ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА

СРЕДЊОШКОЛАЦА

2016/2017

Београд, 2017

Организациони одбор 59. Државног такмичења из математике

1. Дејан Јосиповић, директор Девете гимназије „Михаило Петровић Алас“
2. Наташа Марковић Атар, проф. српског језика и књижевности
3. Стручно веће математике и рачунарства и информатике
4. Др Војислав Андрић, председник ДМС
5. Др Бојан Башић, ПМФ, Нови Сад, председник Државне комисије

Организацију такмичења помогли

1. *Подравка*
2. *Књаз Милош*
3. *McCann*

Редакција и обрада: др Бојан Башић

Запис о Београду

Београд, град веома бурне историје, један је од најстаријих у Европи. Његова историја траје пуних 7 000 година. Простор око великих река Саве и Дунава био је насељен још у палеолитском периоду. Из старијег каменог доба потичу остаци људских костију и лобања неандерталаца, пронађени у каменолому код Лештана, у пећини на Чукарици и у близини Бајлонијеве пијаце.

Остаци културе млађег каменог доба пронађени су у Винчи, Жаркову и Горњем граду, изнад ушћа Саве у Дунав. То указује да је простор Београда био насељен у континуитету и да је интезитет тог насељавања бивао све јачи. Многа данашња насеља београдске околине леже на културним слојевима ранијих праисторијских насеобина.

Винча крај Београда спада у ред најзначајнијих насеобина и културних налазишта праисторијског периода. Археолошке ископине на Роспи ћуприји, Горњем граду, Карабурми, Земуну и Винчи потврђују претпоставке да је подручје Београда било интезивно насељено и да се његово становништво бавило плужном земљорадњом и другим пратећим привредним делатностима. На овим локалитетима откривене су некрополе бронзаног и металног доба, као и докази различитих културних утицаја.

Београд је средиште културе и уметности Србије. У Београду стварају многи наши значајни уметници, годишње се одржи више од 9 000 позоришних представа, изложби, концерата, перформанса и других уметничких програма, гостују бројни еминентни ствараоци из света уметности. Београд је седиште највиших државних и националних институција културе и уметности: Српске академије наука и уметности, Народне библиотеке Србије, Народног музеја, Народног позоришта, Универзитета у Београду, Универзитета уметности.

У Београду се налазе значајна дела архитектуре, Калемегдан и Београдска тврђава, споменици културе и друга непокретна културна добра, бројна археолошка налазишта са материјалним остацима који сведоче о развијеној цивилизацији и култури на тлу Београда од праисторије до данас.

Град Београд оснивач је 36 установа културе (11 позоришта, 8 установа заштите, 4 библиотеке, 13 центара за културу и галерија) и 2 јавна предузећа за које обезбеђује услове рада, а истовремено помаже реализацију програма и програмских пројеката 101 установе и уметничке асоцијације.

Београд, као универзитетски центар, има 2 државна универзитета и више приватних високообразовних институција. У Београду има 280 основних и средњих школа. Од 195 основних школа – 162 су редовне основне, 14 је специјалних основних школа, 15 уметничких и 4 школе за основно образовање одраслих.

Београд је и седиште врхунских научних и истраживачких установа из свих области.

О Деветој гимназији

Девета гимназија „Михаило Петровић Алас“ (Нови Београд, Булевар маршала Толбухина 41) основана је 30. јуна 1961. године и од 1. септембра те године почела је са радом. Под именом Гимназија „Нови Београд“ школа прву школску годину започиње у згради Основне школе „Владимир Иљич Лењин“ уписавши у први разред 176 ученика распоређених у пет одељења. Највећи проблем Гимназије био је недостатак адекватног простора јер се настава одржавала и у Основној школи „Иван Гундулић“ пошто школа није имала сопствену зграду. У јулу 1964. године Гимназија се коначно усељава у своју зграду, подигнуту за потребе Основне школе „Жикица Јовановић Шпанац“, близу Студентског града. У то време она је била прва средња школа и задуго једина гимназија на Новом Београду. У Одлуци о оснивању Гимназије унесени су и њени основни задаци: *„Проширити и продубити знање природних и друштвених наука и опште-техничког образовања: неговати и подстицати личне способности и склоности ученика и помагати им у избору даљег школовања и позива: доприносити даљем интелектуалном, физичком, друштвеном, моралном и естетском васпитању и усавршавању ученика ради њиховог оспособљавања за активан друштвени рад, као и за здрав и културан живот“*. Школске 1961/62. године Гимназија је примила у радни однос 4 а наредне године још 17 наставника, када је уписала у први и други разред 456 ученика. Исте школске године гимназија је отворила и трећи разред, једно одељење друштвено-језичког и два одељења природно-математичког смера, уписавши 81 ученика. Школа је временом мењала називе. Године 1963. уписана је у регистар као Гимназија „Нови Београд“ а 1965. као Девета београдска гимназија „Нови Београд“. Гимназија није могла да избегне ни усмерено образовање, ни интеграцију. Од 1979. до 1984. године била је интегрисана са Образовним центром „Први мај“. Тада је имала и полазнике Вечерње школе. После неуспеле интеграције регистрована је 1984. код Окружног привредног суда у Београду као Радна организација математичко-техничка средња школа „Михаило Петровић Алас“, а три године касније код истог суда мења назив у Математичка школа „Михаило Петровић Алас“. Садашњи назив – Девета гимназија „Михаило Петровић Алас“ – носи од децембра 1990. године. После готово две деценије од оснивања ова узорна школа добила је име великог научника Михаила Петровића – Мике Аласа – иманентно њеном профилу и угледу међу гимназијама.

Данас је ово савремена школа коју похађа приближно 1000 ученика распоређених у 32 одељења – по осам одељења у сваком разреду од којих су три одељења друштвено-језичког и пет одељења природно-матемаричког смера. Девету гимназију уписују најбољи и најуспешнији ученици Републике Србије и града Београда. У Гимназији последњих година успешно раде: ђачки парламент, дебатни клуб, драмска, музичка, рецитаторска, литерарна, биолошка и антична секција, као и разне спортске секције. Ученици Девете гимназије освајали су и освајају највиша признања и награде на различитим такмичењима и олимпијадама знања из готово свих наставних предмета, на спортским такмичењима, конкурсима и смотрама. Стога они лако обезбеђују проходност на жељени факултет и у Србији и у иностранству. Бројни ученици сваке године похађају програме у Истраживачкој станици Петница као и у Регионалном центру за таленте. Исто тако, континуирано и успешно, наши ученици се баве и хуманитарним радом – сарађују са Црвеним крстом Србије, Домом за децу ометену у развоју у Сремчици и Центром за заштиту одојчади, деце и омладине у Звечанској улици и њиховим Домом на Вождовцу. Протеклих година учествовали су у бројним пројектима попут *Здраво Европо*, *Еко Девета*, *Интернест*, *Вики гимназијалац*, *Ученичко предузеће „Аласи“*. Неколико узастопних генерација Гимназија има успешне представнике у пројекту *БеоГрадска КулТура* у организацији Завода за заштиту споменика културе града Београда.

Девета гимназија је остварила и успешну међународну сарадњу са гимназијама у Русији и Словенији, као и вишегодишњу културно-просветну сарадњу са Руским домом и Руском школом у Београду.

Од јуна 2007. године управа Гимназије установила је свечани пријем и награде за најуспешније ученике који су својим ангажовањем у различитим ваннаставним активностима достојно и успешно представили своју школу у текућој школској години. Овом приликом обично се награђује око 50 ученика који су остварили најбоље резултате на међународним, републичким и градским такмичењима из математике, физике, хемије, биологије, историје, географије, српског језика, страних језика, књижевности, филозофије, различитих спортова. Међу њима су и ученици који су својим музичким умећем обогатили културни живот у школи.

Ученици наше школе су увек показивали посебну заинтересованост за математику и рачунарство и информатику. То показују њихови одлични резултати на досадашњим такмичењима. Зато су у великом броју учествовали на окружним, а у завидном броју на државним такмичењима из ових предмета. Наставници наше школе, задовољни таквим резултатима, преузели су одговорност да у више наврата буду домаћини окружним такмичењима, а ове године су домаћини Државном такмичењу из математике.

После пет и по деценија трајања и више од 13 000 изведених матураната, Девета гимназија с поносом може рећи да је остварила своју просветну, педагошку и културну мисију која јој је поверена још давне 1961. године.

ДРЖАВНА КОМИСИЈА
за такмичења из математике ученика средњих школа, школска година 2016/2017.

1. Балтић др Владимир, Математичка гимназија, Београд

2. Башић др Бојан, ПМФ, Нови Сад – председник комисије

3. Божин др Владимир, Математички факултет, Београд

4. Варга Б. Јожеф, ОШ „Петар Кочић“, Темерин

5. Гајовић Стеван, Математички институт, Београд

6. Дугошија др Ђорђе, Математички факултет, Београд

7. Ђикић др Марко, ПМФ, Ниш

8. Ђукић Душан, Машински факултет, Београд

9. Илић др Александар, ПМФ, Ниш

10. Кнежевић др Миљан, Математички факултет, Београд

11. Лукић др Миливоје, Рајс, САД

12. Маринковић Растко, Књажевачка гимназија, Књажевац

13. Марковић др Петар, ПМФ, Нови Сад

14. Матић др Иван, Дјук, САД

15. Милосављевић Милош, Гимназија „Светозар Марковић“, Ниш

16. Петровић др Никола, Институт за физику, Београд

17. Радовановић др Марко, Математички факултет, Београд

18. Сеничић мр Александар, Гимназија, Краљево

19. Стојаковић др Милош, ПМФ, Нови Сад

20. Томић Иванка, Гимназија, Ваљево

21. Чикош Пајор Гизела, Гимназија „Бољаи“, Сента

Превод на мађарски језик:

1. Аго Балог Кристина, ПМФ, Нови Сад

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 21. 1. 2017.

Први разред – А категорија

1. У парку облика квадрата чија дужина странице износи 1 км постоји 4567 стабала пречника не већег од 50 цм (свако стабло се читаво налази у парку). Доказати да се у том парку може наћи простор величине 10 м $\times$ 20 м унутар ког се не налази ниједно стабло (нити део стабла).

2. У четвороуглу $ABCD$ важи $\measuredangle ABC = 104^\circ$, $\measuredangle ADC = 128^\circ$ и $AB = BC = 2$. Израчунати дужину дијагонале BD.

3. Решити једначину

$$12^x + 10^y = 7102^z$$

у скупу природних бројева.

4. За четворку тачака A, B, C, D у равни, међу којима никоје три нису колинеарне, нека $f(A,B,C,D)$ означава меру највећег угла који образују ове тачке (од укупно 12 таквих углова). Одредити $\min f(A,B,C,D)$, где се минимум узима над свим посматраним четворкама тачака.

5. Одредити колико различитих решења има једначина

$$||\cdots|||x|-1|-2|\cdots-2016|-2017|=2017.$$

Други разред – А категорија

1. На ливади се налазе 3 мравињака: A, B и C. Растојање између мравињака A и B износи 260 мм а између мравињака B и C износи 1200 мм, и притом важи $\measuredangle ABC = 60^\circ$. Из мравињака A креће мрав a ка мравињаку B, идући праволинијски, крећући се брзином 1 $\frac{\text{мм}}{\text{с}}$. У истом тренутку из мравињака B креће мрав b ка мравињаку C, такође праволинијски, идући брзином 3 $\frac{\text{мм}}{\text{с}}$. У ком тренутку ће растојање између мрава a и b бити минимално?

2. Нека је T тежиште $\triangle ABC$, и нека је t произвољна права кроз T таква да су темена A и B с једне њене стране, а теме C с друге. Нека су тачке A_0, B_0 и C_0 ортогоналне пројекције тачака A, B и C, редом, на праву t. Доказати:

$$AA_0 + BB_0 = CC_0.$$

3. Пчела се креће по бесконачном саћу (равни поплочаној правилним шестоугловима). Пчела полази са унапред утврђеног шестоугла, у сваком кораку мора прећи на суседан шестоугао (шестоуглови су суседни ако имају заједничку ивицу), и не сме доћи на шестоугао на ком је већ била. За било који природан број n, означимо са x_n број могућих путања од n корака. Доказати:

$$2 \cdot 3^n \leqslant x_n \leqslant 6 \cdot 5^{n-1}.$$

4. Решити систем једначина:

$$\lfloor 2x\rfloor + \lfloor x\rfloor + \lfloor 7x\rfloor = 2017;$$
$$3\{x\}\{5x\} = 4\{2x\}\{6x\}.$$

(Са $\lfloor x\rfloor$ означавамо највећи цео број не већи од x, а са $\{x\}$ означавамо $x-\lfloor x\rfloor$.)

5. Одредити за које природне бројеве n постоје природни бројеви x, y_1, y_2, $\dots$, y_n такви да важи

$$x^2 = 2(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2).$$

Трећи разред – А категорија

1. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$. За уочену тачку O унутар њега, нека је p_O права кроз O паралелна са AB, и нека су P_O и Q_O тачке пресека праве p_O са страницама AD и BC, редом; слично, нека је q_O права кроз O паралелна са CD, и нека су R_O и S_O тачке пресека праве q_O са страницама AD и BC, редом. Доказати да су следећи услови еквивалентни:

- постоји тачка $O \in \operatorname{int} ABCD$ за коју важи $P_OO \cdot OQ_O = R_OO \cdot OS_O$;
- за сваку тачку $O \in \operatorname{int} ABCD$ важи $P_OO \cdot OQ_O = R_OO \cdot OS_O$.

(Са $\operatorname{int} ABCD$ означавамо унутрашњост четвороугла $ABCD$.)

2. Доказати да је за свако $n \in \mathbb{N}$ број

$$2^n + 3^{n+3} + 5^n + 7^{n+4}$$

сложен.

3. Дуле се креће по бесконачној шаховској табли (равни поплочаној квадратима) а пчела по бесконачном саћу (равни поплочаној правилним шестоугловима). Обоје крећу са унапред утврђеног почетног поља („поља“ су квадрати за Дулета, а шестоуглови за пчелу), у сваком кораку морају прећи на суседно поље (поља су суседна ако имају заједничку ивицу) и не смеју доћи на поље на ком су већ били. За ма који природан број n, доказати да пчела има више могућих путања од n корака него Дуле.

4. Нека су задати реални бројеви $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ такви да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$|x-b_1| + |x-b_2| + \cdots + |x-b_n| \leqslant |x-a_1| + |x-a_2| + \cdots + |x-a_n|.$$

Доказати:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n,$$

и, за свако k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \leqslant b_1 + b_2 + \cdots + b_k.$$

5. На кружници k уочене су тачке A, B, C и D у том поретку. Праве AB и CD секу се у тачки E, а праве AD и BC у тачки F. Уочене су кружнице k_1 и k_2, с центрима у тачкама E и F, редом, нормалне на кружницу k. Доказати да су кружнице k_1 и k_2 међусобно нормалне.

Четврти разред – А категорија

1. За реалне бројеве $x, y \in [e^{-3}, e]$ доказати неједнакост

$$\left|\ln \frac{x^x}{y^y}\right| \leqslant 2|x-y|.$$

2. Ако је a паран број, доказати да

$$(a+1)^{2017} \mid a^{(a+1)^{2016}} + 1.$$

3. На свакој од n позиција у сали за физичко стоји по један ученик. Са позиције P_1 може се *сигурно додати лопта* на позицију P_2 ако се у кругу са пречником P_1P_2 не налази ниједна од осталих позиција. Нека су Ивица и Марица двоје ученика у сали, и нека се лопта иницијално налази код Ивице. Доказати да, на којим се год они позицијама налазили, постоји низ сигурних додавања којим се може проследити лопта од Ивице до Марице.

4. Нека је $\mathbb{R}^+$ скуп свих позитивних реалних бројева. Наћи све функције $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такве да важи

$$f\Big(x + f(y) + f(f(z))\Big) = yf\Big(1 + f(f(y))(x+z)\Big) \quad \text{за све } x, y, z \in \mathbb{R}^+.$$

5. Дат је оштроугли $\triangle ABC$. Нека је D пресек симетрале $\measuredangle A$ и странице BC, а E пресек симетрале $\measuredangle B$ и странице AC. Нека су D_0 и E_0 ортогоналне пројекције тачака D и E, редом, на страницу AB. Означимо са A_1 тачку осносиметричну тачки A у односу на праву CE_0, а са B_1 тачку осносиметричну тачки B у односу на праву CD_0. Доказати да $\triangle AA_1C$ и $\triangle BB_1C$ немају заједничких тачака осим тачке C.

Први разред – Б категорија

1. Дате су цифре a и b, различите међусобно и различите од нуле. Колико има четвороцифрених бројева дељивих са 11 који се могу записати искључиво помоћу цифара a и b (не морају обе цифре бити употребљене у запису)?

2. Дати су скупови A, B и C такви да важи:

- $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$;
- A је скуп свих природних бројева не већих од 100 који су дељиви са 2;
- B је скуп свих природних бројева не већих од 100 који су дељиви са 3;

- $B \cap C$ је скуп свих природних бројева не већих од 100 чији је збир цифара једнак 9;
- $(A \cap C) \setminus B$ је скуп свих двоцифрених бројева који нису дељиви са 3 и чија је цифра јединица једнака 4.

Одредити број елемената скупа C.

3. У једној кутији се налазе куглице плаве, зелене и црвене боје. Ако желимо да извучемо одређен број куглица а да будемо сигурни да међу њима постоји бар по једна куглица сваке боје, неопходно је извући 11 куглица. Ако желимо да будемо сигурни да међу извученим куглицама постоји куглица зелене боје, неопходно је извући 10 куглица. Ако желимо да будемо сигурни да међу извученим куглицама постоји куглица црвене боје, неопходно је извући 8 куглица. Колико куглица од сваке боје има у кутији?

4. На полукружници чији је пречник AB уочене су тачке P и Q. У пресеку правих AP и BQ добијена је тачка M, а у пресеку правих AQ и BP добијена је тачка N. Доказати: $MN \perp AB$.

5. У овом тренутку A има три пута толико година колико је B имао када је A имао толико година колико сада има B. Када B буде имао толико година колико сада има A, њих двојица ће у збиру имати 70 година. Колико свако од њих има година?

Други разред – Б категорија

1. Дијагонале конвексног четвороугла $ABCD$ секу се у тачки O. Доказати да центри кружница описаних око $\triangle ABO$, $\triangle BCO$, $\triangle CDO$ и $\triangle DAO$ образују темена паралелограма.

2. Старац има одређен број јабука и о њима је изрекао следеће реченице.

- Ако ми дође двоје унука, нећу моћи да им поделим јабуке на једнак број обома.
- Ако ми дође троје унука, моћи ћу да им поделим јабуке на једнак број свима.
- Ако ми дође четворо унука, моћи ћу да им поделим јабуке на једнак број свима.
- Ако ми дође петоро унука, моћи ћу да им поделим јабуке на једнак број свима.
- Ако ми дође шесторо унука, нећу моћи да им поделим јабуке на једнак број свима.

Међутим, старац је мало заборавaн, па му тачно једна реченица није истинита. При овим условима, колико најмање јабука може имати старац?

3. Одредити највећи прост број чије су све цифре различите такав да се при свакој пермутацији његових цифара добија поново прост број.

4. За које вредности реалног параметра m једначина

$$x^2 - (m+1)x + 2m - 4 = 0$$

има реална решења, а да је притом збир њихових квадрата најмањи могућ?

5. Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 9; \\ y^2 + z^2 &= 16; \\ y^2 &= xz. \end{aligned}$$

Трећи разред – Б категорија

1. Одредити све реалне бројеве x за које важи

$$\sin x = \sin 2x = \sin 3x = \cdots = \sin 2017x.$$

2. Пет ученика се такмичи у трци на 10 км. Познато је да је после 5 км први био Аца, други Бојан, трећи Вук, четврти Горан а пети Дејан, док је на крају први био Вук, други Дејан, трећи Аца, четврти Горан а пети Бојан. Колико је најмање различитих распореда било током ове трке? (Не рачунају се распореди у којима су неки ученици изједначени, и сматра се да се током трке не дешавају два претицања у исто време.)

3. Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} x - y + xy &= 17; \\ x^2 + y^2 &= 34. \end{aligned}$$

4. Дијагонале четвороугла деле тај четвороугао на четири троугла са целобројним површинама. Да ли је могуће да се производ тих површина завршава на 2017?

5. Решити једначину у скупу целих бројева:

а) $m^2n^6 - m^4n^4 + m^6n^2 = 2017$;

b) $m^2n^6 - m^4n^4 + m^6n^2 = 2016$.

Четврти разред – Б категорија

1. Наћи максималну вредност функције $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$ на интервалу $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Одреди најмањи природан број који је дељив бројем 13, а при дељењу бројевима 2, 3, …, 11, 12 даје остатак 1.

3. Нека су a, b, c дужине страница $\triangle ABC$ наспрам темена A, B, C, редом, и нека оне задовољавају

$$a^2 = b^2 + bc.$$

Доказати: $\measuredangle A \cong 2\measuredangle B$.

4. Решити систем једначина:

$$x^2 + 2yz = 1;$$
$$y^2 + 2xz = 2;$$
$$z^2 + 2xy = 1$$

у скупу реалних бројева.

5. Ана је три пута бацала коцкицу и у сваком бацању добила природан број од 1 до 6. Она је производ та три (не нужно различита) броја рекла Петру, а збир Зорану (при чему обојица знају шта представљају обе саопштене вредности). Између Петра и Зорана се водио следећи разговор:

– Петар: „Не могу са сигурношћу да одредим сва три броја која је Ана добила."

– Зоран: „Знао сам да не можеш."

– Петар: „Иако досад нисам знао чак ни који је најмањи број који је Ана добила, захваљујући твом коментару сад знам."

Која је три броја (у некој пермутацији) Ана добила?

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19. 2. 2017.

Први разред – А категорија

1. За коначне скупове A, B, C и D важи $D \subseteq A \cup B$, $D \subseteq C$ и

$$|A \triangle B| + |B \setminus C| + |C \setminus D| + |B \cap D| = |A|.$$

a) Доказати да важи $B \cup C \subseteq A$.

b) Да ли мора важити нека од инклузија $B \subseteq C$ или $C \subseteq B$?

2. Дата је кружница k с центром у тачки O и тачка T у њеној спољашњости. Тангенте из T на k додирују k у тачкама A и B. Нека је k' кружница с центром у тачки T која пролази кроз тачке A и B. Нека је C произвољна тачка на k' која је притом у спољашњости кружнице k, при чему праве CA и CB секу кружницу k још у тачкама D и E, редом, и важи поредак $C-A-D$ и $C-E-B$. Доказати да је DE пречник кружнице k.

3. На једном кошаркашком турниру учествује 16 екипа које играју двокружно, тј. свака екипа игра по два пута са сваком другом. Пролаз на наредни турнир остварује првопласираних 8 екипа. Поредак екипа се одређује на основу броја победа, а уколико постоји више екипа с истим бројем победа, њихов међусобни поредак се утврђује жребом. Колико је најмање победа потребно једном тиму да би осигурао пролаз?

4. Одредити све природне бројеве n који имају следећа својства: n је дељив са 2 али не и са 4, збир цифара броја n је једнак 6, број делилаца броја n је једнак 8, збир делилаца броја n је дељив са 10 и n не даје остатак 12 нити 14 при дељењу са 16.

5. Дужине страница неког троугла су међусобно различити природни бројеви, а његова површина је такође природан број. Да ли тај троугао мора бити правоугли?

Други разред – А категорија

1. Наћи све функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такве да за све $x\in\mathbb{R}$ важи $f(x)\leqslant x$ и за све $x,y\in\mathbb{R}$ важи $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$.

2. Одредити све четвороцифрене природне бројеве $\overline{abcd}$, где различитим словима одговарају различите цифре, за које важи

$$\overline{abcd}=d^{a^2}+d^{b+c}-d^{a+b+c}-d^a+1.$$

3. Дат је $\triangle ABC$ у ком је $\measuredangle C$ туп. На његовим страницама уочене су тачке $D\in AC$, $E\in AB$ и $F\in BC$ такве да је четвороугао $CDEF$ ромб. Ако важи $AE=140$, $BE=84$ и $r=15\sqrt{3}$, где је r полупречник кружнице уписане у ромб $CDEF$, израчунати површину $\triangle ABC$.

4. Нека су a, b и c странице неког троугла. Доказати неједнакост

$$\frac{\sqrt{ab}}{a+b-c}+\frac{\sqrt{bc}}{b+c-a}+\frac{\sqrt{ca}}{c+a-b}\geqslant 3.$$

5. На великом столу се налазе чоколадице нумерисане бројевима од 1 до 2017, поређане редом по тим бројевима. Маша и Медвед играју следећу игру. Маша игра прва, њих двоје вуку потезе наизменично, и игра се завршава након 63 одиграна потеза. У k-том потезу играч који игра једе k узастопних чоколадица са стола. (Дакле, прво Маша једе 1 чоколадицу, па Медвед једе 2 узастопне чоколадице, па Маша 3 и тако даље, док у 63. потезу Маша не поједе 63 узастопне чоколадице, после чега преостаје једна чоколадица.) Маша побеђује ако последња преостала чоколадица има непаран број, а Медвед ако је тај број паран. Ко има победничку стратегију? (Напомена: узастопне чоколадице не морају нужно бити нумерисане узастопним природним бројевима, тј. чоколадице i и j за $i<j-1$ сматрамо узастопнима уколико су све чоколадице нумерисане бројевима између i и j већ поједене.)

Трећи разред – А категорија

1. У датом троуглу полупречник уписане кружнице и полупречници приписаних кружница чине (у неком поретку) узастопне чланове геометријске прогресије. Одредити највећи угао тог троугла.

2. Наћи све вредности реалног параметра a за које нека два различита решења једначине

$$x^4 - ax^3 + x^2 + a = 0$$

(у скупу $\mathbb{C}$) имају збир једнак 1.

