ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА СРЕДЊОШКОЛАЦА 2018/2019

Нови Сад, 2019

Организациони одбор 61. Државног такмичења из математике

1. Проф. др Милица Павков-Хрвојевић, декан Природно-математичког факултета
2. Проф. др Марко Недељков, директор Департмана за математику и информатику
3. Проф. др Данијела Рајтер-Ћирић, помоћник директора ДМИ
4. Друштво математичара Новог Сада
5. Др Војислав Андрић, председник ДМС
6. Др Бојан Башић, ПМФ, Нови Сад, председник Државне комисије

Редакција и обрада: др Бојан Башић

Запис о Новом Саду

Импозантан град културе и туризма на Дунаву, на обронцима Фрушке Горе, Нови Сад из године у годину све више цвета. Град који пружа руке свима који желе да уживају у разноликости, уметности и уљудности. Представља раскршће најважнијих европских путева, друмских и железничких, што значајно доприноси индустријском, културном и привредном развитку града. Данас је, после свих недаћа које је стоички поднео, савршен спој историје и будућности, традиционалног и савременог начина живота.

Многи млади људи га зову „студентски град“ јер је последњих деценија постао популаран избор за наставак школовања и живота после средње школе. Сигурно зато што пружа велике могућности како за избор факултета, тако и за остварење младих у погледу пословних прилика. Оно чиме град данас може да се похвали јесте огроман туристички потенцијал, универзитетско жариште са 10 факултета, многобројни приватни факултети и стручне школе, културне манифестације које привлаче људе са свих меридијана, бајковити паркови и купалишта.

Кренимо од историјског наслеђа и богатства који осликавају град у најбољем светлу, а то су Дунав и Петроварадинска тврђава. Управо заједно чине нераскидиву савршену целину. Петроварадинска тврђава, смештена на каменитом брду изнад Дунава, једна је од највећих и најочуванијих тврђава у Европи, грађена у барокном војном стилу. Испод ње се налазе војне просторије и дугачки ходници у чак 4 нивоа (око 16 км дужине), изграђена како би се војска заштитила од непријатеља и могла да живи у њима. Тврђава је позната по тзв. „пијаном сату“ чија мала казаљка показује минуте, а велика сате, како би лађари и издалека по лошем времену могли да виде колико је сати. Сат је поклон за град од царице Марије Терезије. Данас се на Тврђави одржавају многобројне манифестације као што су „EXIT“ музички фестивал, познат широм света.

Највиши органи Аутономне покрајине Војводина смештени су у згради Бановине коју популарно зову „Мермерна лепотица“ и „Лађа на Дунаву“ јер јој фасаду краси мермерни камен са острва Брач. То је једна од најмонументалнијих грађевина савременог доба, изграђена 1939. године.

Новосађани се посебно поносе језгром града који краси Трг слободе, настао у 18. веку. У средишту се налази споменик Светозару Милетићу, а на западној страни Градска кућа са упечатљивим јонским и коринтским стубовима, копија градске куће у Грацу. На супротној страни Градске куће налази се католичка Црква имена Марijиног, а ту је и Хотел „Војводина“, зграда прво наменски изграђена за хотел још 1854. године. Од Трга слободе, на ком се најчешће окупљају Новосађани, али и туристи, протеже се једна од најстаријих градских улица – Змај Јовина улица. Мештани су је називали „Магазински сокак“ због мноштва занатских и трговинских радњи. На крају улице налази се бронзани споменик Јовану Јовановићу Змају, дечјем песнику. Још једна од најстаријих улица у граду јесте Дунавска улица са добро познатим Дунавским парком. Ту се налазе Музеј Војводине и Историјски музеј. У Дунавском парку и данас живе познати српски песници. Новосађани су се потрудили да се не заборaве, изградивши споменике и бисте Ђури Јакшићу, Мирославу Антићу и Бранку Радичевићу.

Разлог због ког се каже да је Нови Сад прави европски културни центар јесте институција која је најстарија ове врсте у Србији, а то је Српско народно позориште, основано 1861. године. Такође је 1864. године из Пеште у Нови Сад премештено седиште Матице српске, једне од најзначајнијих националних културних установа. Тако је Нови Сад постао центар српске културе у 18. и 19. веку, због чега га често називају „Српска Атина“. И до данас је остао један од најзначајнијих центара културе не само Србије већ и Европе, о чему сведочи и то што је изабран за Омладинску престоницу Европе за 2019. годину и Европску престоницу културе за 2021. годину.

О Природно-математичком факултету

Ове године Природно-математички факултет слави пола века постојања. Током педесет година рада, један од најстаријих факултета Универзитета у Новом Саду је стекао углед једне од водећих високошколских установа на Универзитету у погледу остварених резултата у образовању и научно-истраживачком раду. То су уједно и његови основни задаци – развој науке, унапређивање стваралаштва, те константан рад на осигурању квалитета и стандарда образовног програма.

Природно-математички факултет је већ годинама, као кредибилан партнер, присутан у националним, а све више у међународним истраживачким и иновационим пројектима. О компетенцији истраживача са ПМФ-а сведочи и податак да се међу 30 најцитиранијих истраживача са територије Војводине налази чак 20 професора и сарадника са ПМФ-а. На ПМФ-у се зна да наука не сме бити затворена и ксенофобична и да без укључивања у међународне токове застарева и нестаје. Зато је један од основних приоритета Факултета привлачење екстерног финансирања кроз учествовање у међународним пројектима, јер у овој установи постоји свест да је то пут ка дугорочној одрживости и осигурању врхунских научних резултата. У последњих 5 година на ПМФ-у је реализовано преко 60 међународних пројеката, а тренутно се имплементира 16.

Мисија Факултета у домену образовања је да студентима омогући највише академске стандарде и обезбеди стицање научних знања и звања која су у складу са потребама савременог и глобалног тржишта рада. На ПМФ-у се настава спроводи кроз више од 50 акредитованих студијских програма. Сваки је усаглашен са реалним потребама за запослењем младих кадрова, па је последично и диплома ПМФ-а гарант будућег лакшег запошљавања у оквиру стечених компетенција. Треба истаћи важност овога не само за оквире наше државе. Рад на Природно-математичком факултету је хармонизован са светским и европским стандардима у науци и образовању и тиме се свршеним студентима овог факултета отварају врата у свет.

Исто тако, интернационализација и глобално повезивање нису важни само у домену научно-истраживачког рада. Један од императива образовног система 21. века је мобилност људи, добара и идеја. ПМФ је укључен у европске и светске програме академске мобилности и размене на свим нивоима. Стратешки подржавајући мобилност, Факултет подиже компетенције наставника и студената, који су конкурентни, мултикултурално освешћени и способнији за сналажење у све захтевнијој арени високошколског образовања у Европи и свету. Двадесет први век је ера знања, могућности и изазова, доступних свима онима који су спремни да их прихвате.

О Департману за математику и информатику

Департман за математику и информатику представља модерну високообразовну институцију која постоји и делује у оквиру Природно-математичког факултета, Универзитета у Новом Саду. Своје многобројне активности Департман реализује кроз наставни, образовни и стручни процес с једне стране, као и кроз разноврстан научно-истраживачки рад с друге стране.

Један од основних циљева департмана је унапређивање и промовисање математике и информатике као научних дисциплина. Кроз рад са студентима посебно се подстиче развијање иницијативе и способности за самостално решавање проблема, развијање способности логичког мишљења, али и примена стечених знања у моделирању и решавању практичних проблема.

Наставне и научне активности Департмана за математику и информатику прате европске и светске трендове из области математике и информатике што се огледа кроз модерне и флексибилне студијске програме, али и кроз активно учешће Департмана у многим међународним пројектима и кроз чланство у разним реномираним међународним асоцијацијама и организацијама. Департман за математику и информатику изводи укупно дванаест студијских програма: три програма основних академских студија (трогодишњи програми Математика и Рачунарске науке, и четворогодишњи програм Информационе технологије); један програм интегрисаних академских студија (петогодишњи програм Мастер професор математике), пет програма мастер академских студија (двогодишњи програми Математика, Примењена математика, Рачунарске науке – мастер, једногодишњи програм Информационе технологије – мастер, као и једногодишњи студијски програм Applied Mathematics – Data science, који се реализује на енглеском језику); три програма докторских академских студија (трогодишњи програми Математика, Докторска школа математике и Информатика).

Наставници, асистенти, сарадници и студенти свих нивоа студија нашег Департмана су признати у међународној научној заједници и равноправно узимају учешће у разним европским научно-истраживачким пројектима.

Посебна пажња се посвећује развоју научног подмлатка и интензиван рад са будућим истраживачима – студентима докторских студија. Рад са младим истраживачима се одвија кроз научне семинаре, организовање летњих школа и радионица за докторанде из целог региона и подстицање младих истраживача на активну међународну сарадњу и учешће на међународним математичким конгресима. Бројне активности на Департману везане су за организовање гостујућих предавања еминентних стручњака из иностранства, организовање изузетно посећених научних конференција, студијске боравке наших истраживача на светским универзитетима, као и развој специјализованих лабораторија и центара изврсности. Департман за математику и информатику без дилеме данас представља једну од научно најпродуктивнијих институција на Универзитету у Новом Саду, а разноврсна и широко распрострањена сарадња са многобројним угледним научницима и реномираним универзитетима широм света омогућава даљи напредак и афирмацију.

ДРЖАВНА КОМИСИЈА
за такмичења из математике ученика средњих школа, школска година 2018/2019.

1. Аго Балог Кристина, ПМФ, Нови Сад

2. Балтић др Владимир, ВИШЕР, Београд

3. Башић др Бојан, ПМФ, Нови Сад – председник комисије

4. Божин др Владимир, Математички факултет, Београд

5. Варга Б. Јожеф, ОШ „Петар Кочић“, Темерин

6. Дробњак Душан, Математички факултет, Београд

7. Ђикић др Марко, ПМФ, Ниш

8. Ђукић др Душан, Машински факултет, Београд

9. Кнежевић др Миљан, Математички факултет, Београд

10. Лукић др Миливоје, Рајс, САД

11. Маринковић Растко, Књажевачка гимназија, Књажевац

12. Матић др Иван, Барух колеџ, САД

13. Милосављевић Милош, Гимназија „Светозар Марковић“, Ниш

14. Митровић Данијела, Математички институт САНУ, Београд

15. Петровић др Никола, Институт за физику, Београд

16. Радовановић др Марко, Математички факултет, Београд

17. Сеничић мр Александар, Гимназија, Краљево

18. Стојаковић др Милош, ПМФ, Нови Сад

19. Фон Бург Теодор, Математички факултет, Београд

20. Чикош Пајор Гизела, Гимназија „Бољаи“, Сента

Превод на мађарски језик:

1. Аго Балог Кристина, ПМФ, Нови Сад

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19. 1. 2019.

Први разред – А категорија

1. Нека су AA_0, BB_0 и CC_0 висине $\triangle ABC$, а H његов ортоцентар. Ако су M и N средишта дужи AA_0 и CC_0, доказати да тачке M, N, B_0 и H леже на истој кружници.

2. Наћи све парове реалних бројева a и b такве да за све реалне бројеве x и y важи једнакост

$$\lfloor ax + by \rfloor + \lfloor bx + ay \rfloor = (a + b)\lfloor x + y \rfloor.$$

(За реалан број t, са $\lfloor t \rfloor$ означавамо највећи цео број који није већи од t.)

3. Доказати да се у правилном осмоуглу $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ дијагонале A_1A_6, A_3A_7 и A_5A_8 секу у једној тачки.

4. Наћи све природне бројеве n такве да су $n - 4$, $2n + 2$ и $4n + 1$ потпуни кубови.

5. У популарној игри „Миноловац“ на неким пољима табле $a \times b$ $(a, b \in \mathbb{N})$ налазе се мине, а на сваком преосталом пољу је уписан број њему суседних поља на којима су мине (под суседним пољима подразумевамо поља која имају бар једно заједничко теме). Испитати да ли постоје бројеви a и b и распоред мина на табли $a \times b$ такви да тачно 2019 поља немају мину и да је на свима њима уписан број:

a) 3;

b) 4;

c) 7.

Други разред – А категорија

1. Одредити максималну вредност израза

$$|8x^2 - 2x - 3|$$

на интервалу $x \in [0, 1]$.

2. Постоји ли бесконачан низ природних бројева који су сви потпуни квадрати, и сваки члан тог низа почев од трећег је једнак збиру претходна два?

