BC + DE = BC + kBC = (1 + k)BC = (1 + k)a$$

и

$$\begin{aligned} BD + CE &= (AB - AD) + (AC - AE) \\ &= AB - kAB + AC - kAC \\ &= (1 - k)(AB + AC) \\ &= (1 - k)(c + b), \end{aligned}$$



Ок 2016 1Б 5

добијамо $(1+k)a = (1-k)(b+c)$, одакле израчунавамо $k = \frac{b+c-a}{a+b+c}$ и одатле $DE = kBC = \frac{a(b+c-a)}{a+b+c}$.

Други разред – Б категорија

1. Означимо посматрани број са a. Ако би он био рационалан, тада након подизања на трећи степен једнакости $2015\sqrt[3]{3} = a - 2016\sqrt{2}$ добијамо $3 \cdot 2015^3 = a^3 - 6048a^2\sqrt{2} + 6 \cdot 2016^2 a - 2 \cdot 2016^3\sqrt{2}$, тј.

$$\sqrt{2} = \frac{a^3 + 6 \cdot 2016^2 a - 3 \cdot 2015^3}{6048a^2 + 2 \cdot 2016^3} \in \mathbb{Q},$$

контрадикција. Дакле, број a мора бити ирационалан.

2. *Прво решење.* Према Вијетовим формулама имамо $x_1+x_2=\frac{2k}{k-1}$ и $x_1x_2=\frac{4}{k-1}$. Приметимо да важи

$$\begin{aligned}4&=x_1^2-3x_2^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2-4x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-4x_2^2\\&=\left(\frac{2k}{k-1}\right)^2-\frac{8}{k-1}-4x_2^2=\frac{4k^2-8k+8}{(k-1)^2}-4x_2^2=\frac{4(k-1)^2+4}{(k-1)^2}-4x_2^2\\&=4+\frac{4}{(k-1)^2}-4x_2^2,\end{aligned}$$

а ово је даље еквивалентно са $0=\frac{1}{(k-1)^2}-x_2^2=(\frac{1}{k-1}-x_2)(\frac{1}{k-1}+x_2)$. Дакле, имамо две могућности:

- $x_2=\frac{1}{k-1}$:
  Пошто је x_2 решење задате једначине, следи $(k-1)(\frac{1}{k-1})^2-\frac{2k}{k-1}+4=0$, што се своди на $\frac{1-2k+4k-4}{k-1}=0$, тј. $2k-3=0$, одакле добијамо $k=\frac{3}{2}$. Даље израчунавамо $x_2=\frac{1}{\frac{3}{2}-1}=2$ и $x_1=\frac{2k}{k-1}-x_2=\frac{2\cdot\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}-1}-2=4$, и директно се проверава да су на овај начин заиста задовољени услови из поставке.
- $x_2=-\frac{1}{k-1}$:
  Слично, имамо $(k-1)(-\frac{1}{k-1})^2+\frac{2k}{k-1}+4=0$, што се своди на $\frac{1+2k+4k-4}{k-1}=0$, тј. $6k-3=0$, одакле добијамо $k=\frac{1}{2}$. Даље израчунавамо $x_2=-\frac{1}{\frac{1}{2}-1}=2$ и $x_1=\frac{2k}{k-1}-x_2=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}-2=-4$, и директно се проверава да су на овај начин заиста задовољени услови из поставке.

Дакле, одговор је: $k\in\{\frac{1}{2},\frac{3}{2}\}$.

Друго решење. Решимо дату једначину:

$$\begin{aligned}x_{1/2}&=\frac{2k\pm\sqrt{(2k)^2-16(k-1)}}{2(k-1)}=\frac{2k\pm\sqrt{4k^2-16k+16}}{2(k-1)}\\&=\frac{2k\pm\sqrt{4(k-2)^2}}{2(k-1)}=\frac{2k\pm2(k-2)}{2(k-1)}.\end{aligned}$$

Дакле, једно решење дате једначине је $\frac{2k+2(k-2)}{2(k-1)}=\frac{4k-4}{2(k-1)}=2$, а друго $\frac{2k-2(k-2)}{2(k-1)}=\frac{2}{k-1}$. Ако означимо $x_1=2$ и $x_2=\frac{2}{k-1}$, услов $x_1^2-3x_2^2=4$ своди се на $3x_2^2=0$, али ово је немогуће. Дакле, морамо означити $x_1=\frac{2}{k-1}$ и

$x_2 = 2$. Тада се услов $x_1^2 - 3x_2^2 = 4$ своди на $\frac{4}{(k-1)^2} - 12 = 4$, тј. $\frac{1}{(k-1)^2} = 4$, па имамо $k-1 = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$. Случај $k-1 = \frac{1}{2}$ даје решење $k = \frac{3}{2}$, а случај $k-1 = -\frac{1}{2}$ даје решење $k = \frac{1}{2}$. Као и у претходном решењу, директно се проверава да обе ове вредности за k заиста задовољавају услове из поставке.

3. Означимо НЗД$(a,b) = d$, те $a = dp$ и $b = dq$. Тада су p и q узајамно прости и важи

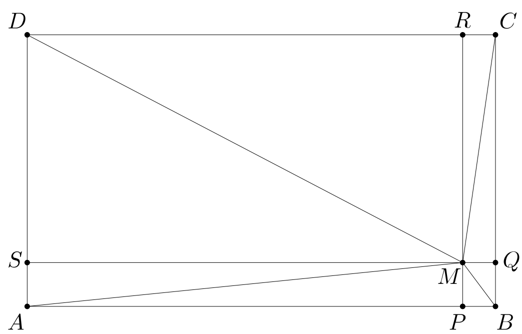
$$N = \frac{a}{b} + \frac{2014}{2015} = \frac{p}{q} + \frac{2014}{2015} = \frac{2015p + 2014q}{2015q}$$

и

$$M = \frac{b}{a} + \frac{2016}{2015} = \frac{q}{p} + \frac{2016}{2015} = \frac{2015q + 2016p}{2015p}.$$

Претпоставимо супротно, да су и N и M природни бројеви. Како је N природан број, то $2015q \mid 2015p + 2014q$, па $5 \mid 2015p + 2014q$, а самим тим и $5 \mid q$. Слично, M је природан број, па $2015p \mid 2015q + 2016p$, а самим тим и $5 \mid 2015q + 2016p$, тј. $5 \mid p$. Дакле, 5 је заједничи делилац бројева p и q, контрадикција.

4. Нека су P, Q, R и S ортогоналне пројекције тачке M на праве AB, BC, CD и DA, редом. Користећи Питагорину теорему добијамо једнакости $AM^2 = SM^2 + PM^2$, $BM^2 = QM^2 + PM^2$, $CM^2 = QM^2 + RM^2$ и $DM^2 = SM^2 + RM^2$. Сабирањем прве и треће једнакости добијамо $AM^2 + CM^2 = SM^2 + PM^2 + QM^2 + RM^2$, а сабирањем друге и четврте добијамо $BM^2 + DM^2 = QM^2 + PM^2 + SM^2 + RM^2$. Одатле следи $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$, тј. $40^2 + 21^2 = 5^2 + DM^2$, па добијамо $DM^2 = 1600 + 441 - 25 = 2016$, тј. $DM = \sqrt{2016}$.



Ок 2016 2Б 4

5. Нека Влада мења места картама на позицијама a и b, $a < b$, а Воја на позицијама c и d, $c < d$. Разликујемо три могућности.

- $a = c$ и $b = d$:
  У овом случају резултујући распоред је идентичан почетном.

- Бројеви a, b, c и d су међусобно различити:
Бројеве a и b можемо одабрати на $\binom{7}{2} = 21$ начина, а затим бројеве c и d на $\binom{5}{2} = 10$. При томе, уколико Влада одабере a и b, а Воја потом c и d, добићемо исти распоред као и када Влада прво одабере c и d, а Воја потом a и b. Дакле, при оваквом бројању сваки распоред је урачунат два пута, па укупан број распореда који се могу добити на овај начин износи $\frac{21 \cdot 10}{2} = 105$.
- Скупови $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$ имају један заједнички елемент:
Нека је x заједнички елемент ових скупова, y преостали елемент скупа $\{a, b\}$, а z преостали елемент скупа $\{c, d\}$. Елемент x можемо одабрати на 7 начина, елемент y затим на 6, и најзад елемент z на 5 начина. После премештања карата, на позицији x налази се карта z, на позицији y карта x, а на позицији z карта y. Дакле, тројка (x, y, z) одређује исти крајњи распоред карата као тројке (z, x, y) и (y, z, x), тј. при оваквом бројању сваки распоред је урачунат три пута, па укупан број распореда који се могу добити на овај начин износи $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3} = 70$.

Према томе, укупан број распореда је $1 + 105 + 70 = 176$.

Трећи разред – Б категорија

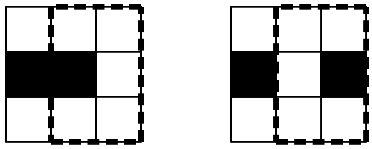
1. Коришћењем адиционих формула добијамо $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ и $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. Ако означимо $\sin x = t$, дата једначина се своди на

$$0 = 3t - 4t^3 + 2 - 4t^2 + 3t + 4 = -4t^3 - 4t^2 + 6t + 6 = -2(t + 1)(2t^2 - 3).$$

Пошто важи $t^2 \leqslant 1$, имамо $2t^2 - 3 \neq 0$, па следи $t = -1$, тј. $\sin x = -1$. Дакле, решења дате једначине су сви бројеви облика $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ за $k \in \mathbb{Z}$.

2. Приметимо одмах да је посматрани број реалан. Обележимо $x = \sqrt[3]{6 + \frac{11}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$, $y = \sqrt[3]{6 - \frac{11}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$ и $A = x + y$. Тада имамо $xy = \sqrt[3]{36 - \frac{121}{9} \cdot \frac{7}{3}} = \sqrt[3]{\frac{972 - 847}{27}} = \sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{5}{3}$ и $x^3 + y^3 = 12$. Из идентитета $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$ добијамо $A^3 = 12 + 5A$, тј. $A^3 - 5A - 12 = 0$. Леву страну можемо раставити на чиниоце, чиме добијамо $(A - 3)(A^2 + 3A + 4) = 0$. Једна могућност је $A = 3$. Како једначина $A^2 + 3A + 4 = 0$ има негативну дискриминанту ($3^2 - 4 \cdot 4 = -7 < 0$), она нема реалних решења, а пошто знамо да је A реалан број, заправо је једина могућност $A = 3$. Дакле, A је природан број.

3. a) Правогаоник 1×3 не може имати сва три црна поља, јер би онда правоугаоник 2×3 сачињен од посматраног правоугаоника 1×3 и њему суседног имао три црна поља, контрадикција.



Ок 2016 3Б 3

Претпоставимо сада да у неком правоугаонику 1×3 имамо два црна поља. Тада су сва три поља изнад овог правоугаоника бела (јер се у правоугаонику 2×3 сачињеном од посматраног правоугаоника 1×3 и три поља изнад њега смеју налазити само два црна поља), и исто важи за сва три поља испод овог правоугаоника. Но, сада налазимо правоугаоник 3×2 у коме имамо само једно црно поље (видети слику, где су раздвојене могућности када су посматрана два црна поља суседна и када нису), контрадикција.

Најзад, претпоставимо да у неком правоугаонику 1×3 немамо ниједно црно поље. Тада правоугаоник 1×3 непосредно изнад посматраног правоугаоника мора садржати два црна поља (како би правоугаоник 2×3 сачињен од ова два правоугаоника имао два црна поља), али малопре смо констатовали да је ово немогуће.

Према томе, сваки правоугаоник 1×3 садржи тачно једно црно поље.

b) Квадрат 2016×2016 може се поделити на $2016 \cdot 672$ правоугаоника 1×3. Како се у сваком таквом правоугаонику налази тачно једно црно поље, закључујемо да сваки квадрат 2016×2016 има тачно $2016\cdot 672$ црних поља.