3. Нека $u, v, w, z \in \mathbb{C}$. Доказати неједнакост:

$$2\operatorname{Re}(uz + vw) \leqslant 4(|u|^2 + |v|^2) + \frac{1}{4}(|z|^2 + |w|^2).$$

4. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n за које се скуп делилаца броја n може поделити на дисјунктне скупове (бар два) такве да је збир елемената у сваком од тих скупова потпун квадрат.

5. У простору је дат скуп S који се састоји од 100 тачака таквих да никоје 3 нису колинеарне и никоје 4 нису компланарне. Сваке две тачке скупа S спојене су дужима, а затим су дужи обојене тако да је тачно њих 2017 обојено црвеном, а преостале плавом бојом. Доказати да постоји троугао са теменима у S чија је тачно једна страница обојена плавом бојом или тетраедар са теменима у S чија је тачно једна ивица обојена црвеном бојом.

Четврти разред – А категорија

1. Дати су вектори $\vec{a} = (2, 1, p)$ и $\vec{b} = (2, p + 1, 4)$.

a) Одредити све могуће вредности параметра p за које постоји вектор $\vec{v}$ такав да важи:

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = |\vec{b}|;$$
$$\vec{a} \times \vec{v} = \vec{b}.$$

b) За сваку такву вредност p одредити све такве векторе $\vec{v}$, и за сваки од њих одредити углове које он заклапа са $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Колико постоји растућих коначних низова природних бројева чији је први елемент једнак 1, последњи елемент једнак 25, и свака два узастопна члана се разликују за 2 или 3?

3. Дат је природан број n. Нека је N број бројева који записани у систему са основом $n + 1$ имају све цифре различите од 0 и различите међусобно. Доказати:

$$|n!e - N| < 1 + \frac{1}{n}.$$

4. Из тачке P су конструисане тангенте PA и PB на кружницу γ (где $A, B \in \gamma$). На правој PA уочена је тачка Q таква да важи распоред $P - A - Q$ и $PA \cong AQ$, а C је произвољна тачка на дужи AB различита од A и B. Кружница описана око $\triangle PBC$ сече кружницу γ у тачки D, $D \not\equiv B$. Доказати: $\measuredangle PBD \cong \measuredangle QCA$.

5. У скупу ненегативних целих бројева решити једначину

$$p^3 + 41 = 7(7q! - r^3).$$

Први разред – Б категорија

1. Нека је ρ релација на скупу $\mathbb{R}$ дефинисана са:

$$x \,\rho\, y \text{ ако и само ако важи } x^2 - y^2 \geqslant 0.$$

Испитати да ли је релација ρ рефлексивна, симетрична, антисиметрична и транзитивна, да ли је релација еквиваленције, и да ли је релација поретка.

2. Нека су a, b и c природни бројеви чији је збир једнак 100. Посматрајмо све разлике нека два од ова три броја. Ако је познато да је једна од ових разлика једнака 60 и једна једнака 38, одредити бројеве a, b и c.

3. Дат је једнакокраки $\triangle ABC$ у ком важи $AB \cong AC$ и $\measuredangle BAC = 80^\circ$. Нека је AD висина овог троугла. Тачка E је изабрана у његовој равни тако да важи $AD \cong EB$, $\measuredangle AED = 50^\circ$ и тачке E и B се налазе са исте стране праве AD. Доказати да је четвороугао $ACDE$ паралелограм.

4. Наћи све четвороцифрене бројеве који при дељењу са 197 дају остатак 47, а при дељењу са 198 дају остатак 37.

5. Колико има природних бројева мањих од 100 000 дељивих са 4 у чијем декадном запису учествују само цифре 0, 1, 2, 3 и 5? (Цифре се могу понављати и не мора се свака од њих појавити у запису таквог броја.)

Други разред – Б категорија

1. Одредити вредност параметра k тако да за решења x_1 и x_2 једначине

$$2x^2 + 3x + 3k + 1 = 0$$

важи

$$2x_1 - x_2 = 3.$$

2. Конструисати $\triangle ABC$ ако су у равни задате следеће његове значајне тачке: теме A, тежиште T и центар описане кружнице O.

3. Да ли је могуће у изразу

$$\textit{ТРИ} \cdot \textit{ТРИ} = \textit{ДЕВЕТ}$$

доделити истим словима исте а различитим словима различите цифре (и притом $T, Д \neq 0$) а да се добије тачна једнакост?

4. У скупу реалних бројева решити једначину

$$x(x+1)(x^2+x+1)=6.$$

5. Дата је квадратна таблица $n \times n$. Потребно је у свако њено поље уписати по један реалан број тако да на свакој дијагонали збир бројева износи 2017. (Притом посматрамо дијагонале свих могућих дужина: дакле, две дијагонале дужине n, четири дијагонале дужине $n-1$, четири дијагонале дужине $n-2$, ..., четири дијагонале дужине 2 и четири дијагонале дужине 1.) Да ли је ово могуће постићи за:

a) $n=5$;

b) $n=2017$?

Трећи разред – Б категорија

1. Решити једначину:

$$\frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}{3\sin x + \cos 2x} = \operatorname{ctg} 2x.$$

2. Дат је $\triangle ABC$. Права паралелна са AC сече страницу AB у тачки P, тежишну дуж AA_1 у тачки K, а страницу BC у тачки L. Ако важи $PK=7$ и $KL=5$, одредити дужину странице AC.

3. Наћи све вредности реалног параметра m за које систем једначина

$$x^2+y^2=4;$$
$$(x+m)^2+(y-m)^2=1$$

има тачно једно решење.

4. Наћи све природне бројеве n за које су сви бројеви $n+1$, $n+3$, $n+7$, $n+9$, $n+13$ и $n+15$ прости.

5. У кутији постоји 67 куглица које долазе у две величине (мале и велике) и две боје (беле и црвене). Познато је:

- број црвених куглица је дељив са 5;
- број великих црвених куглица једнак је броју белих куглица;
- од све четири врсте куглица, најмање има малих белих;
- број куглица сваке врсте је прост.

Одредити колико у кутији има куглица од сваке врсте.

Четврти разред – Б категорија

1. Ако важи једнакост

$$\sqrt{17^2+17^2+17^2+\cdots+17^2+17^2+17^2}=17^2+17^2+17^2,$$

колико пута се 17^2 јавља као сабирак под кореном?

2. Од свих једнакокраких трапеза којима угао на основици износи 60° и чија је површина једнака $6\sqrt{3}$, одредити онај који има минимални обим.

3. Колико има природних бројева мањих од 10 000 у чијем се декадном запису не појављују цифре 4, 8 и 9, а цифра 1 се појављује тачно једанпут? (Преостале цифре се могу појављивати произвољан број пута, укључујући и могућност да се не појаве уопште.)

4. Доказати да број $2017^{2017}+19$ није потпун степен (већи од првог) ниједног природног броја.

5. Решити једначину

$$x^4+(x+2)^4=2.$$

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 11. 3. 2017.

Први разред – А категорија

1. Да ли је могуће у свако поље таблице формата 2017×2017 уписати по један од бројева $1, 2, 3, \ldots, 2017$ на такав начин да се у свакој врсти, у свакој колони и на свакој дијагонали сваки од бројева појављује највише једанпут? (Притом посматрамо дијагонале свих могућих дужина: дакле, две дијагонале дужине 2017, четири дијагонале дужине 2016, четири дијагонале дужине 2015, ..., четири дијагонале дужине 2 и четири дијагонале дужине 1.)

2. Одредити све природне бројеве a и b за које је број

$$a^4b+3b-2a^2b^2-a^2-3b^3$$

степен двојке.

3. Нека су a, b и c позитивни реални бројеви за које важи $a+b+c=3$. Доказати:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+ab+bc}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+bc+ca}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+ca+ab}}\geqslant\sqrt{3}.$$

4. Доказати да у $\triangle ABC$ симетрала $\measuredangle A$, права одређена средиштима страница AC и BC, као и права одређена додирним тачкама уписане кружнице и страница AB и BC, све пролазе кроз исту тачку.

Други разред – А категорија

1. Колико највише страница може имати конвексан многоугао коме су дужине свих дијагонала једнаке?

2. У скупу реалних бројева решити систем једначина:

$$x + y + \cos z = 3;$$
$$2x - y + \sin\{z\} = 1;$$
$$x - 3y - \operatorname{arctg} z^2 = -2.$$

(Са $\{z\}$ означавамо разломљени део броја z, тј. $\{z\} = z - \lfloor z \rfloor$.)

3. Нека функција odraz пресликава цифре $0, 1, 2, 5, 8$ у цифре $0, 1, 5, 2, 8$, редом. Природан број $n = \overline{t_k t_{k-1} \cdots t_1 t_0}$ називамо *одразабилан* ако су му све цифре из скупа $\{0, 1, 2, 5, 8\}$ и притом важи $t_0 \neq 0$, и дефинишемо

$$\mathrm{odraz}(n) = \overline{\mathrm{odraz}(t_0)\mathrm{odraz}(t_1) \cdots \mathrm{odraz}(t_{k-1})\mathrm{odraz}(t_k)}$$

(другим речима, функција odraz представља одраз у огледалу броја на екрану калкулатора). Наћи све природне бројеве n са следећим особинама:

1° n је одразабилан и $\mathrm{odraz}(n) = n$;

2° n^2 је одразабилан и $\mathrm{odraz}(n^2) = n^2$.

4. Барон Минхаузен живи у земљи Z у којој су градови у власти канцелара Ота и краља Фрање (сваки град у власништву тачно једног од њих). Ти градови су повезани неким путевима (путевима је могуће кретати се у оба смера), при чему: свака два града су повезана највише једним путем; сваки пут повезује град канцелара Ота са градом краља Фрање; сваки град је путем повезан са тачно k других градова, $k \geqslant 2$; из сваког града је путевима могуће стићи до сваког другог града. Земља Z је у рату са земљом W. Барон Минхаузен је јавио непријатељима из земље W да постоји пут такав да, уколико се он уништи, постојаће нека два града таква да више неће бити могуће стићи из једног у други преосталим путевима. Да ли Барон Минхаузен лаже?

Трећи разред – А категорија

1. Дат је $\triangle ABC$. Тачке I_a, I_b и I_c су центри његових приписаних кружница, а тачке A_1, B_1 и C_1 су тачке додира тих приписаних кружница с одговарајућим страницама, редом. Доказати да се праве I_aA_1, I_bB_1 и I_cC_1 секу у једној тачки.

2. а) Доказати да постоји јединствена функција $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ таква да важи:

- $f(p) = 1$ за све просте бројеве p;
- $f(ab) = f(a)b + af(b)$ за све $a, b \in \mathbb{N}_0$;

- $f(0) = f(1) = 0$.

b) Одредити све природне бројеве n мање од 100 за које важи $f(f(n)) = 1$, где је f функција из дела под а).

3. Доказати да за сваки полином $P(x)$ са реалним коефицијентима постоје полиноми $Q(x)$ и $R(x)$ такви да важи

$$P(x) = Q(x^2) + R((x+1)^2).$$

4. Свечаној вечери присуствује $6k+3$ брачних парова, где је k природан број. Званице седе на $12k+6$ равномерно распоређених места око округлог стола. Сваки мушкарац међу званицама има тачно једну сестру, а свака жена тачно једног брата (брат и сестра не могу бити у браку). Званице су распоређене за столом тако да сваки мушкарац седи ближе својој супрузи него својој сестри. Нека је $f(k)$ максималан могућ број жена које седе ближе свом брату него свом мужу, где максимум посматрамо над свим могућим распоредима и над свим могућим скуповима званица које испуњавају услове задатка. Доказати: $f(k) = 6k$.

Четврти разред – А категорија

1. Дате су функције $f(x) = x^2 + x + 2$ и $g(x) = x^2 - x + 2$. Да ли постоји функција $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таква да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$h(f(x)) + h(g(x)) = g(f(x)) \ ?$$

2. Шифра за закључавање Кикиног телефона формира се на следећи начин. На мрежи тачака 3×3 потребно је нацртати путању сачињену од неколико дужи, где свака дуж повезује неке две од посматраних тачака, и притом је полазна тачка следеће дужи увек завршна тачка претходне. Током исцртавања путање, сваки пут када путања пређе преко неке тачке (било као унутрашње или крајње тачке неке дужи), та тачка више не може бити коришћена као крајња тачка ниједне наредне дужи (с изузетком услова да је полазна тачка следеће дужи увек завршна тачка претходне), али јесте дозвољено да таква тачка буде унутрашња тачка наредних дужи. Кики жели да њена шифра на телефону испуњава следеће услове:

1° свих 9 тачака морају лежати на исцртаној путањи;

2° траг који путања остави је осносиметричан (под *трагом* подразумевамо унију дужи као геометријских објеката, дакле без информација о њиховом редоследу, смеру кретања и евентуалном преклапању неких делова различитих дужи);

3° на трагу путање постоје тачно две тачке (од посматраних 9) које су спојене само с по једном другом тачком.

Да ли Кики може да постави овакву шифру на свом телефону? Ако може, између колико шифара може да бира (до на ротацију и/или симетрију)?

3. Дат је оштроугли $\triangle ABC$. Нека су k_a, k_b и k_c његове приписане кружнице наспрам темена A, B и C, респективно. Нека су O и I центар описане и уписане кружнице. Означимо са t_a, t_b и t_c спољне заједничке тангенте парова кружница k_b и k_c, k_c и k_a, k_a и k_b, респективно, различите од правих BC, CA и AB. Доказати да центар уписане кружнице троугла одређеног правима t_a, t_b и t_c лежи на правој OI.

4. Наћи све природне бројеве n чији се скуп правих делилаца (тј. свих делилаца изузев n) може поделити у два дисјунктна скупа од по бар 2 елемента на такав начин да у једном скупу буду узастопни Фибоначијеви бројеви, а у другом узастопни троугаони бројеви.

Први разред – Б категорија

1. Нека су AB и CD основице трапеза $ABCD$, а E средиште крака BC. Ако важи $AE = 10$, $DE = 8$ и $\measuredangle AED = 30^\circ$, одредити површину овог трапеза.

2. У држави Незналији, директор корпорације *Пропаст*™ је обавестио раднике да ће им ове године плата бити смањена за 10%, следеће године повећана за 11%, наредне године смањена за 12%, године после тога повећана за 13% итд. идућих 90 година. Да ли ће у неком тренутку запослени имати већу плату од тренутне?

3. У колико најмање потеза може скакач из доњег левог поља шаховске табле (a1) стићи до горњег десног (h8)? Доказати!

4. Колико има парних петоцифрених бројева који нису дељиви са 3 и у чијем запису нема цифре 9?

5. Решити ребус:

$$\mathit{ПЕТ} \cdot \mathit{ПЕТ} = \mathit{ДЕСЕТ}$$

(истим словима одговарају исте а различитим словима различите цифре, и притом $\mathit{П}, \mathit{Д} \neq 0$).

Други разред – Б категорија

1. За које вредности параметара p и q једначина

$$\sqrt{x^2 + px + q} + x = 2017$$

има више од 2017 различитих реалних решења?

2. У $\triangle ABC$ тачке A_0, B_0 и C_0 су подножја висина из темена A, B и C, редом, и притом важи $\triangle ABC \sim \triangle A_0B_0C_0$.

a) Ако се зна да је $\triangle ABC$ оштроугли, израчунати његове углове.

b) Ако се зна да је $\triangle ABC$ тупоугли, израчунати његове углове.

3. Одреди најмањи природан број n за који се ниједан од разломака

$$\frac{7}{n+9}, \frac{8}{n+10}, \frac{9}{n+11}, \ldots, \frac{2015}{n+2017}$$

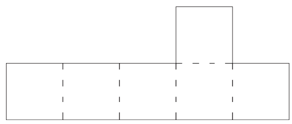
не може скратити.

4. Наћи све вредности реалног параметра a за које једначина

$$ax^2 - (a+2)x + (a+1) = 0$$

има два различита реална решења већа од 1.

5. Дата је фигура на слици доле, сачињена од шест јединичних квадратића. Да ли је могуће од непарног броја копија ове фигуре саставити правоугаоник?



Трећи разред – Б категорија

1. У интервалу $[0, 2\pi]$ решити једначину

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$$

2. Основа пирамиде $MABC$ је једнакокраки $\triangle ABC$ ($AB \cong AC$). Подножје висине пирамиде из врха M је на средини висине AA_0 у $\triangle ABC$. Кроз ивицу BC је постављена раван која је нормална на ивицу MA и сече је у тачки S. Познато је да та раван заклапа угао од 30° са равни ABC. Ако запремина пирамиде $SABC$ износи 2017, наћи запремину пирамиде $MSBC$.

3. Да ли је могуће број 2017 представити као збир три природна броја таква да никоја два међу њима нису узајамно прости?

4. Дате су тачке $A(1, 0)$ и $B(4, 3)$. За реалан број p, означимо са N_p тачку на правој AB која је најближа кружници

$$(x - p)^2 + (y - 1 - p^2)^2 = 1$$

(под растојањем тачке од кружнице подразумевамо растојање од те тачке до њој најближе тачке на кружници). За које вредности параметра p се тачка N_p налази строго између тачака A и B?

5. Одредити број начина да се природан број n представи као збир неколико (два или више) природних бројева, при чему је битан поредак. (На пример, за $n = 4$ имамо следеће могућности: $3 + 1$, $2 + 2$, $1 + 3$, $2 + 1 + 1$, $1 + 2 + 1$, $1 + 1 + 2$, $1 + 1 + 1 + 1$, тј. укупно 7 тражених начина.)

Четврти разред – Б категорија

1. Дате су параболе $y = x^2+3x+6$ и $y = x^2+5x+3$. Наћи једначину њихове заједничке тангенте, као и тачке додира те тангенте са овим параболама.

2. Ако је $n^2 + 2^n$ прост број за неки природан број $n > 1$, доказати да је n дељив са 3 али није дељив са 6.

3. У свако поље таблице формата $n \times n$ потребно је уписати по један од бројева 1, 2, 3, …, n на такав начин да се у свакој врсти, у свакој колони и на свакој дијагонали сваки од бројева појављује највише једанпут. (Притом посматрамо дијагонале свих могућих дужина: дакле, две дијагонале дужине n, четири дијагонале дужине $n-1$, четири дијагонале дужине $n-2$, …, четири дијагонале дужине 2 и четири дијагонале дужине 1.) Да ли је ово могуће постићи за:

a) $n = 4$;

b) $n = 5$?

4. Израчунати

$$\left\lfloor \underbrace{\sqrt{2017 + \sqrt{2017 + \cdots + \sqrt{2017 + \sqrt{2017}}}}}_{2017 \text{ коренова}} \right\rfloor.$$

(Са $\lfloor x \rfloor$ означавамо највећи цео број не већи од x.)

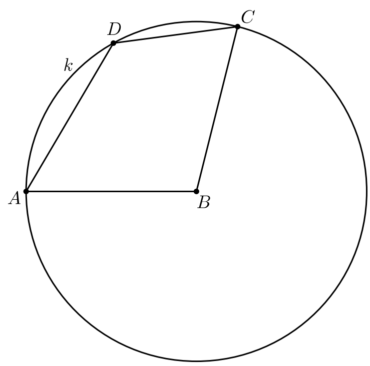
5. Дат је $\triangle ABC$, $\measuredangle C = 90^\circ$. Уочени су квадрати $AEDC$ и $CFGB$ у његовој спољашњости. Дуж EB суче дужи AC и AG редом у тачкама H и I. Дуж AG сече дуж BC у тачки J. Ако површина $\triangle AIB$ износи 2017, израчунати површину четвороугла $HCJI$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 21. 1. 2017.

Први разред – А категорија

1. Површ парка можемо попунити правоугаоницима димензија $10{,}5 \times 20{,}5$, где у једном реду можемо поређати 95 таквих правоугаоника а имамо укупно 48 редова (због $\frac{1000}{10{,}5} > 95$ и $\frac{1000}{20{,}5} > 48$). Тиме смо добили укупно 4560 таквих правоугаоника. Штавише, пошто важи $1000 - 48 \cdot 20{,}5 = 1000 - 984 = 16 > 10{,}5$, у преосталу траку можемо сместити још 48 таквих правоугаоника ротираних за 90°, чиме укупан број правоугаоника постаје 4608. Како имамо 4567 стабала, по Дирихлеовом принципу постоји правоугаоник у ком се не налази центар ниједног стабла. Међутим, тада средишњи део тог правоугаоника формата 10×20 представља простор унутар ког се не налази ниједно стабло (нити део стабла).

2. Опишимо кружницу k са центром у B и полупречником 2. На њој се налазе тачке A и C. У тој кружници периферијски углови над краћим луком $\widehat{AC}$ износе $\frac{104^\circ}{2} = 52^\circ$, па периферијски углови над дужим луком $\widehat{AC}$ износе $180^\circ - 52^\circ = 128^\circ$. Одатле закључујемо $D \in k$, па следи $BD = 2$.



Оп 2017 1А 2

3. Имамо $12^x + 10^y \equiv 1 + (-1)^y \in \{0, 2\} \pmod{11}$. Пошто $11 \nmid 7102$, y мора бити парно и стране једначине дају остатак 2 при дељењу са 11. Остаци при дељењу броја 7102^z са 11, за $z = 1, 2, 3 \ldots$, понављају се у периодима облика $(7, 5, 2, 3, 10, 4, 6, 9, 8, 1)$, па пошто је период дужине 10, закључујемо $z = 10k + 3$. Даље, посматрањем једначине по модулу 5 добијамо да је лева страна конгруентна са 2^x а десна са 2^z. Остаци при дељењу степена двојке са 5 понављају се у периодима облика $(2, 4, 3, 1)$, па пошто је период дужине 4, следи да x и z дају исти остатак при дељењу са 4; специјално, пошто је z непаран број, следи да је и x непаран број.

Пошто $2 \mid 7102$ али $4 \nmid 7102$, највећи степен двојке који дели десну страну је 2^z. Даље, највећи степен двојке који дели 12^x је 2^{2x}, а највећи степен двојке који дели 10^y је 2^y; уколико би ови степени били различити, тада би највећи степен двојке који дели леву страну износио $2^{\min\{2x, y\}}$, али пошто су $2x$ и y парни бројеви, ова вредност не би могла бити једнака 2^z (јер, подсетимо се, $2 \nmid z$). Преостаје $y = 2x$, и тада једначину можемо записати као $12^x + 100^x = 7102^z$. Но, како је x непаран број, лева страна може се факторисати као $(12 + 100)(12^{x-1} - 12^{x-2}100 + \cdots - 12 \cdot 100^{x-2} + 100^{x-1})$, тј. лева страна је дељива са 112, али пошто $112 \nmid 7102$, следи да постављена једначина нема решења.

4. Посматрајмо прво четири тачке A, B, C, D такве да је једна од њих у унутрашњости троугла који образују преостале три (без умањења општости, нека $D \in \operatorname{int} \triangle ABC$). Пошто међу угловима $\measuredangle ADB, \measuredangle ADC, \measuredangle BDC$ постоји бар један не мањи од 120°, у овом случају следи $f(A,B,C,D) \geqslant 120^\circ$.

Посматрајмо сада случај када ниједна од тачака A,B,C,D не лежи у унутрашњости троугла који образују преостале три, тј. када оне образују конвексан четвороугао (без умањења општости, четвороугао $ABCD$). Како важи $\measuredangle ABC + \measuredangle BCD + \measuredangle CDA + \measuredangle DAB = 360^\circ$, бар један од ова четири угла мора бити не мањи од 90°, па у овом случају следи $f(A,B,C,D) \geqslant 90^\circ$.

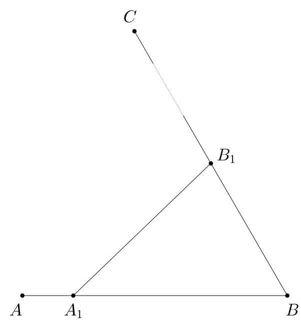
Према томе, закључујемо $\min f(A,B,C,D) \geqslant 90^\circ$. Уколико тачке A,B,C,D чине темена правоугаоника, тада се ова граница достиже, па је решење задатка 90°.

5. Користићемо следеће запажање: ако важи $||y|-a| = b$ и притом имамо $0 < a < b$, тада следи $|y| = a+b$. Заиста, имамо $|y|-a = \pm b$, тј. $|y| = a \pm b$, али због $a-b<0$ остаје $|y| = a+b$.

Ослобађањем последње апсолутне вредности у поставци добијамо $|\cdots|||x|-1|-2|\cdots-2016|-2017 = \pm 2017$, тј. $|\cdots|||x|-1|-2|\cdots-2016| \in \{0, 4034\}$. Сада ћемо разликовати ова два случаја.

У првом случају следи $|\cdots|||x|-1|-2|\cdots-2015| = 2016$. Применом запажања с почетка добијамо $|\cdots|||x|-1|-2|\cdots-2014| = 2016+2015$, па поновном применом истог запажања $|\cdots|||x|-1|-2|\cdots-2013| = 2016+2015+2014$ итд. На крају преостаје $|x| = 2016+2015+\cdots+1$, па у овом случају имамо два решења.

У другом случају на исти начин добијамо $|x| = 4034+2016+2015+\cdots+1$, па овде имамо још два решења. Дакле, укупно постоје четири решења постављене једначине.