3. Кружница је уписана у једнакокраки трапез $ABCD$ и додирује основицу CD у тачки L, а краке BC и AD у тачкама K и M, редом. У којој размери права AL дели дуж MK?

4. Одредити све комплексне бројеве z и w такве да важи

$$|z|^2 + zw + \overline{w} = 2 + 6i \qquad \text{и} \qquad |w|^2 + \overline{zw} + z = 2 - 4i.$$

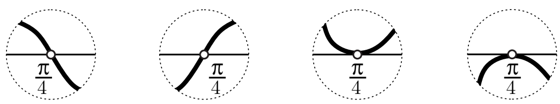
5. Назовимо *крстом* таблу сачињену од уније једне табле $a \times 1$ и једне табле $1 \times b$ које имају тачно једно заједничко поље ($a, b \in \mathbb{N}$). Скуп неких поља такве табле називамо *повезана област* ако се из сваког поља у том скупу може доћи до сваког другог поља крећући се само по суседним пољима унутар уоченог скупа (под суседним пољима подразумевамо поља која имају заједничку страницу). За задат природан број n, одредити број начина на које се бројеви $1, 2, \dots, n$ могу уписати у неки крст са n поља (крст није унапред фиксиран), сваки број у тачно једном пољу, уз услов да за свако k, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, поља у којима су уписани бројеви $1, 2, \dots, k$ чине повезану област.

Трећи разред – А категорија

1. На једном од исечака доле приказан је део x-осе и графика функције

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x - 2}{4x^2 - 7x + 3}.$$

Који је то исечак?



2. У $\triangle ABC$ тачка D је средиште странице BC. Тачка P на дужи AD је таква да важи $CP = AB$. Права CP сече дуж AB у тачки Q. Доказати: $AQ = PQ$.

3. Нека су k, n и d природни бројеви. Означимо са A_d број k-торки $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ целих бројева таквих да важи

$$n \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_k \geqslant 0 \quad \text{и} \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_k = d.$$

Означимо са B_d број k-торки $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ ненегативних целих бројева таквих да важи

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_k \leqslant n \quad \text{и} \quad b_1 + 2b_2 + \cdots + kb_k = d.$$

Доказати:

$$A_d = B_d = B_{kn-d}.$$

4. Дати су различити природни бројеви $a_1, a_2, \dots, a_{100}$. За $i = 1, 2, \dots, 100$, број b_i је добијен додавањем броју a_i највећег заједничког делиоца осталих 99 бројева. Колико најмање међу бројевима b_i може бити различитих?

5.

а) Доказати да постоји бесконачно много природних бројева који се не могу представити у облику

$$p^q + q^r$$

за неке просте бројеве p, q и r.

b) Доказати да постоји само коначно много природних бројева који се не могу представити у облику

$$p_1^{p_2} + p_2^{p_3} + \cdots + p_{i-1}^{p_i}$$

за неки природан број i, $i > 1$, и неке просте бројеве $p_1, p_2, \ldots, p_i$.

Четврти разред – А категорија

1. У тетраедру $ABCD$ висина из темена D пада у унутрашњост $\triangle ABC$, а пљосни $\triangle DAB$, $\triangle DAC$ и $\triangle DBC$ заклапају с пљосни $\triangle ABC$ међусобно подударне диедарске углове. Ако важи $P(\triangle ABC) = 21$, $P(\triangle DAB) = 15$, $P(\triangle DAC) = 13$ и $P(\triangle DBC) = 14$, израчунати запремину тетраедра $ABCD$.

2. Означимо број цифара броја n у декадном запису са $\mathrm{brc}(n)$. Да ли постоји реална константа c таква да за сваки природан број n важи:

$$\mathrm{brc}(1) + \mathrm{brc}(2) + \cdots + \mathrm{brc}(n) < cn \quad ?$$

3. У некој земљи постоји 101 град. Свака два града су повезана највише једном аутобуском линијом, при чему су све аутобуске линије једносмерне. Из сваког града излази тачно 25 линија и у сваки улази тачно 25. Доказати да се из сваког града може стићи (уз преседања ако је потребно) у сваки други.

4. Дат је петоугао $ABCDE$ у ком важи $CD = AB + AE$. Нека симетрала $\measuredangle BAE$ сече BE у тачки P, нека је Q тачка на CD таква да важи $CQ = AB$, и нека су X и Y средишта дужи BC и DE, респективно. Нека је T тежиште у $\triangle APQ$ и нека YT сече AX у тачки Z. Наћи $\dfrac{AZ}{ZX}$ у функцији од AB и AE.

5. Нека су a, b, c, d ненегативни реални бројеви за које важи $a+b+c+d = 1$. Означимо

$$M = \frac{b^2 + c^2 + d^2 - bc - cd - db}{3}.$$

Доказати неједнакост

$$\sqrt{a + M} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} \leqslant 2.$$

Први разред – Б категорија

1. Од цифара $1, 9, 0, 1, 2, 0, 1, 9$ треба саставити четвороцифрен број дељив са 3 (сваку цифру смемо користити онолико пута колико пута је наведена). Који је:

a) највећи такав број;

b) четврти највећи такав број?

2. У месту Горње Зуце приликом пописа 3019. је било $\frac{5}{8}$ мушкараца, а од њих је 90% било млађих од 75 година, док је код женског становништва 96% било млађих од 75 година. На следећем попису 3029. установљено је да се укупан број становника повећао за 300, док је број особа са 75 и више година био исти као на претходном попису, али сада представља 7% укупног становништва. Колико је укупно становника имало Горње Зуце на претходном попису 3019?

3. Да ли постоји троугао са страницама a, b и c за које важи

$$a, b, c > 2019 \quad \text{и} \quad \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor < \lfloor c \rfloor \quad ?$$

(За реалан број t, са $\lfloor t \rfloor$ означавамо највећи цео број који није већи од t.)

4. Ако једна бела и две црне краве попасу сву траву на ливади за 5 недеља, а три беле и четири црне краве попасу сву траву на ливади за 2 недеље, за колико недеља ће сву траву на ливади попасти једна црна крава? Сматрати да краве исте боје пасу траву истом брзином, да је почетна количина траве на ливади увек иста, и да трава на ливади расте фиксном брзином све до тренутка кад је скроз поједена.

5. За правоуганим столом је постављено осам столица, четири с једне стране и четири наспрам њих с друге стране. На колико начина је могуће распоредити осморо пријатеља за овим столом, а да притом Ана и Бане *не* седе једно наспрам другог, а Весна и Горан седе једно поред другог? (Познато је да сви пријатељи имају међусобно различита имена.)

Други разред – Б категорија

1. Доказати да је број

$$2013 \cdot 2015 \cdot 2017 \cdot 2019 + 16$$

потпун квадрат.

2. Одредити све вредности реалног параметра k такве да важи:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(kx^2 - 4kx + k^2 + 2k - 3 > 0).$$

3. Два дрвета висине 5 и 10 метара су на једнаком растојању од бандере са уличном расветом. Ова два дрвета праве сенке дужине 5 и 15 метара. Колико је висока бандера?

4. Одредити све вредности реалног параметра a за које систем једначина

$$(x + y)^2 = 12;$$
$$x^2 + y^2 = 2(a + 1)$$

има тачно два решења.

5. У популарној игри „Миноловац“ на неким пољима табле $a \times b$ $(a, b \in \mathbb{N})$ налазе се мине, а на сваком преосталом пољу је уписан број њему суседних поља на којима су мине (под суседним пољима подразумевамо поља која имају бар једно заједничко теме). Испитати да ли постоје бројеви a и b и распоред мина на табли $a \times b$ такви да тачно 2019 поља немају мину и да је на свима њима уписан број:

a) 8;

b) 7;

c) 6.

Трећи разред – Б категорија

1. Наћи све целе бројеве n за које важи $0 \leqslant n \leqslant 90$ и

$$\sin 80^\circ + \sin 50^\circ - \sin 20^\circ = \sqrt{2} \sin n^\circ.$$

2. На краку AD трапеза $ABCD$ изабрана је тачка M. Доказати да друга заједничка тачка N кружница описаних око $\triangle ABM$ и $\triangle CDM$ припада краку BC.

3. Нека су a и b природни бројеви за које важи НЗД$(a, b) = 10$ и НЗД$(a, b+2) = 12$. Израчунати

$$\text{НЗД}(a, 2b) + \text{НЗД}(a, 3b).$$

4. За правоугаоним столом је постављено осам столица, четири с једне стране и четири наспрам њих с друге стране. На колико начина је могуће распоредити осморо пријатеља за овим столом, а да притом Ана и Бане седе једно наспрам другог, а Весна и Горан једно поред другог? (Познато је да сви пријатељи имају међусобно различита имена.)

5. Нека су a, b и c позитивни реални бројеви, $a, b, c \neq 1$. Ако важи

$$\log_a 2018 + \log_c 2018 = 2 \log_b 2018,$$

доказати:

a) $\log_a 2019 + \log_c 2019 = 2 \log_b 2019$;

b) $a^2 = (ac)^{\log_c b}$.

Четврти разред – Б категорија

1. Колико има бројева са бар четири цифре који су дељиви са 9 и могу се саставити од цифара $1, 9, 0, 1, 2, 0, 1, 9$ (сваку цифру смемо користити онолико пута колико пута је наведена)?

2. Одредити све вредности реалног параметра m за које једначина

$$(m+1)x^2 - 3mx + 4m = 0$$

има два различита реална решења која су притом оба већа од -1.

3. Четвороугао $ABCD$ је истовремено и тетиван и тангентан, и притом за његове странице важи $AB - CD = BC - AD$. Доказати да је дијагонала BD пречник кружнице описане око четвороугла $ABCD$.

4. Одредити све вредности реалног параметра a за које једначина

$$x^3 - 3ax^2 + (2a^2+5)x - 2a^2 + 3 = 0$$

има 3 реална решења која чине аритметичку прогресију.

5. Означимо број цифара броја n у декадном запису са $\mathrm{brc}(n)$. Показати:

$$\mathrm{brc}(1) + \mathrm{brc}(2) + \cdots + \mathrm{brc}(\underbrace{99\ldots99}_{2019 \text{ пута}}) = 2019 \cdot \underbrace{99\ldots99}_{2019 \text{ пута}} - \underbrace{11\ldots11}_{2019 \text{ пута}} + 2019.$$

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23. 2. 2019.

Први разред – А категорија

1. У скупу целих бројева решити једначину

$$6x^3 + 7y^2 + 8z^3 = 66677888.$$

2. Дат је тетиван петоугао $ABCDE$. Нека су тачке F, G, H и I средишта дужи BC, CD, DE и EA, респективно. Нека се праве FG и HI секу у тачки J, а праве AC и HI у тачки K. Доказати да се тачка K налази на кружници описаној око $\triangle FCJ$.

3. Колико решења има једначина

$$x - 2019\{x\} = 2019$$

у скупу реалних бројева? (За реалан број x, са $\lfloor x \rfloor$ означавамо највећи цео број који није већи од x, а са $\{x\}$ означавамо вредност $x - \lfloor x \rfloor$.)

4. Дати су конвексни четвороуглови $ABCD$ и $PQRS$, при чему темена четвороугла $PQRS$ леже на страницама или у унутрашњости четвороугла $ABCD$. Да ли збир дијагонала четвороугла $PQRS$ може бити већи од збира дијагонала четвороугла $ABCD$?

5. Два играча наизменично уписују један од бројева 473, 523, 573, 623, 673, 723, 773, 823 или 873 у неко слободно поље таблице 3×3, при чему сваки број може бити искоришћен само једном. Притом први играч у првом потезу не сме уписати број у централно поље. Игра се завршава када један од играча добије збир 2019 у било којој врсти, колони или дијагонали чија су сва три поља попуњена, и тада тај играч побеђује. Уколико се цела таблица попуни а нико не оствари тај збир, победник је други играч. Који играч има победничку стратегију?

Други разред – А категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину:

$$\frac{\sin x - \sqrt{\sin x}}{\cos x - \sqrt{\cos x}} = 1.$$

2. Одредити максималан број тачака у равни међу којима сваке три чине темена правоуглог троугла.

3. Да ли постоје природни бројеви m и n за које важи $n \leqslant 2019$ и

$$\left\lfloor \frac{am}{n} \right\rfloor = \lfloor a\pi \rfloor \quad \text{за све } a = 1, 2, \ldots, 2019 \quad ?$$

(За реалан број x, са $\lfloor x \rfloor$ означавамо највећи цео број који није већи од x.)