Напомена. Пример једног бојења које испуњава услове задатка можемо добити уколико обојимо црно сва поља на свакој трећој „југоисточно-северозападној“ дијагонали.

4. Из последње колоне закључујемо да цифра O може бити само 0 или 5, али како се O појављује и као почетна цифра броја, закључујемо $O = 5$. Сада из неједнакости

$$\begin{aligned} 5000000 &< \text{ОКРУЖНО} + \text{ДОБРО} + \text{ДОБРО} + \text{БРАВО} + \text{БРАВО} \\ &< 6000000 + 400000 = 6400000 \end{aligned}$$

и чињенице да су $Д$ и O различите цифре, тј. $Д \neq 5$, добијамо $Д = 6$ (будући да је посматрани збир једнак *ДРЖАВНО*). Приметимо да из горње неједнакости следи и $P < 4$, па користећи то, уз још уврштавање познатих цифара $О$ и $Д$, добијамо

$$\begin{aligned}&5КРУЖН5+65БР5+65БР5+БРАВ5+БРАВ5\\&\qquad<5940000+2\cdot 70000+2\cdot 100000=6280000,\end{aligned}$$

одакле следи $Р \leqslant 2$. Како је $Р$ непарна цифра, добијамо $Р=1$. Имајући ово у виду, посматрамо сада претпоследњу колону (у којој, приметимо, постоји и пренос 2 из последње колоне), па добијамо да се $2+Н+1+1+В+В$ завршава цифром $Н$, тј. $4+2В$ се завршава цифром 0, одакле следи $В=3$ или $В=8$; пошто је $В$ парна цифра, остаје $В=8$.

Сада због неједнакости

$$\begin{aligned}6100000<ДРЖАВНО&=5К1УЖН5+65Б15+65Б15+Б1А85+Б1А85\\&<5К20000+340000\end{aligned}$$

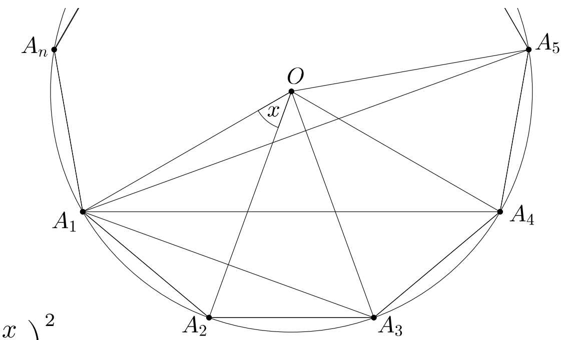
мора важити $К \geqslant 8$, па је због $В \neq К$ једина могућност $К=9$. Ово значи да у шестој колони здесна имамо пренос 2 из пете колоне, а како у петој колони имамо пренос или 1 или 2 из четврте (будући да у четвртој колони засад имамо $У$+5+5+1+1 плус још потенцијалан пренос из треће колоне, што све заједно не може премашити 29), следе неједнакости $20 \leqslant 2+1+12+2Б$ и $1+1+12+2Б \leqslant 29$. Одатле закључујемо $3 \leqslant Б \leqslant 7$, а пошто су цифре 5 и 6 већ „заузете“, добијамо $Б \in \{3,4,7\}$.

Из друге колоне имамо пренос 2 (тамо имамо збир $Н$+1+1+8+8 плус још пренос из прве колоне, што је 2, те све заједно износи $20+Н$), па пошто на основу треће колоне видимо да се збир 2+$Ж$+2$Б$+2$А$ завршава цифром $В$, тј. 8, следи да је цифра $Ж$ парна. Према томе, пренос из четврте колоне у пету мора бити непаран (јер тај пренос сабран са 1+6+6+2$Б$ даје резултат који се завршава са $Ж$, тј. парном цифром), а како смо раније констатовали да је тај пренос 1 или 2, следи да он мора бити 1. Дакле, из пете колоне сада добијамо да се $14+2В$ завршава цифром $Ж$, па закључујемо $(Б,Ж) \in \{(3,0),(4,2),(7,8)\}$. Последња могућност отпада због тога што већ имамо $В=8$. Претпоставимо сада $(Б,Ж)=(3,0)$. Тада у трећој колони имамо збир између 2+0+3+3+2$А$ (подсетимо се да је пренос из друге колоне 2), тј. $8+2А$, па како се ово завршава цифром $В$, тј. 8, следи $А=0$ или $А=5$, али обе цифре 0 и 5 су већ „заузете“, контрадикција. Дакле, преостаје једино $(Б,Ж)=(4,2)$. Из треће колоне следи да се збир 2+2+4+4+2$А$, тј. 12+2$А$ завршава цифром 8, па добијамо $А=3$ или $А=8$, а како већ имамо $В=8$, преостаје $А=3$. Најзад, из четврте колоне (уз пренос 1 из треће колоне) имамо да се збир $13+У$ мора завршавати цифром 3, па добијамо $У=0$, а онда остаје $H = 7$ јер је 7 једина „неискоришћена“ цифра. Доле приказујемо дешифровано сабирање.

$$\begin{array}{rr} & 5910275 \\ + & 65415 \\ + & 65415 \\ + & 41385 \\ + & 41385 \\ \hline & 6123875 \end{array}$$

5. Означимо $x = \frac{\pi}{n}$, и нека је R полупречник описане кружнице овог n-тоугла. Тада по синусној теореми имамо $A_1A_2 = 2R\sin x$, $A_1A_3 = 2R\sin 2x$, $A_1A_4 = 2R\sin 3x$ и $A_1A_5 = 2R\sin 4x$. Дата једнакост се, дакле, своди на

$$\left(\frac{\sin 2x}{\sin x}\right)^2 = 2\cdot\frac{\sin 4x}{\sin 2x} + 3\cdot\left(\frac{\sin x}{\sin 3x}\right)^2.$$



Ок 2016 3Б 5

На основу идентитета $\frac{\sin 2x}{\sin x} = 2\cos x$ и $\frac{\sin 4x}{\sin 2x} = 2\cos 2x = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$ последња једнакост се своди на $4\sin^2 x = 3\frac{\sin^2 x}{\sin^2 3x}$. Како важи $\sin x \neq 0$ и $\sin 3x > 0$, остаје $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Одавде следи $3x = \frac{\pi}{3}$ или $3x = \frac{2\pi}{3}$, тј. $n = 9$ или $n = \frac{9}{2}$. Како је n природан број, једина могућност је $n = 9$.

Четврти разред – Б категорија

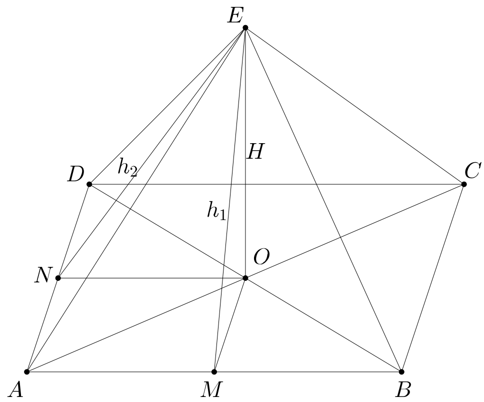
1. Нека је O пресек дијагонала правоугаоника $ABCD$ (O је уједно и подножје висине пирамиде из врха E). Нека су M и N средишта дужи AB и AD. Како су $\triangle ABE$ и $\triangle ADE$ једнакокраки, следи да су EM и EN њихове висине, редом. Означимо $EM = h_1$, $EN = h_2$ и $EO = H$.

Из једнакости

$$\frac{4}{3} = \frac{P(\triangle ABE)}{P(\triangle ADE)} = \frac{\frac{32h_1}{2}}{\frac{18h_2}{2}} = \frac{16h_1}{9h_2}$$

добијамо $h_2 = \frac{4h_1}{3}$. Имамо $OM = 9$ и $ON = 16$, па из Питагорине теореме примењене на $\triangle EOM$ и $\triangle EON$ добијамо $H^2 + 9^2 = h_1^2$ и $H^2 + 16^2 = h_2^2 =$

$\frac{16h_1^2}{9}$, па одузимањем прве једначине од друге остаје $\frac{7h_1^2}{9} = 256 - 81 = 175$, тј. $h_1 = \sqrt{175 \cdot \frac{9}{7}} = \sqrt{225} = 15$. Сада израчунавамо $H = \sqrt{h_1^2 - 9^2} = \sqrt{225-81} = \sqrt{144} = 12$, па тражена запремина износи $\frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 32 \cdot 12 = 2304$.



Ок 2016 4Б 1

2. Користећи адиционе формуле за претварање збира у производ и обратно прва једначина постаје

$$(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)) \sin\gamma = \frac{3-\sqrt{3}}{4},$$

а друга

$$\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \frac{3}{4}.$$

Како су у питању углови троугла, важи $\cos(\alpha+\beta) = -\cos\gamma$ и $\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma$, па одузимањем горњих двеју једначина имамо $\cos\gamma\sin\gamma = -\frac{\sqrt{3}}{4}$, тј. $\sin 2\gamma = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Како важи $0 < 2\gamma < 360°$, имамо две могућности.

- $2\gamma = 240°$, тј. $\gamma = 120°$:
  Из друге једначине добијамо $\cos(\alpha-\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, тј. $|\alpha-\beta| = 30°$, па су углови тог троугла $15°$, $45°$ и $120°$.
- $2\gamma = 300°$, тј. $\gamma = 150°$:
  Из друге једначине добијамо $\cos(\alpha-\beta) = \frac{3}{2}$, што је немогуће, па у овом случају нема решења.

3. *Прво решење.* Претпоставимо да се у неком тренутку појавио број дељив са 2016. Тада је тај број дељив и са 8, што значи да му и троцифрени завршетак мора бити дељив са 8. Међутим, према условима задатка, троцифрени завршетак тог броја може бити само неки од следећих: 230, 301, 012 или 123, а ниједан од ових завршетака није дељив са 8. Дакле, одговор на постављено питање је негативан.

Друго решење. Ако се број n који теткица пише састоји од k копија 2301 и онда се заврши цифром 2, 3 или 0, онда ће збир цифара бити $6k+2$ или $6k+5$, што није дељиво са 3, па ни са 2016. Према томе, преостаје једино могућност да се n састоји од k копија броја 2301. Али онда је последња цифра 1, број n није паран, те не може ни бити дељив са 2016.

4. Означимо са k, l, m и n елементе таблице на назначеним позицијама.

k		n		21
l	16	m		
		27		
1				

Нека је d_1 корак аритметичке прогресије у првој врсти. Тада имамо $21 - k = 4d_1$. Слично, ако је d_2 корак аритметичке прогресије у првој колони, имамо $1-k = 4d_2$. Одузимањем ове две једнакости добијамо $4d_1 - 4d_2 = 20$, тј. $d_1 - d_2 = 5$. Даље, из прве врсте имамо још $n = 21 - 2d_1$, затим из треће колоне $m = \frac{n+27}{2} = \frac{21-2d_1+27}{2} = 24 - d_1$, потом из друге врсте $16 = \frac{l+m}{2} = \frac{l+24-d_1}{2}$, тј. $l = d_1 + 8$, а из прве колоне добијамо $l = 1 - 3d_2$; последње две једнакости заједно дају $d_1 + 8 = 1 - 3d_2$, тј. $d_1 + 3d_2 = -7$. Из овог и претходно добијеног $d_1 - d_2 = 5$ израчунавамо $d_1 = 2$ и $d_2 = -3$, а одатле даље $k = 21 - 4d_1 = 13$. Сада се таблица лако попуњава до краја, чиме се добија доњи резултат. Решење је јединствено.