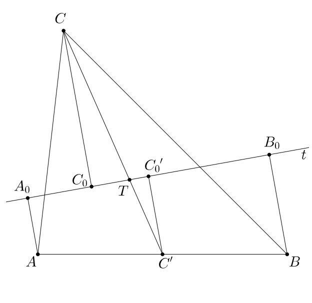


Оп 2017 2А 1

Други разред – А категорија

1. Нека t означава протекле секунде од када су мрави a и b започели свој пут. Нека су A_1 и B_1 редом положаји мрава a и b после протеклих t секунди. Тада важи $BA_1 = 260-t$ и $BB_1 = 3t$. На основу косинусне теореме имамо

$$\begin{aligned} A_1B_1^2 &= BA_1^2 + BB_1^2 - 2BA_1 \cdot BB_1 \cos 60^\circ \\ &= (260-t)^2 + 9t^2 - 2(260-t)3t \cdot \tfrac{1}{2} = 13t^2 - 1300t + 260^2. \end{aligned}$$



Оп 2017 2А 2

Јасно, растојање између мрава је минимално онда када је ова вредност минимална, а пошто је ово квадратна функција по t, она има минимум за $t = \frac{1300}{2\cdot 13} = 50$. Пошто се након 50 секунди мрави заиста и даље крећу ка својим одредиштима, решење задатка је 50 секунди.

2. Нека је C' средиште странице AB, а C_0' ортогонална пројекција тачке C' на праву t. Четвороугао ABB_0A_0 је трапез а $C'C_0'$ је његова средња линија, па имамо $AA_0 + BB_0 = 2C'C_0'$. Пошто су $\triangle CC_0T$ и $\triangle C'C_0'T$ слични (јер имају све подударне углове) с коефицијентом сличности 2 (јер важи $\frac{CT}{C'T} = 2$, према особини тежишта), следи $CC_0 = 2C'C_0'$. Из ова два закључка добијамо $AA_0 + BB_0 = CC_0$.

3. У првом кораку пчела има 6 могућности, а у сваком следећем највише 5 (јер се не може вратити на поље с ког је управо дошла). Тиме добијамо горњу границу $6\cdot 5^{n-1}$ за број тражених путања. Да бисмо доказали и доњу границу, приметимо да пчела у првом кораку може бирати једну од 6 могућности, а у сваком следећем кораку постоје три поља таква да се ступањем на њих пчела удаљава од полазног поља; ограничавајући се само на одабир оваквих поља у сваком потезу, пчела се обезбеђује да никада неће наићи на поље на ком је већ била, па је број могућих путања бар $6 \cdot 3^{n-1}$, тј. $2 \cdot 3^n$.

4. Сабирањем неједнакости $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$, $2x - 1 < \lfloor 2x \rfloor \leqslant 2x$ и $7x - 1 < \lfloor 7x \rfloor \leqslant 7x$ добијамо

$$10x - 3 < \lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 7x \rfloor \leqslant 10x,$$

тј. $10x - 3 < 2017 \leqslant 10x$. Одатле закључујемо $201{,}7 \leqslant x < 202$, па следи $\lfloor x \rfloor = 201$ и $\lfloor 2x \rfloor = 403$, те добијамо и $\lfloor 7x \rfloor = 2017 - \lfloor x \rfloor - \lfloor 2x \rfloor = 1413$. То даље даје

$$1413 = \lfloor 7(\lfloor x \rfloor + \{x\}) \rfloor = \lfloor 7\lfloor x \rfloor + 7\{x\} \rfloor = \lfloor 1407 + 7\{x\} \rfloor = 1407 + \lfloor 7\{x\} \rfloor,$$

то јест $\lfloor 7\{x\} \rfloor = 6$, а онда добијамо $\frac{6}{7} \leqslant \{x\} < 1$. Сада следи $\lfloor 6x \rfloor = \lfloor 6(\lfloor x \rfloor + \{x\}) \rfloor = \lfloor 6\lfloor x \rfloor + 6\{x\} \rfloor = 6\lfloor x \rfloor + \lfloor 6\{x\} \rfloor$, па с обзиром на неједнакост $\frac{36}{7} \leqslant 6\{x\} < 6$ имамо $\lfloor 6\{x\} \rfloor = 5$. Одатле добијамо

$$\{6x\} = 6x - \lfloor 6x \rfloor = 6(\lfloor x \rfloor + \{x\}) - (6\lfloor x \rfloor + \lfloor 6\{x\} \rfloor) = 6\{x\} - 5.$$

Слично следи и $\{5x\} = 5\{x\} - 4$ и $\{2x\} = 2\{x\} - 1$. Убацимо сада све ово у другу једначину. Она се своди на

$$3\{x\}(5\{x\} - 4) = 4(2\{x\} - 1)(6\{x\} - 5),$$

што после сређивања постаје $33\{x\}^2 - 52\{x\} + 20 = 0$. Решавањем ове једначине добијамо

$$\{x\} = \frac{52 \pm \sqrt{52^2 - 4 \cdot 33 \cdot 20}}{66} = \frac{52 \pm \sqrt{2704 - 2640}}{66} = \frac{52 \pm \sqrt{64}}{66} = \frac{52 \pm 8}{66},$$

тј. $\{x\} = \frac{52+8}{66} = \frac{60}{66} = \frac{10}{11}$ или $\{x\} = \frac{52-8}{66} = \frac{44}{66} = \frac{2}{3}$. Другу могућност одбацујемо јер се не уклапа у услов $\frac{6}{7} \leqslant \{x\}$. Остаје, дакле, $\{x\} = \frac{10}{11}$, и једино решење система из поставке је

$$x = 201 + \frac{10}{11} = \frac{2221}{11}.$$

5. *Прво решење.* За $n = 1$ имамо $x^2 = 2y_1^2$, што је немогуће. Докажимо сада да за свако $n > 1$ постоје тражени бројеви. За $n = 2$ имамо за $(x; y_1, \ldots, y_n)$

решење $(2;1,1)$; за $n=3$ имамо $(6;4,1,1)$, за $n=4$ имамо $(6;3,2,2,1)$. Приметимо да за сва три решења важи $y_n=1$. Надаље, ако за неко n имамо решење $(x;y_1,\dots,y_n)$ са $y_n=1$, онда за $n+3$ имамо решење $(2x;2y_1,\dots,2y_{n-1},1,1,1,1)$; заиста:

$$2((2y_1)^2+\dots+(2y_{n-1})^2+1^2+1^2+1^2+1^2)=4\cdot 2(y_1^2+\dots+y_{n-1}^2+1)=4x^2=(2x)^2.$$

Према томе, с обзиром на конструисана решења за $n\in\{2,3,4\}$, индукцијом добијамо егзистенцију решења за све $n>1$. Овим је доказ завршен.

Друго решење. Докажимо прво да за сваки природан број k постоји k квадрата природних бројева чија је сума такође квадрат природног броја. Доказ спроводимо индукцијом по k. За $k=1$ тврђење је тривијално тачно. Даље, ако важи $z_1^2+z_2^2+\dots+z_k^2=u^2$, тада, уколико је u непаран број, имамо $z_1^2+z_2^2+\dots+z_k^2+(\frac{u^2-1}{2})^2=u^2+\frac{u^4-2u^2+1}{4}=(\frac{u^2+1}{2})^2$, а уколико је u паран број, тада је u^2 дељиво са 4, па имамо $z_1^2+z_2^2+\dots+z_k^2+(\frac{u^2-4}{4})^2=u^2+\frac{u^4-8u^2+16}{16}=(\frac{u^2+4}{2})^2$ (тј. можемо узети $z_{k+1}=\frac{u^2-1}{2}$, односно $z_{k+1}=\frac{u^2-4}{4}$, респективно).

Сада доказ егзистенције бројева из поставке за задато n, $n>1$, добијамо на следећи начин: одаберемо $y_1,y_2,\dots,y_{n-1}$ такве да сума њихових квадрата буде потпун квадрат, рецимо v^2, и одаберемо $y_n=v$. Тада имамо

$$2(y_1^2+y_2^2+\dots+y_{n-1}^2+y_n^2)=2(v^2+v^2)=4v^2=(2v)^2,$$

што је и требало доказати.

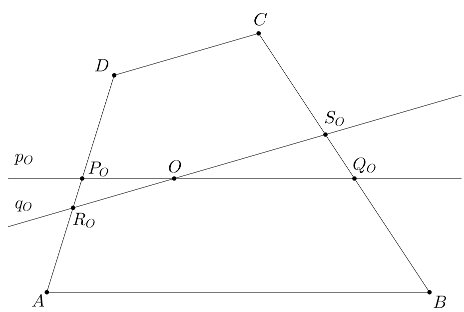
Треће решење. За $n\in\{2,3,4\}$ конструишемо примере као у првом решењу. За $n\geqslant 5$ означимо $k=n-4$ и узмимо $y_1=y_2=k$, $y_3=y_4=\dots=y_{n-2}=2$ и $y_{n-1}=y_n=1$. Тада имамо:

$$\begin{aligned}2(y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2)&=2(k^2+k^2+2^2+2^2+2^2+\dots+2^2+1^2+1^2)\\&=2(2k^2+(n-4)\cdot 4+2)=4(k^2+2k+1)=(2(k+1))^2,\end{aligned}$$

па можемо узети $x_n=2(k+1)$.

Трећи разред – А категорија

1. За произвољну тачку O унутар четвороугла $ABCD$ једнакост $P_OO\cdot OQ_O=R_OO\cdot OS_O$ је еквивалентна с чињеницом да су тачке P_O, R_O, Q_O и S_O концикличне, што следи из потенције тачке O у односу на кружницу. Ово је даље еквивалентно с условом $\measuredangle P_OR_OS_O\cong\measuredangle P_OQ_OS_O$, али како важи $\measuredangle P_OR_OS_O=180^\circ-\measuredangle ADC$ и $\measuredangle P_OQ_OS_O\cong\measuredangle ABC$, претходни услов заправо је еквивалентан с условом $\measuredangle ADC+\measuredangle ABC=180^\circ$, тј. с условом да је четвороугао



Оп 2017 3А 1

$ABCD$ тетиван. Дакле, оба услова из поставке еквивалентни су с тетивношћу четвороугла $ABCD$, па следи да су они еквивалентни међусобно.

2. Важи

$$2^n + 3^{n+3} + 5^n + 7^{n+4} \equiv (-1)^n + 0 + (-1)^n + 1 = 2 \cdot (-1)^n + 1 \pmod 3,$$

па је за парно n посматрани број дељив са 3 а тиме и сложен. Нека је сада n непарно. Тада важи

$$\begin{aligned} 2^n + 3^{n+3} + 5^n + 7^{n+4} &\equiv 2^n + (-2)^{n+3} + 0 + 2^{n+4} = 2^n + 2^{n+3} + 2^{n+4} \\ &= 2^n(1+8+16) = 25 \cdot 2^n \equiv 0 \pmod 5, \end{aligned}$$

па је тада посматрани број дељив са 5 и према томе поново је сложен.

3. Означимо са x_n број могућих пчелиних путања од n корака, а са y_n Дулетових. Видети решење за трећи задатак у разреду 2А, где је показана неједнакост $x_n \geqslant 2 \cdot 3^n$. Приметимо даље да Дуле у првом кораку има 4 могућности, а у сваком следећем највише 3 (јер се не може вратити на поље с ког је управо дошао), па за број његових путања добијамо горњу границу $y_n \leqslant 4 \cdot 3^{n-1}$. Одатле, $x_n \geqslant 2 \cdot 3^n = 6 \cdot 3^{n-1} \geqslant 4 \cdot 3^{n-1} \geqslant y_n$, што је и требало доказати.

4. Уколико за x узмемо реалан број већи од свих a_i и b_i, неједнакост из поставке своди се на $-b_1 - b_2 - \cdots - b_n \leqslant -a_1 - a_2 - \cdots - a_n$, а ако за x узмемо реалан број мањи од свих a_i и b_i, неједнакост из поставке своди се на $b_1 + b_2 + \cdots + b_n \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Одатле директно следи

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Фиксирајмо сада природан број k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Нека је x произвољан реалан број за који важи $a_k \leqslant x \leqslant a_{k+1}$. Тада се постављена неједнакост своди на

$$|x-b_1| + |x-b_2| + \cdots + |x-b_n| \leqslant (x-a_1) + \cdots + (x-a_k) - (x-a_{k+1}) - \cdots - (x-a_n).$$

С друге стране, из очигледних неједнакости $|y| \geqslant y$ и $|y| \geqslant -y$ добијамо

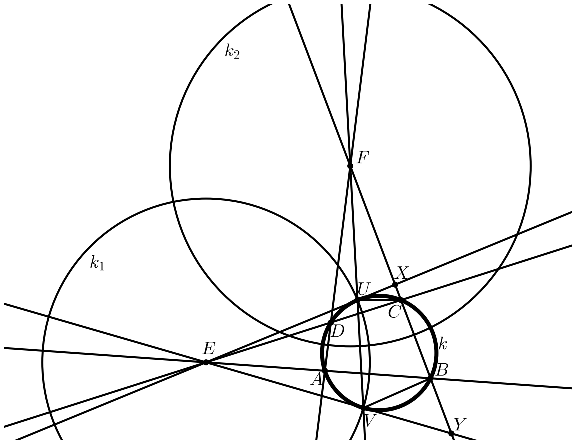
$$|x-b_1| + |x-b_2| + \cdots + |x-b_n| \geqslant (x-b_1) + \cdots + (x-b_k) - (x-b_{k+1}) - \cdots - (x-b_n),$$

па следи

$$\begin{aligned} &(x-b_1) + \cdots + (x-b_k) - (x-b_{k+1}) - \cdots - (x-b_n) \\ &\qquad \leqslant (x-a_1) + \cdots + (x-a_k) - (x-a_{k+1}) - \cdots - (x-a_n). \end{aligned}$$

Све појаве вредности x с обе стране неједнакости се испотиру, и одузимањем од ове неједнакости раније добијену једнакост $b_1+b_2+\cdots+b_n = a_1+a_2+\cdots+a_n$ добијамо $-2(b_1 + b_2 + \cdots + b_k) \leqslant -2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$, тј. $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \leqslant b_1 + b_2 + \cdots + b_k$.

5. Нека се кружнице k и k_1 секу у тачкама U и V. Докажимо да су тачке F, U и V колинеарне. Из овога ће лако следити тврђење задатка: заиста, из $i_{k_2}(k) = k$ и колинеарности тачака F, U и V добијамо $i_{k_2}(U) = V$, а одатле и $i_{k_2}(k_1) = k_1$, тј. $k_1 \perp k_2$. Докажимо зато жељену колинеарност.



Оп 2017 3А 5

Нека права EU (која је, приметимо, тангента на k, што следи из $k \perp k_1$) сече праву FC у тачки X. Из особина спољашњих и периферијских углова добијамо:

$$\begin{aligned}\measuredangle XFU &= \measuredangle EXC - \measuredangle FUX = (\measuredangle ECB - \measuredangle CEX) - \measuredangle EUV \\ &= (\measuredangle ECB - (\measuredangle CUX - \measuredangle UCE)) - \measuredangle EUV \\ &= (\measuredangle ECB + \measuredangle UCE) - (\measuredangle CUX + \measuredangle EUV) \\ &= \measuredangle UCB - (180^\circ - \measuredangle CUV) = \measuredangle UCB - \measuredangle CBV.\end{aligned}$$

Даље, означимо са Y пресек правих EV и FC. Слично као малопре, израчунавамо:

$$\begin{aligned}\measuredangle YFV &= \measuredangle EVU - \measuredangle EYB = \measuredangle EVU - (\measuredangle EBC - \measuredangle BEY) \\ &= \measuredangle EVU - (\measuredangle EBC - (\measuredangle BVY - \measuredangle VBE)) \\ &= (\measuredangle EVU + \measuredangle BVY) - (\measuredangle EBC + \measuredangle VBE) \\ &= 180^\circ - \measuredangle BVU - \measuredangle CBV = \measuredangle UCB - \measuredangle CBV.\end{aligned}$$

Другим речима, добили смо $\measuredangle XFU = \measuredangle YFV$. Одавде директно следи да су тачке F, U и V колинеарне, чиме је доказ завршен.

Четврти разред – А категорија

1. Трансформишимо израз $\ln \frac{x^x}{y^y} = x \ln x - y \ln y$. Уочимо функцију $f(x) = x \ln x$. Ова функција је непрекидна на $[e^{-3}, e]$ и диференцијабилна на (e^{-3}, e), и имамо $f'(x) = \ln x + 1$. По теореми о средњој вредности, постоји $c \in (e^{-3}, e)$ такво да важи $x \ln x - y \ln y = f'(c)(x - y) = (\ln c + 1)(x - y)$. Пошто $c \in (e^{-3}, e)$, следи $-2 \leqslant \ln c + 1 \leqslant 2$, па добијамо

$$\left| \ln \frac{x^x}{y^y} \right| = |f'(c)||x - y| \leqslant 2|x - y|,$$

што је и требало доказати.

2. Доказујемо индукцијом да за све $m \in \mathbb{N}$ важи $(a+1)^m \mid a^{(a+1)^{m-1}}+1$. За $m=1$ ово је очигледно. Претпоставимо сада да $(a+1)^m \mid a^{(a+1)^{m-1}}+1$ за дато m. Како је a паран број, $a+1$ је непаран, па имамо

$$a^{(a+1)^m}+1=\left(a^{(a+1)^{m-1}}\right)^{a+1}+1^{a+1}=\left(a^{(a+1)^{m-1}}+1\right)\sum_{j=0}^{a}(-1)^j\left(a^{(a+1)^{m-1}}\right)^j.$$

По индуктивној хипотези, $(a+1)^m \mid a^{(a+1)^{m-1}}+1$. Даље, имамо

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{a}(-1)^j\left(a^{(a+1)^{m-1}}\right)^j &\equiv \sum_{j=0}^{a}(-1)^j\left((-1)^{(a+1)^{m-1}}\right)^j=\sum_{j=0}^{a}(-1)^j(-1)^j\\ &\equiv \sum_{j=0}^{a}1=a+1\equiv 0 \pmod{a+1},\end{aligned}$$

то јест, $a+1 \mid \sum_{j=0}^{a}(-1)^j\left(a^{(a+1)^{m-1}}\right)^j$. Овим смо показали $(a+1)^{m+1} \mid a^{(a+1)^m}+1$, чиме је доказ завршен.

3. Означимо са A скуп позиција на којима су деца до којих се лопта низом сигурних додавања може проследити од Ивице, и означимо са B комплемент скупа A. Претпоставимо супротно, да је Маричина позиција у скупу B. Тада су и A и B непразни, па можемо уочити позиције $P_A \in A$ и $P_B \in B$ чије је растојање минимално. Пошто $P_A \in A$ а $P_B \in B$, између њих се не може сигурно додати лопта, што значи да се у кругу са пречником P_AP_B налази бар још једна позиција P_C. Али било да $P_C \in A$ или $P_C \in B$, то је у контрадикцији са минималношћу растојања P_A и P_B.

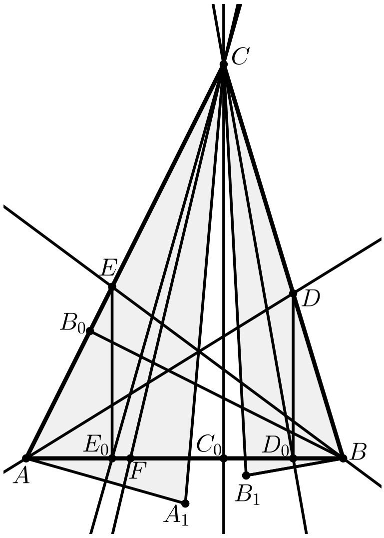
4. Ако важи $f(y_1)=f(y_2)=c$, тада за произвољно x и z имамо $y_1=\frac{f(x+c+f(f(z)))}{f(1+f(c)(x+z))}=y_2$; одавде закључујемо да је f „1-1“. Сада уврштавањем $y=z=1$ у једнакост из поставке и коришћењем инјективности функције f добијамо $x+f(1)+f(f(1))=1+f(f(1))(x+1)$, што се своди на $x(1-f(f(1)))=1-f(1)$, а ово је могуће за свако $x\in\mathbb{R}^+$ само уколико важи $1-f(f(1))=0$, тј. $f(f(1))=1$; тада с десне стране добијамо $f(1)=1$. Уврстимо сада $x=y=1$ у једнакост из поставке, чиме добијамо (поново уз инјективност, као и уз $f(1)=1$) $1+1+f(f(z))=1+1+z$, одакле следи $f(f(x))=x$ за свако $x\in\mathbb{R}^+$. Постављена једначина се своди на

$$f(x+f(y)+z)=yf(1+y(x+z)).$$

Уврстимо $x+z=1$ у овај израз, чиме добијамо $f(1+f(y))=yf(1+y)$. Заменом y са $f(x)$ у овој једнакости добијамо

$$f(x)f(1+f(x))=f(1+f(f(x)))=f(1+x)=\frac{f(1+f(x))}{x}$$

(где смо на крају још једном искористили претходну једнакост). Одавде одмах добијамо $f(x)=\frac{1}{x}$, а директно се проверава да ова функција заиста задовољава услове задатка.



Оп 2017 4А 5

5. Означимо са B_0 и C_0 подножја висина из темена B и C у $\triangle ABC$, редом, и нека је F пресек симетрале $\measuredangle ACC_0$ са страницом AB. Како важи $EE_0 < EC$ (јер је E на симетрали $\measuredangle B$), добијамо $\measuredangle ECE_0 < \measuredangle EE_0C \cong \measuredangle E_0CC_0$, а пошто је CF симетрала $\measuredangle ACC_0$, онда следи $\measuredangle ACE_0 < \measuredangle ACF$, а одатле даље $\measuredangle ACA_1 < \measuredangle ACC_0$. Ово значи да се $\triangle AA_1C$ цео налази, осим темена C, у отвореној полуравни с ивицом CC_0 у којој је тачка A. Аналогно се показује да се $\triangle BB_1C$ цео налази, осим темена C, у отвореној полуравни с ивицом CC_0 у којој је тачка B, одакле следи тврђење задатка.

Први разред – Б категорија

1. Подсетимо се, број $\overline{xyzu}$ је дељив са 11 ако и само ако $11 \mid (y+u)-(x+z)$.

Претпоставимо прво да су y и u исте цифре (a или b). Тада се услов своди на $11 \mid 2y-(x+z)$. Уколико важи $x = z$, тада имамо $11 \mid 2(y-x)$, а пошто су x и y цифре, ово је могуће само за $x = y = z = u$; дакле, у овом случају добијамо бројеве $\overline{aaaa}$ и $\overline{bbbb}$. Уколико су x и z различите цифре, тада је једна од њих једнака y а друга не; за нпр. $x = y$, $z \neq y$, услов се своди на $11 \mid y-z$, али ово је немогуће због $-8 \leqslant y-z \leqslant 8$ и $y \neq z$.

Нека су сада y и u различите цифре. Тада имамо $y+u = a+b$. За $x = z \in \{a, b\}$ услов $11 \mid (y+u)-(x+z)$ своди се на $11 \mid b-a$ или $11 \mid a-b$, али ово је немогуће за $a \neq b$. Следи да су и x и z различите цифре, па излиставањем свих могућих комбинација овде добијамо бројеве $\overline{aabb}$, $\overline{abba}$, $\overline{baab}$ и $\overline{bbaa}$.

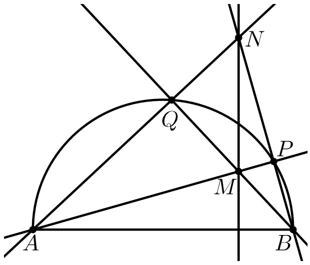
2. Имамо $|A| = 50$ и $|B| = 33$, а како су у скупу $A \cap B$ управо бројеви дељиви са 6, имамо и $|A \cap B| = 16$. Даље, $B \cap C = \{9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90\}$, па имамо $|B \cap C| = 10$, и $(A \cap C) \setminus B = \{14, 34, 44, 64, 74, 94\}$, па имамо $|(A \cap C) \setminus B| = 6$. Сада рачунамо

$$\begin{aligned} |(A \cup B) \setminus C| &= |A \cup B| - |B \cap C| - |(A \cap C) \setminus B| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| - |B \cap C| - |(A \cap C) \setminus B| \\ &= 50 + 33 - 16 - 10 - 6 = 51, \end{aligned}$$

одакле добијамо $|C| = 100 - |(A \cup B) \setminus C| = 49$.

3. Нека је p број плавих куглица, z број зелених куглица а c број црвених куглица. Из последњег услова закључујемо да важи $p + z = 7$ (јер 7 куглица није довољно како бисмо били сигурни да међу њима постоји црвена, тј. могуће је да свих 7 извучених куглица буду плаве или зелене, а није могуће извући 8 куглица које су све плаве или зелене). Слично, из претпоследњег услова закључујемо да важи $p+c = 9$. Коначно, из првог услова следи $z+c = 10$

(наиме, услов имплицира да важи једна од једнакости $p + z = 10$, $p + c = 10$ или $z + c = 10$, а прве две су немогуће због ранијих закључака). Сабирање све три добијене једнакости даје $2p + 2z + 2c = 26$, тј. $p + z + c = 13$, а одатле добијамо $c = 6$, $z = 4$ и $p = 3$.

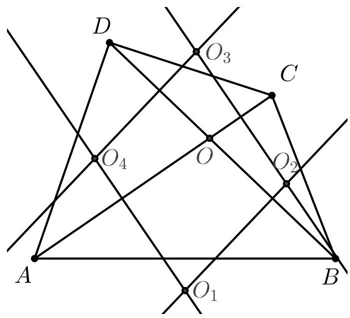


Оп 2017 1Б 4

4. Важи $\measuredangle APB = \measuredangle AQB = 90°$ јер су то углови над пречником AB. Према томе, AP и BQ су висине у $\triangle ABN$, па је M његов ортоцентар. Но, тада је MN трећа висина тог троугла, па следи $MN \perp AB$.

5. Нека A сада има x година, а B нека има y година. Дакле, A је старији од B за $x - y$ година. Када је A имао y година, онда је B имао $y-(x-y) = 2y - x$ година, па први услов из поставке можемо записати као $x = 3(2y - x)$, што се своди на $2x = 3y$. Када B буде имао x година, тада ће A имати $x + (x - y) = 2x - y$ година, па други услов из поставке можемо записати као $2x - y + x = 70$, тј. $3x - y = 70$. Решавањем система добијамо $x = 30$ и $y = 20$.