4. У скупу ненегативних реалних бројева решити систем једначина:

$$\begin{aligned} a\sqrt{b} - c &= a; \\ b\sqrt{c} - a &= b; \\ c\sqrt{a} - b &= c. \end{aligned}$$

5. У школи се одржавају такмичења из m предмета. Из сваког предмета се такмичи mk ученика (исти ученик се може такмичити из више предмета). Доказати да се ученици могу разместити у k учионица на такав начин да у свакој учионици постоји бар по један такмичар из сваког од постојећих m предмета.

Трећи разред – А категорија

1. За све $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ доказати неједнакост:

$$\cos(\sin x) > \sin(\cos x).$$

2. Квадратна таблица формата 6×6 је попуњена бројевима ± 1 на такав начин да, за свако поље таблице, производ бројева уписаних у том пољу и свим њему суседним пољима износи 1. (Под суседним пољима подразумевамо поља која имају бар једно заједничко теме.) Доказати да је у сваком пољу таблице уписан број 1.

3. За дати скуп тачака у простору S, означимо са $\ell(S)$ скуп свих тачака у простору које леже на бар једној правој кроз две тачке скупа S. Нека се скуп S састоји од четири тачке које нису све у истој равни. Доказати да је број тачака које не припадају скупу $\ell(\ell(S))$ коначан и одредити тај број.

4. Наћи све непарне природне бројеве n за које важи

$$n = 2019\,\underbrace{\varphi(\varphi(\ldots\varphi}_{10\text{ пута}}(n)\ldots)).$$

5. За позитивне реалне бројеве a, b и c доказати неједнакост:

$$\sqrt{\frac{a+2b+3c}{3a+2b+c}}+\sqrt{\frac{b+2c+3a}{3b+2c+a}}+\sqrt{\frac{c+2a+3b}{3c+2a+b}}\geqslant 3.$$

Четврти разред – А категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину:

$$2^{x^2+2x-4x^4}=\frac{x^2}{x+1}.$$

2. У тетивном четвороуглу $ABCD$ важи $AB=3$, $BC=6$ и $\triangle ACD$ је једнакостраничан. Нека је O центар описане кружнице око четвороугла $ABCD$, а E пресек дијагонала AC и BD. Израчунати $\measuredangle DOE$.

3. Нека је A скуп природних бројева такав да сви бројеви мањи од 256, као и сви степени двојке, припадају скупу A (преостали природни бројеви могу а не морају припадати скупу A). Посматрајмо сада бесконачан низ који се добија ако све бројеве из скупа A претворимо у бинарни запис и испишемо их један иза другог у растућем поретку. Доказати да у овом бесконачном низу постоји 2019 узастопних цифара од којих је тачно 1000 јединица.

4. Дата је диференцијабилна функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ која има бар две различите реалне нуле. Доказати да функција $2019f(x)+f'(x)$ има бар једну реалну нулу.

5. На скупу природних бројева већих од 9 дефинишемо функцију f на следећи начин: ако је $\overline{c_1c_2\ldots c_s}$ $(s\geqslant 2)$ декадни запис броја n, тада је $f(n)$ природан број који се добија заменом свих појава цифре c_1 у броју n цифром c_2, и заменом свих појава цифре c_2 у броју n цифром c_1; уколико се након ове операције појави водећа нула у резултујућем броју, она се брише. (На пример, $f(2375342)=3275243$ и $f(502305)=52350$.) Наћи све природне бројеве који се могу јавити као вредност израза $\dfrac{n}{f(n)}$.

Први разред – Б категорија

1. Одредити скупове A и B за које важи следећих пет особина:

- $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$;
- $2\in A\setminus B$;
- $3\in B\setminus A$;
- $A\cap\{4,5,6\}=\varnothing$;
- $B\cap\{1\}=\varnothing$.

2. Бетмен хоће да провали шифру Едварда Нигме. Њему је познато да шифра представља неку пермутацију слова у изразу `TRICKORTREAT`, и да су притом прво и последње слово шифре једнаки. Колико укупно постоји могућности за такву шифру?

3. У тетивном четвороуглу $ABCD$ важи $\measuredangle ADB = 50^\circ$ и $\measuredangle CDB = 60^\circ$. На правој AC је одабрана тачка M за коју важи $\measuredangle AMB = 70^\circ$. Да ли се тачка M налази између тачака A и C, или је изван дужи AC?

4. Доказати да је број $10^{2019} - 9991$ дељив са 81.

5. Из једног темена оштроуглог троугла повучена је висина, из другог тежишна дуж, а из трећег симетрала унутрашњег угла. Те три праве имају три пресечне тачке. Доказати да троугао коме су те тачке темена не може бити једнакостраничан.

Други разред – Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину:

$$\frac{5x}{x^2+3x+6} + \frac{7x}{x^2+7x+6} = 1.$$

2. У конвексном четвороуглу $ABCD$ важи $AB = BC = CD$, а његове дијагонале се секу у тачки O. Ако важи $2\measuredangle AOD = \measuredangle BAD + \measuredangle CDA$, доказати да је $ABCD$ ромб.

3. Три домаћице Зока, Јока и Цока су на пијаци добиле 9 затворених боца с млеком, и у њима је, редом: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23 и 26 децилитара млека. На колико начина оне могу поделити ове боце између себе (без отварања боца), а да при томе свака добије исти број боца и исту количину млека?

4. У скупу реалних бројева решити једначину:

$$\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-3}.$$

5. Нека је a природан број који има 2019 цифара и дељив је са 9. Нека је b збир цифара броја a, нека је c збир цифара броја b, и нека је d збир цифара броја c. Одредити број d.

Трећи разред – Б категорија

1. Израчунати:

$$\operatorname{arcctg} 5 + \operatorname{arctg} \frac{2}{3}.$$

(Решење приказати у облику експлицитне бројевне вредности изражене у степенима или радијанима.)

2. Наћи све тројке (p, q, r) простих бројева за које важи

$$p^2 - qr = 2500.$$

3. Решити неједначину:

$$x^2 - 2x + 3 \leqslant \sqrt{4 - x^2}.$$

4. У конвексном четвороуглу $ABCD$ дужи које спајају средишта наспрамних ивица имају дужине 2 и 3 и међусобно заклапају угао од $45°$. Израчунати површину четвороугла $ABCD$.

5. У сваком темену правилног n-тоугла је уписан број 1 или -1, при чему нису свих n бројева једнаки. Производ бројева уписаних у ма која 3 узастопна темена износи -1. Одредити збир свих уписаних бројева за:

a) $n = 6$;

b) $n = 2019$.

Четврти разред – Б категорија

1. У оштроуглом $\triangle ABC$ углови код темена A, B и C означени су са α, β и γ, редом. Ако важи

$$4\sin\alpha + 5\cos\beta = 6$$

и

$$5\sin\beta + 4\cos\alpha = 5,$$

одредити γ.

2. Нека је D скуп свих реалних бројева за које је израз

$$\sqrt{\log_2\left(\cos\frac{\pi x}{\sqrt{2}}\right)}.$$

дефинисан. Означимо

$$A = \min_{x\in D} |2019 - x^2|.$$

Доказати да је A природан број и да је прост.

3. Да ли постоји природан број n за који важи

$$361 \mid n^2 + 4n - 15 \quad ?$$

4. У месту Доње Зуце сваки телефонски број има пет цифара које су поређане у строго растућем или строго опадајућем поретку, и притом прва цифра није 0. Колико максимално телефонских бројева може постојати у том месту?

5. Дат је паралелограм $ABCD$ са оштрим углом код темена A. На правима AB и BC су уочене, редом, тачке L и K различите од тачке B, такве да важи $KA = AB$ и $LC = CB$. Доказати да је петоугао $AKLCD$ тетиван.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 16. 3. 2019.

Први разред – А категорија

1. Дат је полином

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

са целобројним коефицијентима. Ако полином P има две различите целобројне нуле које нису позитивне (и можда још нула осим ове две) и притом важи $P(1) = 2$, доказати:

a) $a_0 = 0$;

b) $\sum_{2|i} a_i = \sum_{2\nmid i} a_i$.

2. У $\triangle ABC$ тачке O и I представљају центар описане и уписане кружнице, редом. Нека је O_1 централносиметрична слика тачке O у односу на тачку I, и нека је I_1 централносиметрична слика тачке I у односу на тачку O. Ако O_1 лежи на висини из темена A а I_1 лежи на висини из темена B, доказати да је $\triangle ABC$ једнакостраничан.

3. Доказати да постоји бесконачно много парова различитих природних бројева (m, n) таквих да је збир свих делилаца броја m^2 једнак збиру свих делилаца броја n^2.

4. Свака тачка простора је обојена једном од три боје. Доказати да се може одабрати једна од те три боје таква да, за сваки позитиван реалан број r, постоји троугао површине r чија су сва три темена обојена изабраном бојом.

Други разред – А категорија

1. Дат је полином

$$P(x) = x^{2019} + 2018x^{2017} + 2016x + 2015.$$

Наћи све целе бројеве n такве да

$$P(n) \mid P(P(n) + 1).$$

2. Дат је n-елементан скуп X. Нека су $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ различити подскупови скупа Xтакви да за све i, j, $i \neq j$, важи $|Y_i \cap Y_j| \leqslant 2$. Одредити максималну могућу вредност броја k.

3. Дат је тетивни четвороугао $ABCD$. Нека је E средиште дијагонале AC. Нека се нормала из D на Ојлерову праву за $\triangle ABC$ и нормала из B на Ојлерову праву за $\triangle ADC$ секу у тачки F. Нека је G тачка на дужи EF таква да важи $GF = 2GE$. Доказати: $GB = GD$.

4. Нека је p прост број облика $4t+1$. Нека су $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_k, b_k)$ сви уређени парови природних бројева (a, b) за које важи $a < b \leqslant \frac{p-1}{2}$ и $p \mid a^2+b^2$. Доказати:

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_k = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k).$$

Трећи разред – А категорија

1. Низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ дефинисан је са $x_1 = 16$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2019$ и, за $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+3} = \begin{cases} x_n - \dfrac{1}{x_{n+1}x_{n+2}}, & \text{за } x_{n+1}, x_{n+2} \neq 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказати да постоји природан број n за који важи $x_n = 0$, и одредити најмање такво n.

2. Наћи све бар четвороцифрене природне бројеве m за које постоји $b \in \{1, 2, \dots, 9\}$ са следећом особином: уколико b упишемо између било које две цифре броја m, или допишемо на почетак или крај броја m, тако добијен број је увек потпун квадрат.

3. На страницама AB, BC, CD и DA паралелограма $ABCD$ дате су, редом, тачке P, Q, R, S, различите од темена, такве да је $PQRS$ правоугаоник и $PQ > PS$. Доказати: $\dfrac{PR}{PS} > \dfrac{AB}{AD}$.

4. Дат је квадрат $ABCD$. Разрежемо квадрат $ABCD$ на четири подударна квадрата (по дужима које настају спајањем средишта наспрамних ивица). Потом одаберимо један од тако насталих квадрата и разрежемо га на четири подударна квадрата. Потом одаберимо један од (укупно седам) тако насталих квадрата и разрежемо га на четири подударна квадрата. Назовимо *квад-поделом* колекцију квадрата која се добија понављањем овог поступка коначан број пута. Два квадрата у квад-подели су *суседна* ако страница једног од њих садржи страницу другог (могуће је и да се странице поклапају). Кажемо да је квад-подела *балансирана* ако је количник страница свака два суседна квадрата једнак 1, 2 или $\frac{1}{2}$. Одредити најмањи природан број k такав да квадрате сваке балансиране квад-поделе можемо обојити са k боја а да притом два суседна квадрата увек буду обојени различитим бојама.

Четврти разред – А категорија

1. Дат је оштроугли $\triangle ABC$. Нека су AA_0, BB_0 и CC_0 његове висине, A_1, B_1 и C_1 средишта страница BC, AC и AB, респективно, а O центар описане кружнице. Доказати да је обим $\triangle A_0B_0C_0$ мањи од $2(OA_1 + OB_1 + OC_1)$.