13	15	17	19	21
10	16	22	28	34
7	17	27	37	47
4	18	32	46	60
1	19	37	55	73

5. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ нуле посматраног полинома, и нека важи, без умањења општости, $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ (при овим ознакама, како је x_n највећа нула, треба доказати неједнакост $x_n \geqslant 1 + n\left|\frac{P(1)}{P'(1)}\right|$). Тада можемо записати $P(x) = c(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$. Имамо

$$\begin{aligned}\frac{P'(x)}{P(x)} &= \Big(c(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n) + c(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n) + \cdots \\ &\qquad + c(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})\Big)\frac{1}{c(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)} \\ &= \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \cdots + \frac{1}{x-x_n}.\end{aligned}$$

Одатле, уврштавајући $x = 1$, добијамо

$$\frac{P'(1)}{P(1)} = \frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \cdots + \frac{1}{1-x_n} = -\left(\frac{1}{x_1-1} + \frac{1}{x_2-1} + \cdots + \frac{1}{x_n-1}\right).$$

Пошто су све нуле реалне и веће од 1, сви сабирци у загради су позитивни, па даље имамо

$$\begin{aligned}\left|\frac{P'(1)}{P(1)}\right| &= \frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}+\cdots+\frac{1}{x_n-1}\\ &\geqslant \frac{1}{x_n-1}+\frac{1}{x_n-1}+\cdots+\frac{1}{x_n-1}=\frac{n}{x_n-1}.\end{aligned}$$

Одавде следи $\frac{x_n-1}{n} \geqslant \left|\frac{P(1)}{P'(1)}\right|$, из чега директно закључујемо $x_n \geqslant 1 + n\left|\frac{P(1)}{P'(1)}\right|$, што је и требало доказати.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 5. 3. 2016.

Први разред – А категорија

1. *Прво решење.* Доказујемо: i. за све $g_1, g_2, g_3 \in G$ међу којима је бар један број већи од 3 важи $(g_1 \diamond g_2) \diamond g_3 = g_1 \diamond (g_2 \diamond g_3)$; ii. за све $g, h \in G$ важи $(g \diamond h) \diamond 3 = g \diamond (h \diamond 3)$ и $(1 \diamond g) \diamond h = 1 \diamond (g \diamond h)$; iii. операција „$\diamond$“ је асоцијативна.

i. Како се применом операције „$\diamond$“ на било која два броја међу којима је бар један већи од 3 увек добија резултат 5, ако се број већи од 3 налази међу g_1, g_2, g_3, резултат оба израза $(g_1 \diamond g_2) \diamond g_3$ и $g_1 \diamond (g_2 \diamond g_3)$ износиће 5 (било већ приликом прве примене операције, било из два „корака“).

ii. Важи $(g \diamond h) \diamond 3 = 5$ и $g \diamond (h \diamond 3) = g \diamond 5 = 5$, као и $(1 \diamond g) \diamond h = 5 \diamond h = 5$ и $1 \diamond (g \diamond h) = 5$.

iii. Довољно је испитати могућности које нису размотрене под i. и ii., а то су оне у којима је на првом месту 2 или 3, на другом 1, 2 или 3, а на трећем 1 или 2.

$$\begin{array}{ll}(2\diamond 1)\diamond 1 = 1\diamond 1 = 5; & 2\diamond(1\diamond 1) = 2\diamond 5 = 5\\ (2\diamond 1)\diamond 2 = 1\diamond 2 = 5; & 2\diamond(1\diamond 2) = 2\diamond 5 = 5\\ (2\diamond 2)\diamond 1 = 2\diamond 1 = 1; & 2\diamond(2\diamond 1) = 2\diamond 1 = 1\\ (2\diamond 2)\diamond 2 = 2\diamond 2 = 2; & 2\diamond(2\diamond 2) = 2\diamond 2 = 2\\ (2\diamond 3)\diamond 1 = 5\diamond 1 = 5; & 2\diamond(3\diamond 1) = 2\diamond 4 = 5\\ (2\diamond 3)\diamond 2 = 5\diamond 2 = 5; & 2\diamond(3\diamond 2) = 2\diamond 3 = 5\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
(3\diamond 1)\diamond 1 = 4\diamond 1 = 5; & 3\diamond(1\diamond 1) = 3\diamond 5 = 5\\
(3\diamond 1)\diamond 2 = 4\diamond 2 = 5; & 3\diamond(1\diamond 2) = 3\diamond 5 = 5\\
(3\diamond 2)\diamond 1 = 3\diamond 1 = 4; & 3\diamond(2\diamond 1) = 3\diamond 1 = 4\\
(3\diamond 2)\diamond 2 = 3\diamond 2 = 3; & 3\diamond(2\diamond 2) = 3\diamond 2 = 3\\
(3\diamond 3)\diamond 1 = 5\diamond 1 = 5; & 3\diamond(3\diamond 1) = 3\diamond 4 = 5\\
(3\diamond 3)\diamond 2 = 5\diamond 2 = 5; & 3\diamond(3\diamond 2) = 3\diamond 3 = 5
\end{array}$$

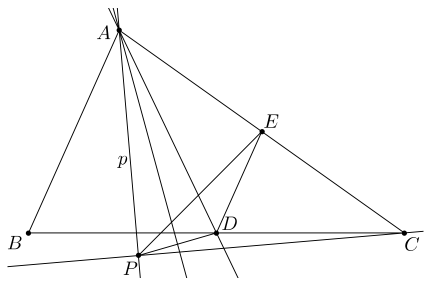
Друго решење. Приметимо, ако $x\diamond y\notin\{2,3\}$, тада $(x\diamond y)\diamond z = 5$ (што нам може знатно олакшати даље испитивање), а супротну могућност, $x\diamond y\in\{2,3\}$, имамо само у неким случајевима кад важи $y=2$. Дакле, тиме долазимо до идеје да раздвојимо случајеве $y\neq 2$ и $y=2$.

Претпоставимо прво $y\neq 2$. Тада, као што смо већ приметили, имамо $(x\diamond y)\diamond z = 5$. С друге стране, из $y\neq 2$ следи $y\diamond z\in\{3,4,5\}$, а тада и $x\diamond(y\diamond z)=5$, што је и требало доказати.

Приметимо још и следеће: уколико $x\notin\{2,3\}$, тада важи $x\diamond(y\diamond z)=5$, и такође $x\diamond y=5$ па тиме и $(x\diamond y)\diamond z = 5\diamond z = 5$, што је и требало доказати. Слично, уколико $z\notin\{1,2\}$, тада важи $(x\diamond y)\diamond z=5$, и такође $y\diamond z=5$ па тиме и $x\diamond(y\diamond z)=x\diamond 5=5$, што је и требало доказати.

Према свему реченом, преостаје још само испитати случајеве у којима важи $x\in\{2,3\}$, $y=2$ и $z\in\{1,2\}$. Тада имамо $x\diamond y = x\diamond 2 = x$ (ова једнакост важи за $x\in\{2,3\}$), тј. $(x\diamond y)\diamond z = x\diamond z$, и слично, $y\diamond z = 2\diamond z = z$ (ова једнакост важи за $z\in\{1,2\}$), тј. $x\diamond(y\diamond z) = x\diamond z$, па опет важи $(x\diamond y)\diamond z = x\diamond(y\diamond z)$. Тиме је доказ завршен.

2. Посматрајмо средиште E странице AC. Како је E средиште хипотенузе правоуглог $\triangle APC$, важи $PE = AE = CE$. Даље, средња линија DE у $\triangle ABC$ паралелна је страници AB, па следи $\measuredangle EDA = \measuredangle BAD$. Стога имамо $\measuredangle APE = \measuredangle PAE = \measuredangle BAD = \measuredangle ADE$, па је четвороугао $APDE$ тетиван. Следи $\measuredangle APD = 180^\circ - \measuredangle AED = \measuredangle BAC$.

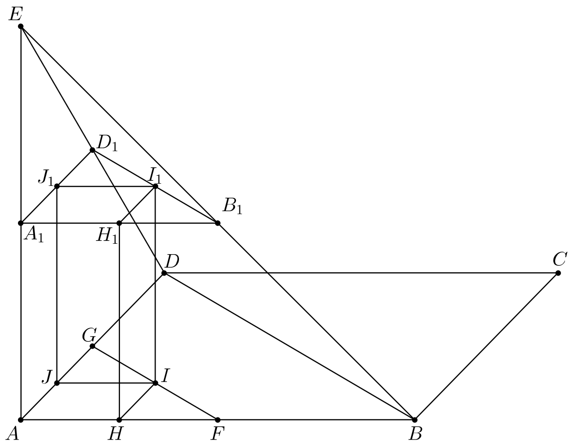


Др 2016 1А 2

3. *Прво решење.* Приметимо најпре следеће помоћно тврђење: уколико су темена једнакокрако-правоуглог троугла исте боје, тада су и средишта његових страница те боје. Заиста, ако посматрамо такав $\triangle PQR$, тада прво уочавамо да је и средиште S његове хипотенузе QR исте боје, а затим, применом услова на $\triangle SPQ$ и $\triangle SPR$, добијамо да су и средишта катета исте боје.

Докажимо сада да постоји једнакокрако-правоугли троугао чија су темена исте боје. Узмимо 2 тачке, P и R, које су обе, без умањења општости, плаве боје. Посматрајмо тачке Q и S такве да је четвороугао $PQRS$ квадрат. Уколико је бар једна од њих плаве боје, имамо тражени троугао. Уколико су обе црвене боје, тада посматрамо тачку T такву да $PQRST$ чини праву пирамиду с висином $\frac{PR}{2}$; без обзира на боју тачке T, можемо одабрати један од $\triangle PRT$ или $\triangle QST$.

Сада, посматрајући теме код правог угла уоченог троугла и средишта страница, добијамо једнобојни квадрат; назовимо га $ABCD$, и нека су сва његова темена, без умањења општости, плаве боје. Уочимо сада праве кроз A, B, C и D нормалне на раван квадрата $ABCD$, и на тим правима уочимо тачке које су од A, B, C и D, респективно, удаљене за дужину странице квадрата $ABCD$ (имамо укупно 8 таквих тачака, на свакој правој по 2). Ако су све ове тачке црвене, оне формирају квадар с истобојним теменима. Претпоставимо да је нека од тих тачака плава, рецимо E, при чему је, без умањења општости, E на правој кроз A. Нека су тачке A_1, D_1, B_1, F и G средишта дужи EA, ED, EB, AB и DA, а тачке H, I, J, H_1, I_1 и J_1 средишта дужи AF, FG, GA, A_1B_1, B_1D_1 и D_1A_1, све респективно. Из $\triangle EAB$, $\triangle EAD$ и $\triangle DAB$ налазимо да су и тачке A_1, B_1, D_1, F и G плаве, а затим из $\triangle AFG$ и $\triangle A_1B_1D_1$ добијамо да су и тачке H, I, J, H_1, I_1 и J_1 плаве. Тиме смо добили плави квадар $AHIJA_1H_1I_1J_1$.



Др 2016 1А 3

Друго решење. Из услова задатка директно добијамо да, ако су темена једнакостраничног троугла једне боје, онда су и средишта страница тог троугла исте боје.

Докажимо прво да постоји једнакостраничан троугао с истобојним теменима. У ту сврху, најпре ћемо наћи три истобојне тачке од којих је једна средиште дужи које образују преостале две, што чинимо на следећи начин: уочимо тачке A и C исте боје, рецимо плаве, и посматрајмо симетралу дужи AC; уколико је нека тачка на тој симетрали плава, тада је и средиште дужи AC плаво; у супротном, на тој симетрали можемо уочити три црвене тачке међу којима је једна средиште дужи које образују преостале две, како смо и желели. Назовимо добијену тројку тачака (рецимо плавих) A, B и C, где је B између A и C. Сада посматрајмо тачке D, E и F које са дужима AB, BC и AC, респективно, образују једнакостраничне троуглове са исте стране праве AB. Ако је нека од тих тачака плава, онда она са одговарајућом дужи формира једнакостранични троугао са плавим теменима; с друге стране, ако су све црвене, тада је $\triangle DEF$ тражени троугао.