Други разред – Б категорија



Оп 2017 2Б 1

1. Нека су O_1, O_2, O_3 и O_4 центри кружница описаних око $\triangle ABO$, $\triangle BCO$, $\triangle CDO$ и $\triangle DAO$, редом. Како и O_1 и O_2 припадају симетрали дужи BO, следи да је права O_1O_2 управо симетрала дужи BO, па добијамо $O_1O_2 \perp BO$, тј. $O_1O_2 \perp BD$. На исти начин показујемо и $O_3O_4 \perp BD$, па одавде следи $O_1O_2 \parallel O_3O_4$. Аналогно, $O_2O_3 \parallel O_1O_4$, па је $O_1O_2O_3O_4$ паралелограм.

2. Претпоставимо да је прва старчева реченица неистинита (и тада све остале морају бити истините). То значи да старац има паран број јабука, а из друге реченице следи да је број јабука које има дељив са 3. Дакле, у том случају је број јабука које старац има дељив са 6, али тада његова последња реченица није истинита, контрадикција. Према томе, прва старчева реченица мора бити истинита, што значи да старац има непаран број јабука. У том случају очигледно трећа реченица није истинита, па све остале морају бити истините, тј. број јабука мора бити непаран, дељив са 3, дељив са 5, а да није дељив са 6. Најмањи природан број који је дељив са 3 и 5 је број 15, а он очигледно испуњава и остале неопходне услове, па старац минимално може имати 15 јабука.

3. Ако је тражени број бар двоцифрен, тада се у његовом запису не смеју појављивати цифре из скупа $\{0, 2, 4, 5, 6, 8\}$ (јер бисмо премештањем такве цифре на крај броја добили број који није прост). Дакле, остају само четири могуће цифре: $\{1, 3, 7, 9\}$, па је тражени број највише четвороцифрен. Уколико би био четвороцифрен, тада би се свака од цифара 1, 3, 7 и 9 појављивала тачно једном, али тада бисмо пермутацијом цифара могли добити број 1397, који је дељив са 11 па није прост. Слично, за сваки могућ избор три од ове четири цифре можемо пронаћи њихову пермутацију у којој не добијамо прост број: $7 \mid 371$, $11 \mid 319$, $7 \mid 791$, $7 \mid 973$. Према томе, тражени број је највише двоцифрен, а међу њима лако налазимо највећи: то је 97 (он јесте прост, а јединим могућом пермутацијом његових цифара добијамо број 79, који је такође прост).

4. Нека су x_1 и x_2 решења постављене једначине. Из Вијетових формула имамо $x_1 + x_2 = m + 1$ и $x_1 x_2 = 2m - 4$. Према томе, следи

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (m+1)^2 - 2(2m-4) = m^2 - 2m + 9.$$

Функција $m^2 - 2m + 9$ има минимум (теме) у тачки $m = \frac{-(-2)}{2} = 1$ (и тада важи $x_1^2 + x_2^2 = 8$). Пошто за $m = 1$ једначина из поставке гласи $x^2 - 2x - 2 = 0$ и њена решења су заиста реална (дискриминанта је позитивна: $(-2)^2 + 4 \cdot 2 = 12 > 0$), решење задатка је $m = 1$.

5. Сабирање прве две једначине из поставке даје $x^2 + 2y^2 + z^2 = 25$, па коришћењем треће добијамо $x^2 + 2xz + z^2 = 25$, тј. $(x+z)^2 = 25$, а одавде следи $x + z = \pm 5$, тј. $z = \pm 5 - x$. Сада из прве и треће једначине, користећи управо закључено, добијамо $9 = x^2 + y^2 = x^2 + xz = x^2 + x(\pm 5 - x) = \pm 5x$, тј. $x = \pm\frac{9}{5}$, а одавде следи $z = \pm 5 - (\pm\frac{9}{5}) = \pm\frac{16}{5}$ и $y^2 = xz = (\pm\frac{9}{5}) \cdot (\pm\frac{16}{5}) = \frac{144}{25}$. Дакле, посматрани систем има четири решења:

$$(x,y,z) \in \left\{ \left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right), \left(\frac{9}{5}, -\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right), \left(-\frac{9}{5}, \frac{12}{5}, -\frac{16}{5}\right), \left(-\frac{9}{5}, -\frac{12}{5}, -\frac{16}{5}\right) \right\}.$$

Трећи разред – Б категорија

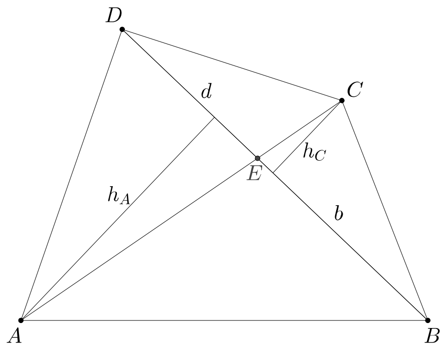
1. Из прве једнакости имамо $\sin x = 2\sin x \cos x$, тј. $\sin x(1 - 2\cos x) = 0$, а одавде закључујемо $\sin x = 0$ или $\cos x = \frac{1}{2}$. У првом случају имамо $x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, а видимо да све ове вредности заиста испуњавају све једнакости из поставке. У другом случају имамо $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, но тада важи $\sin x \neq 0$ али $\sin 3x = \sin(\pm\pi + 6k\pi) = 0$, па није задовољен низ једнакости из поставке. Дакле, решење једначине је $x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Број различитих распореда једнак је броју парова ученика који су у међувремену заменили места, увећаном за 1 (због првог уоченог распореда). Како Вук мора престићи Ацу и Бојана, Дејан мора престићи Ацу, Бојана и Горана, а Горан мора престићи Бојана, број различитих распореда је бар 7. Уколико се престизања догађају по редоследу из претходне реченице, број различитих распореда ће бити једнак 7, па је то тражено решење задатка.

3. Множењем прве једначине са -2 и додавањем другој добијамо

$$0 = x^2 - 2xy + y^2 - 2(x-y) = (x-y)^2 - 2(x-y) = (x-y)(x-y-2),$$

одакле следи $x = y$ или $x = y+2$. У првом случају друга једначина се своди на $2x^2 = 34$, па имамо два решења: $(x,y) = (\sqrt{17}, \sqrt{17})$ и $(x,y) = (-\sqrt{17}, -\sqrt{17})$. У другом случају друга једначина се своди на $2y^2 + 4y - 30 = 0$, тј. $y^2 + 2y - 15 = 0$, чијим решавањем добијамо $y = \frac{-2\pm\sqrt{64}}{2} = \frac{-2\pm 8}{2}$, тј. $y = -5$ или $y = 3$, па добијамо још два решења: $(x,y) = (-3,-5)$ и $(x,y) = (5,3)$, те постављени систем има укупно 4 решења.



Оп 2017 3Б 4

4. Нека је E пресек дијагонала четвороугла $ABCD$, нека су b и d дужине дужи BE и DE, и нека су h_A и h_C удаљености тачака A и C од праве BD, све респективно. Тада имамо:

$$P_{\triangle ABE}P_{\triangle BCE}P_{\triangle CDE}P_{\triangle ADE}$$
$$= \frac{bh_A}{2}\frac{bh_C}{2}\frac{dh_C}{2}\frac{dh_A}{2} = \left(\frac{bh_A}{2}\right)^2\left(\frac{dh_C}{2}\right)^2$$
$$= (P_{\triangle ABE}P_{\triangle CDE})^2.$$

Стога, пошто је број у загради цео, посматрани производ је потпун квадрат. Међутим, потпун квадрат се може завршавати само неком од цифара 0, 1, 4, 5, 6 или 9, тј. не може се завршавати цифром 7, па се не може завршавати ни на 2017.

5. а) Видимо да $m^2n^2 \mid m^2n^6-m^4n^4+m^6n^2 = 2017$, одакле мора бити $mn = \pm 1$ или $mn = \pm 2017$ (јер је 2017 прост број). Ако би било $m = 2017$ или $n = 2017$, тада би лева страна једнакости била дељива са 2017^2, док десна није, па је то контрадикција. Према томе, $mn = \pm 1$, али онда $m^2n^6 - m^4n^4 + m^6n^2 = 1$, па једначина нема решења.

b) Узмимо, без губљења општости, $|m| \geqslant |n|$. Тада имамо $2016 = m^2n^6 - m^4n^4 + m^6n^2 \geqslant n^2n^6 + m^4n^2(m^2-n^2) \geqslant n^8$, што даје $|n| \leqslant 2$. За $n = 0$ лева страна је 0, па ту немамо решења. За $|n| = 1$, из $m^2 - m^4 + m^6 = 2016$ следи да m мора бити парно, а такође и дељиво са 3 (јер би у случају $m \equiv \pm 1 \pmod 3$ лева страна давала остатак 1 при дељењу са 3, док $3 \mid 2016$), одакле следи $|m| \geqslant 6$ (немогуће је $m = 0$), а то је контрадикција због

$$m^6 - m^4 + m^2 = m^4(m^2-1) + m^2 \geqslant 35m^4 \geqslant 35 \cdot 6^4 > 2016.$$

Коначно, за $|n| = 2$ једначина постаје $64m^2 - 16m^4 + 4m^6 = 2016$, тј. $16m^2 - 4m^4 + m^6 = 504$, одакле је m паран број, али тада $64 \mid 16m^2 - 4m^4 + m^6$ док $64 \nmid 504$, што је контрадикција. Дакле, постављена једначина нема решења.

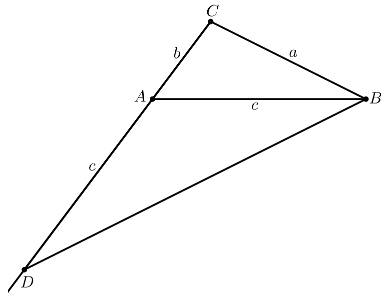
Четврти разред – Б категорија

1. На посматраном интервалу важи $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$ и $0 \leqslant \cos x \leqslant 1$, па следи $(\sin x)^{\cos x} \leqslant 1^{\cos x} = 1$. Ова вредност се заиста и достиже за $x = \frac{\pi}{2}$, па тражена максимална вредност једнака 1.

2. Ако је x тражени број, тада из услова задатка следи да је $x - 1$ дељиво са $2, 3, \ldots, 12$, па следи

$$27720 = \text{НЗС}(2, 3, \ldots, 12) \mid x - 1.$$

Другим речима, $x = 27720k + 1$ за неки природан број k. Уврштавањем $k = 1, 2, 3\ldots$ до наиласка на први случај када је x дељиво са 13 видимо да се то догађа за $k = 3$, и тада имамо $x = 27720 \cdot 3 + 1 = 83161$.



Оп 2017 4Б 3

3. Уочимо тачку D такву да важи $C - A - D$ и $AD = c$. Тада имамо $CD = b + c$, а како из једнакости дате у поставци следи $\frac{a}{b} = \frac{b+c}{a}$, ово заједно с једнакошћу $\measuredangle ACB = \measuredangle BCD$ имплицира $\triangle ABC \sim \triangle BDC$. Из те сличности имамо $\measuredangle BDC \cong \measuredangle ABC$. Како важи $\measuredangle ABD \cong \measuredangle BDC$ (због $AD \cong AB$), добијамо $\measuredangle BAC = \measuredangle ABD + \measuredangle BDC = 2\measuredangle BDC = 2\measuredangle ABC$, што је и требало доказати.

4. Сабирањем све 3 једначине добијамо $(x + y + z)^2 = 4$, тј. $x + y + z = \pm 2$. Одузимањем треће једначине од прве добијамо $x^2 - z^2 + 2y(z - x) = 0$, тј. $(x - z)(x + z - 2y) = 0$. Даље разликујемо четири случаја.

- $x + y + z = 2$, $x - z = 0$:
  Заменом $z = x$ и $y = 2 - 2x$ у прву једначину добијамо $-3x^2 + 4x - 1 = 0$, чијим решавањем добијамо 2 решења: $(x, y, z) = (1, 0, 1)$ или $(x, y, z) = (\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3})$.
- $x + y + z = -2$, $x - z = 0$:
  Заменом $z = x$ и $y = -2 - 2x$ у прву једначину добијамо $-3x^2 - 4x - 1 = 0$, чијим решавањем добијамо још 2 решења: $(x, y, z) = (-1, 0, -1)$ или $(x, y, z) = (-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3})$.
- $x + y + z = 2$, $x + z = 2y$:
  Одавде следи $3y = 2$ и онда $x + z = 2y = \frac{4}{3}$, а из друге једначине из поставке добијамо $xz = \frac{2-y^2}{2} = \frac{7}{9}$. Када овде уврстимо $z = \frac{4}{3} - x$, добијамо $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{7}{9} = 0$, а за дискриминанту ове једначине имамо $D = \frac{16}{9} - \frac{28}{9} = -\frac{4}{3} < 0$, па овде нема реалних решења.
- $x + y + z = -2$, $x + z = 2y$:
  Одавде следи $3y = -2$ и онда $x + z = 2y = -\frac{4}{3}$, а из друге једначине из поставке добијамо $xz = \frac{2-y^2}{2} = \frac{7}{9}$. Када овде уврстимо $z = -\frac{4}{3} - x$, добијамо $x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{7}{9} = 0$, а за дискриминанту ове једначине имамо $D = \frac{16}{9} - \frac{28}{9} = -\frac{4}{3} < 0$, па ни овде нема реалних решења.

Дакле, посматрани систем има четири реална решења:

$$(x, y, z) \in \left\{(1, 0, 1), (\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}), (-1, 0, -1), (-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3})\right\}.$$

5. Приметимо да за све могуће збирове осим 6 постоји комбинација од три броја с тим збиром таква да је на основу њиховог производа могуће једнозначно реконструисати та три броја: $18 = 6 + 6 + 6$, $17 = 6 + 6 + 5$, $16 = 6 + 5 + 5$, $15 = 5 + 5 + 5$, $14 = 5 + 5 + 4$, $13 = 5 + 5 + 3$, $12 = 5 + 5 + 2$, $11 = 5 + 5 + 1$, $10 = 4 + 4 + 2$, $9 = 3 + 3 + 3$, $8 = 5 + 2 + 1$, $7 = 5 + 1 + 1$, $5 = 3 + 1 + 1$, $4 = 2 + 1 + 1$ и $3 = 1 + 1 + 1$. Примера ради, ако би Зорану био саопштен збир 14, тада је један од начина на који је могуће добити тај збир $5 + 5 + 4$, а тада би Петру био саопштен производ 100, и у том случају би Петар одмах знао сва три Анина броја (једини начин да се 100 представи као производ три природна броја од 1 до 6 је управо $5 \cdot 5 \cdot 4$: заиста, како $5^2 \mid 100$, следи да два од та три броја морају бити једнаки 5, а трећи онда мора бити 4). Како је Зоран био сигуран да Петар не може на основу свог производа реконструисати Анине бројеве, једини начин да Зоран буде сигуран у то јесте да му је саопштен управо збир 6.

Ово значи да је Ана добила једну од следеће три тројке бројева: $(4,1,1)$, $(3,2,1)$ или $(2,2,2)$. У првом случају Петар би имао производ 4 и двоумио би се између тројки $(4,1,1)$ и $(2,2,1)$; у другом случају Петар би имао производ 6 и двоумио би се између тројки $(3,2,1)$ и $(6,1,1)$; у трећем случају Петар би имао производ 8 и двоумио би се између тројки $(4,2,1)$ и $(2,2,2)$. Како је Петар изјавио да није знао ни који је најмањи Анин број, тиме су прва два случаја елиминисана, па остаје трећи. Дакле, Ана је у три бацања сваки пут добила број 2.

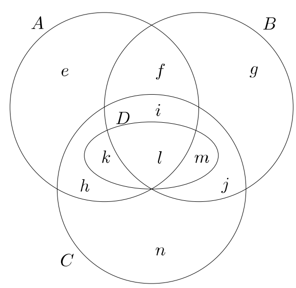
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19. 2. 2017.

Први разред – А категорија

1. а) Венов дијаграм за задате скупове изгледа као на слици, при чему су малим словима означене кардиналности одговарајућих делова. Једнакост из поставке се преводи на

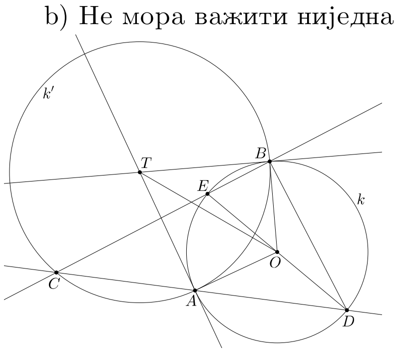
$$(e+h+k+g+m+j)+(f+g)+(h+i+j+n)+(l+m)$$
$$= e+f+h+i+k+l,$$

а одавде следи $2g+h+2j+2m+n=0$, те закључујемо $g=h=j=m=n=0$. Према томе, $B \cup C$ се састоји само од делова у којима су слова f, i, k и l, па одмах имамо $B \cup C \subseteq A$.



Ок 2016 1А 1

b) Не мора важити ниједна од тих инклузија. Узмимо $A=\{1,2\}$, $B=\{1\}$ и $C=D=\{2\}$. Тада не важи ниједна од посматраних инклузија, а притом имамо $A \triangle B=\{2\}$, $B \setminus C=\{1\}$, $C \setminus D=\varnothing$ и $B \cap D=\varnothing$, па је испуњена једнакост из поставке.



Ок 2016 1А 2

2. На основу особина периферијских и централних углова имамо $\measuredangle ACB \cong \frac{\measuredangle ATB}{2} \cong \measuredangle ATO$ и $\measuredangle ADB \cong \frac{\measuredangle AOB}{2} \cong \measuredangle AOT$. Сада следи

$$\measuredangle DBE = \measuredangle DBC = 180^\circ - \measuredangle ACB - \measuredangle ADB$$
$$= 180^\circ - \measuredangle ATO - \measuredangle AOT = \measuredangle TAO = 90^\circ,$$

па је DE пречник кружнице k.

3. Доказаћемо да је одговор 23. Прво конструишемо пример када 22 победе нису довољне за пролазак у следећи круг. Одаберимо неких 9 екипа и нека је свака од тих екипа победила оба пута преосталих 7 екипа, док за сваке две екипе од тих 9 важи да у међусобна два дуела имају по тачно једну победу. Тада свака од тих 9 екипа има тачно $2\cdot 7+8=22$ победе, а како 8 њих пролази даље, једна од тих 9 неће проћи. Дакле, потребне су бар 23 победе. Оне су и довољне, јер у супротном би бар 9 тимова морало да има по бар 23 победе, што уз утакмице које играју преосталих 7 тимова, а таквих је 42, даје да је на турниру било бар $23\cdot 9+42=249$ утакмица; међутим, на турниру је одиграно $15\cdot 16=240$ утакмица, контрадикција.

4. Знамо да је n дељив са 2, а како му је збир цифара дељив са 3, то и n мора бити дељив са 3. Знамо и да n није дељив са 4, а такође ни са 9 (јер му збир цифара није дељив са 9), па n мора имати још неки прост фактор, пошто има тачно 8 делилаца. Из овога закључујемо да n мора бити облика $n=6p$, где је p прост број различит од 2 и 3. Сада можемо одредити збир делилаца броја n: он износи $1+2+3+6+p+2p+3p+6p=12(p+1)$, а како је овај број по услову задатка дељив са 10, мора важити $5\mid p+1$. Одавде се прост број p завршава цифром 9, а број $n=6p$ се завршава цифром 4. Збир цифара броја n је 6, што оставља три могућности за двоцифрени завршетак тог броја: 04, 14 и 24. Међутим, ако се број завршава са 04 или 24, онда је дељив са 4, што не важи за n, па је двоцифрени завршетак броја n једнак 14. Пошто је збир цифара броја n једнак 6, следи $n=10^x+14$ за неки природан број $x>1$. За $x\geqslant 4$ важи $n\equiv 14 \pmod{16}$, а ово је искључено условом из поставке. Према томе, остаје још испитати могућности $x=2$ и $x=3$. У случају $x=2$ добијамо решење $114=6\cdot 19$ (даје остатак 2 при дељену са 16), док у случају $x=3$ нема решења због $1014=6\cdot 169$ а 169 није прост број (што је у супротоности са обликом $n=6p$). Дакле, једино решење је $n=114$.

5. Не мора бити правоугли. Приметимо да су троуглови са страницама дужине 9, 12 и 15, као и 5, 12 и 13, правоугли и да имају целобројну површину (она износи 54, односно 30). Њих можемо „слепити" по заједничкој катети дужине 12, и на тај начин добијамо троугао чије су странице дужине 13, 15 и $9+5=14$, његова површина је $54+30=84$, а овај троугао очигледно није правоугли јер $13^2+14^2=365\neq 225=15^2$.

Други разред – А категорија

1. За $x=0$ добијамо из првог услова $f(0)\leqslant 0$, а из другог услова $f(y)\leqslant f(0)+f(y)$, тј. $0\leqslant f(0)$, па скупа имамо $f(0)=0$. Сада за $y=-x$, користећи оба задата услова, добијамо

$$0=f(0)=f(x+(-x))\leqslant f(x)+f(-x)\leqslant x+(-x)=0,$$

одакле закључујемо $f(x)=-f(-x)$ за све $x\in\mathbb{R}$. Како из услова из поставке следи $f(-x)\leqslant -x$, добијамо

$$x\leqslant -f(-x)=f(x)\leqslant x$$

(на крају смо поново искористили услов из поставке). Одавде директно следи $f(x)=x$ за све $x\in\mathbb{R}$.

2. Очигледно мора важити $d > 1$. Затим, пошто је број на десној страни непаран број, на основу леве стране следи да је и d непарна цифра. Додатно, $d \neq 5$, јер би у супротном лева страна била дељива са 5 а десна не. Дакле, $d \in \{3, 7, 9\}$. Даље, имамо и $a > 1$, јер би у супротном десна страна била негативна.

Докажимо да важи $a^2 \geqslant a+b+c$. Претпоставимо супротно: $a^2 \leqslant a+b+c-1$. Тада имамо

$$\begin{aligned} d^{a^2} + d^{b+c} - d^{a+b+c} - d^a + 1 &< d^{a+b+c-1} + d^{a+b+c-1} - d^{a+b+c} - d^a + 1 \\ &< d \cdot d^{a+b+c-1} - d^{a+b+c} - d^a + 1 = 1 - d^a < 0, \end{aligned}$$

контрадикција. Дакле, $a^2 \geqslant a + b + c$.

Узмимо прво $a \geqslant 3$. Ако важи $a^2 = a + b + c$, тада имамо $b + c = a^2 - a$ и добијамо:

$$\begin{aligned} d^{a^2} + d^{b+c} - d^{a+b+c} - d^a + 1 = d^{a^2-a} - d^a + 1 &= d \cdot d^{a^2-a-1} - d^a + 1 \\ &> (d-1)d^{a^2-a-1} + 1 > d^{a^2-a-1}, \end{aligned}$$

а ако важи $a^2 > a + b + c$, следи $a + b + c \leqslant a^2 - 1$, па добијамо:

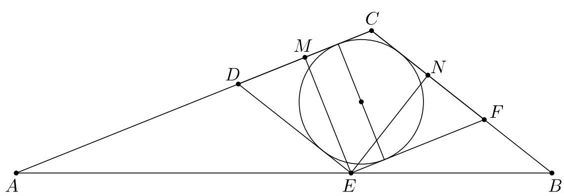
$$d^{a^2} + d^{b+c} - d^{a+b+c} - d^a + 1 > d^{a^2} - d^{a^2-1} - d^a + 1 > (d-2)d^{a^2-1} + 1 > d^{a^2-a-1}.$$

Дакле, свакако смо десну страну једначине из поставке ограничили одоздо са d^{a^2-a-1}. Међутим, за $a \geqslant 4$ имамо $d^{a^2-a-1} \geqslant 3^{11} > 9999$, а за $a = 3$ следи $d \in \{7, 9\}$ (јер су a и d различите цифре), па имамо $d^{a^2-a-1} \geqslant 7^6 > 9999$. Све заједно, за $a \geqslant 3$ број на десној страни не може бити четвороцифрен, па преостаје једино $a = 2$.

За $a = 2$ следи $2 \geqslant b + c$, а пошто су b и c различите цифре, мора бити $\{b, c\} = \{0, 1\}$. Тада $3 \mid a+b+c$, па $3 \nmid d$ јер би у супротном број на левој страни био дељив са 3 (пошто му је збир цифара дељив са 3) али број на десној страни не. Дакле, једина преостала могућност је $d = 7$, па израчунавамо:

$$\overline{abcd} = 7^{2^2} + 7^1 - 7^3 - 7^2 + 1 = 2401 + 7 - 343 - 49 + 1 = 2017,$$

што је једино решење задатка.



Ок 2017 2А 3

3. Нека су α, β и γ углови посматраног троугла, и нека су M и N подножја нормала из E на AC и BC, редом. Пошто је висина ромба једнака пречнику уписане кружнице, следи $EM = EN = 30\sqrt{3}$. Сада добијамо $\sin\alpha = \frac{EM}{EA} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$ и $\sin\beta = \frac{EN}{EB} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$, а одатле израчунавамо и $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{13}{14}$ и $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \frac{11}{14}$ (овде смо користили да су α и β оштри, јер је γ туп). Одатле имамо

$$\sin\gamma = \sin(180^\circ - \gamma) = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \frac{98\sqrt{3}}{196} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

па како је γ туп, следи $\gamma = 120°$. Даље, пошто имамо $AB = 140 + 84 = 224$, сада из $\frac{AB}{\sin\gamma} = \frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\beta}$ добијамо $BC = 96$ и $AC = 160$. Одатле налазимо $P_{\triangle ABC} = \dfrac{BC \cdot AC \cdot \sin\gamma}{2} = 3840\sqrt{3}$.