2. Дат је природан број n. Одредити колико постоји коначних низова $(a_1, a_2, \dots, a_t)$ (где $t \in \mathbb{N}$ није унапред фиксирано) који испуњавају следећа три услова:

- $a_1, a_2, \ldots, a_t \in \{1, 2, \ldots, n\}$;
- за све j, $1 \leqslant j \leqslant t-1$, важи $a_j \leqslant a_{j+1} + 1$;
- не постоје j и k, $1 \leqslant j \leqslant k \leqslant t-1$, за које важи $a_k \leqslant a_j = a_{k+1}$.

3. За природан број n означимо са x_n број који се добије узастопним записивањем свих природних бројева од 1 до n један иза другог (нпр. $x_{14} = 1234567891011121314$). Означимо са $f(n)$ остатак при дељењу броја x_n са 11. Да ли постоје природни бројеви t и n_0 такви да за све $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, важи $f(n+t) = f(n)$?

4. Наћи све функције $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такве да за све позитивне реалне бројеве x и y важи

$$f(x) + f(y) = \big(f(f(x)) + f(f(y))\big) f(xy),$$

и да притом само коначно много слика из кодомена има више (тј. бар 2) оригинала.

Први разред – Б категорија

1. Дата су следећа три исказа о природном броју n:

- ако је n дељив са 3, онда је паран;
- n је дељив са 5 и непаран је;
- n није дељив са 3 или n није дељив са 5.

Одредити које све остатке при дељењу са 30 могу имати они природни бројеви n за које су тачна два од наведена три исказа, а један нетачан.

2. Дат је $\triangle ABC$. На страницама AC и BC су одабране тачке M и N, редом, такве да важи $AM = BN$. Кружнице описане око $\triangle ANC$ и $\triangle BMC$ секу се још у тачки P (поред тачке C). Доказати да је права CP симетрала угла код темена C.

3. За природан број n кажемо да је *згодан* ако цифре које учествују у његовом запису можемо разбити на две групе такве да су збирови цифара у тим групама међусобно једнаки (нпр. број 121 јесте згодан јер у једну групу можемо ставити две јединице а у другу цифру 2, и тада важи $1 + 1 = 2$; број 2019 није згодан јер ће, при ма каквом разбијању, група у којој је цифра 9 имати већи збир него друга група).

a) Одредити најмањи природан број n такав да су оба броја n и $n + 1$ згодни.

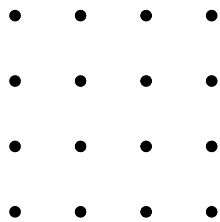
b) Да ли постоје три узастопна природна броја који су сви згодни?

4. Дата је функција

$$f(x) = \frac{ax+2}{3x - \frac{1}{a}}.$$

Одредити све могуће вредности реалног параметра a такве да за све реалне вредности x за које је $f(x)$ дефинисано важи да је и $f(f(x))$ дефинисано и $f(f(x)) = x$.

5. Дата је квадратна решетка 4×4 сачињена од 16 тачака (видети слику). Колико има правоугаоника са теменима у овим тачкама? (Квадрате такође сматрамо специјалним случајевима правоугаоника.)



Други разред – Б категорија

1. Који број је већи,

$$\log_3 2019 \quad \text{или} \quad 4 + \sqrt{\log_3 18171} \quad ?$$

2. Ана на пијаци продаје пите.

- Првог сата је продала четвртину броја свих изнетих пита и још једну четвртину пите.
- Другог сата је продала петину броја преосталих пита и још једну петину пите.
- Трећег сата је продала четвртину броја преосталих пита и још једну четвртину пите.
- Четвртог сата је продала четвртину броја преосталих пита и још једну четвртину пите.
- Петог сата је продала петину броја преосталих пита и још једну петину пите.

Ако се зна да је Ана са собом понела цео број пита, као и да је у току сваког сата Ана продала цео број пита, одредити који је најмањи могућ број пита који је Ана могла понети на пијацу.

3. Решити неједначину:

$$x^2 + 4x\sqrt{x+6} \leqslant 5(x+6).$$

4. У унутрашњости $\triangle ABC$ у ком важи $\measuredangle BAC = 60^\circ$ и $\measuredangle ABC = 20^\circ$ уочена је тачка Q за коју је испуњено $\measuredangle QAB = 20^\circ$ и $\measuredangle QCB = 30^\circ$. Доказати да тачка Q припада симетрали $\measuredangle ABC$.

5. У месту Средње Зуце сваки телефонски број има пет цифара које су поређане у нерастућем или неопадајућем поретку, и притом прва цифра није 0. Колико максимално телефонских бројева може постојати у том месту?

Трећи разред – Б категорија

1. Наћи збир свих троцифрених бројева који у свом декадном запису садрже само непарне цифре.

2. Решити једначину

$$(n^4 - 9n^2 + 19)^{n^3+14n^2+33n} = 1$$

у скупу целих бројева.

3. У зависности од реалног параметра k, одредити колико решења (x, y, z) у скупу реалних бројева има једначина

$$\sqrt{x^2 - 6xz + 6x + 9z^2 - 18z + 9} + |2x + ky - z + 2| + (x + 2y + kz - 1)^{20190316} = 0.$$

4. У Декартовом координатном систему су дате тачке $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(2,0)$ и $C(4,0)$. Наћи све могуће координате тачке M такве да важи

$$\measuredangle OMA = \measuredangle CMB \quad \text{и} \quad \measuredangle MAO = \measuredangle MBC.$$

5. Доказати да је за сваки природан број n, $n \geqslant 3$, цифра десетица броја 3^n парна.

Четврти разред – Б категорија

1. Колико има комплексних бројева z за које важи

$$z^{2019} = (z+1)^{2019} = 1 \quad ?$$

2. Да ли број облика

$$200\ldots0019,$$

где нула има произвољно много али бар две, може бити дељив са 2019?

3. У једном граду живе истинољупци (који увек говоре истину), лажови (који увек лажу) и нормалци (који некада лажу а некада говоре истину). У судници су се затекли тужилац, бранилац и оптужени, при чему је познато да је међу њима један истинољубац, један лажов и један нормалац (али није познато ко је ко). Притом суд има доказе да је злочин починио или оптужени, или тужилац, или бранилац, и такође је познато да особа која је починила злочин није лажов. Њих тројица су изјавили следеће:

- Оптужени: „Ја сам невин.“
- Бранилац: „Оптужени је невин.“
- Тужилац: „Оптужени је крив.“

Како суд није успео да донесе пресуду, позван је инспектор из другог града. Он је одлучио да ће разрешити не само ко је крив, него и ко је (од три актера) истинољубац, ко лажов, а ко нормалац. Најпре је питао следеће: „Тужиоче, јесте ли криви за овај злочин?“ Тужилац је одговорио, након чега инспектор и даље није имао све жељене информације, па је поставио друго питање: „Браниоче, да ли је тужилац крив за овај злочин?“ Бранилац је одговорио, и то је инспектору било довољно да сазна све што га је занимало. Одредити ко је крив за почињени злочин, као и ко је истинољубац, ко лажов а ко нормалац.

4. Дат је низ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ дефинисан са

$$a_n = \sin^2 \pi\sqrt{n^2+n}.$$

Одредити

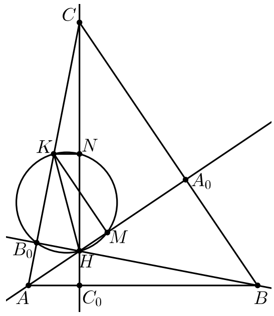
$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

5. Да ли постоји четвороугао који има следећу особину: уколико обришемо ма које његово теме, уместо обрисаног темена увек можемо одабрати неку другу тачку у равни и на тај начин добити четвороугао подударан полазном?

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 19. 1. 2019.

Први разред – А категорија

1. Нека је K средиште странице AC. Тада је KN средња линија у $\triangle AC_0C$, па важи $KN \parallel AC_0$, тј. $\measuredangle KNH = 90^\circ$. Аналогно добијамо $\measuredangle KMH = 90^\circ$, а знамо и $\measuredangle KB_0H = 90^\circ$. Дакле, кружница над пречником KH пролази кроз тачке N, M и B_0, чиме је тврђење доказано.

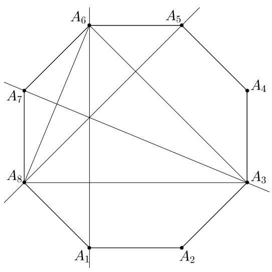


Оп 2019 1А 1

2. За $y = -x$, постављени услов се своди на $\lfloor (a-b)x \rfloor + \lfloor (b-a)x \rfloor = 0$. Уколико би бројеви a и b били различити, ово не би било испуњено нпр. за $x = \frac{1}{2(a-b)}$ (тада би важило $\lfloor (a-b)x \rfloor + \lfloor (b-a)x \rfloor = \lfloor \frac{1}{2} \rfloor + \lfloor -\frac{1}{2} \rfloor = 0 + (-1) = -1 \neq 0$). Дакле, мора важити $a = b$, па услов задатка постаје $\lfloor a(x+y) \rfloor = a\lfloor x+y \rfloor$. Бирајући $0 \leqslant x+y < 1$ добијамо $\lfloor a(x+y) \rfloor = a \cdot 0 = 0$, одакле следи $0 \leqslant a(x+y) < 1$, дакле $a \geqslant 0$.

За $a = 0$ захтев задатка очигледно важи. Претпоставимо сада $a > 0$. Како за $0 \leqslant x+y < 1$ мора важити $\lfloor a(x+y) \rfloor = a\lfloor x+y \rfloor = 0$, тј. $0 \leqslant a(x+y) < 1$, следи $x+y < \frac{1}{a}$; обратно, уколико одаберемо $0 \leqslant x+y < \frac{1}{a}$, постављени услов се своди на $a\lfloor x+y \rfloor = \lfloor a(x+y) \rfloor = 0$, одакле следи $x+y < 1$. Другим речима, услови $0 \leqslant x+y < 1$ и $0 \leqslant x+y < \frac{1}{a}$ су еквивалентни, одакле следи $a = 1$.

Дакле, једина решења су парови $(a,b) = (0,0)$ и $(a,b) = (1,1)$.



Оп 2019 1А 3

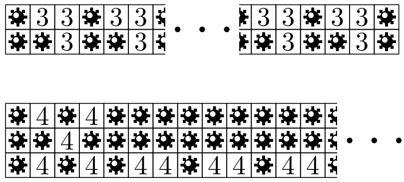
3. *Прво решење.* Права A_3A_7 је оса симетрије посматраног осмоугла, па се у односу на њу дијагонала A_1A_6 пресликава у дијагоналу A_5A_8. Одатле следи да се ове две дијагонале секу баш на оси симетрије, тј. на дијагонали A_3A_7, што је и требало доказати.

Друго решење. Како су четвороуглови $A_1A_2A_3A_8$ и $A_1A_6A_7A_8$ једнакокраки трапези, важи $A_1A_2 \parallel A_3A_8$ и $A_7A_8 \parallel A_6A_1$, одакле следи $A_6A_1 \perp A_3A_8$, тј. A_6A_1 је висина у $\triangle A_3A_6A_8$. Аналогно је A_8A_5 висина тог истог троугла. Коначно, како је тај троугао једнакокрак (са основицом A_6A_8) а A_3A_7 је његова симетрала угла (што следи нпр. из подударности $\triangle A_3A_7A_8 \cong \triangle A_3A_7A_6$, коју добијамо по ставу ССУ), закључујемо да је A_3A_7 такође висина у $\triangle A_3A_6A_8$. Дакле, посматране три дијагонале се секу у ортоцентру $\triangle A_3A_6A_8$.

4. Означимо $F = (n-4)(2n+2)(4n+1) = 8n^3 - 22n^2 - 38n - 8$. По услову задатка, и F мора бити потпун куб. Како је F паран број и очигледно важи $F < (2n)^3$, следи $F \leqslant (2n-2)^3 = 8n^3 - 24n^2 + 24n - 8$, што се своди на $2n^2 - 62n \leqslant 0$, а одакле добијамо $n \leqslant 31$. Одмах видимо да је $n = 31$ једно решење ($31 - 4 = 27 = 3^3$, $2 \cdot 31 + n = 64 = 4^3$ и $4 \cdot 31 + 1 = 125 = 5^3$), а директно се испробава да мањих решења нема.

5. a) Одговор: да. Одаберимо $a = 2$ и $b = 2020$, и распоредимо мине као на цртежу горе.

b) Одговор: да. Одаберимо $a = 3$ и $b = 3026$, и распоредимо мине као на цртежу доле. (Објашњење: у првих 5 колона имамо укупно 5 поља без мина. Преосталих 2014 поља без мина су груписана у парове и распоређена у наредној 3021 колони према приказаном обрасцу.)