Дакле, имамо једнакостраничан $\triangle PQR$ чија су сва темена, без умањења општости, плава, а тада су и средишта његових страница плава. Сада ћемо доказати да постоји једнобојан правилан тетраедар. Посматрајмо четири тачке које са $\triangle PQR$ и три троугла одређена по једном од тачака P, Q или R и средиштима одговарајућих страница формирају правилне тетраедре. Ако је нека од те четири тачке плаве боје, имамо тражени тетраедар (плаве боје), а у супротном уочене четири тачке формирају црвени правилан тетраедар.

Средишта ивица уоченог истобојног тетраедра такође су исте боје, а она чине правилан октаедар. И средишта ивица овог октаедра су исте боје, а међу тим средиштима можемо уочити осам (средишта оних ивица која полазе из два наспрамна темена октаедра) таквих која формирају квадар. Тиме је доказ завршен.

Треће решење. Уведимо стандардан Декартов правоугли координатни систем у нашем простору. Прво претпоставимо да, за $i = 1, 2, 3$, постоји дуж A_iB_i чији су крајеви исте боје а средиште C_i супротне боје, и да је притом A_1B_1 паралелна са x-осом, A_2B_2 са y-осом, а A_3B_3 са z-осом. Нека је α_i раван нормална на A_iB_i која пролази кроз C_i. За свако i, $i = 1, 2, 3$, све тачке равни α_i међусобно су исте боје (у супротном имамо контрадикцију с условом задатка). Како су равни α_1, α_2 и α_3 међусобно нормалне, све имају исту боју, рецимо плаву. Ако постоји плава тачка A која није у $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$, тада лако налазимо квадар чија су сва темена плаве боје. С друге стране, ако су све тачке ван $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$ црвене боје, тада још лакше налазимо црвени квадар.

Сада можемо претпоставити да не постоји права паралелна са, без умањења општости, x-осом, таква да на њој можемо уочити три тачке A, B и C, где је C средиште дужи AB, при чему су A и B исте боје а C друге боје. Од сада до краја решења посматрамо само тачке са целобројним координатама, осим када је експлицитно наглашено другачије.

Посматрајмо произвољну праву p паралелну са x-осом. Тврдимо да на p не постоје две тачке једне боје такве да је нека тачка између њих (не нужно средиште дужи) друге боје. Претпоставимо супротно. Одаберимо две такве тачке на најмањем растојању. Тада имамо нпр. плаве тачке са

x-координатама n и $n+k$, а све тачке између њих су црвене. Случај $k=2$ је немогућ јер средиште дужи с плавим крајевима мора такође бити плаво. С друге стране, за $k>2$, средиште дужи (можда нецелобројно) између тачака са x-координатама n и $n+k$ мора бити плаво јер су ове тачке плаве, но то средиште је уједно и средиште дужи између тачака са x-координатама $n+1$ и $n+k-1$, а ове тачке су црвене, контрадикција. Дакле, можемо закључити следеће: за сваку праву p паралелну са x-осом постоји $n \in \mathbb{Z}$ такво да све тачке са x-координатом већом од n имају једну боју, а све остале тачке другу.

Сада посматрајмо све тачке с координатама облика (x, b_i, c_i), где важи $x \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant b_i \leqslant 6$ и $0 \leqslant c_i \leqslant 2$. Приметимо да се ове тачке могу груписати на 21 праву паралелну са x-осом (сваки пар (b_i, c_i) одређује по једну такву праву). Уочимо број $m \in \mathbb{Z}$ такав да на свакој од тих 21 правих све тачке x-координатом већом од m имају исту боју. Међу посматраним правима имамо 7 оних на којима леже тачке с z-координатом једнаком 0; према Дирихлеовом принципу, на бар 4 од њих све тачке са x-координатом већом од m имају међусобно исту боју, рецимо плаву. Изнад те 4 праве налазе се још 4 од наших уочених правих, p_1, p_2, p_3 и p_4, оне на којима леже тачке са z-координатом једнаком 1, и још 4 од наших уочених правих, q_1, q_2, q_3 и q_4, оне на којима леже тачке са z-координатом једнаком 2. Ако неке две од правих p_i имају плаве тачке са x-координатом већом од m, тада лако уочавамо плави квадар. Слично, ако неке две од правих q_i имају плаве тачке са x-координатом већом од m, тада лако уочавамо плави квадар. Најзад, ако три од правих p_i и три од правих q_i имају црвене тачке са x-координатом већом од m, тада постоје две од те три праве p_i такве да су директно изнад њих две од ове три праве q_i, и тада лако уочавамо црвени квадар.

4. Из записа $\binom{64}{21} = \frac{64!}{21! \cdot 43!}$ добијамо да највећи степен броја 5 који дели $\binom{64}{21}$ јесте

$$5^{\lfloor \frac{64}{5} \rfloor + \lfloor \frac{64}{25} \rfloor - \lfloor \frac{21}{5} \rfloor - \lfloor \frac{43}{5} \rfloor - \lfloor \frac{43}{25} \rfloor} = 5^{12+2-4-8-1} = 5,$$

док највећи степен броја 2 који дели $\binom{64}{21}$ јесте

$$2^{32+16+8+4+2+1-10-5-2-1-21-10-5-2-1} = 2^{63-18-39} = 2^6.$$

Дакле, број из поставке дељив је са 5, и дељив је са 2^6 али не и са 2^7. Одатле следи да је његова последња цифра једнака 0. Обележимо преостале непознате цифре на следећи начин:

$$\overline{5a\,6b0\,c8d\,862\,e1f\,7g7\,h4i\,4j5\,12k\,9l0}. \tag{1}$$

Приметимо да због дељивости броја (1) са 2^6 троцифрени завршетак $\overline{9l0}$ мора бити дељив са 8, тј. $\overline{9l}$ мора бити дељиво са 4, одакле добијамо $l \in \{2,6\}$. Највећи степени бројева 3 и 11 који деле $\binom{64}{21}$ јесу $3^{21+7+2-7-2-14-4-1} = 3^2$ и $11^{5-1-3} = 11$. Одатле, број (1) дељив је са 9 и са 11, па добијамо

$$\begin{aligned} 0 &\equiv 5+a+6+b+0+c+8+d+8+6+2+e+1+f+7+g+7 \\ &\qquad\qquad +h+4+i+4+j+5+1+2+k+9+l+0 \\ &= 75+a+b+c+d+e+f+g+h+i+j+k+l \equiv 3+S \pmod 9 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} 0 &\equiv 5-a+6-b+0-c+8-d+8-6+2-e+1-f+7-g+7 \\ &\qquad\qquad -h+4-i+4-j+5-1+2-k+9-l+0 \\ &= 61-S \equiv 6-S \pmod{11}, \end{aligned}$$

где смо са S означили суму $a+b+c+\cdots+l$. Претходне две релације своде се на $S \equiv 6 \pmod 9$ и $S \equiv 6 \pmod{11}$, тј. $99 \mid S-6$. Како је S збир 12 цифара и за цифру l имамо ограничење $2 \leqslant l \leqslant 6$, следи $2 \leqslant S \leqslant 105$, па из овог и претходног закључка добијамо $S = 6$ или $S = 105$. Претпоставимо најпре $S = 105$. Ово је могуће само у случају $a = b = c = \cdots = k = 9$ и $l = 6$. Но, тада би четвороцифрени завршетак броја (1) износио $\overline{k9l0} = 9960$ и он би морао да буде дељив са $2^4 = 16$, а што није тачно (јер 996 није дељиво са 8). Према томе, остаје $S = 6$.

Подсетимо се, $l \in \{2,6\}$. Размотримо прво случај $l = 2$. Како мора важити $2^3 \mid \overline{k9l} = \overline{k92}$, следи $k = 1$ или $k = 3$ (не може бити $k \geqslant 5$ због $S = 6$). Могућност $k = 3$ отпада јер мора важити $2^4 \mid \overline{2k9l}$, али $16 \nmid 2392$. Преостаје $k = 1$. Тада седмоцифрени завршетак броја (1) износи 5 121 920; но, како је ово дељиво са 2^7 (што се лако може видети примећујући да $2^6 = 64 \mid 512192$ због $64 \mid 512000$ и $64 \mid 192$), и број (1) био би дељив са 2^7, али раније је констатовано да је он дељив са 2^6 али не и са 2^7, контрадикција. Коначно закључујемо $l = 6$. Сада из $S = 6$ следи $a = b = c = \cdots = k = 0$. Посматрани број је

$$50\,600\,080\,862\,010\,707\,040\,405\,120\,960.$$

Други разред – А категорија

1. Обележимо $f_i(x) = f(i,x)$ за $i \in \{1,2,3,4\}$. Тада се први услов своди на $f_i(i) = i$ за све $i \in \{1,2,3,4\}$, а други услов своди се на

$f_i(f_i(x)) = f_i(x)$ за све $i \in \{1,2,3,4\}$. Дакле, f можемо еквивалентно представити као уређену четворку пресликавања (f_1, f_2, f_3, f_4), где сваки f_i задовољава $f_i(f_i(x)) = f_i(x)$ и $f_i(i) = i$. Даље, број пресликавања $h : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ која задовољавају $h(h(x)) = h(x)$ и $h(i) = i$, где је $i \in \{2,3,4\}$ неки фиксиран број, једнак је броју пресликавања $g : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ која задовољавају $g(g(x)) = g(x)$ и $g(1) = 1$.

Дакле, из правила производа следи да је број пресликавања f која задовољавају услов задатка једнак четвртом степену броја пресликавања $g : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ која задовољавају $g(g(x)) = g(x)$ и $g(1) = 1$. Обележимо

$$A = \{g : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\} \mid g(g(x)) = g(x) \text{ и } g(1) = 1\}.$$

Нека је g пресликавање скупа $\{1,2,3,4\}$ у самог себе, и нека је S скуп слика функције g ($S \subseteq \{1,2,3,4\}$). Лако примећујемо да важи $g \in A$ ако и само ако $1 \in S$ и рестрикција g на S је идентичко пресликавање. Дакле, да бисмо једнозначно одредили $g \in A$, довољно је одредити скуп слика S такав да $1 \in S \subseteq \{1,2,3,4\}$, као и рестрикцију пресликавања g које слика $\{1,2,3,4\} \setminus S$ (тј. комплемент од S) у скуп S на произвољан начин.

Сада раздвајамо случајеве у зависности од кардиналности скупа S. За $|S| = 1$ и $|S| = 4$ постоји јединствено пресликавање $g \in A$, наиме, константно пресликавање и идентичко пресликавање, редом. За $|S| = 2$ имамо $1 \in S$ и 3 избора за други елемент скупа S, и $2^2 = 4$ пресликавања за сваки избор S, дакле укупно 12 пресликавања. За $|S| = 3$ имамо $1 \in S$ и $\binom{3}{2} = 3$ избора за преостала два елемента скупа S, и $3^1 = 3$ пресликавања за сваки избор S, дакле укупно 9 пресликавања. Коначно, $|A| = 1 + 12 + 9 + 1 = 23$, па је тражени број једнак $|A|^4 = 23^4$.

2. За $x = y = 0$ добијамо $f(0) = 0$. Затим уврштавање $y = 0$ у полазну једначину даје $f(x)^2 = x^2$. Овим за свако x имамо $f(x) = \pm x$.

Претпоставимо да постоје x и z различити од 0 такви да важи $f(x) = x$ и $f(z) = -z$. За $y = x - z$ полазна једначина своди се на

$$-xz + f(x-z)f(2x-z) = x^2 + (x-z)^2,$$

тј.

$$-xz \pm (2x^2 - 3xz + z^2) = 2x^2 - 2xz + z^2,$$

што се даље своди на

$$0 = (2x^2 - xz + z^2)^2 - (2x^2 - 3xz + z^2)^2 = 2xz(4x^2 - 4xz + 2z^2) = 4xz(x^2 + (x-z)^2).$$

Одавде следи $x = 0$ или $z = 0$, контрадикција с претпоставком. Дакле, мора важити или $f(x) = x$ за све x, или $f(x) = -x$ за све x. Директно се проверава да ове функције заиста задовољавају једначину из поставке.