4. Према неједнакости између аритметичке и геометријске средине важи

$$\frac{\sqrt{ab}}{a+b-c} + \frac{\sqrt{bc}}{b+c-a} + \frac{\sqrt{ca}}{c+a-b} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{abc}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}},$$

па је довољно показати још $\frac{abc}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} \geqslant 1$. Увођењем смене $x = b+c-a$, $y = c+a-b$, $z = a+b-c$ (тј. $a = \frac{y+z}{2}$, $b = \frac{x+z}{2}$, $c = \frac{x+y}{2}$) жељена неједнакост се своди на $\frac{(y+z)(x+z)(x+y)}{8xyz} \geqslant 1$, а пошто према неједнакости између аритметичке и геометријске средине важи $y+z \geqslant 2\sqrt{yz}$, $x+z \geqslant 2\sqrt{xz}$ и $x+y \geqslant 2\sqrt{xy}$, множењем ових израза добијамо $(y+z)(x+z)(x+y) \geqslant 8xyz$, што смо и желели доказати (алтернативно, уместо увођења наведене смене могуће је и расписати добијену неједнакост, чиме се она своди на $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geqslant a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2$, а што је Шурова неједнакост).

5. Докажимо да Маша има победничку стратегију. Она треба у сваком свом потезу да узима чоколадице с левог краја стола (тамо где се на почетку игре налази чоколадица с бројем 1). Приметимо да Медвед у сваком потезу једе паран број узастопних чоколадица, па се, уз овакву Машину стратегију, током игре на столу увек наизменично смењују чоколадице с парним и непарним бројевима. Такође, чоколадица на скроз десном крају ће увек имати непаран број, како год Медвед играо. Према томе, када на крају игре остане само једна чоколадица, она ће имати непаран редни број.

Трећи разред – А категорија

1. Нека су a, b и c странице тог троугла, s његов полуобим, а r, r_a, r_b и r_c посматрани полупречници. Из израза за површину $P = rs = r_a(s-a) = r_b(s-b) = r_c(s-c)$ закључујемо да и величине s, $s-a$, $s-b$ и $s-c$ такође образују геометријску прогресију. Уз претпоставку (без умањења општости) $a < b < c$ следи $s(s-c) = (s-a)(s-b)$, што се даље своди на $sa + sb - sc = ab$, тј. $(a+b+c)(a+b-c) = 2ab$, а одавде имамо $a^2 + b^2 - c^2 = 0$, па је највећи угао у посматраном троуглу једнак $90°$.

2. Нека су y, z, u и v нуле датог полинома, где важи $y+z = 1$. Из Вијетових формула имамо $y+z+u+v = a$, одакле следи $u+v = a-1$; даље, $(y+z)u + (y+z)v + uv + yz = 1$, тј. $u+v+uv+yz = 1$, а што уз претходни закључак даје $uv + yz = 1 - (u+v) = 1 - (a-1) = 2-a$; и затим, $(y+z)uv + (u+v)yz = 0$, тј. $uv + (a-1)yz = 0$, а одузимањем претходно добијене једнакост од ове следи $(a-2)yz = a-2$, тј. $(a-2)(yz-1) = 0$.

Уколико важи $yz = 1$, тада из претходних једнакости добијамо $uv = 1-a$, па да би била испуњена и последња Вијетова формула, $yzuv = a$, мора важити $1 - a = a$, тј. $a = \frac{1}{2}$. Ова вредност јесте решење задатка јер бројеви y, z, u и v испуњавају све четири Вијетове формуле за посматрани полином, а онда они заиста морају бити његове нуле.

У случају $a = 2$ једначина из поставке своди се на $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2 = 0$, тј. $0 = (x^2-x)^2+2 = (x^2-x-2i)(x^2-x+2i)$. Из Вијетових формула примењених на полином у првој загради (или другој) следи да је збир корена тог полинома једнак 1, па и $a = 2$ јесте могућа вредност.

Дакле, задатак има два решења: $a \in \{\frac{1}{2}, 2\}$.

3. Важи

$$4|u|^2 + \frac{|z|^2}{4} \geqslant 2\sqrt{4|u|^2 \cdot \frac{|z|^2}{4}} = 2|uz| \geqslant 2\,\mathrm{Re}(uz),$$

и аналогно

$$4|v|^2 + \frac{|w|^2}{4} \geqslant 2\,\mathrm{Re}(vw).$$

Сабирањем ових неједнакости добијамо неједнакост из поставке.

4. Потражимо такве бројеве у облику $n = p^k$ где је p прост број. Скуп делилаца броја n је тада $\{1, p, p^2, p^3, ..., p^k\}$. Поделимо овај скуп на следеће двочлане подскупове: $\{1, p\}$, $\{p^2, p^3\}$, $\ldots$, $\{p^{k-1}, p^k\}$, где смо поставили додатан захтев да k буде непаран број и $k > 1$. Збир бројева у сваком оваквом подскупу је облика $p^{2i}(1+p)$, па да би ово било потпун квадрат, довољно је да $1 + p$ буде потпун квадрат. Ово је испуњено нпр. за $p = 3$ (и заправо само за $p = 3$, али то нам је довољно). Дакле, услов из поставке испуњавају сви бројеви облика 3^k за $k > 1$, $2 \nmid k$.

5. Уведимо релацију $\sim$ на тачкама скупа S: за $A, B \in S$ пишемо $A \sim B$ акко је дуж AB црвена или $A = B$. Претпоставимо да не постоји троугао чија је тачно једна страница плава. То значи да, кад год су A, B и C различите тачке скупа S за које важи $A \sim B$ и $B \sim C$, тада и дуж AC мора бити црвена, тј. $A \sim C$. Следи да је $\sim$ релација еквиваленције. Нека су $S_1, S_2, \ldots, S_n$ све класе еквиваленције. Очиглено, $n > 1$. Претпоставимо $n = 2$ и означимо $|S_1| = k$ и $|S_2| = 100 - k$. Тада црвених дужи има укупно

$$\binom{k}{2} + \binom{100-k}{2} = \frac{k(k-1) + (100-k)(99-k)}{2}$$
$$= k^2 - 100k + 4950 = (k-50)^2 + 2450 > 2017,$$

што је немогуће. Према томе, $n \geqslant 3$. Сада одаберимо произвољне тачке $A, B \in S_1$, $C \in S_2$ и $D \in S_3$: тада је дуж AB црвена док су дужи AC, AD, BC, BD и CD све плаве, па је тетраедар $ABCD$ тражени.

Четврти разред – А категорија

1. a) Како из друге једначине следи $\vec{b} \perp \vec{a}$, имамо $\vec{b} \cdot \vec{a} = 0$, тј. $4 + (p+1) + 4p = 0$, а одатле добијамо $p = -1$. Дакле, ова вредност једина долази у обзир за параметар p, уколико за њу можемо наћи вектор $\vec{v}$ какав је тражен (а што ће се испоставити да јесте могуће у наредном делу задатка).

b) Имамо $\vec{a} = (2, 1, -1)$ и $\vec{b} = (2, 0, 4)$, и означимо $\vec{v} = (x, y, z)$. Тада из прве једнакости из поставке имамо $2x + y - z = \sqrt{2^2 + 0^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$, а из друге $(z + y, -2z - x, 2y - x) = (2, 0, 4)$, тј. још и $z + y = 2$ и $x + 2z = 0$ (последњу једначину изостављамо јер је последица прве две). Заменом нпр. $x = -2z$ и $y = 2 - z$ из последње две једначине у прву добијамо $-6z + 2 = 2\sqrt{5}$, тј. $z = \frac{1-\sqrt{5}}{3}$, па онда налазимо $\vec{v} = (\frac{2\sqrt{5}-2}{3}, \frac{5+\sqrt{5}}{3}, \frac{1-\sqrt{5}}{3})$, што је, дакле, јединствено решење за $\vec{v}$. Коначно, $\vec{v}$ са $\vec{b}$ заклапа угао од 90°, што се одмах види из друге једнакости из поставке, а ако са φ означимо угао који $\vec{v}$ заклапа са $\vec{a}$, тада имамо $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{a}||\vec{v}|} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{\frac{20}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, тј. $\varphi = 45^\circ$.

2. *Прво решење.* Нека је x број парова узастопних чланова низа који се разликују за 2, а y број парова који се разликују за 3. Јасно, мора важити $2x + 3y = 25 - 1 = 24$, а одатле следи $3 \mid x$ и на основу тога лако излиставамо све могућности:

$$(x, y) \in \{(12, 0), (9, 2), (6, 4), (3, 6), (0, 8)\}.$$

За сваки овакав пар (x, y) пребројаћемо колико постоји тражених низова чији је то кореспондентни пар. У једном низу ком одговара пар (x, y) постоји укупно $x + y$ разлика између суседних чланова, од којих треба изабрати x оних које су једнаке 2, и тада су преосталих y једнаке 3; дакле, постоји $\binom{x+y}{y}$ таквих низова. Стога, тражени број је

$$\binom{12}{12} + \binom{11}{9} + \binom{10}{6} + \binom{9}{3} + \binom{8}{0} = 1 + 55 + 210 + 84 + 1 = 351.$$

Друго решење. Означимо са A_n број растућих коначних низова чији је први елемент 1, последњи n, и свака два узастопна члана се разликују за 2 или 3. Раздвајањем случајева по томе да ли је последња разлика једнака 2 или 3, добијамо рекурентну формулу $A_n = A_{n-2}+A_{n-3}$. С обзиром на почетне услове $A_1 = 1$, $A_2 = 0$, $A_3 = 1$, лако можемо израчунати првих 25 елемената низа:

$$1, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, 65, 86, 114, 151, 200, 265, 351$$

па је решење задатка $A_{25} = 351$.

3. Једноцифрених бројева има тачно n, двоцифрених $n(n-1)$, троцифрених $n(n-1)(n-2)$ итд. до n-тоцифрених бројева (што је максималан могућ број цифара под задатим условима), којих има $n!$. Дакле,

$$N = n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \cdots + n! = n!\left(1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{(n-1)!}\right).$$

Према томе,

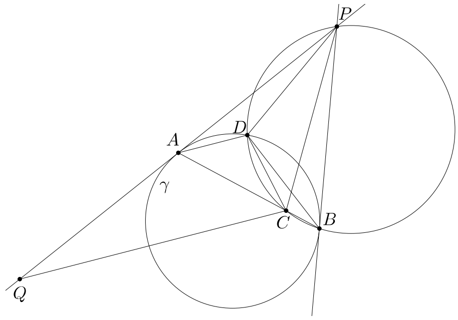
$$|n!e - N| = \left|n!\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!} - n!\left(1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{(n-1)!}\right)\right| = n!\sum_{i=n}^{\infty}\frac{1}{i!},$$

а користећи очигледну неједнакост $\frac{n!}{(n+k)!} \leqslant \frac{1}{(n+1)^k}$, где се једнакост достиже само за $k = 0, 1$, даље имамо

$$\sum_{i=n}^{\infty}\frac{n!}{i!} < \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = 1 + \frac{1}{n},$$

чиме је доказ завршен.

4. Важи $\triangle BDP \sim \triangle ADC$, што следи из $\measuredangle DBP \cong \measuredangle DAC$ (угао између тетиве и тангенте) и $\measuredangle BPD = 180^\circ - \measuredangle BCD = \measuredangle ACD$. Следи $\frac{PD}{CD} = \frac{PB}{CA} = \frac{QA}{CA}$ (последња једнакост следи из $PB \cong PA \cong QA$), па уз $\measuredangle PDC = 180^\circ - \measuredangle PBC = 180^\circ - \measuredangle PAB = \measuredangle QAC$ следи $\triangle PDC \sim \triangle QAC$. Одавде добијамо $\measuredangle PBD \cong \measuredangle PCD \cong \measuredangle QCA$.



Ок 2017 4А 4

5. Одговор: задата једначина има седам решења, и то су

$$(p, q, r) \in \{(1,0,1), (1,1,1), (1,2,2), (2,0,0), (2,1,0), (4,3,3), (18,5,1)\}.$$

Посматраћемо задату једначину по модулу 9. За $q \geqslant 6$ важи $9 \mid q!$. Тада мора важити $p^3 + 5 \equiv -7r^3 \equiv 2r^3 \pmod 9$. Остаци кубова при дељењу са 9 могу бити само 0, 1 или 8 (што се директно проверава). Према томе, лева страна претходне релације конгруентна је са 5, 6 или 4 по модулу 9, док је десна страна конгруентна са 0, 2 или 7. Одатле закључујемо да за $q \geqslant 6$ нема решења.

За $q = 0$ имамо $q! = 1$, па се тада задата једначина своди на $p^3 = 7(7 - r^3) - 41 = 8 - 7r^3$. Да би десна страна била ненегативна (будући да лева јесте ненегативна), мора важити $r \leqslant 1$. За $r = 0$ добијамо добијамо $p = 2$, а за $r = 1$ добијамо $p = 1$. Све идентично важи за $q = 1$. Тиме смо набројали укупно четири од наведених седам решења.

Посматрајмо случај $q = 2$. Тада се задата једначина своди на $p^3 = 7(14 - r^3) - 41 = 57 - 7r^3$, одакле имамо $r \leqslant 2$. Једина могућност је $r = 2$ и $p = 1$, чиме добијамо још једно решење. Слично, за $q = 3$ из чињенице да тада десна страна задате једначине постаје $7(42 - r^3)$ следи $r \leqslant 3$; директно се проверава да за $r \in \{0, 1, 2\}$ нема решења, док за $r = 3$ имамо $p^3 = 7 \cdot (42 - 27) - 41 = 7 \cdot 15 - 41 = 64$, тј. $p = 4$, па смо добили и шесто решење.

Да бисмо мало смањили број случајева које треба испитати за $q = 4$ и $q = 5$, претходно ћемо направити одређене закључке посматрањем задате једначине по модулу 8. За $q \geqslant 4$ имамо $8 \mid q!$, па добијамо $7(7q! - r^3) \equiv -7r^3 \equiv r^3 \pmod 8$, тј. (узимајући у обзир и леву страну задате једначине) $p^3 + 1 \equiv r^3 \pmod 8$. Приметимо још да за ма који паран број a важи $a^3 \equiv 0 \pmod 8$, док за непаран број a важи $a^3 \equiv a \pmod 8$. Одатле, да би важила малочас добијена релација, директно следи да су једине две могућности:

$$p \text{ је паран број и } r \equiv 1 \pmod 8, \quad \text{или} \quad r \text{ је паран број и } p \equiv 7 \pmod 8. \qquad (*)$$

Узмимо сада $q = 4$. Из услова $7q! - r^3 \geqslant 0$ добијамо $r^3 \leqslant 7 \cdot 24 = 168$, тј. $r \leqslant 5$. Осим тога, имамо и $p^3 = 7(7q! - r^3) - 41 < 49q! = 1176$, тј. $p \leqslant 10$. Прва могућност из $(*)$ директно даје $r = 1$, тј. $p^3 = 7(7 \cdot 24 - 1) - 41 = 7 \cdot 167 - 41 = 1128$, па овде не добијамо решење. Друга могућност из $(*)$ директно даје $p = 7$, али тада лева страна задате једначине није дељива са 7 а десна јесте.

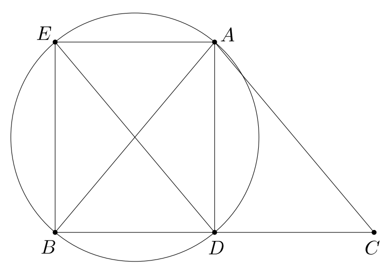
Најзад, узмимо $q = 5$. Слично као малопре, добијамо $r^3 \leqslant 7 \cdot 120 = 840$, тј. $r \leqslant 9$, и $p^3 < 49 \cdot 120 = 5880$, тј. $p \leqslant 18$. Прва могућност из $(*)$ даје $r = 1$ или $r = 9$; за $r = 1$ добијамо $p^3 = 7(7 \cdot 120 - 1) - 41 = 5832$, тј. $p = 18$, што чини седмо решење, а за $r = 9$ добијамо $p^3 = 7(7 \cdot 120 - 729) - 41 = 7 \cdot 111 - 41 = 736$, па овде нема решења. Друга могућност из $(*)$ даје $p = 7$, што је немогуће како је већ виђено, или $p = 15$, у ком случају остаје $r^3 = 7q! - \frac{p^3+41}{7} = 7 \cdot 120 - \frac{3375+41}{7} = 840 - 488 = 352$, па ни овде нема више решења.

Први разред – Б категорија

1. За свако $x \in \mathbb{R}$ важи $x^2 - x^2 = 0 \geqslant 0$, тј. $x \ \rho \ x$, па ρ јесте рефлексивна. Претпоставимо да важи $x \ \rho \ y$ и $y \ \rho \ x$. Тада имамо $x^2 - y^2 \geqslant 0$ и $y^2 - x^2 \geqslant 0$, па следи $x^2 - y^2 = 0$, тј. $x = \pm y$. Дакле, ρ није ни симетрична (јер нпр. важи $1 \ \rho \ 0$ али не важи $0 \ \rho \ 1$) ни антисиметрична (јер нпр. важи $1 \ \rho \ -1$ и $-1 \ \rho \ 1$, али $1 \neq -1$); одмах приметимо, одавде следи да ρ није ни релација еквиваленције ни релација поретка. Коначно, ако важи $x \ \rho \ y$ и $y \ \rho \ z$, тада имамо $x^2 - y^2 \geqslant 0$ и $y^2 - z^2 \geqslant 0$, а одатле добијамо $x^2 - z^2 \geqslant 0$, па и $x \ \rho \ z$; дакле, ρ јесте транзитивна.

2. Ако важи $60 = a - b$, тада следи $a \geqslant 61$, па b и c могу бити највише $100 - 61 - 1 = 38$. Према томе, разлика бројева b и c је највише $38 - 1 = 37$. Дакле, да би услов задатка био испуњен, једино је могуће да разлика бројева a и c буде 38, тј. пошто је a очигледно веће од c, имамо $38 = a - c$. Сада заменом $b = a - 60$ и $c = a - 38$ у $a + b + c = 100$ добијамо $3a = 198$, тј. $a = 66$, $b = 6$ и $c = 28$.

3. Важи $\measuredangle DBA = 90^\circ - \measuredangle DAB = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ = \measuredangle DEA$, па је четвороугао $ADBE$ тетиван. Сада следи $\measuredangle AEB = \measuredangle ADB = 90^\circ$, па по ставу ССУ имамо $\triangle ADB \cong \triangle BEA$. Дакле, $BD \cong AE$, па четвороугао $ADBE$ има два пара подударних наспрамних страница и он је стога паралелограм (штавише, правоугаоник). Сада из $AE \cong BD \cong CD$ и $AE \parallel BC$ следи да је $ACDE$ паралелограм.



Ок 2017 1Б 3

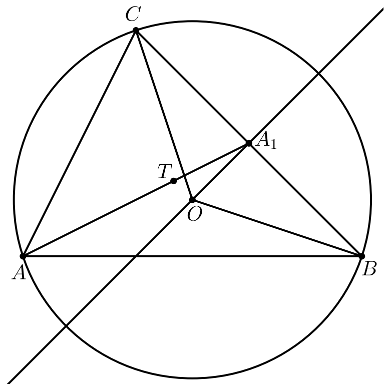
4. Нека је n тражени број. Тада важи $n = 197k + 47 = 198l + 37$ за неке ненегативне целе бројеве k и l. Одатле следи $198l - 197k = 10$. Пошто важи $198 - 197 = 1$, једно очигледно решење је $k = l = 10$, и тада имамо $n = 2017$. Претпоставимо да постоји још неко решење. Тада, уколико од једнакости $198l - 197k = 10$ одузмемо једнакост $198 \cdot 10 - 197 \cdot 10 = 10$, добијамо $198(l - 10) - 197(k - 10) = 0$, а пошто су 197 и 198 узајамно прости, следи $197 \mid l - 10$, тј. $l = 197s + 10$ за неко s. Уколико би важило $s > 0$, имали бисмо $l \geqslant 207$ и $n = 198l + 37 \geqslant 198 \cdot 207 + 37 > 9999$, тј. n не би био четвороцифрен број. Дакле, једино решење је $n = 2017$.

5. Једноцифрених бројева нема. Могући двоцифрени су 12, 20, 32 и 52, тј. има их 4. Троцифрени бројеви морају имати двоцифрени завршетак дељив са 4, тј. двоцифрени завршетак им мора бити нешто од ових управо набројаних бројева или пак 00; дакле, то је пет могућности за двоцифрени завршетак и још 4 могућности за цифру стотина (1, 2, 3 или 5, али не 0), па троцифрених бројева има $5 \cdot 4 = 20$. Слично, четвороцифрених има $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ (5 могућности за двоцифрени завршетак, 5 могућности за цифру стотина и 4 могућности за цифру хиљада), а петоцифрених има $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 = 500$. Како по услову задатка посматрани бројеви могу бити највише петоцифрени, укупно их има $4 + 20 + 100 + 500 = 624$.

Други разред – Б категорија

1. Из Вијетових формула имамо $x_1 + x_2 = -\frac{3}{2}$, па можемо записати $3 = 2x_1 - x_2 = 2(x_1 + x_2) - 3x_2 = -3 - 3x_2$, те израчунавамо $x_2 = -2$. Уврштавањем $x = -2$ у постављену једначину имамо $2(-2)^2 + 3(-2) + 3k + 1 = 0$, тј. $3 + 3k = 0$, одакле добијамо $k = -1$.

2. *Анализа.* Средиште странице BC, означимо га са A_1, налази се на продужетку дужи AT преко тачке T и важи $TA_1 = \frac{1}{2}AT$, због односа у ком тежиште дели сваку тежишну дуж. Пошто се центар описане кружнице налази на пресеку симетрала страница, то је права OA_1 једна од њих, а права која је нормална на OA_1 у тачки A_1 је права која садржи страницу BC. Тачке B и C се налазе у пресеку те праве са кружницом с центром у O и која пролази кроз A.



Ок 2017 2Б 2

Конструкција. Прво конструишемо тачку A_1 у продужетку AT за дужину $\frac{AT}{2}$. Затим повучемо праву OA_1, а потом и нормалу на OA_1 у A_1. На крају конструишемо кружницу са центром O која пролази кроз A, и у њеном пресеку са последњом конструисаном правом добијемо тачке B и C.

Доказ. По конструкцији је тачка O центар кружнице на којој леже тачке A, B и C, а из подударности $\triangle OA_1B \cong \triangle OA_1C$ (по ставу ССУ: $OB \cong OC$, $OA_1 \cong OA_1$ и $\measuredangle OA_1B = \measuredangle OA_1C = 90°$) следу $BA_1 \cong CA_1$, тј. A_1 је заиста средиште странице BC. Тада је и T тежиште $\triangle ABC$ због односа у ком дели тежишну дуж AA_1.

Дискусија. Ако посматране кружница и права имају две пресечне тачке (а то се дешава ако и само ако важи $OA > OA_1$), тада постоји јединствено решење (до на преименовање темена B и C). У случају $OA \leqslant OA_1$ задатак нема решења.

3. Пошто важи $400 \cdot 400 = 160000 > 99999$, закључујемо $T < 4$. Пошто је T завршна цифра потпуног квадрата ($ТРИ^2$ се завршава са T), следи $T \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$, а с обзиром на ограничења $T < 4$ и $T \neq 0$, преостаје једино $T = 1$. Одатле следи $И \in \{1, 9\}$, међутим пошто су $И$ и T различите цифре, добијамо $И = 9$. Сада директно проверавамо све могућности: $109^2 = 11881$, $129^2 = 16641$, $139^2 = 19321$, $149^2 = 22201$, $159^2 = 25281$, $169^2 = 28561$, $179^2 = 32041$

и $189^2 = 35721$, па пошто се ни у једном од ових случајева не добија резултат који одговара обрасцу *ДЕВЕТ*, следи да није могуће испунити захтев из поставке.

4. Уведимо смену $y = x^2 + x$. Тада се једначина своди на $y(y + 1) = 6$, тј. $y^2 + y - 6 = 0$, и њена решења су $y_{1/2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1\pm5}{2}$, тј. $y_1 = 2$ и $y_2 = -3$. У другом случају враћањем смене добијамо $x^2+x+3 = 0$, а пошто је дискриминанта ове једначине негативна: $1^2 - 4 \cdot 3 = -11 < 0$, ту нема реалних решења. У првом случају враћањем смене добијамо $x^2 + x - 2 = 0$, и њена решења су $x_{1/2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm3}{2}$, тј. $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$, што су једина два реална решења полазне једначине.

5. а) Пошто су четири угаона поља дијагонале дужине 1, у свако од њих морамо уписати број 2017. Пошто све остале дијагонале имају по тачно два ивична поља, ако бисмо уписали у ивична поља (осим угаоних) број $\frac{2017}{2}$, а у сва преостала поља број 0, на овај начин постигли смо да збир бројева на свакој дијагонали износи 2017, осим за две најдуже дијагонале: збир на њима износи 4034. Како бисмо ово кориговали, приметимо да централно поље таблице припада једино тим двема најдужим дијагоналама, па уколико на њега упишемо број -2017 уместо 0, на тај начин смо кориговали збир на те две дијагонале, а нисмо пореметили збир на осталим дијагоналама. Доле приказујемо попуњену таблицу.

2017	$\frac{2017}{2}$	$\frac{2017}{2}$	$\frac{2017}{2}$	2017
$\frac{2017}{2}$	0	0	0	$\frac{2017}{2}$
$\frac{2017}{2}$	0	-2017	0	$\frac{2017}{2}$
$\frac{2017}{2}$	0	0	0	$\frac{2017}{2}$
2017	$\frac{2017}{2}$	$\frac{2017}{2}$	$\frac{2017}{2}$	2017

b) Имајући у виду исту идеју као у делу под а), таблицу можемо попунити на следећи начин: у четири угаона поља упишемо број 2017, у преостала ивична поља упишемо број $\frac{2017}{2}$, у централно поље упишемо број -2017, а у сва преостала поља упишемо број 0.