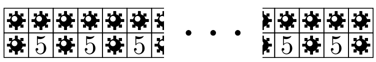
Оп 2019 1А 5

c) Одговор: не. Према услову задатка, у овом случају би свако поље које нема мину морало имати тачно једног суседа који нема мину. Дакле, сва поља која немају мину на тај начин би се могла груписати у парове, па следи да их укупно не може бити 2019, што је непаран број.

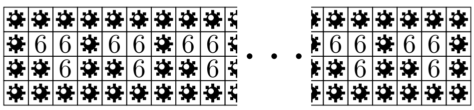
Напомена. Испоставља се да за све бројеве од 1 до 8, са изузетком броја 7, постоји тражени распоред. Доле приказујемо (неке могуће) конструкције за преостале случајеве.

$a = 1,\ b = 3 \cdot 1009 + 2 = 3029$

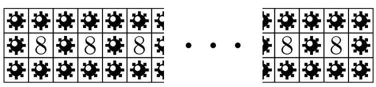
$a = 1,\ b = 2 \cdot 2019 + 1 = 4039$



$a = 2,\ b = 2 \cdot 2019 + 1 = 4039$



$a = 4,\ b = 2020$

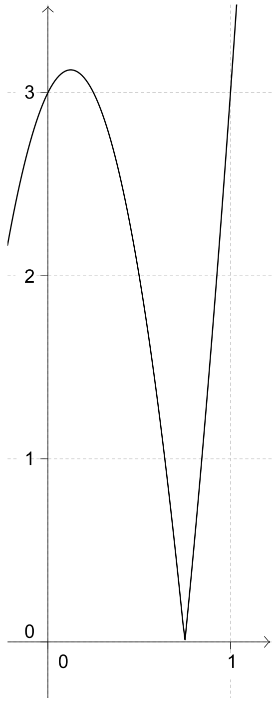


$a = 3,\ b = 2 \cdot 2019 + 1 = 4039$

Други разред – А категорија

1. Посматрајмо функцију $f(x) = 8x^2 - 2x - 3$. Њене нуле су у тачкама $x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+96}}{16} = \frac{2 \pm 10}{16}$, тј. $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_2 = \frac{3}{4}$, што значи да је функција $f(x)$ на сегменту $[0,1]$ најпре негативна за $x \in [0, \frac{3}{4})$, а потом позитивна за $x \in (\frac{3}{4}, 1]$. Из особина квадратне функције знамо да се њен минимум достиже у тачки

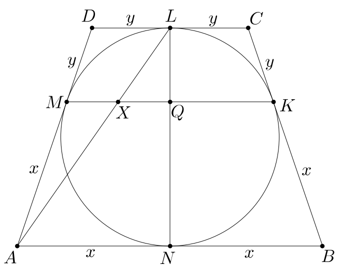
$\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8}$, и тај минимум износи $8\cdot\frac{1}{64} - 2\cdot\frac{1}{8} - 3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 3 = -\frac{1}{8} - 3$; дакле, максимум израза $|f(x)|$ за $x \in [0, \frac{3}{4})$ износи $3 + \frac{1}{8}$. За $x \in (\frac{3}{4}, 1]$ функција $f(x)$ је позитивна и растућа, па достиже максимум за $x = 1$, и тај максимум износи $8 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = 3$; ово је уједно и максимум израза $|f(x)|$ за $x \in (\frac{3}{4}, 1]$. Дакле, максимална вредност израза из поставке на интервалу $x \in [0, 1]$ износи $3 + \frac{1}{8}$ и достиже се за $x = \frac{1}{8}$.



Оп 2019 2А 1

2. Не постоји. Претпоставимо супротно, да такав низ постоји. Можемо претпоставити, без умањења општости, да у том низу постоји непаран број: заиста, ако би сви чланови били парни, тада би они сви били дељиви са 4 (јер су потпуни квадрати), па бисмо дељењем свих чланова тог низа са 4 добили нов низ који такође испуњава постављене услове; понављањем поступка по потреби добијамо низ у ком се појављује бар један непаран број.

Подсетимо се, сви непарни квадрати дају остатак 1 при дељењу са 4. Нека је a један непаран члан посматраног низа, и нека су b, c и d наредна три члана. Ако би и b био непаран, тада би c (подсетимо се, $c = a + b$) давао остатак 2 при дељењу са 4 па не би могао бити потпун квадрат, контрадикција. Дакле, b је паран број, а тада је c непаран број, те је и d непаран број. Но, сада из $c, d \equiv 1 \pmod 4$ следи да би наредни члан низа морао давати остатак 2 при дељењу са 4, контрадикција.



Оп 2019 2А 3

3. Нека уписана кружница додирује основицу AB у тачки N. Означимо $x = AM = AN = BN = BK$ и $y = CK = CL = DL = DM$. Нека AL и NL секу MK у тачкама X и Q, редом. Како важи $\triangle AXM \sim \triangle ALD$, имамо $\frac{MX}{y} = \frac{MX}{DL} = \frac{AM}{AD} = \frac{x}{x+y}$, тј. $MX = \frac{xy}{x+y}$; како важи $\triangle LXQ \sim \triangle LAN$, уз примену Талесове теореме имамо $\frac{XQ}{x} = \frac{XQ}{AN} = \frac{XL}{AL} = \frac{MD}{AD} = \frac{y}{x+y}$, тј. $XQ = \frac{xy}{x+y} = MX$. Следи $MX = \frac{1}{2}MQ = \frac{1}{4}MK$, тј. $MX : XK = 1 : 3$.

4. Како важи $|z|^2 = z\overline{z}$ и $|w|^2 = w\overline{w}$, сабирањем датих једнакости добијамо

$$\begin{aligned} 4 + 2i &= z\overline{z} + zw + w\overline{w} + \overline{zw} + z + \overline{w} = z(\overline{z} + w) + \overline{w}(\overline{z} + w) + z + \overline{w} \\ &= (z + \overline{w})(\overline{z} + w) + z + \overline{w} = |z + \overline{w}|^2 + z + \overline{w}. \end{aligned}$$

Означимо $z + \overline{w} = a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Тада из последње једнакости добијамо $a^2 + b^2 + a + bi = 4 + 2i$, одакле следи $b = 2$ и затим $a^2 + a = 0$. Дакле, $a = 0$ или $a = -1$.

Размотримо прво случај $a=0$. Тада имамо $z+\overline{w}=2i$, па заменом $\overline{w}=2i-z$ и $w=\overline{2i-z}=-2i-\overline{z}$ у прву једначину добијамо

$$2+6i=|z|^2+z(-2i-\overline{z})+2i-z=2i-z(1+2i).$$

Одавде следи $z=\frac{2+4i}{-(1+2i)}=-2$ и $w=2-2i$.

Нека сада важи $a=-1$. Тада имамо $z+\overline{w}=-1+2i$, па заменом $\overline{w}=-1+2i-z$ и $w=\overline{-1+2i-z}=-1-2i-\overline{z}$ у прву једначину добијамо

$$2+6i=|z|^2+z(-1-2i-\overline{z})-1+2i-z=-1+2i-z(2+2i).$$

Одавде следи $z=\frac{3+4i}{-(2+2i)}=\frac{(3+4i)(2-2i)}{-8}=\frac{6-6i+8i+8}{-8}=-\frac{7+i}{4}$ и $w=\frac{3-9i}{4}$.

Дакле, постоје два решења: $(z,w)=(-2,2-2i)$ и $(z,w)=(-\frac{7+i}{4},\frac{3-9i}{4})$.

5. Приметимо, табле $a\times 1$ и $1\times b$ представљају специјалне случајеве крстова; такве крстове ћемо звати *штрафте* (вертикалне, респективно хоризонталне). Код осталих крстова пресек двеју табли које га сачињавају називаћемо *центар крста*, и такве крстове ћемо (након уписивања бројева према услову задатка) делити на *хоризонталне*, *вертикалне* или *централне*, у зависности од тога да ли је број 1 уписан, респективно, негде у хоризоналној компоненти али ван центра, негде у вертикалној компоненти али ван центра, или баш у центру.

За задат број n, посматрајмо све крстове попуњене бројевима према услову задатка, и нека је A број хоризонталних штрафти међу њима, B број централних крстова, а C број хоризонталних крстова. Због симетрије, укупан број тражен у поставци износи $2A+B+2C$.

Одредимо најпре број A. Приметимо да је сваки број од 2 надаље уписан у поље или непосредно лево или непосредно десно од блока који чине бројеви пре њега. На тај начин можемо свакој хоризонталној штрафти попуњеној бројевима придружити низ слова L и R дужине $n-1$, а притом је јасно и да из сваког таквог низа можемо једнозначно реконструисати полазну штрафту. Дакле, $A=2^{n-1}$.

Слично рачунамо и број B. Број 1 је уписан у центар, а сваки следећи број је уписан или у горњем, или у десном, или у доњем, или у левом „краку“ (у једнозначно одређеном пољу). Притом, од свих ових могућности треба одузети оне које резултирају хоризонталном или вертикалном штрафтом. Све заједно, добијамо $B=4^{n-1}-2A=4^{n-1}-2^n$.

Коначно, посматрајмо сада хоризонталне крстове. Нека је у центру број k, $k\neq 1$. Тада су бројеви од 1 до k сви на хоризонтали, па на већ виђен начин израчунавамо да за њих постоји 2^{k-1} могућности; за наредних $n-k$ бројева слично као раније видимо да постоји 4^{n-k} могућности од којих треба одузети оне када су сви ови бројеви поређани на хоризонтали, што је 2^{n-k} распореда. Све заједно, ако је у центру број k, укупан број могућности тада износи $2^{k-1}(4^{n-k}-2^{n-k})$.

Сада имамо све што је неопходно да приведемо рачун крају:

$$\begin{aligned}2A+B+2C &= 2^n + (4^{n-1}-2^n) + 2\left(\sum_{k=2}^{n} 2^{k-1}(4^{n-k}-2^{n-k})\right)\\ &= 4^{n-1} + 2^n\left(\sum_{k=2}^{n}(2^{n-k}-1)\right) = 4^{n-1}+2^n\left(\sum_{i=0}^{n-2}2^i-(n-1)\right)\\ &= 4^{n-1}+2^n(2^{n-1}-1-n+1) = 4^{n-1}+2^n(2^{n-1}-n).\end{aligned}$$

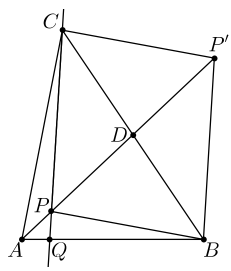
Трећи разред – А категорија

1. Приметимо:

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x - 2}{4x^2-7x+3} = \frac{\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} - 2}{4x^2-7x+3} = \frac{\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 1}{(4x^2-7x+3)\operatorname{tg} x} = \frac{(\operatorname{tg} x - 1)^2}{(4x-3)(x-1)\operatorname{tg} x}.$$

Како важи $3 < \pi < 4$, тј. $\frac{3}{4} < \frac{\pi}{4} < 1$, израз $(4x-3)(x-1)$, тј. $4(x-\frac{3}{4})(x-1)$, има негативну вредност за x из околине тачке $\frac{\pi}{4}$. С друге стране, $(\operatorname{tg} x - 1)^2$ и $\operatorname{tg} x$ су ненегативни за x из околине тачке $\frac{\pi}{4}$. Према томе, функција $f(x)$ је негативна за x из околине $\frac{\pi}{4}$ и $x \neq \frac{\pi}{4}$. Одговарајући исечак је онај који је дат на слици скроз десно.

2. Посматрајмо тачку P' централносиметричну тачки P у односу на тачку D. Четвороугао $BPCP'$ је паралелограм, па важи $BP' \parallel PQ$. Како је $\triangle ABP'$ једнакокрак (због $BP' = CP = AB$), следи $\measuredangle APQ = \measuredangle AP'B = \measuredangle P'AB = \measuredangle PAQ$, тј. $AQ = PQ$.