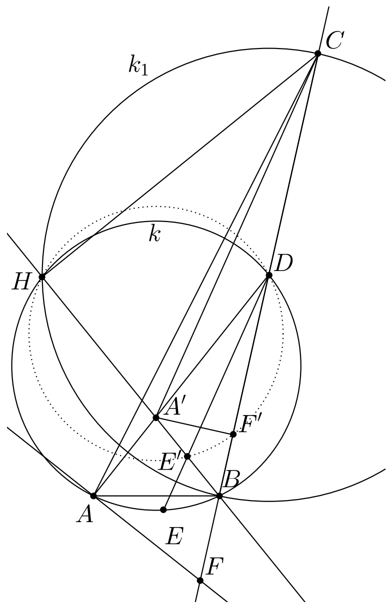
3. Дата једначина може се записати у облику $p^2 = (m-2^a3^b)(m+2^a3^b)$. Како је p прост број, једина могућност је $m + 2^a3^b = p^2$ и $m - 2^a3^b = 1$. Одузимањем ових двеју релација добијамо $2^{a+1}3^b = (p-1)(p+1)$. Како бар један од бројева $p-1$ и $p+1$ није дељив са 3, он мора бити облика 2^k за неко $k \in \mathbb{N}_0$. Пошто за $p = 2$ нема решења, важи $k > 0$. Разликујемо два случаја.

- $p+1 = 2^k$: Тада имамо $p-1 = 2^k - 2 = 2^{a+1-k}3^b$, тј. $2^k - 2^{a+1-k}3^b = 2$, одакле следи $k = a$ и $2^a - 2 \cdot 3^b = 2$, тј. $2^{a-1} = 3^b + 1$. Како је остатак при дељењу са 8 израза $3^b + 1$ увек 2 или 4, добијамо $a = 2$ (и тада $b = 0$) или $a = 3$ (и тада $b = 1$), што даје решења $(p, a, b, m) \in \{(3, 2, 0, 5), (7, 3, 1, 25)\}$.
- $p-1 = 2^k$: Тада имамо $p+1 = 2^k+2 = 2^{a+1-k}3^b$, тј. $2^{a+1-k}3^b - 2^k = 2$, одакле следи $k = 1$ или $k = a$. У случају $k = 1$ добијамо $a = 2$, $b = 0$ и $(p, a, b, m) = (3, 2, 0, 5)$, што није ново решење. Зато узмимо $k \geqslant 2$. Тада следи $k = a$ и $2 \cdot 3^b - 2^a = 1$, тј. $2^{a-1} = 3^b - 1$. За $a = 2$ имамо решење $(p, a, b, m) = (5, 2, 1, 13)$. За $a \geqslant 3$ добијамо $4 \mid 3^b - 1$, па b мора бити парно, рецимо $b = 2b_1$. Сада из $2^{a-1} = (3^{b_1} + 1)(3^{b_1} - 1)$ закључујемо да су $3^{b_1} - 1$ и $3^{b_1} + 1$ степени двојке који се разликују за 2, а једини такви степени двојке су 2 и 4. Дакле, $b_1 = 1$ и одатле $b = 2$, $a = 4$, што нам даје решење $(17, 4, 2, 145)$.

Дакле, постављена једначина има четири решења:

$$(p, a, b, m) \in \{(3, 2, 0, 5), (5, 2, 1, 13), (7, 3, 1, 25), (17, 4, 2, 145)\}.$$

4. Приметимо да је $\measuredangle BGC$ прав ако и само ако важи $DG = DB$; дакле, ако са H означимо други пресек кружнице k и кружнице k_1 с пречником BC, следи да је довољно доказати да су тачке H, E и F колинеарне (из овога би следило $H \equiv G$). Применимо инверзију у односу на кружницу k_1; нека се тачке A, E и F пресликавају у тачке A', E' и F', редом, а приметимо још да тачке B, C и H остају фиксне. Треба доказати да су тачке D, H, E' и F' концикличне. Приметимо следеће чињенице: посматраном инверзијом k се пресликава у праву BA', F' је

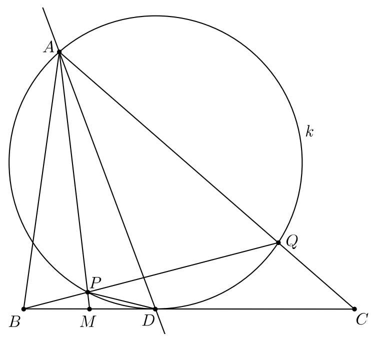


Др 2016 2A 4

подножје висине из A' на BC, H је подножје висине из C на BA' и најзад, из једнакости $\measuredangle E'DB = \measuredangle EDB = \measuredangle DAC = \measuredangle DCA'$ следи $E'D \parallel A'C$, а пошто је E' на дужи BA', следи да је E' средиште дужи BA'. Према томе, тачке D, H, E' и F' припадају Ојлеровој кружници за $\triangle A'BC$, те су концикличне. Овим је доказ завршен.

Трећи разред – А категорија

1. Приметимо једнакост $MP \cdot MA = MD^2 = MB^2$. Одатле добијамо $\triangle MPD \sim \triangle MDA$ и $\triangle MPB \sim \triangle MBA$, па следи $\measuredangle BPD = 180^\circ - \measuredangle PBD - \measuredangle PDB = 180^\circ - \measuredangle PAB - \measuredangle PAD = 180^\circ - \measuredangle CAD = 180^\circ - \measuredangle QPD$. Тиме је задатак решен.



Др 2016 3А 1

2. Пошто је $\frac{n}{2015}$ природан број који има непаран број делилаца, закључујемо $n = 2015a^2$ за неко $a \in \mathbb{N}$. Сада је и број $n - 2015 = 2015(a^2 - 1)$ потпун квадрат који има 2015 делилаца. Из факторизације $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ и чињенице да су нам већ позната 3 проста фактора броја $2015(a^2-1)$ (управо 5, 13 и 31) следи да број a^2-1 не може имати неке просте факторе различите од простих фактора броја 2015 (наиме, број делилаца броја $2015(a^2-1)$ једнак је производу експонената у његовом каноничком запису увећаних за 1, а будући да овај производ треба да износи 2015, и како се број 2015, као производ три проста броја, не може представити као производ четири природна броја већа од 1, закључак следи). Одавде добијамо $a^2-1 = (a-1)(a+1) = 5^{2x+1}13^{2y+1}31^{2z+1}$ за неке $x, y, z \in \mathbb{N}_0$. Сваки од бројева 5, 13 и 31 дели тачно један од бројева $a-1$ и $a+1$, одакле и читави посматрани степени бројева 5, 13 и 31 деле тачно један од њих. Приметимо да важи $5^{2x+1} \equiv \pm 5 \pmod{13}$ и $31^{2z+1} \equiv 5^{2z+1} \equiv \pm 5 \pmod{13}$. Ако $13 \mid a \pm 1$, тада имамо $a \mp 1 \equiv \mp 2 \pmod{13}$, али како број $a \mp 1$ мора бити нешто од 5^{2x+1}, 31^{2z+1} или $5^{2x+1} \cdot 31^{2z+1}$, из малопређашњег закључка добијамо да је он конгруентан са ± 1 или ± 5 по модулу 13, контрадикција. Дакле, тражени природан број не постоји.

3. Пошто први мудрац означава другог као лажова, следи да тачно један од њих двојице говори истину. Надаље, нека i-ти мудрац говори истину. Тада су сви мудраци на местима од $i+1$ до $2i$ лажљивци, али пошто мудрац на месту $i+1$ лаже, следи да мудрац на неком од места

$2i+1$ или $2i+2$ говори истину. Дакле, можемо рекурентно дефинисати низ чији чланови представљају позиције истинољубивих мудраца, редом, на следећи начин: $a_1 = 1 + e_0$ и $a_{k+1} = 2a_k + 1 + e_k$, где $e_0, e_1, e_2 \ldots \in \{0,1\}$. Индукцијом директно добијамо $a_k = 2^k - 1 + 2^{k-1}e_0 + 2^{k-2}e_1 + \cdots + e_{k-1}$. Да бисмо добили неконтрадикторан скуп изјава, за неко k мора важити $a_k = n + 1 + e_0$, те добијамо $n = 2^k - 2 - e_0 + 2^{k-1}e_0 + 2^{k-2}e_1 + \cdots + e_{k-1}$. Дакле, за све вредности n од $n = 2^k - 2$ до $n = 2^{k+1} - 4$ постоји аранжман мудраца (дат низом a_k) где би мудраци могли дати наведене изјаве. Одговоримо сада на сва три дела задатка.

а) Мудраци могу дати овакав скуп изјава за све природне бројеве n који нису облика $2^k - 3$, $k \in \mathbb{N}$.

b) За $e_0 = 0$ примећујемо да n може узимати вредности од $n = 2^k - 2$ до $n = 2^k + 2^{k-1} - 3$, и при томе се свака од њих остварује на јединствен начин (што следи из једнозначности бинарног записа), а за $e_0 = 1$ имамо распон од $n = 2^k + 2^{k-1} - 3$ до $n = 2^{k+1} - 4$, такође остварене на јединствен начин. Дакле, од свих вредности за n поменутих под а), једино за n облика $2^k + 2^{k-1} - 3$, $k \in \mathbb{N}$, новинар неће бити у могућности да установи ко су истинољупци (јер постоји једна могућност са $e_0 = 0$ и једна са $e_0 = 1$).

c) Из неједнакости $1024 + 512 - 3 < 2016 < 2048 - 4$, следи $e_0 = 1$ и $k = 10$. Имамо $2^8 e_1 + \cdots + e_9 = 2016 - (1024 + 512 - 3) = 483$, одакле следи $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e_8 = e_9 = 1$ и $e_5 = e_6 = e_7 = 0$. Сада се лако добија да истинољубиви мудраци седе на позицијама: 2, 6, 14, 30, 62, 125, 251, 503 и 1008.

4. Трансформишимо постављену једначину на следећи начин:

$$f(x)(f(x) - f(x-y)) = f(y)(f(x+y) - f(y)).$$

Уврштавањем $y = 0$ добијамо $0 = f(0)(f(x) - f(0))$. Пошто није могуће да за свако x важи $f(x) = f(0)$ (јер f није константна), следи $f(0) = 0$.

Уврштавањем $x = y$, $x = 2y$ и $x = 3y$ у посматрану једначину добијамо редом једнакости

$$\begin{aligned} f(y)(f(2y) - 2f(y)) &= 0, \\ f(2y)(f(2y) - f(y)) &= f(y)(f(3y) - f(y)), \\ f(3y)(f(3y) - f(2y)) &= f(y)(f(4y) - f(y)). \end{aligned}$$

Докажимо да из ових једнакости следи

$$f(2y) = 2f(y) \text{ и } f(3y) = 3f(y) \text{ за све } y \in \mathbb{R}.$$

Заиста, уколико важи $f(y) \neq 0$, тада лако добијамо жељени закључак. Уколико важи $f(y) = 0$, тада следи $f(2y) = 0$ и $f(3y) = 0$, па и у том случају закључак важи. Сада увршртавањем $y = 2x$ у посматрану једначину добијамо $f(x)^2 = -f(x)f(-x)$, одакле следи

$$f(-x) = -f(x) \text{ или } f(x) = 0 \text{ за свако } x \in \mathbb{R}.$$

Најзад, нека је y такво да важи $f(y) \neq 0$ (такво y постоји јер f није константна). Уврстимо $-y$ уместо y у посматрану једначину, чиме добијамо (након сређивања) $f(x)f(x+y) - f(y)f(x-y) = f(x)^2 + f(y)^2$. Помножимо ову једнакост са $f(x)$ и саберимо је с полазном једнакошћу помноженом са $f(y)$; тиме добијамо

$$(f(x)^2 + f(y)^2) \cdot (f(x) + f(y) - f(x+y)) = 0.$$

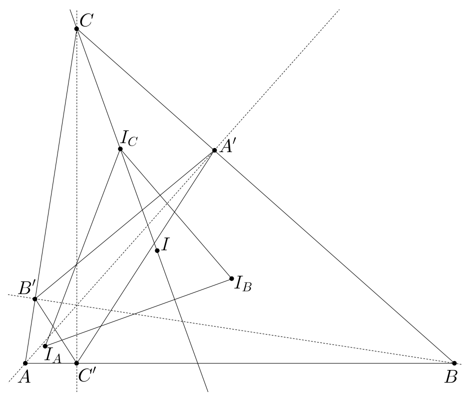
Како важи $f(y)^2 > 0$, остаје $f(x) + f(y) - f(x+y) = 0$.