Трећи разред – Б категорија

1. С обзиром на идентитете $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$ и $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$, постављена једначина се своди на

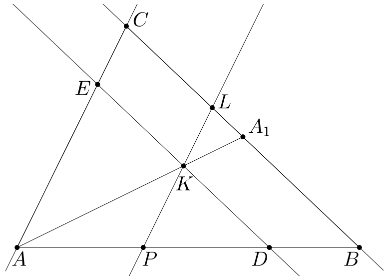
$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x(3\sin x + \cos 2x)} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg} x}.$$

Дакле, важи или $1 - \operatorname{tg}^2 x = 0$ или $3\sin x + \cos 2x = 2$, уз услов да је $\operatorname{tg} x$ дефинисан и $\operatorname{tg} x \neq 0$. У првом случају добијамо $\operatorname{tg} x = \pm1$, што даје решења $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. У другом случају искористимо идентитет $\cos 2x = 1-2\sin^2 x$, чиме се посматрана једначина своди на $2\sin^2 x-3\sin x+1 = 0$; увођењем смене $t = \sin x$ и решавањем тако добијене квадратне једначине, $2t^2 - 3t + 1 = 0$, добијамо $t_{1/2} = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4} = \frac{3\pm1}{4}$, тј. $t = \sin x = 1$ или $t = \sin x = \frac{1}{2}$. У случају

$\sin x = 1$ имамо да $\operatorname{tg} x$ није дефинисан, па остаје $\sin x = \frac{1}{2}$, што даје решења $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Дакле, све заједно добијамо:

$$x \in \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2. Поставимо кроз тачку K праву која је паралелна са BC, а њене пресеке са AB и AC означимо са D и E. Из Талесове теореме имамо $\frac{CA_1}{EK} = \frac{A_1A}{KA}$ и $\frac{BA_1}{DK} = \frac{A_1A}{KA}$, тј. $\frac{CA_1}{EK} = \frac{BA_1}{DK}$, а с обзиром на $BA_1 = CA_1$, одавде следи $DK = EK$, тј. K је средиште дужи DE. Према томе, KP је средња линија $\triangle ADE$ и стога имамо $AE = 2KP = 14$. С друге стране, $EKLC$ је паралелограм, па важи $EC = KL = 5$, а тражена дужина износи $AC = 14 + 5 = 19$.



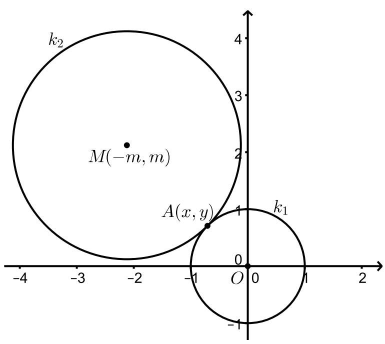
Ок 2017 3Б 2

3. *Прво решење.* Другу једначину можемо расписати као $x^2 + 2mx + m^2 + y^2 - 2my + m^2 = 1$, а користећи овде прву једначину, добијамо $4 + 2m(x-y) + 2m^2 = 1$, тј. $2m(x-y) = -2m^2 - 3$. Одмах видимо да за $m = 0$ нема решења. Претпоставимо сада $m \neq 0$. Тада добијамо $x = y - \frac{2m^2+3}{2m}$. Уврстимо ово у прву једначину система, чиме добијамо $(y - \frac{2m^2+3}{2m})^2 + y^2 = 4$, тј.

$$2y^2 - \frac{2m^2+3}{m}y + \frac{4m^4 - 4m^2 + 9}{4m^2} = 0.$$

Ова једначина има тачно једно решење ако и само ако је њена дискриминанта једнака 0, то јест:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{(2m^2+3)^2}{m^2} - 8 \cdot \frac{4m^4 - 4m^2 + 9}{4m^2} \\ &= \frac{4m^4 + 12m^2 + 9 - 8m^4 + 8m^2 - 18}{m^2} = -\frac{4m^4 - 20m^2 + 9}{m^2}. \end{aligned}$$



Ок 2017 3Б 3

Дакле, уз смену $t = m^2$, имамо $4t^2 - 20t + 9 = 0$, чија су решења $t_{1/2} = \frac{20 \pm \sqrt{400-144}}{8} = \frac{20 \pm 16}{8}$, тј. $t_1 = \frac{9}{2}$ и $t_2 = \frac{1}{2}$. Према томе, постоје четири могуће вредности параметра m: $m = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$ и $m = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Друго решење. У координатној равни посматрајмо тачке $O(0,0)$, $A(x,y)$ и $M(-m,m)$. Тада важи $OA^2 = x^2 + y^2$ и $MA^2 = (x+m)^2 + (y-m)^2$, па из једнакости из поставке следи да је A тачка за коју важи $OA = 1$ и $MA = 2$. Другим речима, за дату вредност m тачка A је у пресеку кружница $k_1(O,1)$ и $k_2(M,2)$.

Решење (x, y) датог система је јединствено ако и само ако се кружнице k_1 и k_2 додирују, а то је еквивалентно условy $OM = 2 \pm 1$, дакле $OM = 3$ или $OM = 1$. С обзиром на $OM = |m|\sqrt{2}$, следи $m = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$ или $m = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. Једини такав број је $n = 4$ (посматрани бројеви су тада 5, 7, 11, 13, 17 и 19).

Тврдимо да је неки од бројева $n+1$, $n+3$, $n+7$, $n+9$, $n+13$ и $n+15$ дељив са 5. Заиста, у зависности од тога да ли n при дељењу са 5 даје остатак 0, 1, 2, 3 или 4, дељив са 5 биће број $n+15$, $n+9$, $n+3$, $n+7$ односно $n+1$, редом. Дакле, пошто су посматрани бројеви по услову задатка сви прости, а међу њима постоји број дељив са 5, следи да неки број мора бити управо једнак 5. То је могуће очигледно само за бројеве $n+1$ и $n+3$. У првом случају добијамо $n = 4$, што је већ наведено решење. У другом случају добијамо $n = 2$, али тада имамо $n + 7 = 9$, што није прост број, па ово није решење.

5. Нека је C број великих црвених куглица, c број малих црвених куглица, B број великих белих, а b број малих белих куглица. Тада су сви ови бројеви прости и важи $C+c+B+b = 67$. Да би збир четири проста броја био непаран, међу њима мора бити број 2 (јер је збир четири непарна броја паран). Како је 2 најмањи прост број, из трећег услова следи $b = 2$. Остаје $C + c + B = 65$. Пошто $5 \mid C + c$ (први услов), следи $5 \mid B$, па мора бити $B = 5$ (јер је B прост број). Сада из другог услова добијамо $C = B + b = 7$, а онда преостаје $c = 53$. Дакле, куглица у кутији има: 7 великих црвених, 53 мале црвене, 5 великих белих и 2 мале беле.

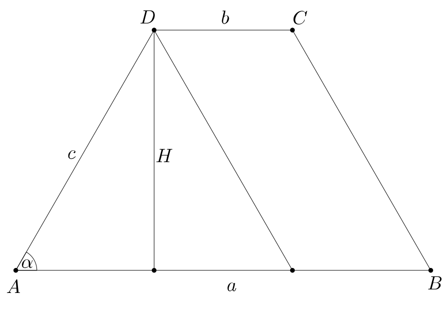
Четврти разред – Б категорија

1. Нека се 17^2 појављује под кореном k пута. Можемо записати

$$3{\cdot}17^2 = 17^2{+}17^2{+}17^2 = \sqrt{17^2 + 17^2 + 17^2 + \cdots + 17^2 + 17^2 + 17^2} = \sqrt{k \cdot 17^2} = 17\sqrt{k},$$

па одатле следи $k = (3 \cdot 17)^2 = 51^2 = 2601$.

2. *Прво решење.* Нека су a и b већа и мања основица тог трапеза, H његова висина, α угао на основици, P површина а O обим. Важи $a = b + 2H \operatorname{ctg}\alpha$, а одатле $P = H\frac{a+b}{2} = H(b + H \operatorname{ctg}\alpha)$. Даље, пошто су краци овог трапеза једнаки $\frac{H}{\sin\alpha}$, имамо $O = \frac{2H}{\sin\alpha} + 2b + 2H \operatorname{ctg}\alpha = 2(\frac{H}{\sin\alpha} + b + H \operatorname{ctg}\alpha)$. Из малопређашње формуле за површину имамо $b{+}H \operatorname{ctg}\alpha = \frac{P}{H} = \frac{6\sqrt{3}}{H}$, па следи $O = 2(\frac{H}{\sin\alpha} + \frac{6\sqrt{3}}{H}) = 2(\frac{2H}{\sqrt{3}} + \frac{6\sqrt{3}}{H})$, те се задатак своди на налажење минимума израза у загради.



Ок 2017 4Б 2

Ако тај израз означимо са $f(H)$, извод по H износи $f'(H) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{6\sqrt{3}}{H^2}$. Изједначавањем овога с нулом добијамо $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{H^2}$, тј. $H^2 = 9$, па следи $H = 3$ (због $H > 0$). У овој тачки заиста се достиже минимум јер видимо да важи $f'(H) < 0$ за $H \in (0,3)$, а $f'(H) > 0$ за $H > 3$. Тада добијамо $b = \frac{6\sqrt{3}}{3} - 3\operatorname{ctg} 60^\circ = 2\sqrt{3} - 3\frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$, $a = b + 2H\operatorname{ctg}\alpha = 3\sqrt{3}$ и $O = 8\sqrt{3}$.

Друго решење. Уз ознаке као у првом решењу, нека је c крак. Пошто важи $\alpha = 60^\circ$, уочавањем једнакостраничног троугла над једним краком добијамо $a = b + c$ и $H = \frac{c\sqrt{3}}{2}$. Зато имамо

$$6\sqrt{3} = P = \frac{c\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a+b}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}c(2b+c),$$

те закључујемо $c(2b+c) = 24$. Даље, имамо $O = a+b+2c = 2b+3c$, па применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине добијамо

$$\frac{2b+3c}{2} = \frac{(2b+c)+(2c)}{2} \geqslant \sqrt{(2b+c)(2c)} = \sqrt{48},$$

тј. $O \geqslant 2\sqrt{48} = 8\sqrt{3}$. Једнакост се заиста и достиже за $2b + c = 2c$, тј. $c = 2b$, па је минимална вредност обима $8\sqrt{3}$.

3. Тражени бројеви су највише четвороцифрени. Ако сваки такав број допунимо водећим нулама до укупно четири цифарска места (нпр. број 17 записиваћемо као 0017), тада, пошто се у броју појављује тачно једна цифра 1, за њу имамо избор од 4 позиције, а за сваку од преосталих позиција постоји по 6 могућности (све цифре осим 4, 8, 9 и 1). Према томе, тражених бројева има $4 \cdot 6^3 = 864$.

4. Претпоставимо супротно: $2017^{2017} + 19 = n^k$ за неко $k \geqslant 2$. Пошто важи $2017 \equiv 1 \pmod 8$, следи

$$2017^{2017} + 19 \equiv 1^{2017} + 19 = 20 \equiv 4 \pmod 8,$$

па је $2017^{2017} + 19$ дељив са 4 али не и са 8. Дакле, како је посматрани број паран, једина могућност је $k = 2$ (јер би за $k \geqslant 3$ он био дељив и са 8). Међутим, $2017^{2017} + 19 \equiv 1^{2017} + 1 = 2 \pmod 3$, а ниједан потпун квадрат не даје остатак 2 при дељењу са 3 (могући остаци су $0^2 = 0$, $1^2 = 1$ и $2^2 = 4 \equiv 1 \pmod 3$), па број $2017^{2017} + 19$ није ни потпун квадрат. Тиме је задатак решен.

5. Сменом $x + 1 = t$ постављена једначина се своди на $(t-1)^4 + (t+1)^4 = 2$, тј.

$$2 = ((t-1)^2)^2 + ((t+1)^2)^2 = (t^2 - 2t + 1)^2 + (t^2 + 2t + 1)^2 = 2t^4 + 12t^2 + 2,$$

а ово је даље еквивалентно са $0 = t^4 + 6t^2 = t^2(t^2 + 6)$. Решења ове једначине су $t_1 = t_2 = 0$, $t_{3/4} = \pm i\sqrt{6}$. Враћањем смене $x = t - 1$ добијамо скуп свих решења за x: $x \in \{-1, -1 + i\sqrt{6}, -1 - i\sqrt{6}\}$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 11. 3. 2017.

Први разред – А категорија

1. Могуће је. На поље са координатама (i, j) упишимо број $i + 2j$, где збир гледамо по модулу 2017 (тј. узимамо онај број од $1, 2, \ldots, 2017$ који даје исти остатак као посматрана вредност). Очигледно, у i-тој врсти никоја два броја нису једнака, јер из $i + 2j_1 \equiv i + 2j_2 \pmod{2017}$ следи $2017 \mid 2(j_1 - j_2)$, тј. $2017 \mid j_1 - j_2$, а ово је немогуће за $j_1 \neq j_2$. На сличан начин добијамо да у j-тој колони никоја два броја нису једнака. Најзад, претпоставимо да на некој дијагонали постоје два једнака броја; другим речима, иста вредност је уписана на пољима са координатама (i_1, j_1) и (i_2, j_2), где важи $|i_1 - i_2| = |j_1 - j_2|$. Тада имамо $i_1 + 2j_1 \equiv i_2 + 2j_2 \pmod{2017}$, тј. $i_1 - i_2 \equiv 2(j_2 - j_1) \pmod{2017}$, али одавде имамо $1 \equiv \pm 2 \pmod{2017}$ (јер је 2017 прост број, па је узајамно прост са $i_1 - i_2$), што је очигледна контрадикција. Дакле, посматрано попуњавање одговара условима задатка.

2. Важи

$$a^4b + 3b - 2a^2b^2 - a^2 - 3b^3 = (a^2 - 3b)(a^2b + b^2 - 1),$$

па и бројеви $a^2 - 3b$ и $a^2b + b^2 - 1$ морају бити степени двојке. Јасно, $a = b = 1$ није решење, па важи $a^2b + b^2 - 1 > 1$, те одатле број $a^2b + b^2 - 1$ мора бити паран. Одавде следи да је b непаран а a паран број, а онда је и $a^2 - 3b$ непаран број, тј. $a^2 - 3b = 1$. Дакле, за неко $k \in \mathbb{N}$ важи

$$2^k = a^2b + b^2 - 1 = a^2\frac{a^2 - 1}{3} + \left(\frac{a^2 - 1}{3}\right)^2 - 1 = \frac{4a^4 - 5a^2 - 8}{9}.$$

Одавде је број $5a^2$ паран, па следи $a = 2t$ и $16t^4 - 5t^2 - 2 = 9 \cdot 2^{k-2}$ (специјално, $k \geqslant 2$). За $k = 2$ добијамо $t^2(16t^2 - 5) = 11$, па мора бити $t = 1$ (у супротном је лева страна већа од 11), а одатле $a = 2$ и $b = 1$, што јесте решење. Претпоставимо надаље $k \geqslant 3$. Тада је $5t^2$ дељиво са 2, а онда и са 4, те имамо $9 \cdot 2^{k-2} = 16t^4 - 5t^2 - 2 \equiv 2 \pmod 4$, што имплицира $k = 3$, тј. важи $20 = 16t^4 - 5t^2 = t^2(16t^2 - 5)$. Међутим, $t \geqslant 2$ (јер је t паран), па је десна страна претходне једнакости не мања од 244; стога у овом случају нема решења.

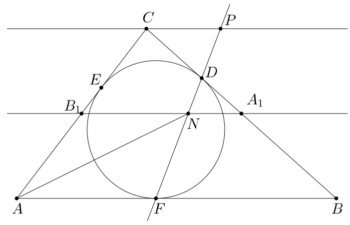
Дакле, једино решење је $(a, b) = (2, 1)$.

3. Из неједнакости између хармонијске и квадратне средине имамо

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{\frac{1}{\sqrt{a^2+ab+bc}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+bc+ca}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+ca+ab}}} \\
&\qquad \leqslant \sqrt{\frac{(a^2 + ab + bc) + (b^2 + bc + ca) + (c^2 + ca + ab)}{3}} \\
&\qquad = \sqrt{\frac{(a + b + c)^2}{3}} = \sqrt{\frac{3^2}{3}} = \sqrt{3},
\end{aligned}$$

одакле непосредно следи постављена неједнакост.

4. Нека су A_1, B_1 и C_1 средишта страница BC, CA и AB, и нека их уписана кружница додирује у тачкама D, E и F, редом. Означимо са N пресек правих A_1B_1 и DF, а са P пресек праве DF и праве кроз C паралелне са AB. Из Талесове теореме имамо $\frac{PC}{CD} = \frac{FB}{BD}$, па због $FB \cong BD$ имамо $PC \cong CD \cong CE$. Четвороугао $PCAF$ је трапез а NB_1 је његова средња линија, па важи



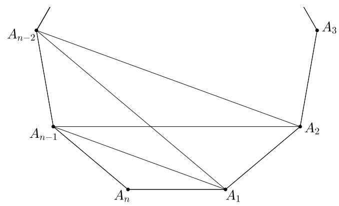
Др 2017 1А 4

$$NB_1 = \frac{AF + CP}{2} = \frac{AE + CE}{2} = \frac{AC}{2} = AB_1.$$

Другим речима, $\triangle ANB_1$ је једнакокрак, па одатле имамо $\measuredangle B_1AN \cong B_1NA \cong NAB$, што значи да је права AN симетрала $\measuredangle A$, чиме је доказ завршен.

Други разред – А категорија

1. Одговор је 5. Најпре приметимо да правилан петоугао јесте пример таквог многоугла. Нека је сада дат конвексан n-тоугао $A_1A_2 \dots A_n$ за $n \geqslant 6$. Четвороугао $A_1A_2A_{n-2}A_{n-1}$ је такође конвексан; из неједнакости троугла имамо $A_{n-1}A_2 + A_1A_{n-2} > A_{n-1}A_1 + A_{n-2}A_2$, па у посматраном n-тоуглу не могу све дијагонале $A_{n-1}A_2$, A_1A_{n-2}, $A_{n-1}A_1$ и $A_{n-2}A_2$ бити једнаке дужине.



Др 2017 2А 1

2. Из прве једначине имамо $x+y = 3-\cos z \geqslant 2$. Пошто важи $0 \leqslant \{z\} < 1 < \frac{\pi}{2}$, закључујемо $\sin\{z\} \geqslant 0$, па из друге једначине следи $2x - y = 1 - \sin\{z\} \leqslant 1$. Из треће једначине имамо $x - 3y = -2 + \operatorname{arctg} z^2 \geqslant -2 + \operatorname{arctg} 0 = -2$ (јер је arctg растућа функција и $z^2 \geqslant 0$). Множењем неједнакости $x + y \geqslant 2$ са 3 и сабирањем са $x - 3y \geqslant -2$ добијамо $4x \geqslant 4$, тј. $x \geqslant 1$, а множењем $2x - y \leqslant 1$ са -3 и сабирањем са $x - 3y \geqslant -2$ добијамо $-5x \geqslant -5$, тј. $x \leqslant 1$, па мора бити $x = 1$. Сада се добијене неједнакости своде на $y \geqslant 1$ и $y \leqslant 1$, па следи $y = 1$. Коначно, из последње једнакости из поставке добијамо $\operatorname{arctg} z^2 = 0$, тј. $z = 0$, па је једино решење постављеног система $(x, y, z) = (1, 1, 0)$.

3. Једини такав број је $n = 1$.

Докажимо индукцијом по $a \in \mathbb{N}_0$ следеће тврђење: ако број $n = \overline{t_kt_{k-1} \dots t_1t_0}$ испуњава постављене услове, за $k \geqslant a$, тада важи $t_0 = 1$ и $t_1 = t_2 = \dots = t_a = 0$. Ово тврђење директно решава проблем, будући да за $k = a \geqslant 1$ имамо контрадикцију.

Узмимо најпре $a = 0$ и $n = \overline{t_kt_{k-1} \dots t_1t_0}$. Јасно, важи $t_0 \neq 0, 2, 8$ (први случај отпада јер би тада важило и $t_k = 0$, а преостала два јер би се тада n^2 завршавало цифром 4). Претпоставимо $t_0 = 5$. Тада важи $t_k = 2$, па имамо $2 \cdot 10^k < n < 3 \cdot 10^k$. Одатле n^2 почиње неком од цифара $4, 5, \dots, 8$ — али то је немогуће, пошто се n^2 завршава цифром 5, па би морало да почиње цифром 2. Овим је база индукције доказана.

Претпоставимо сада да тврђење важи за $a-1$, и докажимо га за a. Нека $n = \overline{t_k t_{k-1} \ldots t_1 t_0}$ испуњава постављене услове, и важи $k \geqslant a$. Према индуктивној хипотези, имамо $t_0 = 1$ и $t_1 = t_2 = \cdots = t_{a-1} = 0$. Дакле, важи $n = 10^{a+1}x + 10^a t_a + 1$. За $t_a = 2$ важило би $n^2 \equiv 4 \cdot 10^a + 1 \pmod{10^{a+1}}$, тј. n^2 би имало цифру 4, контрадикција. Слично, за $t_a = 8$ важило би $n^2 \equiv 6 \cdot 10^a + 1 \pmod{10^{a+1}}$, опет контрадикција. Претпоставимо сада $t_a = 1$. Тада имамо $n^2 = \ldots 2\underbrace{00\ldots00}_{a-1}1$, па следи $n^2 = 1\underbrace{00\ldots00}_{a-1}5\ldots$. С друге стране, имамо $n = 1\underbrace{00\ldots00}_{a-1}1\ldots$, тј. $10^k + 10^{k-a} < n < 10^k + 2 \cdot 10^{k-a}$, а одатле

$$10^{2k} + 2 \cdot 10^{2k-a} + 10^{2k-2a} < n < 10^{2k} + 4 \cdot 10^{2k-a} + 4 \cdot 10^{2k-2a},$$

контрадикција. Сличним резоновањем, за $t_a = 5$ добијамо $n^2 = 1\underbrace{00\ldots00}_{a}\ldots$ али

$$10^{2k} + 4 \cdot 10^{2k-a} + 4 \cdot 10^{2k-2a} < n^2 < 10^{2k} + 6 \cdot 10^{2k-a} + 9 \cdot 10^{2k-2a},$$

и опет контрадикција. Као једина могућност остаје $t_a = 0$, чиме је доказ завршен.

4. Претпоставимо да постоји такав пут p, и нека он повезује градове A и B. Без умањења општости, нека је A град канцелара Ота. Означимо са $\mathscr{G}$ скуп градова до којих се може доћи од града A након рушења пута p. Приметимо да град B није у скупу $\mathscr{G}$, јер уколико би се од A могло доћи до B након рушења пута p, тада би се и даље могло од сваког града доћи до сваког другог (наиме, уколико је нека рута од једног до другог града пре рушења водила преко пута p, сада пут p на тој рути можемо заменити рутом од A и B за коју претпостављамо да и даље постоји), што је супротно претпоставци. Даље, означимо са $\mathscr{V}_1$ оне градове из скупа $\mathscr{G}$ који припадају канцелару Оту, а са $\mathscr{V}_2$ оне градове из скупа $\mathscr{G}$ који припадају краљу Фрањи. За град C, са $d(C)$ означићемо број путева који воде из града C (не рачунајући пут p). Приметимо да важи једнакост $\sum_{C\in\mathscr{V}_1} d(C) = \sum_{C\in\mathscr{V}_2} d(C)$: заиста, пошто сваки пут повезује један Отов с једним Фрањиним градом, на обе стране имамо управо укупан број путева између градова у скупу $\mathscr{G}$. Међутим, сви сабирци на десној страни једнакости износе управо k, док на левој страни једнакости сви сабирци сем једног износе k, а тај један износи $k-1$ (имамо $d(A) = k-1$, због уништеног пута p). Дакле, десна страна је дељива са k а лева није, контрадикција. Тиме смо показали да Барон Минхаузен лаже.

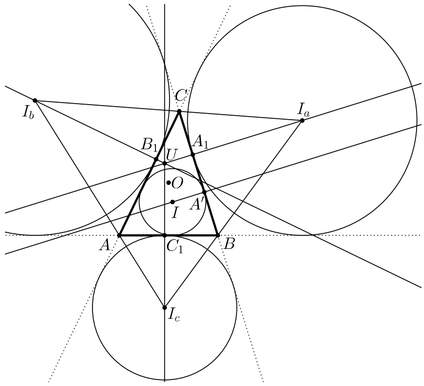
Трећи разред – А категорија

1. *Прво решење.* Тачке I_b, A и I_c су колинеарне будући да је права I_bI_c симетрала пара унакрсних углова, и слично за преостале две посматране симетрале. Важи $\measuredangle AI_cC_1 = 90^\circ - \frac{180^\circ-\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$ (где је α угао код темена A). Уз аналоган рачун још углова, имајући на уму примену синусне Чевине теореме на $\triangle I_aI_bI_c$, добијамо

$$\frac{\sin\measuredangle AI_cC_1}{\sin\measuredangle BI_cC_1} \cdot \frac{\sin\measuredangle BI_aA_1}{\sin\measuredangle CI_aA_1} \cdot \frac{\sin\measuredangle CI_bB_1}{\sin\measuredangle AI_bB_1} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 1,$$

те се праве I_aA_1, I_bB_1 и I_cC_1 заиста секу у једној тачки.

Друго решење. Означимо са U тачку централносиметричну тачки I у односу на O, где су I и O центар уписане и описане кружнице за $\triangle ABC$, редом. Тврдимо да се посматране три праве секу управо у тачки U. Нека је A' тачка додира уписане кружнице и странице BC. Из $BA' \cong A_1C$ (што је позната чињеница) следи да су праве IA' и I_aA_1 симетричне у односу на симетралу дужи BC (на којој лежи и тачка O), па одатле $U \in I_aA_1$. Аналогно, $U \in I_bB_1$ и $U \in I_cC_1$, чиме је тврђење доказано.