Оп 2019 3А 2

3. Докажимо најпре $A_d = B_d$. Довољно је доказати да је придруживање

$$(b_1, b_2, \ldots, b_k) \mapsto (b_1+b_2+\ldots+b_k, b_2+\ldots+b_k, \ldots, b_{k-1}+b_k, b_k)$$

бијекција између скупа k-торки које урачунавамо у B_d и скупа k-торки које урачунавамо у A_d. И заиста, ово лако следи из $n \geqslant b_1 + b_2 + \cdots + b_k \geqslant b_2 + \cdots + b_k \geqslant \ldots \geqslant b_{k-1} + b_k \geqslant b_k \geqslant 0$ и

$$(b_1+b_2+\ldots+b_k) + (b_2+\ldots+b_k) + \cdots + (b_{k-1}+b_k) + b_k = b_1 + 2b_2 + \cdots + kb_k = d.$$

Докажимо сада и $B_d = B_{kn-d}$. Показаћемо да је придруживање

$$(b_1, b_2, \ldots, b_k) \mapsto (b_{k-1}, b_{k-2}, \ldots, b_2, b_1, n - b_1 - \ldots - b_k)$$

бијекција између скупова k-торки које бројимо с леве, односно десне стране. И заиста, ово лако следи из чињенице да сума свих координата у k-торки с десне стране износи $n - b_k$, што јесте не веће од n, и

$$\begin{aligned}&b_{k-1} + 2b_{k-2} + \cdots + (k-1)b_1 + k(n - b_1 - \ldots - b_k)\\ &\qquad = kn - b_1 - 2b_2 - \cdots - (k-2)b_{k-2} - (k-1)b_{k-1} - kb_k = kn - d.\end{aligned}$$

4. Може 99, нпр. за $a_1 = 1$ и $a_i = 2i - 2$ за $i = 2, \dots, 100$. Тада имамо $b_1 = b_2 = 3$ и $b_i = a_i + 1 = 2i - 1$ за $i \geqslant 3$.

Докажимо сада да међу бројевима b_i увек мора бити бар 99 различитих. Узмимо, без умањења општости, $a_1 < a_2 < \cdots < a_{100}$. Означимо

$$d_i = \text{НЗД}(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{100}).$$

Нека је d_k највећи међу бројевима d_i. Сви бројеви осим можда a_k су дељиви са d_k, па за $j > i$ и $i, j \neq k$ важи $a_j - a_i \geqslant d_k \geqslant d_i$, тј. $b_j > a_j \geqslant b_i$. Дакле, свих 99 бројева b_i за $i \neq k$ су различити.

5. а) *Прво решење.* Нека је n непаран природан број. Уколико би се он могао представити у облику $p^q + q^r$, тада би морало важити $p = 2$ или $q = 2$. У првом случају имамо $n = 2^q + q^r \equiv 2^q \equiv 2 \pmod{q}$, па ако за n одаберемо број облика $3^k + 2$, за њега би морало важити $q = 3$; одатле би следило $3^k + 2 = 2^3 + 3^r = 8 + 3^r$, тј. $3^{k-1} = 2 + 3^{r-1}$, а одавде имамо $r = 1$, што је немогуће (r мора бити прост број). Дакле, ниједан број облика $3^k + 2$ се не може представити у облику $2^q + q^r$. Размотримо сада случај $q = 2$, тј. $n = p^2 + 2^r$. Тада, због $r \geqslant 2$, важи $n \equiv p^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$. Дакле, ниједан број који даје остатак 2 или 3 при дељењу са 4 се не може представити у облику $p^2 + 2^r$.

Приметимо да уколико за n узмемо број облика $9^l + 2$ за произвољан ненегативан цео број l, важи $n = 3^{2l} + 2$ и $n \equiv 1 + 2 = 3 \pmod{4}$, па се он не може представити ни у облику $2^q + q^r$, ни у облику $p^2 + 2^r$. Како постоји бесконачно много бројева овог облика, овим је тврђење доказано.

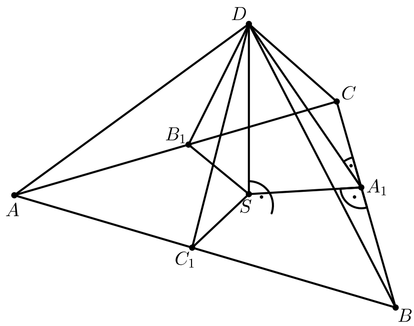
Друго решење. Нека је n природан број облика $6k + 5$. Уколико би се он могао представити у облику $p^q + q^r$, тада би морало важити $p = 2$ или $q = 2$ (али не оба). У првом случају имамо $2^q \equiv 2 \pmod{6}$ и одатле $5 \equiv n = 2^q + q^r \equiv 2 + q^r \pmod{6}$, те сада из $q^r \equiv 3 \pmod{6}$ добијамо да је једина могућност $q = 3$. У другом случају имамо $p^2 + 2^r = n \equiv 5 \pmod{6}$; једна могућност је $r = 2$, а ако је r непаран прост број, имамо $2^r \equiv 2 \pmod{6}$ и онда $5 \equiv p^2 + 2^r \equiv p^2 + 2 \pmod{6}$, те у овом случају мора важити $p^2 \equiv 3 \pmod{6}$, тј. $p = 3$.

Дакле, сумирајмо: ако се број n облика $6k + 5$ може представити у траженом облику, тада мора важити једно од: $n = 2^3 + 3^r = 3^r + 8$, $n = p^2 + 2^2 = p^2 + 4$ или $n = 3^2 + 2^r = 2^r + 9$ (и $r \neq 2$). Приметимо, ако би додатно важило $n \equiv 7 \pmod{8}$, тада су сва ова три случаја немогућа (први се своди $3^r \equiv 7 \pmod{8}$, али лева страна је увек 3 или 1 по модулу 8; други се своди на $p^2 \equiv 3 \pmod{8}$, али потпуни квадрати никада не дају остатак 3 при дељењу са 8; трећи се своди на $7 \equiv 9 \pmod{8}$, где смо користили $2^r \equiv 0 \pmod{8}$ због $r \neq 2$). Дакле, довољно је утврдити да постоји бесконачно много бројева облика $6k + 5$ који дају остатак 7 при дељењу са 8, а такви су сви бројеви облика $24l + 23$.

b) Сваки природан број облика $4k$ се може представити у облику $2^2 + 2^2 + \cdots + 2^2$; сваки природан број облика $4k + 1$ за $k \geqslant 4$ може се представити у облику $2^2 + 2^2 + \cdots + 2^2 + 2^3 + 3^2$; сваки природан број облика $4k + 2$ за $k \geqslant 8$ може се представити у облику $2^2 + 2^2 + \cdots + 2^2 + 2^3 + 3^2 + 2^3 + 3^2$; сваки природан број облика $4k + 3$ за $k \geqslant 12$ може се представити у облику $2^2 + 2^2 + \cdots + 2^2 + 2^3 + 3^2 + 2^3 + 3^2 + 2^3 + 3^2$. Дакле, постоји само коначно много природних бројева који се не могу представити у облику траженом у поставци задатка.

Четврти разред – А категорија

1. Нека је S подножје висине из D. Нека су A_1, B_1 и C_1 подножја нормала из S редом на BC, AC и AB. На основу теореме о три нормале, и DA_1, DB_1 и DC_1 су нормалне, редом, на BC, AC и AB. Одатле, $\measuredangle DA_1S$, $\measuredangle DB_1S$ и $\measuredangle DC_1S$ су диедарски углови с ивицама BC, AC и AB, па су они, по услову задатка, међусобно подударни; означимо их са θ. Сада по ставу УСУ имамо $\triangle DSA_1 \cong \triangle DSB_1 \cong \triangle DSC_1$ (сви имају заједничку страницу DS, један прав угао, и један угао θ). Одатле следи $SA_1 = SB_1 = SC_1 = r$ (тј. S је центар кружнице уписане у $\triangle ABC$, јер је S унутар $\triangle ABC$) и $DA_1 = DB_1 = DC_1 = h$, а такође и $\frac{r}{h} = \cos\theta$. Сада имамо $\frac{P(\triangle SAB)}{P(\triangle DAB)} = \frac{P(\triangle SAC)}{P(\triangle DAC)} = \frac{P(\triangle SBC)}{P(\triangle DBC)} = \frac{r}{h} = \cos\theta$ (јер су r и h, респективно, висине у одговарајућим троугловима на AB, AC и BC), па следи $P(\triangle SAB) = 15\cos\theta$, $P(\triangle SAC) = 13\cos\theta$ и $P(\triangle SBC) = 14\cos\theta$, а одатле $21 = P(\triangle ABC) = P(\triangle SAB)+P(\triangle SAC)+P(\triangle SBC) = 15\cos\theta+13\cos\theta+14\cos\theta = 42\cos\theta$. Добијамо $\cos\theta = \frac{1}{2}$, тј. $\theta = 60°$, и $P(\triangle SAB) = \frac{15}{2}$, $P(\triangle SAC) = \frac{13}{2}$ и $P(\triangle SBC) = 7$.



Оп 2019 4А 1

Из горњих односа следи и $AB : AC : BC = 15 : 13 : 14$ (јер $\triangle SAB$, $\triangle SAC$ и $\triangle SBC$ сви имају висину r, а површине су им у наведеној пропорцији). Означимо $AB = 15x$, $AC = 13x$ и $BC = 14x$. Из Хероновог обрасца имамо $21 = P(\triangle ABC) = \sqrt{21x \cdot 7x \cdot 8x \cdot 6x} = 84x^2$, одакле следи $x = \frac{1}{2}$, тј. нпр. $AB = \frac{15}{2}$. Сада имамо $h = \frac{2P(\triangle DAB)}{AB} = \frac{30}{\frac{15}{2}} = 4$, и онда из $\triangle DSC_1$ добијамо $DS = h\sin\theta = 4\sin 60° = 2\sqrt{3}$. Коначно, запремина тетраедра износи: $V = \frac{DS \cdot P(\triangle ABC)}{3} = \frac{2\sqrt{3}\cdot 21}{3} = 14\sqrt{3}$.

2. Таква константа не постоји. Претпоставимо супротно: нека је c једна таква константа, и означимо $x_n = cn - (\mathrm{brc}(1) + \mathrm{brc}(2) + \cdots + \mathrm{brc}(n))$. По претпоставци, сваки члан низа $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је позитиван. Означимо $y_n = x_{n+1} - x_n = c - \mathrm{brc}(n+1)$. Почевши од неког индекса n важи $y_n < 0$, па је од тог индекса низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ опадајући, самим тим, овај низ је ограничен одозго. Како важи $y_n \to -\infty$, а низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је ограничен одозго, важиће и $y_n+x_n \to -\infty$ за $n \to \infty$, али $y_n + x_n = x_{n+1}$, што је контрадикција.

3. Посматрајмо два града, Апатин и Босилеград. Означимо са $\mathscr{A}$ скуп свих градова у које се може стићи из Апатина (не обавезно директно), укључујући и Апатин; нека њих има n. Из сваког града излази 25 линија, али све остају унутар скупа $\mathscr{A}$, тј. ниједна не иде напоље (јер би се у супротном и до тог града ван скупа $\mathscr{A}$ могло стићи из Апатина, па би, по дефиницији скупа $\mathscr{A}$, и тај град био у њему). Дакле, унутар $\mathscr{A}$ укупно има тачно $25n$ линија, али јасно је да их укупно не може бити више од $\binom{n}{2}$, па следи $25n \leqslant \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, тј. $n \geqslant 51$. Аналогно, скуп $\mathscr{B}$ градова из којих се може доћи до Босилеграда, укључујући и сам Босилеград, има бар 51 елемент. Према томе, скупови $\mathscr{A}$

и $\mathscr{B}$ имају заједнички елемент, и преко њега се може доћи из Апатина у Босилеград.