Према томе, $f(x) + f(y) = f(x+y)$ кад год је бар једна од вредности $f(x), f(y)$ различита од нуле. С друге стране, у случају $f(x) = f(y) = 0$ заменом x са $x+y$ у постављеној једначини добијамо $f(x+y) = 0$, тј. жељена једнакост и тада важи, што завршава доказ.

Четврти разред – А категорија

1. Нека су α, β и γ углови у $\triangle ABC$ који одговарају, редом, теменима A, B и C. Нека је I центар уписане кружнице у $\triangle ABC$ а r њен полупречник. Докажимо прво једнакости $II_A \cdot IA = II_B \cdot IB = II_C \cdot IC = 2r^2$. Из сличности $\triangle AB'C' \sim \triangle ABC$ добијамо $\frac{AI_A}{AI} = \frac{AB'}{AB}$. Из тога следи

$$\begin{aligned} II_A \cdot IA &= IA^2 \cdot \left(1 - \frac{AI_A}{AI}\right) \\ &= \left(\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{AB'}{AB}\right) \\ &= \frac{r^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} \cdot (1 - \cos\alpha) = 2r^2. \end{aligned}$$



Др 2016 4А 1

Аналогно се доказују и друге две једнакости.

На основу доказаног, $\triangle II_AI_B$ и $\triangle IBA$ су слични па следи $\measuredangle II_AI_B = \frac{\beta}{2}$ и $\measuredangle II_BI_A = \frac{\alpha}{2}$. Аналогно показујемо $\measuredangle II_AI_C = \frac{\gamma}{2}$ и $\measuredangle II_CI_A = \frac{\alpha}{2}$. Како важи $\measuredangle I_B I_A I_C + \measuredangle I I_C I_A = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 90^\circ$, закључујемо $I_C I \perp I_A I_B$, па следи тражено тврђење.

2. Означимо $s = x_1 + \cdots + x_n$. Продужимо низ периодично: $x_{i+jn} = x_i$ за $j \in \mathbb{N}$. Дефинишимо $a_0 = 1$ и, за $k = 0, 1, 2, \ldots$, нека је a_{k+1} природан број такав да важи $a_{k+1} > a_k$ и $\sum_{i=a_k+1}^{a_{k+1}} x_i \geqslant 0$. Међу бројевима $a_0, a_1, a_2, \ldots$ постоје два конгруентна по модулу n, рецимо $a_p \equiv a_q \pmod{n}$, $q > p$. Тада из $a_q = a_p + jn$ ($j \in \mathbb{N}$) имамо $0 \leqslant \sum_{i=a_p+1}^{a_q} = js$, одакле следи $s \geqslant 0$.

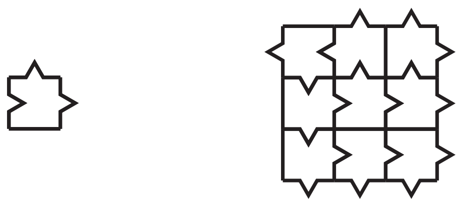
3. Писаћемо $f(y) = y^y$. Доказујемо индукцијом по n да скуп $\{f(1), f(3), \ldots, f(2^n - 1)\}$ чини сведен систем остатака по модулу 2^n. За $n = 1$ тврђење је тривијално. Претпоставимо $n \geqslant 2$ и да тврђење важи за $n - 1$.

По Ојлеровој теореми имамо $(y + 2^{n-1})^{2^{n-1}} \equiv 1 \pmod{2^n}$ за непарно y, одакле следи $f(y + 2^{n-1}) \equiv (y + 2^{n-1})^y \pmod{2^n}$. С друге стране,

$$
\begin{aligned}
(y + 2^{n-1})^y &= y^y + \binom{y}{1} y^{y-1} 2^{n-1} + \binom{y}{2} y^{y-2} 2^{2n-2} + \cdots \\
&\equiv y^y + \binom{y}{1} y^{y-1} 2^{n-1} \equiv f(y) + 2^{n-1} \pmod{2^n}.
\end{aligned}
$$

Следи $f(y+2^{n-1}) \equiv f(y) + 2^{n-1} \pmod{2^n}$. Зато међу $f(1), f(3), \ldots, f(2^n-1)$ нема бројева међусобно конгруентних по модулу 2^n, чиме је индуктивни корак завршен.

4. Тражени многоугао постоји. Посматрајмо јединични квадрат и конструишимо довољно мале једнакостраничне троуглове (рецимо, странице $\frac{1}{100}$) над три његове странице као што је приказано на слици лево.



Др 2016 4А 4

Оваквом конструкцијом посматраном квадрату су додата два „шпица“ и један „усек“. На слици десно је приказано да се тако добијени многоугао заиста може обмотати са 8 копија. Докажимо још да се посматраним многоуглом не може поплочати раван.

Претпоставимо супротно: нека је раван поплочана посматраним многоуглом. Јасно, овакво поплочавање заправо је регуларно поплочавање равни квадратом, до на шпицеве и усеке. Одаберимо један квадрат 5×5 издељен на 25 јединичних квадратића. Овим квадратићима одговара 25 усека и 50 шпицева, па следи да од тих 50 шпицева постоји бар 25 оних који нису упарени ни с једним од тих 25 усека. Неупарени шпицеви се морају налазити на рубу посматраног квадрата 5×5; међутим, обим тог квадрата износи свега 20, па се на њему може налазити највише 20 шпицева, контрадикција. Према томе, раван није могуће поплочати описаним многоуглом.

Први разред – Б категорија

1. а) Растављање налазимо на следећи начин:

$$\begin{aligned} x^8 + x^4 + 1 &= x^8 + 2x^4 + 1 - x^4 = (x^4+1)^2 - (x^2)^2 \\ &= (x^4 - x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 1) \\ &= (x^4 - x^2 + 1)(x^4 + 2x^2 + 1 - x^2) \\ &= (x^4 - x^2 + 1)((x^2+1)^2 - x^2) \\ &= (x^4 - x^2 + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

b) Користећи део под а) (за $x = \sqrt[4]{3}$) видимо да ће проширивањем разломка са $(3-\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-\sqrt[4]{3}+1)$ у имениоцу остати $((\sqrt[4]{3})^8+(\sqrt[4]{3})^4+1)$, тј. 13. Дакле, тражени облик разломка је

$$\frac{(4-\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt[4]{3}+1)}{13}.$$

2. а) Збир цифара посматраног броја износи

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \cdots + 9 \cdot 9 + 10 \cdot (1+0) + 11 \cdot (1+1) + \cdots + 20 \cdot (2+0) = 1205.$$

Дакле, како збир цифара није дељив са 9, ни посматрани број није дељив са 9.

b) Рачунамо разлику збирова цифара на парним, односно непарним позицијама:

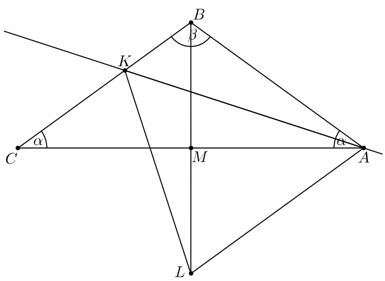
$$\begin{aligned} &(1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 9 + 11 \cdot 1 + \cdots + 19 \cdot 9) \\ &\quad - (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + 4 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + (10 + \cdots + 19) \cdot 1 + 20 \cdot 2) \\ &\quad = 880 - 325 = 555. \end{aligned}$$

Како ова разлика није дељива са 11, ни посматрани број није дељив са 11.

c) Из збира израчунатог под a) видимо да посматрани број даје остатак 2 при дељењу са 3. Како потпуни квадрати могу давати само остатке 0 или 1 по модулу 3, следи да посматрани број није потпун квадрат. (Другачије, могуће је приметити и да, ако се квадрат неког броја завршава цифром 0, онда се и сам тај број завршава цифром 0, али онда се његов квадрат завршава цифрама 00; другим речима, потпуни квадрати који се завршавају цифром 0 морају се завршавати цифрама 00, а како се посматрани број завршава цифрама 20, он не може бити потпун квадрат.)

d) Како је троцифрен завршетак посматраног броја 020, што није дељиво са 8, посматрани број није дељив са 8, па није дељив ни са 16.

3. Не постоји. Видимо да је у задатих 10 заграда заступљено свих могућих 10 парова бројева, па без обзира на то коју пермутацију посматрамо, чиниоци из поставке су: 3, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8 и 9. Но како год ови бројеви били распоређени на леву и десну страну, укупан степен простог броја 3 у овим чиниоцима износи 5, па не може на левој и десној страни бити једнак број појављивања простог чиниоца 3 (можемо исто закључити и за прост чинилац 2).



Др 2016 1Б 4

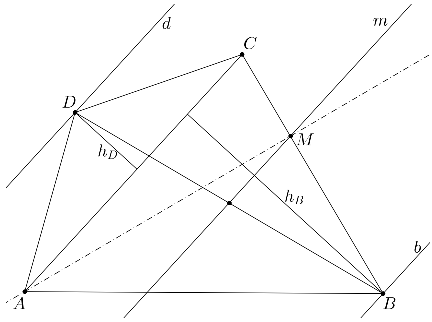
4. Означимо углове $\measuredangle BAC = \measuredangle BCA = \alpha$ и $\measuredangle ABC = \beta$ (важи $2\alpha + \beta = 180°$). Приметимо да важи $\measuredangle AKB = \frac{3\alpha}{2}$ (спољашњи угао за $\triangle AKC$). Нека је L тачка симетрична тачки B у односу на праву AC. Имамо $BL = 2BM = AK$. Како је $BALC$ ромб, четвороугао $BALK$ је трапез; он притом има једнаке дијагонале ($BL = AK$), па је једнакокрак, а тиме и тетиван. Сада из $\measuredangle ABL = \measuredangle AKL = \frac{\beta}{2}$ и $\measuredangle ABK = \measuredangle LKB$ закључујемо $\beta = \frac{3\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$, одакле следи $\beta = 3\alpha$. Добијамо $5\alpha = 180°$, па су углови овог троугла $36°$, $36°$ и $108°$.

5. *Анализа.* Површина четвороугла $ABCD$ једнака је збиру површина $\triangle BAC$ и $\triangle DAC$. Нека су h_B и h_D висине спуштене на AC у $\triangle BAC$ и $\triangle DAC$, редом. Површина четвороугла $ABCD$ износи $\frac{(h_B+h_D)AC}{2}$. Нека су b и d праве кроз B и D, редом, паралелне са AC. Права m паралелна овим двема правима и једнако удаљена од обе (за по $\frac{h_B+h_D}{2}$) сећи ће било страницу CB, било CD у некој тачки M (у зависности од тога која од висина h_B и h_D је већа). Права AM је тражена права јер се лако проверава да је збир површина $\triangle AMC$ и мањег од $\triangle BAC$ или $\triangle DAC$ једнака половини површине четвороугла $ABCD$.