Др 2017 3А 1

Напомена. Тачка U је центар кружнице описане око $\triangle I_aI_bI_c$. Заиста, из $\measuredangle AI_cC_1 = \measuredangle AI_bB_1 = \frac{\alpha}{2}$ следи $I_cU \cong I_bU$; аналогно, $I_cU \cong I_aU$.

2. а) Претпоставимо прво да је n облика p^α за неки прост број p. Докажимо индукцијом по α да тада важи $f(n) = \alpha p^{\alpha-1}$. База очигледно важи, а у индукцијском кораку имамо

$$f(p^\alpha) = f(p \cdot p^{\alpha-1}) = f(p)p^{\alpha-1} + pf(p^{\alpha-1}) = p^{\alpha-1} + p(\alpha-1)p^{\alpha-2} = \alpha p^{\alpha-1}.$$

Нека је сада проста факторизација броја n дата са $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$. Докажимо индукцијом по k да важи $f(n) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \frac{n}{p_i}$ (уз додефинисан случај $f(0) = 0$). Случај $k = 1$ је доказан малопре. Претпоставимо сада да тврђење важи за $k-1$ и докажимо га за k:

$$\begin{aligned} f\left(\prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}\right) &= f\left(p_k^{\alpha_k}\prod_{i=1}^{k-1} p_i^{\alpha_i}\right) = \alpha_k p_k^{\alpha_k-1}\prod_{i=1}^{k-1} p_i^{\alpha_i} + p_k^{\alpha_k}\sum_{j=1}^{k-1}\alpha_j \frac{\prod_{i=1}^{k-1} p_i^{\alpha_i}}{p_j} \\ &= \sum_{j=1}^k \alpha_j \frac{\prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}}{p_j} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \frac{n}{p_i}, \end{aligned}$$

што је и требало доказати. Преостаје још проверити да ова функција заиста задовољава све услове задатка. Приметимо најпре да у простој факторизацији броја n можемо допустити и просте факторе с експонентом 0, без утицаја на коректност посматране формуле за $f(n)$. То оправдава да задате природне бројеве a и b запишемо у облику $a = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ и $b = \prod_{i=1}^k p_i^{\beta_i}$ (дакле, допуштамо да експоненти буду 0). Тада имамо

$$f(a)b + af(b) = b\sum_{i=1}^k \alpha_i \frac{a}{p_i} + a\sum_{i=1}^k \beta_i \frac{b}{p_i} = \sum_{i=1}^k (\alpha_i + \beta_i)\frac{ab}{p_i} = f(ab),$$

што смо и хтели показати.

b) Докажимо најпре да, уколико важи $f(m) = 1$, тада је m прост број; заиста, тада очигледно не може бити $m = 0$ нити $m = 1$, а ако би m био сложен број, тј. $m = ab$ за неке $a, b > 1$, тада имамо $f(m) = f(a)b + af(b) \geqslant b + a \geqslant 4 > 1$.

За $n = p^k M$, где је p прост број и $k \geqslant 2$, имамо $f(n) = kp^{k-1}M + p^k f(M) = p^{k-1}M'$ и $f(f(n)) = (k-1)p^{k-2}M' + p^{k-1}f(M') > 1$. Дакле, у простој факторизацији тражених бројева n сви прости бројеви јављају се с експонентом 1. Приметимо да производ 4 или више простих бројева износи бар $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$, па стога тражени бројеви могу бити само облика pqr или pq, где су p, q и r прости бројеви.

У случају $n = pqr$ имамо $f(n) = qr + pr + pq$, па важи $f(f(n)) = 1$ ако и само ако је $qr + pr + pq$ прост број. Директном провером свих бројева мањих од 100 који су производ три проста броја (број случајева се може додатно смањити примећујући да важи $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 > 100$, па један од та три проста броја мора бити 2) добијамо да се ово догађа за следећих пет вредности:

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5, \quad 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7, \quad 66 = 2 \cdot 3 \cdot 11, \quad 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7, \quad 78 = 2 \cdot 3 \cdot 13.$$

У случају $n = pq$ имамо $f(n) = q + p$, па важи $f(f(n)) = 1$ ако и само ако је $q + p$ прост број. Тада један од бројева p и q мора бити једнак 2, нпр. $p = 2$, и тада имамо $n = 2q$. Потребно је, дакле, наћи све просте бројеве q мање од 50 такве да је и $q + 2$ прост број, а директном провером налазимо следеће вредности: 3, 5, 11, 17, 29, 41, што даје још следећих шест вредности за n:

$$6 = 2 \cdot 3, \quad 10 = 2 \cdot 5, \quad 22 = 2 \cdot 11, \quad 34 = 2 \cdot 17, \quad 58 = 2 \cdot 29, \quad 82 = 2 \cdot 41.$$

Дакле, одговор је: $n \in \{6, 10, 22, 30, 34, 42, 58, 66, 70, 78, 82\}$.

3. Радимо индукцијом по $\deg P$. Тврђење важи за $\deg P = 0$. Претпоставимо да важи за све полиноме P са $\deg P < n$ и посматрајмо неки полином $P(x) = ax^n + \cdots$. Бар један моничан полином степена n може се представити у облику $Q(x^2) + R((x+1)^2)$: за $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) то је нпр. $T(x) = \frac{1}{2}(x^2)^k + \frac{1}{2}((x+1)^2)^k$, а за $n = 2k - 1$ нпр. $T(x) = \frac{1}{2k}((x+1)^2)^k - \frac{1}{2k}(x^2)^k$. По индуктивној претпоставци, полином $P(x) - aT(x)$, будући да је степена мањег од n, може се представити у облику $Q(x^2) + R((x+1)^2)$, одакле следи да то важи и за полином $P(x)$.

4. Означимо $n = 6k + 3$. Претпоставимо да су званице распоређене за столом тако да максималан могућ број жена седи ближе свом брату него свом мужу. Под растојањем између две особе подразумевамо минималан број столица које је потребно проћи да би се стигло од једне особе до друге (рачунајући и столицу на којој седи прва особа, али не и ону на којој седи друга особа). Нека је A збир растојања међу брачним паровима, а B збир растојања између браћа и сестара. По првом услову задатка имамо $A + n \leqslant B$. Даље, постоји $f(k)$ жена чија је удаљеност од свог мужа бар за 1 већа него њена удаљеност од свог брата, а за сваку од преосталих $n - f(k)$ жена њена удаљеност од свог брата је за не више од $n - 1$ већа него њена удаљеност од свог мужа. Одатле закључујемо $B + f(k) - (n - f(k))(n-1) \leqslant A$, па комбинујући ову неједнакост с претходном добијамо $n + f(k) \leqslant (n - f(k))(n-1)$, тј. $nf(k) \leqslant n^2 - 2n$, а одатле $f(k) \leqslant n - 2 = 6k + 1$.

Докажимо да није могуће постићи вредност $6k + 1$. Назовимо циклом низ особа где иза сваке мушке особе долази његова сестра, а иза сваке женске особе њен муж, све док се цикл не заврши код особе од које је почео. У сваком циклу мора да постоји бар једна жена ближа свом мужу него свом брату, јер би у супротном растојање за столом између претходне и следеће особе у циклу непрекидно расло, а што је немогуће будући да је цикл затворен. Дакле, постоје или 2 цикла или 1 цикл. Претпоставимо да постоје 2 цикла. Тада се у сваком од њих мора налазити тачно по једна жена ближа свом мужу него брату. Полазећи од такве жене и крећући се дуж цикла, пратећи растојања за столом између сваке две особе суседне у циклу, добијамо да та растојања морају износити бар, редом, $1, 2, 3, 4 \ldots$, а одатле следи да цикл може бити максималне дужине $6k + 3$ (јер је то максимално растојање особа за столом). Међутим, тада оба цикла морају бити управо те дужине (да бисмо обухватили свих $12k + 6$ особа), али ово је контрадикција јер циклови не могу бити непарне дужине. Претпоставимо сада да постоји само 1 цикл. Да би се достигле једнакости у неједнакостима из претходног пасуса, за сваку жену сем тачно две њена удаљеност од свог мужа мора бити тачно за 1 већа него њена удаљеност од свог брата, а те две жене морају бити тачно за $6k+2$ удаљеније од свог брата него од мужа. Лако се види да, у том случају, растојања за столом особа дуж цикла морају износити $1, 2, 3, \ldots, 6k+3, 1, 2, \ldots, 6k+3$. Међутим, приметимо да је растојање $6k+3$ које се појављује у средини цикла заправо растојање између жене и мужа, а тај муж је на удаљености 1 од своје сестре, што је у контрадикцији с условом задатка. Дакле, $f(k) \leqslant 6k$.

Коначно, даћемо конструкцију која показује $f(k) = 6k$. Дакле, постоје тачно три жене које су ближе свом мужу него брату. Одаберимо три столице за столом између којих има по $4k + 1$ столица, и нека на њима седе браћа те три жене, а оне седе дијаметрално супротно својој браћи. Затим остатак стола попуњавамо на следећи начин: полазимо од једне од те три жене, лево од ње поставимо њеног мужа, десно од њих двоје поставимо његову сестру, лево од њих троје поставимо њеног мужа, десно од њих четворо поставимо његову сестру итд. док не попунимо $4k+1$ столица; на последњој од њих седи супруга брата особе од које смо кренули. Преостале две трећине стола попунимо аналогно. Лако уочавамо да су на овај начин испуњени тражени услов, чиме је задатак решен.

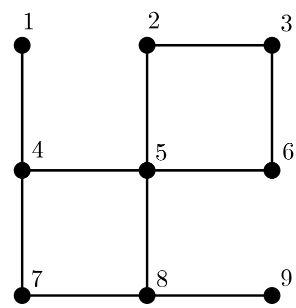
Четврти разред – А категорија

1. Пошто важи $h(f(1))+h(g(1)) = h(4)+h(2)$ и $h(f(-1))+h(g(-1)) = h(2)+h(4)$, следи $h(f(1)) + h(g(1)) = h(f(-1)) + h(g(-1))$. Међутим, према услову задатка би лева страна морала бити једнака $g(f(1)) = g(4) = 14$ а десна $g(f(-1)) = g(2) = 4$, контрадикција. Дакле, таква функција h не постоји.

2. Постоји јединствена таква шифра:

$$8 \to 2 \to 3 \to 6 \to 4 \to 1 \to 7 \to 9.$$

Њен траг је приказан на слици.



Др 2017 4А 1

Нумеришимо тачке бројевима од 1 до 9 слева надесно и одозго надоле. Посматрајмо оне две дужи које спајају тачке које имају јединственог суседа (из услова 3°) с њиховим суседима. Те две дужи очигледно морају бити осносиметричне, и не смеју имати заједничку тачку (јер у супротном путања не би могла да обухвата свих 9 тачака). Дакле, постоје свега три суштински различите могућности за те две дужи: 1-4 и 8-9 (уз осу симетрије 3-5-7), 1-4 и 3-6 (уз осу симетрије 2-5-8) или, последње, 2-4 и 6-8 (уз осу симетрије 3-5-7). Раздвајамо ова три случаја.

- 1-4 и 8-9: Претпоставимо прво да две тачке с јединственим суседом (што су овде или 1 и 9, или 4 и 8) представљају управо почетак и крај путање. Ако путања креће нпр. од тачке 1, тада она најпре иде до тачке 4 (а последњи део путање је померај од 8 до 9); сада, уколико је наредна дуж нека од 4-3, 4-5 или 4-7, тада, због симетричности, на трагу путање мора постојати и дуж 3-8, 5-8 односно 7-8. У првом и трећем случају она онда мора бити управо наредна дуж (јер се не можемо после вратити у тачку 3, односно 7), и потом се путања мора завршити померајем од 8 до 9, контрадикција (јер нису све тачке покривене). У другом случају постоји још и могућност да после 4-5 наставимо са дужи 5-6, а да у неком каснијем кораку од 2 дођемо до 8 (и потом до 9); приметимо, међутим, да то можемо извести на следећих пет начина: $6 \to 2$, $6 \to 3 \to 2$, $6 \to 7 \to 2$, $6 \to 3 \to 7 \to 2$ и $6 \to 7 \to 3 \to 2$, а у сваком од њих или путања не пролази кроз свих 9 тачака, или траг није осносиметричан. Уједно, овим смо размотрили и могућност да наредна дуж буде 4-6. Дакле, наредна дуж мора бити 4-2. Тада, уколико од тачке 2 даље идемо до тачке 6, потом морамо одатле отићи до 8 па завршити у 9, контрадикција, а уколико од тачке 2 идемо до 3, 5 или 7, тада опет добијамо контрадикцију истим аргументом као малопре.

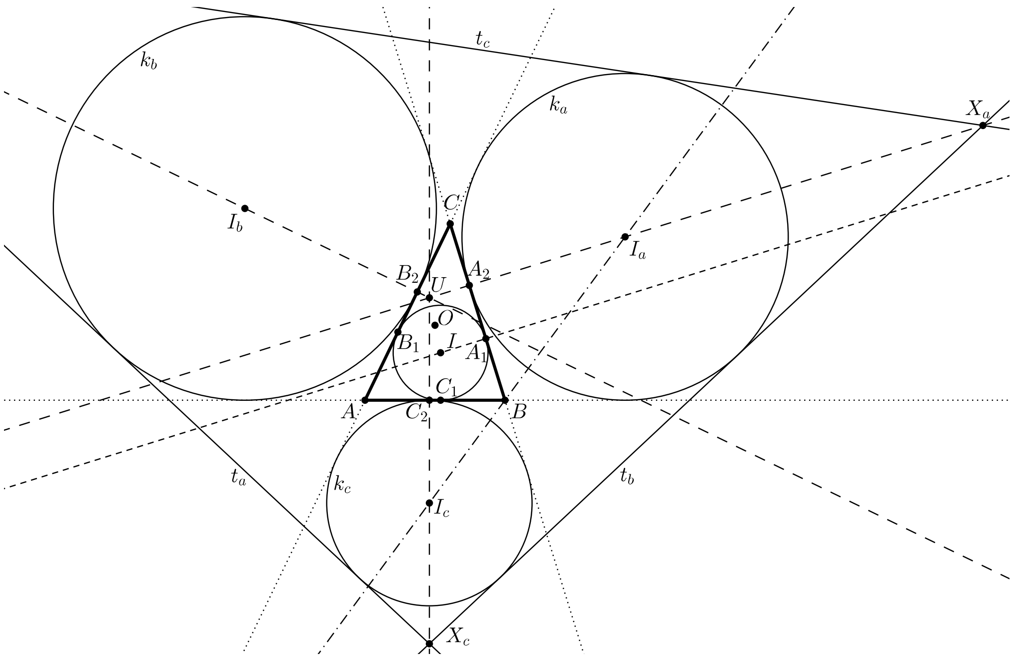
  Уколико путања креће од тачке 4, врло сличним резоном добијамо контрадикцију.

  Коначно, преостаје могућност да почетна тачка путање није тачка с јединственим суседом, тј. да на путањи постоји део, без умањења општости, $4 \to 1 \to 7$ (где тачка 1 има јединственог суседа на трагу путање). Тада, због симетричности, на путањи мора постојати и дуж 7-9, па је последњи део управо померај од 7 до 9. Према томе, путања не може почети од тачке 4, па тачка 4 има још једног суседа осим 1 и 3. Међутим тада и тачка 8 има још једног суседа (осим 7 и 9, за које знамо да су јој суседи због последњег потеза), па следи да путања мора почети баш из тачке 8. Ако је први корак $8 \to 3$, одмах добијамо контрадикцију због симетрије (путања би морала бити $8 \to 3 \to 4 \to 1 \to 7 \to 9$, што не обухвата све тачке). Ако је први корак $8 \to 6$, тада на путањи мора постојати и дуж 2-4, па уколико из тачке 6 одмах одемо у тачку 2, путања мора бити $8 \to 6 \to 2 \to 4 \to 1 \to 7 \to 9$, те неће обухватити тачке 3 и 5, а уколико из тачке 6 одемо у тачку 3, односно 5, тада следећи померај свакако мора бити до тачке 2 (јер и дуж 3-2, односно 5-2, мора бити на трагу путање, а она онда мора бити управо наредна дуж), па се путања опет завршава као малопре и не обухвата тачку 5, односно 3; контрадикција у сваком случају. Коначно, ако је први корак $8 \to 5$ (у шта убрајамо и $8 \to 2$), тада на трагу путање мора постојати и дуж 5-4, али она у овом случају не мора бити наредна дуж, будући да је њу могуће нацртати и касније као део дужи 6-4. Лако видимо да се ово заиста може постићи на следећи начин: $8 \to 2 \to 3 \to 6 \to 4 \to 1 \to 7 \to 9$.

- 1-4 и 3-6: На исти начин као малопре добијамо контрадикцију с претпоставком да две тачке с јединственим суседом представљају управо почетак и крај путање. Преостаје случај да на путањи постоји део $6 \to 3 \to 9$. Као малопре добијамо да путања тада мора полазити из тачке 4, а за следећу тачку избор су једино 2, 5 или 8, које све припадају оси симетрије, па се у свим случајевима одмах добија контрадикција на већ виђен начин.

- 2-4 и 6-8: На исти начин као малопре добијамо контрадикцију с претпоставком да две тачке с јединственим суседом представљају управо почетак и крај путање. У овом случају, за разлику од претходна два, алтернативна могућност и не постоји, па овом контрадикцијом завршавамо доказ.

3. Означимо са A_1, B_1 и C_1 тачке у којима уписана кружница додирује странице BC, CA и AB, респективно. Даље, означимо са I_a, I_b и I_c центре кружница k_a, k_b и k_c, а са A_1, B_1 и C_1 њихове додирне тачке са страницама BC, CA и AB, све респективно. Коначно, нека се тангенте t_a и t_b секу у тачки X_c, затим t_a и t_c у тачки X_b, а t_b и t_c у тачки X_a.



Др 2017 4А 3

Како су праве AC и t_b заједничке спољашње тангенте за k_a и k_c, оне морају бити симетричне у односу на праву I_aI_c. Одатле имамо следећи рачун с оријентисаним угловима:

$$\begin{aligned}\measuredangle(t_b, BC) &= \measuredangle(t_b, I_aI_c) + \measuredangle(I_aI_c, BC) = \measuredangle(I_aI_c, AC) + \measuredangle(I_aI_c, BC)\\ &= 2\measuredangle(I_aI_c, BC) + \measuredangle(BC, AC) = \measuredangle(AB, BC) + \measuredangle(BC, AC) = \measuredangle(AB, AC).\end{aligned}$$

Аналогно добијамо $\measuredangle(t_c, BC) = \measuredangle(AC, AB)$, тј. праве t_b и t_c граде једнаке али супротно оријентисане углове са правом BC. Следи да симетрала $\measuredangle t_bt_c$, а то је права X_aI_a, мора бити нормална на праву BC, те она пролази кроз тачку A_2. Аналогно, I_bB_2 и I_cC_2 су симетрале $\measuredangle t_at_c$ и $\measuredangle t_at_b$, редом. Према томе, центар уписане кружнице троугла одређеног правима t_a, t_b и t_c налази се у пресеку правих I_aA_2, I_bB_2 и I_cC_2.

Означимо са U тачку централносиметричну тачки I у односу на O. Тврдимо да је посматрани центар управо тачка U. Заиста, из $BA_1 \cong A_2C$ (што је позната чињеница) следи да су праве IA_1 и I_aA_2 симетричне у односу на симетралу дужи BC (на којој лежи и тачка O), па одатле $U \in I_aA_2$. Аналогно, $U \in I_bB_2$ и $U \in I_cC_2$, чиме је тврђење доказано.

4. Назваћемо скуп са узастопним троугаоним бројевима T, а скуп са Фибоначијевим бројевима F. Претпоставимо да $1 \in T$. Тада и $3 \in T$. Ако и $6 \in T$, онда следи $2 \in T$ (јер је онда и 2 делилац броја n, а њему узастопни Фибоначијеви бројеви, 1 и 3, нису у F), међутим како 2 није троугаони број, следи да $6 \notin T$, те добијамо $T = \{1, 3\}$. Сада, ако имамо два узастопна Фибоначијева броја F_k и F_{k+1} у F, тада или $3F_k$ или $3F_{k+1}$ такође мора припадати скупу F, јер је бар један од та два броја прави делилац броја n (највише један од F_k, F_{k+1} је дељив са 3, па ако нпр. $3 \nmid F_k$, тада $3F_k \mid n$, а не може бити $3F_k = n$ јер $F_{k+1} \mid n$ али $F_{k+1} \nmid 3F_k$). Међутим, за произвољан Фибоначијев број $F_l > 1$ број $3F_l$ не може бити Фибоначијев због: $F_{l+3} = 2F_{l+1} + F_l > 3F_l > 2F_l + F_{l-1} = F_{l+2}$. Следи $1 \notin T$.

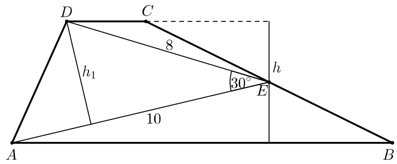
Дакле, $1 \in F$. Тада нужно и $2 \in F$. Претпоставимо прво $F = \{1, 2\}$. Нека је t најмањи број у T. Тада је t прост број, јер би у супротном и неки прави делилац броја t различит од 1 и 2 (такав сигурно постоји због $t \neq 4$, будући да 4 није троугаони број) био прави делилац броја n, па би био или у F или у T, а ни једно ни друго није могуће. Међутим, лако се види да је број 3 једини троугаони прост број. Дакле, тада $3 \in T$, а онда и $6 \in T$. Ако још и $10 \in T$, онда 5 нити је троугаони број нити може у F јер $3 \notin F$, те је то контрадикција, а ако би било само $T = \{3, 6\}$, следи да је 6 прави делилац броја n, па би n морало да буде дељиво бар с још једним простим бројем различитим од 2 (јер $4 \notin T, F$), али онда би постојао прави делилац броја n већи од 6, контрадикција.

Дакле, имамо још и $3 \in F$. Тада $6 \in T$ (јер $6 \mid n$ и $n > 6$, а 6 није Фибоначијев број), а онда и $10 \in T$, те $5 \mid n$, па и $15 \in T$ (прави делилац, а није Фибоначијев број). Уколико и $21 \in T$, тада би и 7 био делилац посматраног броја, али то није ни Фибоначијев ни троугаони број. Следи $T = \{6, 10, 15\}$, а одатле $F = \{1, 2, 3, 5\}$ (не можемо имати и $8 \in F$ јер 4 није ни Фибоначијев ни троугаони број) и напокон $n = 30$, што и јесте број који задовољава услове задатка, и то је онда једино решење задатка.

Први разред – Б категорија

1. Нека су a и b основице посматраног трапеза а h његова висина. Тада висине из темена E у $\triangle ABE$ и $\triangle DCE$ износе $\frac{h}{2}$, па имамо:

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2}h &= P(ABCD)\\ &= P(\triangle ABE) + P(\triangle CDE) + P(\triangle ADE)\\ &= \frac{ah}{4} + \frac{bh}{4} + P(\triangle ADE),\end{aligned}$$



Др 2017 1Б 1

одакле следи $P(\triangle ADE) = \frac{a+b}{4}h = \frac{P(ABCD)}{2}$.
Даље, ако је h_1 висина $\triangle ADE$ из темена D, тада имамо $h_1 = \frac{DE}{2} = 4$ (због $\measuredangle AED = 30°$), и онда $P(\triangle ADE) = \frac{AE \cdot h_1}{2} = \frac{10 \cdot 4}{2} = 20$. Коначно, $P(ABCD) = 2P(\triangle ADE) = 40$.

2. Одговор је *не*.

Претпоставимо супротно, тј. да је после n година плата радника повећана. Можемо претпоставити да је n паран број: заиста, ако је n непаран број, тада је плата после $n-1$ година била већа него плата после n година, па је и плата после $n-1$ година била већа од почетне плате.

Означимо $n = 2k$, а почетна плата нека је P. Ако је плата после n година једнака K, важи

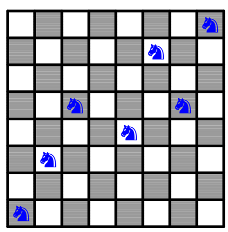
$$K = P\left(1 - \frac{10}{100}\right)\left(1 + \frac{11}{100}\right)\left(1 - \frac{12}{100}\right)\left(1 + \frac{13}{100}\right)\cdots\left(1 - \frac{10+2k-2}{100}\right)\left(1 + \frac{10+2k-1}{100}\right).$$

Посматрајмо два по два узастопна члана у овом производу, тј. производе $(1 - \frac{10+2l}{100})(1 + \frac{10+2l+1}{100})$ за $0 \leqslant l \leqslant k-1$. Важи

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{10+2l}{100}\right)\left(1 + \frac{10+2l+1}{100}\right) &= 1 + \frac{1}{100} - \frac{(10+2l)(10+2l+1)}{10000}\\ &\leqslant 1 + \frac{1}{100} - \frac{10 \cdot 11}{10000} = 1 + \frac{1}{100} - \frac{11}{1000} < 1,\end{aligned}$$

одакле следи $K < P$.

3. Може у 6 потеза: a1 → b3 → c5 → e4 → g5 → f7 → h8. Покажимо још да не може у мање од 6 потеза.



Др 2017 1Б 3

Прво приметимо у сваком потезу скакач прелази с белог на црно поље и обратно. Како су поља a1 и h8 исте боје, биће потребан паран број потеза. Даље, покажимо да скакач не може у 4 или мање потеза да дође од a1 до h8. При кретању од a1 до h8, скакач се мора померити укупно 7 корака надесно и 7 корака навише, што је укупно 14 корака. Како скакач у сваком потезу иде 2 корака на једну страну и један корак на другу, што је 3 корака, то би у 4 или мање потеза могао да се помери највише за $4 \cdot 3 = 12 < 14$ корака. Стога је минималан број потеза 6.