4. *Прво решење.* Означимо $AB = CQ = b$ и $AE = DQ = e$. Из познате особине симетрале угла имамо $\frac{PB}{PE} = \frac{AB}{AE} = \frac{b}{e} = \frac{QC}{QD}$. Нека се XY и PQ секу у тачки R. Тада имамо:

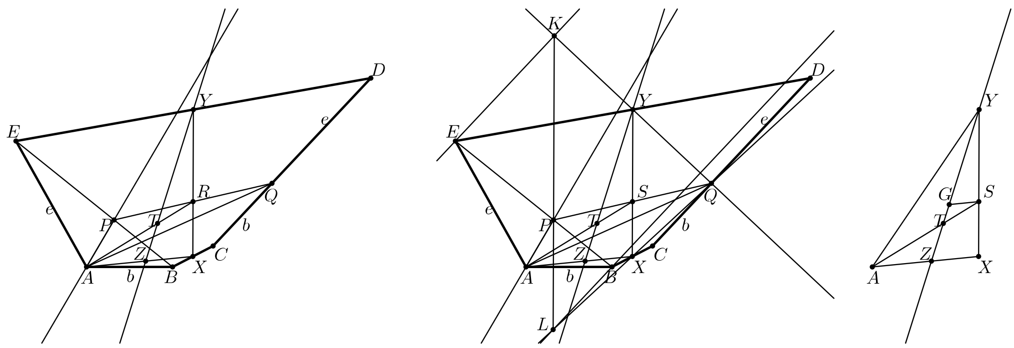
$$\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{RQ} = \frac{e\overrightarrow{RB} + b\overrightarrow{RE}}{b+e} + \frac{e\overrightarrow{RC} + b\overrightarrow{RD}}{b+e} = \frac{e(\overrightarrow{RB} + \overrightarrow{RC}) + b(\overrightarrow{RE} + \overrightarrow{RD})}{b+e}$$
$$= \frac{2e\overrightarrow{RX} + 2b\overrightarrow{RY}}{b+e},$$

па како вектор с леве стране лежи на правој PQ, а вектор с десне стране лежи на правој XY, следи да оба та вектора морају бити $\overrightarrow{0}$; другим речима, $\overrightarrow{RP} = -\overrightarrow{RQ}$ и $e\overrightarrow{RX} = -b\overrightarrow{RY}$, одакле следи да је R средиште дужи PQ, као и да важи пропорција $\frac{RX}{RY} = \frac{b}{e}$. Сада примећујемо и да су тачке A, T и R колинеарне и да важи $\frac{RT}{TA} = \frac{1}{2}$. Применом Менелајеве теореме на $\triangle AXR$ и праву YZ добијамо:

$$-1 = \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZX}} \cdot \frac{\overrightarrow{XY}}{\overrightarrow{YR}} \cdot \frac{\overrightarrow{RT}}{\overrightarrow{TA}} = \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZX}} \cdot \left(-\frac{b+e}{e}\right) \cdot \frac{1}{2},$$

одакле следи

$$\frac{AZ}{ZX} = \frac{2e}{b+e} = \frac{2AE}{AB+AE}.$$



Оп 2019 4А 4

Друго решење. Означимо $AB = CQ = b$ и $AE = DQ = e$, и нека је S средиште дужи PQ. Даље, нека права кроз E паралелна са CD сече праву QY у тачки K, а права кроз B паралелна са CD сече праву QX у тачки L. Очигледно важи $\triangle YQD \cong \triangle YKE$ и $\triangle XQC \cong \triangle XLB$, одакле следи $KY = YQ$, $LX = XQ$, $KE = QD = e$ и $LB = QC = b$. Како је AP симетрала $\measuredangle BAE$, следи $\frac{EP}{PB} = \frac{e}{b} = \frac{KE}{LB}$. Из овога и $KE \parallel CD \parallel LB$ следи $\triangle PEK \sim \triangle PBL$, одакле добијамо $\measuredangle KPE = \measuredangle LPB$, тј. тачке K, P и L су колинеарне. Даље, XY је средња линија $\triangle LQK$, па како је S средиште дужи PQ, следи да S припада правој XY (тј. PQ и XY се секу у тачки S). Уз то, из $XY \parallel LK$ имамо $\frac{SX}{SY} = \frac{PL}{PK} = \frac{LB}{KE} = \frac{b}{e}$.

Посматрајмо сада $\triangle AYX$. Нека паралела из S сече YZ у G. Из $\triangle SGT \sim \triangle AZT$ следи $\frac{GS}{ZA} = \frac{ST}{AT} = \frac{1}{2}$, тј. $GS = \frac{ZA}{2}$. Даље, из $\triangle YGS \sim \triangle YZX$ добијамо $\frac{ZX}{GS} = \frac{XY}{SY} = \frac{XS+SY}{SY} = \frac{XS}{SY} + 1 = \frac{b}{e} + 1 = \frac{b+e}{e}$, тј. $\frac{ZX}{\frac{ZA}{2}} = \frac{b+e}{e}$. Дакле,

$$\frac{AZ}{ZX} = \frac{2e}{b+e} = \frac{2AE}{AB+AE}.$$

5. Означимо $S = \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}$. Важи $S^2 = b + c + d + 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{bd} + 2\sqrt{cd} \leqslant b + c + d + (b + c) + (b + d) + (c + d) = 3(b + c + d) \leqslant 3$, те имамо $S \leqslant \sqrt{3}$.

Приметимо, $6M = (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - b)^2$. Притом важи

$$\begin{aligned}(b-c)^2 &= (\sqrt{b}+\sqrt{c})^2(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 = (b+c+2\sqrt{bc})(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 \\ &\leqslant 2(b+c)(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 \leqslant 2(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 = 2b+2c-4\sqrt{bc}\end{aligned}$$

и, аналогно, $(c - d)^2 \leqslant 2c + 2d - 4\sqrt{cd}$ и $(d - b)^2 \leqslant 2d + 2b - 4\sqrt{db}$, па сабирањем следи

$$\begin{aligned}a + M &\leqslant (1-b-c-d) + \frac{2}{3}(b+c+d-\sqrt{bc}-\sqrt{cd}-\sqrt{db}) \\ &\leqslant 1 - \frac{1}{3}(b+c+d+2\sqrt{bc}+2\sqrt{cd}+\sqrt{db}) = 1 - \frac{1}{3}S^2.\end{aligned}$$

Остаје доказати неједнакост $\sqrt{1 - \frac{1}{3}S^2} + S \leqslant 2$, тј. $\sqrt{1 - \frac{1}{3}S^2} \leqslant 2 - S$. Након квадрирања остаје $1 - \frac{1}{3}S^2 \leqslant 4 - 4S + S^2$, тј. $4S^2 - 12S + 9 \geqslant 0$, а ово јесте задовољено због $4S^2 - 12S + 9 = (2S - 3)^2 \geqslant 0$.

Први разред – Б категорија

1. a) Највећи број који се може саставити од ове четири цифре је 9921; како је он дељив са 3, то је управо тражени одговор.

b) Уколико на прве две позиције слева ставимо две највеће цифре, тј. 99, како 3 | 9+9, закључујемо да на преостале две позиције морају доћи две цифре чији је збир дељив са 3 (како би цео број био дељив са 3), а што оставља могућности 21, 12 и 00. Дакле, 9921, 9912 и 9900 су највећа три четвороцифрена броја дељива са 3 која се могу саставити од понуђених цифара, па следи да четврти највећи број има на другој позицији цифру различиту од 9. Следећа највећа цифра коју можемо ставити на другу позицију је 2, па уколико на трећу позицију ставимо цифру 9 (с циљем да број буде што већи), на четврту позицију онда мора доћи цифра 1 (због дељивости са 3). Дакле, одговор је 9291.

2. Означимо са x укупан број становника на претходном попису 3019. Мушкараца је било $\frac{5}{8}$, а од њих је 10% имало 75 или више година, што чини $\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{10}x = \frac{x}{16}$. Жена је било укупно $\frac{3}{8}$, а од њих је 4% имало 75 или више година, што чини $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{100}x = \frac{3x}{200}$. Дакле, укупно је било $\frac{x}{16} + \frac{3x}{200} = \frac{31x}{400}$ особа са 75 или више година. Како овај број представља 7% нове популације, која је за 300 већа од старе, имамо једначину $\frac{31x}{400} = \frac{7}{100}(x + 300)$, што се своди на $3x = 8400$, тј. $x = 2800$. Дакле, Горње Зуце је на попису 3019. имало 2800 становника.

3. Постоји. Узмимо нпр. $a = b = 2019{,}9$ и $c = 4039$. Како важи $a + b = 4039{,}8 > c$, постоји троугао са страницама a, b и c. Међутим, имамо $\lfloor a\rfloor + \lfloor b\rfloor = 2019 + 2019 = 4038 < 4039 = \lfloor c\rfloor$, те овако одабрани бројеви a, b и c испуњавају услове задатка.

4. Одговор: 20 недеља. Нека је a почетна количина траве на ливади, а b количина траве која израсте у току једне недеље. Означимо са p и q, редом, количину траве коју у току једне недеље попасе једна бела, односно црна крава. Услове задатка сада можемо превести у једначине $a + 5b = 5(p + 2q)$ и $a+2b = 2(3p+4q)$. Из прве једначине следи $p = \frac{a+5b-10q}{5}$, па уврштавањем овога у другу добијамо $a+2b = 6\cdot\frac{a+5b-10q}{5}+8q$, што се своди на $5a+10b = 6a+30b-20q$, тј. $a+20b = 20q$. Међутим, ово значи управо да је количина траве обезбеђена на ливади током 20 недеља тачно довољна да једна црна крава пасе 20 недеља, чиме је задатак решен.

5. Страну за Весну и Горана можемо изабрати на 2 начина, позицију њих као пара на 3 начина и њихов међусобни распоред на 2 начина, тј. њих можемо распоредити на 12 начина. Ако Ана и Бане седе са супротне стране у односу на Весну и Горана, можемо их распоредити на $12 (= 4\cdot 3)$ начина; ако Ана и Бане седе са исте стране као Весна и Горан, можемо их распоредити на 2 начина; ако Ана и Бане седе са различитих страна, тада позицију на страни где су Весна и Горан можемо одабрати на 2 начина, затим ко ће од њих двоје бити на тој позицији на 2 начина, и коначно позицију за другу особу на 3 начина. Дакле, Ану и Банета можемо распоредити на $12+2+2\cdot 2\cdot 3 = 26$ начина. За остала 4 госта постоје 4 слободна места, тако да њих можемо распоредити на $4!$ начина. Коначно, укупан број распореда је $12\cdot 26\cdot 4! = 7488$.

Други разред – Б категорија

1. Посматрани израз можемо записати у облику $(2016-3)(2016-1)(2016+1)(2016+3)+16$. Множећи 1. заграду са 4. а 2. са 3. добијамо да је тај израз даље једнак:

$$\begin{aligned}(2016^2-3^2)(2016^2-1^2)+16 &= 2016^4-10\cdot 2016^2+9+16 = 2016^4-10\cdot 2016^2+25\\ &= (2016^2-5)^2,\end{aligned}$$

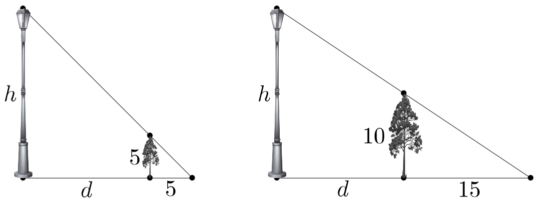
што је и требало доказати.

2. Да би посматрани израз био позитиван за сваки реалан број x, коефицијент уз водећи члан мора бити позитиван, тј. $k > 0$, и дискриминанта мора бити негативна, тј.

$$0 > (4k)^2-4k(k^2+2k-3) = -4k^3+8k^2+12k = -4k(k^2-2k-3) = -4k(k+1)(k-3).$$

Имајући у виду ранији услов $k > 0$, ово се своди на $(k+1)(k-3) > 0$, тј. $k \in (-\infty,-1)\cup(3,\infty)$. Будући да нас занимају само позитивне вредности k, коначно решење задатка је $k \in (3,\infty)$.

3. Нека је d растојање од дрвета до бандере, а h висина бандере. Имамо $h : (d+5) = 5 : 5$ и $h : (d+15) = 10 : 15$. Одатле следи $d+5 = h$ и $d+15 = \frac{3}{2}h$, па добијамо $h+10 = \frac{3}{2}h$ и $h = 20$. Дакле, бандера је висока 20 метара.