Конструкција. Одредимо средиште дијагонале BD и затим кроз њега повучемо праву паралелну са правима b и d. У пресеку повучене праве са изломљеном линијом BCD добијамо тачку M. Права AM је тражена права.

Доказ. Следи из анализе.

Дискусија. Решење је увек јединствено.



Други разред – Б категорија

Др 2016 1Б 5

1. Услови су $0 < 2 - \frac{1}{5}x \neq 1$ и $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 > 0$, што се своди на $x < 10$, $x \neq 5$ и $x \neq 2$. Посматрану неједначину можемо записати у облику $\log_{2-\frac{1}{5}x}(x-2)^2 < 2$, тј. $2\log_{2-\frac{1}{5}x}|x-2| < 2$, а ово се своди на $\log_{2-\frac{1}{5}x}|x-2| < 1$.

У случају када је основа логаритма мања од 1, тј. $x > 5$, добијена неједначина еквивалентна је са $|x-2| > 2 - \frac{1}{5}x$, тј. (с обзиром на $x > 5$) $x - 2 > 2 - \frac{1}{5}x$, што даје $x > \frac{10}{3}$, а ово је надскуп услова $x > 5$; у овом случају, дакле, добијамо решење $x \in (5, 10)$ (имали смо у виду и услов $x < 10$).

У случају када је основа логаритма већа од 1, тј. $x < 5$, добијена неједначина еквивалентна је са $|x-2| < 2-\frac{1}{5}x$. Претпоставимо прво $x < 2$. Тада решавамо неједначину $2-x < 2-\frac{1}{5}x$, тј. $\frac{4}{5}x > 0$, па добијамо решење $x \in (0, 2)$. Претпоставимо сада $x > 2$. Тада решавамо неједначину $x-2 < 2 - \frac{1}{5}x$, тј. $\frac{6}{5}x < 4$, па добијамо решење $x \in (2, \frac{10}{3})$.

Све скупа, решење је: $x \in (0, 2) \cup (2, \frac{10}{3}) \cup (5, 10)$.

2. *Прво решење.* Приметимо да важи $x^4+4y^4 = x^4+4x^2y^2+4y^4-4x^2y^2 = (x^2+2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2)$. Уведимо смену $u = x^2-2xy+2y^2$, $v = x^2+2xy+2y^2$. Тада се посматрани систем своди на $u+2v = 24$ и $uv = 64$. Одавде добијамо $(24-2v)v = 64$, тј. $v^2-12v+32 = 0$. Решавањем ове квадратне једначине добијамо

$$v_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{144-128}}{2} = \frac{12 \pm 4}{2},$$

тј. $v_1 = 8$ и $v_2 = 4$. Овим вредностима одговара $u_1 = 24 - 2 \cdot 8 = 8$ и $u_2 = 24 - 2 \cdot 4 = 16$.

У првом случају враћањем смене добијамо $x^2 - 2xy + 2y^2 = 8$ и $x^2 + 2xy + 2y^2 = 8$, што се своди на $xy = 0$ и $x^2 + 2y^2 = 8$. Одавде налазимо решења: $(x, y) \in \{(\pm 2\sqrt{2}, 0), (0, \pm 2)\}$.

У другом случају враћањем смене добијамо $x^2 - 2xy + 2y^2 = 16$ и $x^2 + 2xy + 2y^2 = 4$, што се своди на $xy = -3$ и $x^2 + 2y^2 = 10$. Одавде добијамо $x^2 + 2(\frac{-3}{x})^2 = 10$. Сменом $t = x^2$ добијена једначина своди се на $t + \frac{18}{t} = 10$, тј. $t^2 - 10t + 18 = 0$. Њена решења су

$$t_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-72}}{2} = \frac{10 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 5 \pm \sqrt{7}.$$

Дакле, могућности су $x = \pm\sqrt{5+\sqrt{7}}$ и $x = \pm\sqrt{5-\sqrt{7}}$.

Све скупа, посматрани систем има 8 решења:

$$(x,y) \in \Bigg\{(\pm 2\sqrt{2}, 0), (0, \pm 2), \left(\pm\sqrt{5+\sqrt{7}}, \mp\frac{3}{\sqrt{5+\sqrt{7}}}\right), \left(\pm\sqrt{5-\sqrt{7}}, \mp\frac{3}{\sqrt{5-\sqrt{7}}}\right)\Bigg\}.$$

Друго решење. Квадрирањем прве једначине и множењем с другом једначином унакрсно (леву с десном страном а десну с левом) добијамо

$$24^2(x^4 + 4y^4) = 64(3x^2 + 2xy + 6y^2)^2.$$

После упрошћавања, ова једначина се своди на

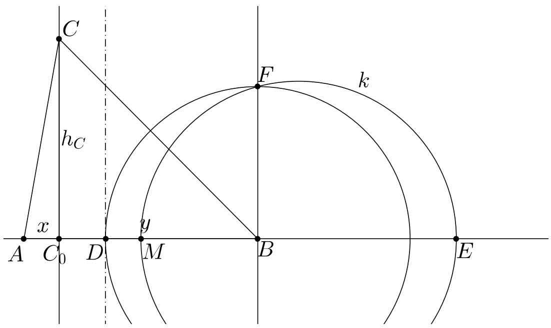
$$xy(3x^2 + 10xy + 6y^2) = 0.$$

Одавде добијамо четири могућности: $x = 0$, $y = 0$, $x = y \cdot \frac{-5+\sqrt{7}}{3}$ или $x = y \cdot \frac{-5-\sqrt{7}}{3}$. Убацивањем ових четири могућности у било коју од полазних једначина добијамо од сваке могућности по два решења, што даје осам решења као малопре.

3. Приметимо да $n = 1$ јесте решење јер добијамо број $36 = 6^2$. Претпоставимо сада $n \geqslant 2$. Тада је сабирак $2 \cdot 3^n$ дељив са 9, а пошто бројеви 10 и 19 дају остатак 1 при дељењу са 9, тада и 10^n и 19^n дају остатак 1 при дељењу са 9. Према томе, за $n \geqslant 2$ број задат у поставци даје остатак 3 при дељењу са 9, тј. он је дељив са 3 а није дељив са 9, па не може бити потпун квадрат.

4. Јасно, за свако n важи $y_n \leqslant 2016$. С друге стране, за $n \geqslant 2$ важи $y_n = x_n^{2^{2^n}} \geqslant x_n^{2^{2^2}} = x_n^{16}$, па како имамо $2^{16} > 2016$, закључујемо да за свако $n \geqslant 2$ мора бити $x_n = 0$ или $x_n = 1$, а тиме и $y_n = 0$ или $y_n = 1$. Одавде следи $0 \leqslant y_2 + y_3 + \cdots + y_{1000} \leqslant 999$, а сада из прве једначине добијамо

$1017 \leqslant y_1 \leqslant 2016$. Међутим, како важи $y_1 = x_1^{2^{2^1}} = x_1^4$, једина могућност је $x_1 = 6$ и $y_1 = 6^4 = 1296$ (то је једини четврти степен који упада у добијени интервал за y_1). Према томе, $y_2+y_3+\cdots+y_{1000} = 2016-1296 = 720$. Дакле, тачно 720 бројева од $y_2, y_3, \ldots, y_{1000}$ једнаки су 1, а преостали 0 (као и одговарајући од $x_2, x_3, \ldots, x_{1000}$). Ово је могуће постићи на $\binom{999}{720}$ начина, што је решење задатка.



Др 2016 2Б 5

5. *Анализа.* Нека је C_0 подножје висине h_C из темена C. Обележимо $x = AC_0$, $y = BC_0$. Површина $\triangle ABC$ износи $\frac{h_C(x+y)}{2}$. Претпоставимо, без умањења општости, $AC \leqslant BC$. Тада на дужи C_0B треба одабрати тачку D такву да нормала у D на C_0B дели $\triangle ABC$ на два дела чије су површине $\frac{h_C(x+y)}{4}$. Један од тих делова је троугао хомотетичан са $\triangle C_0BC$, где је центар хомотетије теме B. Како имамо $P(\triangle C_0BC) = \frac{h_C y}{2}$, коефицијент посматране хомотетије износи $\sqrt{\frac{\frac{h_C(x+y)}{4}}{\frac{h_C y}{2}}} = \sqrt{\frac{x+y}{2y}}$. Према томе, $BD = BC_0\sqrt{\frac{x+y}{2y}} = y\sqrt{\frac{x+y}{2y}} = \sqrt{\frac{(x+y)y}{2}}$; на овај начин можемо конструисати тачку D као корен из производа дужи $\frac{x+y}{2}$ и y.

Конструкција. Нека је M средиште странице AB. Уочимо тачку E на правој AB такву да важи $A-B-E$ и $BE \cong C_0B$. Нека је k кружница над пречником ME, и нека нормала у тачки B на праву AB сече кружницу k у тачки F. На дужи C_0B уочимо тачку D такву да важи $BD \cong BF$. Нормала у тачки D на праву AB је тражена нормала.

Доказ. Из сличности $\triangle MBF \sim \triangle FBE$ добијамо $\frac{BF}{BM} = \frac{BE}{BF}$, тј. $BF^2 = BM \cdot BE = \frac{x+y}{2} \cdot y$; другим речима, $BD = BF = \sqrt{\frac{(x+y)y}{2}}$. Закључак сада следи из разматрања спроведеног у анализи.

Дискусија. Решење је увек јединствено.

Трећи разред – Б категорија

1. Израчунајмо прво вектор $\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{a})$:

$$\vec{a}\times(\vec{b}-\vec{a}) = (-3,-2,1)\times(4,3,2) = \begin{vmatrix} -3 & 4 & \vec{\imath} \\ -2 & 3 & \vec{\jmath} \\ 1 & 2 & \vec{k} \end{vmatrix} = -7\vec{\imath}+10\vec{\jmath}-\vec{k} = (-7,10,-1).$$

Скаларни производ вектора $(1,r,-2)$ и $(-7,10,-1)$ износи $1\cdot(-7)+10r+(-2)\cdot(-1) = 10r-5$. С друге стране, уколико ови вектори граде угао од 60°, њихов скаларни производ треба да износи

$$\sqrt{1^2+r^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{(-7)^2+10^2+(-1)^2}\cdot\cos 60^\circ = \sqrt{5+r^2}\cdot 5\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}.$$

Према томе, добијамо једначину $10r-5 = \sqrt{5+r^2}\cdot 5\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}$, што се своди на $4r-2 = \sqrt{30+6r^2}$. Квадрирањем ове једначине, уз услов $4r-2 \geqslant 0$, тј. $r \geqslant \frac{1}{2}$, добијамо $16r^2-16r+4 = 30+6r^2$, тј. $5r^2-8r-13=0$. Решимо ову једначину:

$$r_{1/2} = \frac{8\pm\sqrt{64+260}}{10} = \frac{8\pm 18}{10} = \frac{4\pm 9}{5},$$

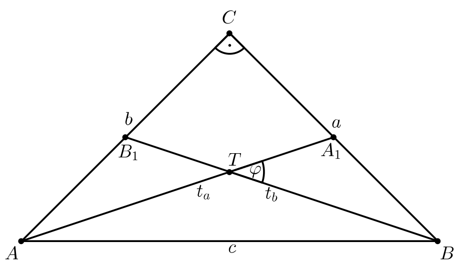
тј. $r_1 = \frac{13}{5}$ и $r_2 = -1$. Друго решење одбацујемо јер не испуњава услов $r \geqslant \frac{1}{2}$. Дакле, једино решење задатка је $r = \frac{13}{5}$.