4. Последња (пета) цифра мора бити парна, што је 5 могућности (0, 2, 4, 6 или 8). За прву цифру имамо укупно 8 могућности (било која цифра различита од 0 и 9), а за другу и трећу по 9 могућности (било која цифра различита од 9). Преостаје одабрати четврту цифру. Приликом њеног одабира морамо пазити да збир цифара не буде дељив са 3 (како добијен број не би био дељив са 3). Збир до сада одабраних цифара даје остатак 0, 1 или 2 при дељењу са 3; у првом случају за четврту цифру можемо одабрати било коју осим 0, 3 и 6, што је 6 могућности; слично, и у другом и трећем случају имамо по 6 могућности (избегавамо цифре 2, 5 и 8, односно 1, 4 и 7). Дакле, без обзира на остатак који збир дотле одабраних цифара даје при дељењу са 3, за четврту цифру увек имамо избор између 6 могућности. Према томе, таквих бројева укупно има $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 5 = 19\,440$.

5. Пошто важи $400 \cdot 400 = 160000 > 99999$, закључујемо $П < 4$. Пошто се $T \cdot T$ завршава са T, следи $T \in \{0, 1, 5, 6\}$. Искључујемо могућност $T = 0$, јер би се тада $ПЕТ^2$ завршавало са 00, а ово није могуће због десне стране.

Приметимо да се број $ET \cdot ET$ завршава са ET, а пошто имамо $ET^2 = (10 \cdot E + T)^2 = 100 \cdot E^2 + 20 \cdot E \cdot T + T^2$, закључујемо да се $20 \cdot E \cdot T + T^2$ мора завршавати са ET. Сада раздвајамо случајеве по T.

- $T = 1$: Тада се $20 \cdot E + 1$ мора завршавати са $E1$, тј. $2 \cdot E$ се мора завршавати са E, а ово је могуће само за $E = 0$. Тестирањем могућности $П \in \{2, 3\}$ добијамо $201 \cdot 201 = 40401$, што није решење (због $Д \neq C$), као и $301 \cdot 301 = 90601$, што јесте једно решење.
- $T = 5$: Тада се $100 \cdot E + 25$ мора завршавати са $E5$, па одмах добијамо $E = 2$. Тестирањем могућности $П \in \{1, 3\}$ добијамо $125 \cdot 125 = 15625$ и $325 \cdot 325 = 105625$, а ништа од овог није решење.
- $T = 6$: Тада се $120 \cdot E + 36$ мора завршавати са $E6$, тј. $2 \cdot E + 3$ се мора завршавати са E, а ово је могуће само за $E = 7$. Тестирањем могућности $П \in \{1, 2, 3\}$ добијамо $176 \cdot 176 = 30976$, $276 \cdot 276 = 76176$ и $376 \cdot 376 = 141376$, а ништа од овог није решење.

Дакле, једино решење је $301 \cdot 301 = 90601$.

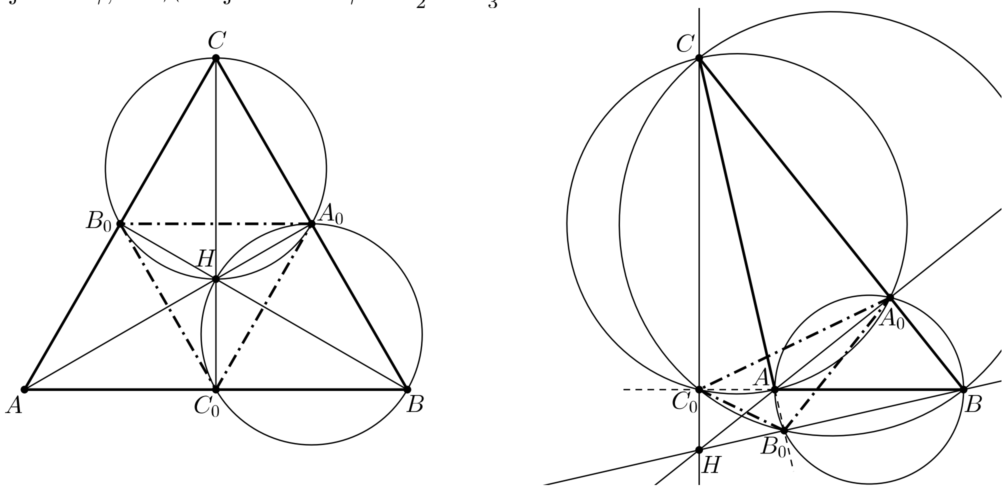
Други разред – Б категорија

1. Постављена једначина је еквивалентна са $\sqrt{x^2 + px + q} = 2017 - x$, одакле одмах имамо услов $2017 - x \geqslant 0$, тј. $x \leqslant 2017$. Сада можемо квадрирати ову једначину, чиме добијамо $x^2 + px + q = 2017^2 - 4034x + x^2$, тј. $(p + 4034)x = 2017^2 - q$. У случају $p + 4034 \neq 0$ ова једначина има јединствено решење (што нам не одговара), па остаје $p = -4034$. Тада за $q \neq 2017^2$ имамо контрадикцију, док за $q = 2017^2$ имамо тачан израз $0 = 0$, па су у том случају решења све вредности x које испуњавају постављено ограничење $x \leqslant 2017$, тј. цео интервал $(-\infty, 2017]$. Како у њему има бесконачно много тачака (и самим тим више од 2017), закључујемо да су једине вредности параметара p и q које испуњавају услов задатка $p = -4034$ и $q = 2017^2$.

2. а) Означимо углове посматраног троугла са α, β и γ, и претпоставимо, без умањења општости, $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$. Нека је H ортоцентар $\triangle ABC$. Кружница над пречником BH садржи тачке A_0 и C_0 (због правих углова код A_0 и C_0), и слично кружница над пречником CH садржи тачке A_0 и B_0, па из особина периферијских углова добијамо

$$\begin{aligned}\measuredangle B_0A_0C_0 &= \measuredangle B_0A_0H + \measuredangle HA_0C_0 = \measuredangle B_0CH + \measuredangle HBC_0 \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \pi - 2\alpha.\end{aligned}$$

Аналогно, преостала два угла у $\triangle A_0B_0C_0$ износе $\pi - 2\beta$ и $\pi - 2\gamma$, и за та три угла важи поредак $\pi - 2\gamma \geqslant \pi - 2\beta \geqslant \pi - 2\alpha$. Сада из сличности дате у поставци следи $\alpha = \pi - 2\gamma$, $\beta = \pi - 2\beta$ и $\gamma = \pi - 2\alpha$, па из друге једначине одмах добијамо $\beta = \frac{\pi}{3}$, а одузимањем треће од прве имамо $\alpha - \gamma = 2(\alpha - \gamma)$, тј. $\alpha = \gamma$, па добијамо $\alpha = \gamma = \frac{\pi - \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$.



Др 2017 2Б 2

b) Нека сада важи $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$, али $\alpha > \frac{\pi}{2}$. Слично као у делу под а), израчунавамо

$$\begin{aligned}\measuredangle B_0A_0C_0 &= \measuredangle B_0A_0A + \measuredangle AA_0C_0 = \measuredangle B_0BA + \measuredangle ACC_0 \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - (\pi - \alpha)\right) + \left(\frac{\pi}{2} - (\pi - \alpha)\right) = 2\alpha - \pi,\end{aligned}$$

$\measuredangle A_0B_0C_0 = \measuredangle A_0B_0A + \measuredangle AB_0C_0 = \measuredangle A_0BA + \measuredangle CBC_0 = 2\beta$ и, аналогно, $\measuredangle A_0C_0B_0 = 2\gamma$. Пошто важи $2\beta \geqslant 2\gamma$, највећи угао у $\triangle A_0B_0C_0$ је или $2\alpha - \pi$, или 2β. У првом случају из задате сличности имамо $\alpha = 2\alpha - \pi$, тј. $\alpha = \pi$, што је немогуће. Остаје, дакле, $\alpha = 2\beta$. Пошто је немогуће $\gamma = 2\gamma$, преостаје $\gamma = 2\alpha - \pi$ и $\beta = 2\gamma$. Дакле, имамо $\gamma = 2\alpha - \pi = 4\beta - \pi = 8\gamma - \pi$, тј. $\gamma = \frac{\pi}{7}$, и онда $\beta = \frac{2\pi}{7}$ и $\alpha = \frac{4\pi}{7}$.

3. Сви дати разломци су облика $\frac{k}{k+n+2}$. Они се не могу скратити ако и само ако важи НЗД$(k, k+n+2) = 1$, а што је испуњено ако и само ако важи НЗД$(k, n+2) = 1$. Дакле, тражимо најмањи природан број n такав да је $n+2$

узајамно прост са 7, 8, 9, ..., 2015. За $1 \leqslant n \leqslant 4$ лако налазимо број из посматраног низа с којим $n+2$ није узајамно прост, за $5 \leqslant n \leqslant 2013$ имамо да је $n+2$ управо једнако неком члану посматраног низа (па тиме није узајамно прост с њим), а за $n = 2014$ имамо $n+2 = 2016$, што је паран број, па очито није узајамно прост нпр. са 8. Међутим, за $n = 2015$ имамо $n+2 = 2017$, а како је 2017 прост број, он јесте узајамно прост са свим члановима посматраног низа, па је решење задатка $n = 2015$.

4. Да би решења била реална и различита, дискриминанта посматране једначине мора бити позитивна, па имамо $0 < (a+2)^2 - 4a(a+1) = 4 - 3a^2$, одакле добијамо $|a| < \frac{2}{\sqrt{3}}$. Решења посматране једначине су

$$x_{1/2} = \frac{a + 2 \pm \sqrt{4 - 3a^2}}{2a}.$$

Претпоставимо прво да је a позитивно. Тада имамо $\frac{a+2+\sqrt{4-3a^2}}{2a} > \frac{a+2-\sqrt{4-3a^2}}{2a}$, па треба још испунити услов $\frac{a+2-\sqrt{4-3a^2}}{2a} > 1$. Након множења ове неједнакости са $2a$ (што не мења знак) она се може трансформисати у $2 - a > \sqrt{4 - 3a^2}$. Одатле одмах имамо $a < 2$ (што је свакако испуњено с обзиром на $|a| < \frac{2}{\sqrt{3}}$), а после квадрирања остаје $4 - 4a + a^2 > 4 - 3a^2$, тј. $4a^2 > 4a$, што се своди на $a > 1$. Претпоставимо сада да је a негативно. Тада имамо $\frac{a+2-\sqrt{4-3a^2}}{2a} > \frac{a+2+\sqrt{4-3a^2}}{2a}$, па треба још испунити услов $\frac{a+2+\sqrt{4-3a^2}}{2a} > 1$. Множећи ову неједнакост са $2a$ (што сада мења знак неједнакости) добијамо $2 + \sqrt{4 - 3a^2} < a$, али ово је контрадикција јер је лева страна позитивна а десна негативна, па је овај случај немогућ.

Дакле, узимајући све у обзир, решење задатка је: $a \in (1, \frac{2}{\sqrt{3}})$.

5. Није могуће. Претпоставимо супротно: нека је могуће саставити такав правоугаоник. Како се једна посматрана фигура састоји од 6 квадратића, што је паран број, и површина посматраног правоугаоника биће парна.

Изделимо посматрани правоугаоник на јединична поља и обојимо их црном и белом бојом наизменично (као шаховску таблу). Пошто је површина правоугаоника парна, постоји једнак број црних и белих поља. Приметимо да свака копија посматране фигуре покрива 2 црна и 4 бела поља, или обратно. Нека је x број копија које покривају 2 црна и 4 бела поља, а y број преосталих копија. Тада је укупан број црних поља једнак $2x + 4y$, а белих $2y + 4x$, па имамо $2x + 4y = 2y + 4x$, тј. $x = y$; међутим, ово је немогуће јер укупно имамо непаран број копија дате фигуре, чиме је доказ завршен.

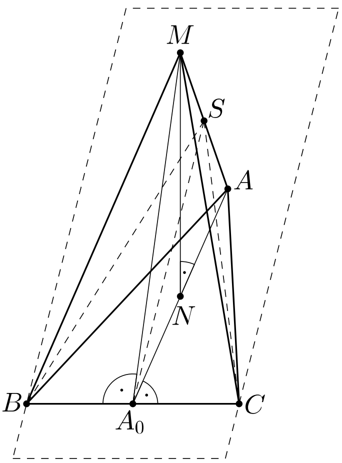
Трећи разред – Б категорија

1. Уврштавањем идентитета $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ и $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ у дату једначину добијамо

$$\cos^2 x + (2\cos^2 x - 1)^2 + (4\cos^3 x - 3\cos x)^2 = 1,$$

што након сређивања даје $16\cos^6 x - 20\cos^4 x + 6\cos^2 x = 0$. Уведимо смену $y = \cos^2 x$, након чега се претходна једначина своди на $16y^3 - 20y^2 + 6y = 0$, тј. $y(8y^2 - 10y + 3) = 0$, чија решења су $y_1 = 0$ и $y_{2/3} = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 8 \cdot 3}}{16} = \frac{10 \pm \sqrt{4}}{16}$, тј. $y_2 = \frac{3}{4}$ и $y_3 = \frac{1}{2}$. Враћање смене даје $\cos x \in \{0, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{1}{2}\}$, што у првом случају води до решења $x \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$, у другом $x \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$, а у трећем $x \in \{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\}$. Дакле, постављена једначина има укупно 10 решења на интервалу$[0, 2\pi]$.

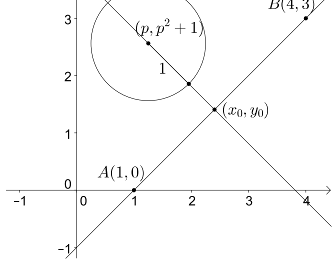
2. Означимо са N подножје нормале из M на раван ABC, које се по услову задатка налази на средини дужи AA_0. Из теореме о три нормале имамо $MA_0 \perp BC$, па је цела раван MA_0A нормална на BC, а одатле важи и $SA_0 \perp BC$ па онда управо $\measuredangle SA_0A = 30°$. Даље, пошто A_0S лежи у равни повученој кроз BC дефинисаној у поставци, а она је нормална на MA, следи $A_0S \perp MA$. Пошто су $\triangle SAA_0$ и $\triangle NAM$ правоугли и имају заједнички угао у темену A, они су слични, па важи $\measuredangle NMA = \measuredangle SA_0A = 30°$. Дакле, пошто је $\triangle NMA$ половина једнакостраничног, следи да је $\triangle A_0MA$ једнакостраничан (будући да је N средина странице A_0A), а тада је његова висина A_0S уједно и његова тежишна дуж, тј. $SA \cong SM$. Пирамиде $SABC$ и $MSBC$ имају заједничку пљосан SBC, а SA и SM су њихове висине на ту пљосан, па пошто су оне подударне, запремине ове две пирамиде су једнаке. Према томе, запремина пирамиде $MSBC$ износи такође 2017.



Др 2017 ЗБ 2

3. Могуће је. Потражимо захтевано представљање у облику нпр. $2017 = 6x + 10y + 15z$ (тада за ма које x, y и z прва два сабирка имају заједнички делилац 2, први и трећи заједнички делилац 3, а други и трећи заједнички делилац 5, па никоја два нису узајамно проста). Довољно је наћи једно решење ове једначине, што се може учинити на много начина: на пример, испробавањем малих вредности за x и y док не наиђемо на случај када је израз $2017 - 6x - 10y$ дељив са 15 (и тада за z можемо узети количник та два броја) брзо добијамо да се то дешава (једна могућност) за $x = 2$, $y = 1$, па израчунавамо $z = \frac{2017 - 6 \cdot 2 - 10 \cdot 1}{15} = \frac{1995}{15} = 133$. Дакле, имамо представљање $2017 = 12 + 10 + 1995$.

4. Једначина праве која пролази кроз тачке A и B је $y = x - 1$. Кружница из поставке има центар у тачки $(p, p^2 + 1)$ и полупречник 1. Докажимо да ова кружница не сече праву AB. У ту сврху, одредићемо најпре нормалу кроз тачку $(p, p^2 + 1)$ на праву AB. Њен коефицијент правца је $-\frac{1}{1} = -1$, па пошто је њена једначина облика $y = -x + n$, вредност n налазимо из услова да повучена нормала пролази кроз тачку $(p, p^2 + 1)$: имамо $p^2 + 1 = -p + n$, па једначина посматране нормале гласи $y = -x + p^2 + p + 1$. Пресек ове нормале с правом



Др 2017 ЗБ 4

AB (означимо га са (x_0, y_0)) налазимо заменом $y = x - 1$ у претходну једначину: она тиме постаје $x - 1 = -x + p^2 + p + 1$, одакле добијамо $x_0 = \frac{p^2+p+2}{2}$, а онда и $y_0 = x_0 - 1 = \frac{p^2+p}{2}$. Ова тачка с праве AB је, дакле, најближа тачки $(p, p^2 + 1)$, па да бисмо доказали да се посматране права и кружница не секу, довољно је утврдити да је удаљеност центра кружнице од ове тачке већа од полупречника. Рачунамо квадрат те удаљености:

$$(x_0 - p)^2 + \left(y_0 - (p^2+1)\right)^2 = \left(\frac{p^2 - p + 2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-p^2 + p - 2}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{p^2 - p + 2}{2}\right)^2$$

$$= \frac{(p^2 - p + 2)^2}{2} = \frac{((p - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4})^2}{2} \geqslant \frac{(\frac{7}{4})^2}{2} = \frac{49}{32} > 1,$$

што је и требало доказати.

Дакле, будући да се права AB и кружница не секу, тачка с праве AB најближа кружници је управо подножје нормале из центра кружнице на праву AB, а то је тачка (x_0, y_0). Да би се она налазила између тачака A и B, мора важити $1 < x_0 < 4$, тј. $1 < \frac{p^2+p+2}{2} < 4$. Лева неједнакост се своди на $0 < p^2+p = p(p+1)$, што је испуњено за $p < -1$ или $p > 0$; десна неједнакост се своди на $p^2+p-6 < 0$, тј. $(p+3)(p-2) < 0$, што је испуњено за $-3 < p < 2$. Комбиновањем добијених ограничења закључујемо да је решење задатка: $p \in (-3, -1) \cup (0, 2)$.

5. Посматрајмо n објеката (нпр. куглица) поређаних у врсту. Сваком представљању из поставке одговара постављање преграда између неких куглица на такав начин да дужина i-тог по реду блока узастопних куглица између којих нема преграда представља управо i-ти сабирак у посматраном збиру. (На пример, за $n = 11$, представљању $11 = 1 + 5 + 3 + 2$ одговара следећа конфигурација куглица и преграда: $\bullet \mid \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \mid \bullet\bullet\bullet \mid \bullet\bullet$.) Очигледно је овакво придруживање бијекција, па је довољно избројати на колико начина можемо поставити преграде између куглица. Имамо $n - 1$ места на којима можемо постављати преграде (између сваке две узастопне куглице), и за свако од њих бирамо хоћемо ли тамо поставити преграду или нећемо; од тако добијеног броја начина на крају одузимамо 1, пошто не урачунавамо могућност да не поставимо ниједну преграду (јер морамо имати бар два сабирка, по услову задатка). Дакле, одговор је $2^{n-1} - 1$.

Четврти разред – Б категорија

1. Нека заједничка тангента додирује прву параболу у тачки чија је x-координата x_1, а другу параболу у тачки чија је x-координата x_2. Извод једначине прве параболе у тачки x_1 износи $2x_1 + 3$, што је коефицијент правца тангенте у x_1, а слично, посматрањем друге параболе, добијамо да је коефицијент правца тангенте једнак $2x_2 + 5$. Ако посматрана заједничка тангента има једначину $y = kx + n$, тада из претходног имамо $2x_1 + 3 = 2x_2 + 5 = k$, а одатле $x_1 = x_2 + 1$. Даље, пошто се тачке додира налазе и на тангенти и на првој, односно другој параболи, посматрањем y-координата добијамо $(2x_1 + 3)x_1 + n = x_1^2 + 3x_1 + 6$ и $(2x_2 + 5)x_2 + n = x_2^2 + 5x_2 + 3$, одакле следи

$n = 6 - x_1^2 = 3 - x_2^2$, тј. $x_1^2 - x_2^2 = 3$. Заменом $x_1 = x_2 + 1$ у ову једнакост добијамо $3 = (x_2+1)^2 - x_2^2 = 2x_2 + 1$, а одатле следи $x_2 = 1$, и онда $x_1 = x_2 + 1 = 2$. Даље израчунавамо $k = 2x_1 + 3 = 7$ и $n = 6 - x_1^2 = 2$, па једначина заједничке тангенте гласи $y = 7x + 2$, а она прву параболу додирује у тачки $(x_1, 7x_1 + 2) = (2, 16)$, а другу у тачки $(x_2, 7x_2 + 2) = (1, 9)$.

2. Уколико је n паран број, тада је број $n^2 + 2^n$ паран и већи од 2, па не може бити прост. Дакле, n мора бити непаран број. Ако је n облика $6k + 1$, имамо

$$n^2 + 2^n = (6k+1)^2 + (2^6)^k \cdot 2 = (6k+1)^2 + 64^k \cdot 2 \equiv 1^2 + 1^k \cdot 2 = 3 \equiv 0 \pmod 3,$$

а ако је n облика $6k + 5$, имамо

$$n^2 + 2^n = (6k+5)^2 + (2^6)^k \cdot 2^5 \equiv 5^2 + 1^k \cdot 32 = 57 \equiv 0 \pmod 3,$$

те су оба ова случаја немогућа, јер је $n^2 + 2^n$ број већи од 3 и дељив са 3, па не може бити прост. Дакле, пошто је n непаран број а не даје остатке нити 1 нити 5 при дељењу са 6, преостаје једино да n даје остатак 3 при дељењу са 6, а то управо значи да је n дељив са 3 али није дељив са 6.

3. a) Није могуће. Без умањења општости, нека су у првој врсти уписани бројеви 1, 2, 3, 4 тим редом. У првој колони на другом месту не сме бити број 2 јер бисмо имали дијагоналу дужине два на чија је оба поља уписан број 2. Из сличног разлога на трећем месту не сме бити број 3, и на четвртом месту не сме бити број 4. Одатле добијамо да су једина два могућа распореда у првој колони 1, 3, 4, 2 или 1, 4, 2, 3. Међутим, у оба та случаја се испоставља да не можемо уписати ниједан број на поље у пресеку друге врсте и друге колоне, јер који год број тамо да упишемо, имаћемо врсту, колону или дијагоналу која садржи то поље а у којој се неки број појављује два пута.

1	2	3	4
3	?		
4			
2			

1	2	3	4
4	?		
2			
3			

b) Могуће је. Ниже приказујемо један пример такве таблице.

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	1	2	3	4
2	3	4	5	1
4	5	1	2	3

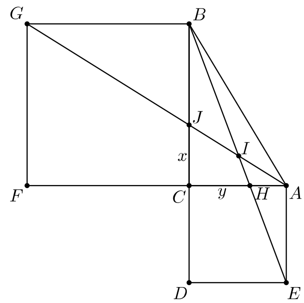
Напомена. Заинтересованим ученицима препоручујемо да погледају и 1. задатак за 1. разред А категорије.

4. Посматрајмо низ који је задат условима $a_1 = \sqrt{2017}$ и $a_{n+1} = \sqrt{2017 + a_n}$. Тражена вредност у нашем задатку представља $\lfloor a_{2017} \rfloor$. Како важи $44^2 = 1936 < 2017 < 2025 = 45^2$, имамо $44 < a_1 < 45$, а одатле следи $\lfloor a_1 \rfloor = 44$.

Сада слично, како важи $45^2 = 2025 < 2061 < 2017 + a_1 < 2062 < 46^2 = 2116$ и $a_2 = \sqrt{2017 + a_1}$, имамо $45 < a_2 < 46$, а одатле следи $\lfloor a_2 \rfloor = 45$. Индукцијом ћемо показати да за све $n \geqslant 2$ важи $\lfloor a_n \rfloor = 45$. Базни случај смо управо проверили; даље, уколико претпоставимо $\lfloor a_n \rfloor = 45$, тада имамо $45 \leqslant a_n < 46$ и $45^2 = 2025 < 2062 \leqslant 2017 + a_n < 2063 < 46^2 = 2116$ и $a_{n+1} = \sqrt{2017 + a_n}$, те закључујемо $45 < a_{n+1} < 46$, одакле следи $\lfloor a_{n+1} \rfloor = 45$. Овим је доказ индукцијом завршен. Из доказаног тврђења одмах имамо $\lfloor a_{2017} \rfloor = 45$.

5. Обележимо $BC = a$, $AC = b$, $CJ = x$ и $HC = y$. Очигледно важи $\triangle AFG \sim \triangle ACJ$, па добијамо $\frac{a+b}{a} = \frac{b}{x}$, а одатле израчунавамо $x = \frac{ab}{a+b}$. Слично, $\triangle DBE \sim \triangle CBH$, па добијамо $\frac{a+b}{b} = \frac{a}{y}$, а одатле израчунавамо и $y = \frac{ab}{a+b}$. Приметимо сада:

$$
\begin{aligned}
\frac{ab}{2} &= P(\triangle ACB) \\
&= P(\triangle AIB) + P(\triangle ACJ) + P(\triangle BCH) - P(HCJI) \\
&= P(\triangle AIB) + \frac{b\frac{ab}{a+b}}{2} + \frac{\frac{ab}{a+b}a}{2} - P(HCJI) \\
&= P(\triangle AIB) + (b+a)\frac{\frac{ab}{a+b}}{2} - P(HCJI) \\
&= P(\triangle AIB) + \frac{ab}{2} - P(HCJI),
\end{aligned}
$$



Др 2017 4Б 5

а одавде следи $P(HCJI) = P(\triangle AIB) = 2017$.

Садржај