2. Први играч треба да прати следећу стратегију. У првом потезу он уписује X у централни квадратић. У сваком следећем потезу, уколико постоје два узастопна квадратића обележена словом X, или постоје два квадратића обележена словом X између којих је тачно један неозначен квадратић, тада први играч прави низ од три узастопна обележена квадратића и побеђује, а у супротном игра симетрично претходном потезу другог играча (симетрију посматрамо у односу на централни квадратић).

Докажимо да први играч заиста побеђује користећи ову стратегију. Очигледно, након било ког потеза првог играча (осим последњег) никада неће на табли остати два суседна обележена поља (заиста, уколико би се таква ситуација догодила, тада би, с обзиром на симетричну игру првог играча, и пре његовог потеза морала постојати два суседна обележена квадратића, али тада би први играч могао одмах да победи). Слично, након било ког потеза првог играча (осим последњег) никада неће на табли остати два обележена квадратића између којих је тачно један необележен. Према томе, први играч након свог потеза никада неће оставити другом шансу да победи, што завршава доказ.

3. Искористићемо идентитет $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$. Из њега и претпоставке $a^2+b^2+c^2 = k(ab+ac+bc), k\in\mathbb{N}$, следи $(k+$

$2)(ab+bc+ac) = (a+b+c)^2$. Будући да је $a+b+c$ прост број, рецимо p, а и $k+2$ и $ab+bc+ac$ су већи од 1, једино је могуће $k+2 = ab+bc+ac = p$. Но сада из $ab+bc+ac \geqslant a+b+c = p$ (на основу $a, b, c \geqslant 1$) следи да је једина могућност $a = b = c = 1$. Директно се проверава да су тада испуњени сви услови задатка.



Др 2016 3Б 4

4. Означимо катете $BC = a$ и $AC = b$, хипотенузу $AB = c$, и нека су A_1 и B_1 средишта страница BC и AC, T тежиште, а тежишне дужи $AA_1 = t_a$ и $BB_1 = t_b$. Из формуле $\cos^2\varphi = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}$ добијамо $\cos\varphi = \frac{4}{5}$. Применом косинусне теореме на $\triangle TA_1B$, $\triangle TB_1A$ и $\triangle TAB$ имамо: $\frac{a^2}{4} = \frac{t_a^2}{9} + \frac{4t_b^2}{9} - \frac{4t_a^2t_b^2\cos\varphi}{9}$, $\frac{b^2}{4} = \frac{t_b^2}{9} + \frac{4t_a^2}{9} - \frac{4t_a^2t_b^2\cos\varphi}{9}$ и $c^2 = \frac{4t_a^2}{9} + \frac{4t_b^2}{9} + \frac{8t_a^2t_b^2\cos\varphi}{9}$ (користили смо $\measuredangle A_1TB = \measuredangle ATB_1 = \varphi$ и $\measuredangle ATB = 180^\circ - \varphi$). Сада из Питагорине теореме добијамо $\frac{20t_b^2}{9} + \frac{20t_a^2}{9} - \frac{32t_a^2t_b^2\cos\varphi}{9} = \frac{4t_b^2}{9} + \frac{4t_a^2}{9} + \frac{8t_a^2t_b^2\cos\varphi}{9}$; сређујући овај израз, уз коришћење једнакости $\cos\varphi = \frac{4}{5}$, добијамо $\frac{16}{9}(t_a - t_b)^2 = 0$, тј. $t_a = t_b$. Дакле, $\triangle ABC$ је једнакокрак, па су његови углови 45°, 45° и 90°.

5. Претпоставимо, без умањења општости, $a \geqslant b$. Тада имамо

$$S(a,b) = \min\left(a, b, \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \min\left(b, \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \leqslant \min\left(b, \frac{2}{b}\right) = S(b,b).$$

Дакле, максимална вредност израза $S(a,b)$ достиже се за $a = b$. Даље, $S(b,b) = \min(b, \frac{2}{b}) \leqslant \sqrt{b \cdot \frac{2}{b}} = \sqrt{2}$, при чему се једнакост достиже за $b = \frac{2}{b} = \sqrt{2}$. Према томе, највећа могућа вредност за $S(a,b)$ износи $\sqrt{2}$ и достиже се за $a = b = \sqrt{2}$.

Четврти разред – Б категорија

1. Користићемо Вијетове формуле. Из $-\frac{c}{3} = x_1x_2x_3x_4x_5 = 4$ добијамо $c = -12$. Даље, како важи $P(1) = 0$ и $P(2) = 0$, добијамо $a + b - 12 = 0$ и $16a + 4b - 132 = 0$, одакле решавањем система добијамо $a = 7$ и $b = 5$. Сада полином $P(x)$ можемо записати у облику

$$P(x) = (x-1)(x-2)(3x^3 + 16x^2 + 7x - 6)$$

(ово добијамо делећи полином $P(x)$ са $(x-1)(x-2)$, будући да знамо да су 1 и 2 његове нуле). Како важи $3x^3 + 16x^2 + 7x - 6 = 3x^3 + 3x^2 + 13x^2 +$

$13x - 6x - 6 = (x+1)(3x^2 + 13x - 6)$, још једна нула је $x_3 = -1$. Последње две нуле налазимо решавајући преосталу квадратну једначину:

$$x_{4/5} = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{6} = \frac{-13 \pm \sqrt{241}}{6}.$$

2. Теткица може добити израз x^{1025} у 11 корака тако што допише, редом, изразе $x^2, x^4, x^8, x^{16}, \dots, x^{1024}, x^{1025}$. Докажимо да она то не може извести у мање од 11 корака.

Заправо, показаћемо општије тврђење: ако су уочени бројеви n и k такви да важи $n \geqslant 2^k + 1$, теткици је потребно бар $k+1$ корака да би добила израз x^n. Тврђење доказујемо индукцијом по k. За $k = 0$ очигледно је тачно (за израз x^n, где важи $n \geqslant 2$, потребан је бар један корак). Претпоставимо сада да тврђење важи за број k, и узмимо $n \geqslant 2^{k+1} + 1$. Израз x^n добија се множењем израза x^a и x^b за неке a и b, $a, b \geqslant 1$, $a + b = n$. Претпоставимо, без умањења општости, $a \leqslant b$. Тада имамо $b \geqslant \frac{n}{2} = 2^k + \frac{1}{2}$, али како је b природан број, мора важити $b \geqslant 2^k + 1$. Дакле, да би теткица добила израз x^b, потребан јој је (по индуктивној хипотези) бар $k+1$ корак. Одатле, да би добила израз x^n потребна су јој бар $k+1+1 = k+2$ корака.

У постављеном задатку имамо $1025 = 2^{10} + 1$, па по горњем тврђењу за добијање израза x^{1025} потребно је бар 11 корака. Пример с почетка решења показује да је 11 корака и довољно, чиме је задатак решен.

3. Приметимо да је немогуће $m \geqslant 4$: заиста, у том случају би, према постављеним условима, морало важити $2n = a^2$ и $4n = b^4$ за неке природне бројеве a и b, али дељењем ове две једнакости добијамо $2 = \frac{b^4}{a^2}$, тј. $\sqrt{2} = \frac{b^2}{a}$, што је немогуће јер $\sqrt{2}$ није рационалан број. Према томе, остаје $m \leqslant 3$. Покажимо да за $m = 3$ постоји одговарајућ број n. Треба да важи $2n = a^2$ и $3n = b^3$ за неке $a, b \in \mathbb{N}$. Први услов можемо испунити уколико n у својој простој факторизацији има непаран експонент двојке, и парне све остале експоненте; други услов можемо испунити уколико n у својој простој факторизацији има експонент тројке који даје остатак 2 при дељењу са 3, и све остале експоненте дељиве са 3. Једна могућност да ово постигнемо је да одаберемо $n = 2^3 \cdot 3^2 = 72$, чиме је задатак решен.

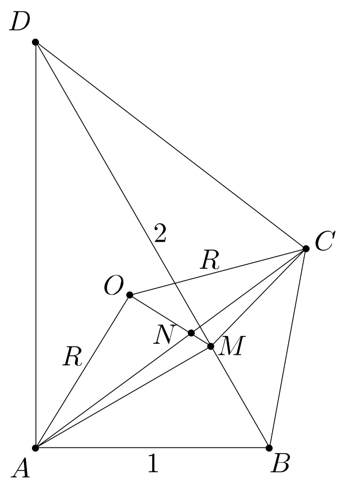
4. Приметимо: уколико је (x_0, y_0, z_0) решење датог система, тада је и $(-x_0, -y_0, z_0)$ решење тог система. Дакле, да би систем имао јединствено решење, оно мора бити облика $(0, 0, c)$ за неко $c \in \mathbb{R}$. Тада из постављеног система добијамо $c = a$, $c = b$ и $c^2 = 4$. Сада разликујемо два случаја.

Претпоставимо прво $a = b = c = 2$. Тада одузимањем прве једначине од друге добијамо $(z^2 - z)xy = 0$. Одавде видимо да потенцијална преостала решења датог система, осим $(0, 0, 2)$, можемо потражити за $z = 0$ или $z = 1$. У случају $z = 0$ прва једначина своди се на $0 = 2$, контрадикција. Узмимо сада $z = 1$. Систем се своди на $xy = 1$ и $x^2 + y^2 = 3$, што се даље своди на $y = \frac{1}{x}$ и $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$, а како је дискриминанта ове биквадратне једначине позитивна, овде добијамо још четири решења облика $(x_i, y_i, 1)$. Дакле, у случају $a = b = c = 2$ посматрани систем нема јединствено решење.

Претпоставимо сада $a = b = c = 2$. Као у претходном случају, преостала решења, осим $(0, 0, -2)$, можемо потражити за $z = 0$ или $z = 1$. Поново нема решења за $z = 0$, па узмимо $z = 1$. Систем се своди на $xy = -3$ и $x^2 + y^2 = 3$, што се даље своди на $y = -\frac{3}{x}$ и $x^4 - 3x^2 + 9 = 0$. Дискриминанта ове биквадратне једначине је негативна, па овде нема више решења.

Дакле једино за $a = b = -2$ систем има јединствено решење.

5. Нека је O центар те сфере, а R њен полупречник. Нека је M подножје висине $\triangle ABD$ из темена A на BD. Пошто је OA нормално на целу раван ABD, из теореме о три нормале следи $OM \perp BD$. Сада, користећи $OM \perp BD$ и чињеницу да је OC нормално на раван BDC, поново из теореме о три нормале добијамо $CM \perp BD$, тј. CM је висина $\triangle CBD$. Како важи $AO = CO = R$, $OM = OM$ и $\measuredangle OMA = \measuredangle OMC = 90°$, по ставу ССУ следи $\triangle AMO \cong \triangle CMO$, а одатле добијамо $AM = CM$. Како је $\triangle ABD$ правоугли и хипотенуза му је два пута дужа од катете, он је половина једнакостраничног троугла, па следи $AD = AB\sqrt{3} = \sqrt{3}$. Из истог разлога важи $BM = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}$ и $AM = BM\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а онда и $CM = AM = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Сада из правоуглог $\triangle CBM$ налазимо $BC = 1$, а потом из $\triangle ABC$ налазимо $AC = \sqrt{2}$ (због $AB = BC = 1$). Посматрајмо сада четвороугао $OAMC$ (који је делтоид), и означимо са N пресек дијагонала MO и AC. Јасно, $AN = NC = \frac{\sqrt{2}}{2}$, па из Питагорине теореме за $\triangle AMN$ добијамо $MN = \sqrt{AM^2 - AN^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$. Сада коначно уочимо сличност $\triangle ANM \sim \triangle ONA$ (заиста, $\measuredangle ONA = \measuredangle ANM = 90°$ и



Др 2016 4Б 5

$\measuredangle AMO = 90^\circ - \measuredangle MOA = 90^\circ - \measuredangle NOA = \measuredangle NAO$), па из пропорционалности одговарајућих страница имамо $AM : MN = OA : AN$, тј. $\frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = R : \frac{\sqrt{2}}{2}$, одакле добијамо $OA = R = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Садржај