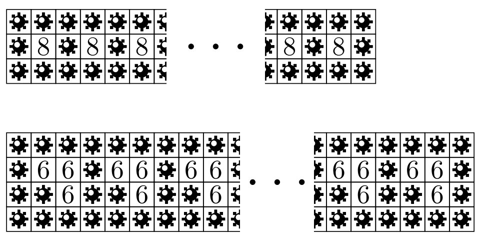


Оп 2019 2Б 3

4. *Прво решење.* Приметимо, ако је (x,y) једно решење посматраног система, онда су решења и парови $(-x,-y)$, (y,x) и $(-y,-x)$. Како систем мора имати тачно два решења, неки од ових парова морају бити једнаки. У случају $(x,y) = (-x,-y)$ добијамо $x = y = 0$, што очигледно није решење. У случају $(x,y) = (-y,-x)$ добијамо $x = -y$, тј. $x+y = 0$, па очигледно ни ово није решење. Дакле, остаје $(x,y) = (y,x)$, тј. $x = y$. Тада се прва једначина своди на $(2x)^2 = 12$, тј. $x = \pm\sqrt{3}(= y)$, а из друге онда добијамо $2(a+1) = 2x^2 = 6$, тј. $a = 2$. Дакле, једина таква вредност параметра a јесте $a = 2$, и тада систем има решења $(x,y) \in \{(\sqrt{3},\sqrt{3}),(-\sqrt{3},-\sqrt{3})\}$.

Друго решење. Одузимањем друге једначине од прве добијамо $2xy = 10-2a$. У случају $a = 5$ следило би $x = 0$ или $y = 0$, те бисмо уврштавањем овога у прву једначину добили 4 решења: $(x,y) \in \{(0,2\sqrt{3}),(0,-2\sqrt{3}),(2\sqrt{3},0),(-2\sqrt{3},0)\}$. Дакле, вредност $a = 5$ нам не одговара. Надаље претпостављамо $a \neq 5$. Тада можемо изразити $y = \frac{5-a}{x}$. Уврштавањем овога у другу једначину добијамо $x^2 + (\frac{5-a}{x})^2 = 2(a+1)$, тј. $x^4 - 2(a+1)x^2 + 25 - 10a + a^2 = 0$. Уведимо смену $x^2 = t$. Да би претходна једначина имала тачно два решења за x, једначина након смене: $t^2 - 2(a+1)t + 25 - 10a + a^2 = 0$ мора имати тачно једно решење t, што значи да њена дискриминанта мора бити 0. Дискриминанта износи $4(a+1)^2 - 100 + 40a - 4a^2 = 48a - 96$, па је она једнака нули једино за $a = 2$. Тада имамо $t = \frac{2(a+1)}{2} = 3$ и одатле $x = \pm\sqrt{t} = \pm\sqrt{3}$, а потом и $y = \frac{3}{x} = \pm\sqrt{3}$. Дакле, једина таква вредност параметра a јесте $a = 2$, и тада систем има решења $(x,y) \in \{(\sqrt{3},\sqrt{3}),(-\sqrt{3},-\sqrt{3})\}$.

5. a) Одговор: да. Одаберимо $a = 3$ и $b = 2 \cdot 2019 + 1 = 4039$, и распоредимо мине као на цртежу горе. (Заправо, могуће је на било каквој табли $a \times b$, где су a и b довољно велики бројеви, одабрати произвољних 2019 поља која нису на ивици и међу којима никоја два нису суседна, и на сва преостала поља поставити мине.)



Оп 2019 2Б 5

b) Одговор: не. Према услову задатка, у овом случају би свако поље које нема мину морало имати тачно једног суседа који нема мину. Дакле, сва поља која немају мину на тај начин би се могла груписати у парове, па следи да их укупно не може бити 2019, што је непаран број.

c) Одговор: да. Одаберимо $a = 4$ и $b = 2020$, и распоредимо мине као на цртежу доле.

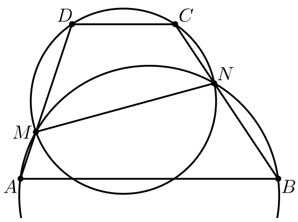
Напомена. Испоставља се да за све бројеве од 1 до 8, са изузетком броја 7, постоји тражени распоред. Видети решење 5. задатка у првом разреду А категорије, као и напомену после решења.

Трећи разред – Б категорија

1. Важи

$$\begin{aligned}\sin 80^\circ - \sin 20^\circ + \sin 50^\circ &= 2\sin 30^\circ \cos 50^\circ + \sin 50^\circ = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 40^\circ + \sin 50^\circ\\ &= 2\sin 45^\circ\cos 5^\circ = \sqrt{2}\sin 85^\circ,\end{aligned}$$

па је $n = 85$ једино решење задатка.



Оп 2019 3Б 2

2. Нека је N друга тачка пресека посматраних кружница. Довољно је доказати $\measuredangle BNM + \measuredangle CNM = 180^\circ$. И заиста, на основу тетивности четвороуглова $BNMA$ и $NCDM$ имамо

$$\begin{aligned}\measuredangle BNM + \measuredangle CNM &= (180^\circ - \measuredangle BAM) + (180^\circ - \measuredangle CDM)\\ &= 360^\circ - (\measuredangle BAM + \measuredangle CDM)\\ &= 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ,\end{aligned}$$

што је и требало доказати.

3. Из НЗД$(a,b) = 10$ закључујемо да је 5 највећи непаран заједнички делилац за a и b, па је 5 највећи непаран заједнички делилац и за a и $2b$. Дакле, да бисмо израчунали НЗД$(a,2b)$, треба још утврдити највећи степен двојке који дели и a и $2b$. Из НЗД$(a,b) = 10$ закључујемо да су бројеви a и b дељиви са 2, али нису оба са 4. С друге стране, из НЗД$(a,b+2) = 12$ закључујемо да је a дељив са 4, па b није дељив са 4. Дакле, a и $2b$ су дељиви са 4, али $2b$ није дељив са 8, па следи НЗД$(a,2b) = 4\cdot 5 = 20$.

Слично, из НЗД$(a,b) = 10$ следи да a и b нису истовремено дељиви са 3, а из НЗД$(a,b+2) = 12$ следи да је a дељив са 3, онда b није дељив са 3. Дакле, a и $3b$ су дељиви са 3, али $3b$ није дељив са 9, па из тога и НЗД$(a,b) = 10$ добијамо НЗД$(a,3b) = 30$.

Дакле, НЗД$(a,2b)$ + НЗД$(a,3b) = 20 + 30 = 50$.

4. Страну за Весну и Горана можемо изабрати на 2 начина, позицију њих као пара на 3 начина и њихов међусобни распоред на 2 начина, тј. њих можемо распоредити на 12 начина. Распоредимо сада Ану и Банета. На страни где су Весна и Горан постоје два слободна места, па позицију Ане и Банета можемо одабрати на два начина, а затим и ко ће седети с које стране на два начина. Дакле, њих можемо распоредити на 4 начина. За остала 4 госта постоје 4 слободна места, тако да њих можемо распоредити на 4! начина. Коначно, укупан број распореда је $12 \cdot 4 \cdot 4! = 1152$.

5. а) Помножимо обе стране почетне једнакости са $\log_{2018} 2019$. Користећи формулу $\log_a 2018 \cdot \log_{2018} 2019 = \log_a 2019$ (и слично за $\log_b 2018$ и $\log_c 2018$) одмах добијамо тражену једнакост.

b) Из почетне једнакости следи

$$b^{\log_a 2018+\log_c 2018} = b^{2\log_b 2018} = (b^{\log_b 2018})^2 = 2018^2.$$

Сада одатле добијамо

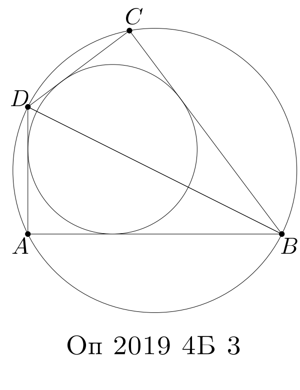
$$\begin{aligned} a^2 &= (2018^{\log_{2018} a})^2 = (2018^2)^{\log_{2018} a} = (b^{\log_a 2018+\log_c 2018})^{\log_{2018} a} \\ &= b^{\log_a 2018\cdot\log_{2018} a+\log_c 2018\cdot\log_{2018} a} = b^{1+\log_c a} = (b^{\log_b c+\log_b a})^{\log_c b} \\ &= (b^{\log_b c}\cdot b^{\log_b a})^{\log_c b} = (ca)^{\log_c b}, \end{aligned}$$

што је и требало показати.

Четврти разред – Б категорија

1. Приметимо, $1+9+0+1+2+0+1+9=23$. Да би састављени број био дељив са 9, и његов збир цифара мора бити дељив са 9. Дакле, збир цифара бројева које посматрамо мора износити 9 или 18, тј. неискоришћене цифре у збиру морају давати 14 или 5. Неискоришћених цифара, по услову задатка, може бити највише 4. Приметимо да никоје 4 нити мање од ових цифара не могу давати збир 14 (заиста, у том случају би међу њима морала бити цифра 9, и још највише три цифре које у збиру дају 5, али број 5 се не може добити као збир три од ових цифара). Даље, број 5 се као збир највише четири од ових цифара може добити на једнозначан начин: $2+1+1+1$. Одатле, једини начин да од ових цифара саставимо бар четвороцифрен број дељив са 9 јесте да одбацимо цифре $2,1,1,1$ и број саставимо од преосталих цифара: $9,9,0,0$. На првој позицији слева мора бити цифра 9, а за наредне три позиције имамо 3 могућности (у зависности од тога на којој од њих је преостала цифра 9). Дакле, постоје укупно 3 таква броја: 9900, 9090 и 9009.

2. Пошто решења треба да буду реална и различита, дискриминанта мора бити позитивна, тј. $0<(3m)^2-16(m+1)m=-7m^2-16m=-m(7m+16)$, одакле добијамо $m\in(-\frac{16}{7},0)$. Нека су x_1 и x_2 решења посматране једначине. Из Вијетових формула имамо $x_1+x_2=\frac{3m}{m+1}$ и $x_1x_2=\frac{4m}{m+1}$. Како оба решења треба да буду већа од -1, бројеви x_1+1 и x_2+1 морају бити позитивни, што значи $(x_1+1)+(x_2+1)>0$ и $(x_1+1)(x_2+1)>0$. Одатле имамо $0<x_1+x_2+2=\frac{3m}{m+1}+2=\frac{5m+2}{m+1}$ и $0<x_1x_2+x_1+x_2+1=\frac{4m}{m+1}+\frac{3m}{m+1}+1=\frac{8m+1}{m+1}$. Прва неједнакост се своди на $m\in(-\infty,-1)\cup(-\frac{2}{5},\infty)$, а друга на $m\in(-\infty,-1)\cup(-\frac{1}{8},\infty)$. Дакле, узимајући пресек сва три добијена скупа за m, добијамо да је коначно решење задатка: $m\in(-\frac{16}{7},-1)\cup(-\frac{1}{8},0)$.



Оп 2019 4Б 3

3. У сваком тангентном четвороуглу важи $AB+CD=AD+BC$, па сабирањем ове једнакости с оном датом у поставци добијамо $2AB=2BC$, тј. $AB=BC$. Аналогно, $AD=DC$. Сада из става ССС добијамо $\triangle ABD\cong\triangle CBD$, одакле закључујемо $\measuredangle DAB=\measuredangle DCB$. Но, како је четвороугао $ABCD$ такође тетиван а $\measuredangle DAB$ и $\measuredangle DCB$ су два његова наспрамна угла, њихов збир износи 180°, па следи да су $\measuredangle DAB$ и $\measuredangle DCB$ прави углови. Дакле, тачке A и C леже на кружници над пречником BD, што је и требало доказати.

4. Нека су x_1, x_2 и x_3 решења постављене једначине, $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$. Из Вијетових формула имамо $x_1 + x_2 + x_3 = 3a$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2a^2 + 5$ и $x_1x_2x_3 = 2a^2 - 3$. Како решења треба да чине аритметичку прогресију, можемо записати $x_1 = x_2 - d$ и $x_3 = x_2 + d$ за неки реалан број d, $d \geqslant 0$. Тада се претходне три формуле своде на

$$3x_2 = 3a, \quad 3x_2^2 - d^2 = 2a^2 + 5 \quad \text{и} \quad x_2^3 - x_2d^2 = 2a^2 - 3.$$

Из прве од њих одмах добијамо $x_2 = a$. Друге две се онда своде на

$$d^2 = 3x_2^2 - 2a^2 - 5 = 3a^2 - 2a^2 - 5 = a^2 - 5 \quad \text{и} \quad d^2 = \frac{x_2^3 - 2a^2 + 3}{x_2} = \frac{a^3 - 2a^2 + 3}{a}.$$

Даље, уврштавањем $x_2 = a$ у једначину из поставке задатка добијамо

$$0 = a^3 - 3a^3 + (2a^2 + 5)a - 2a^2 + 3 = 5a - 2a^2 + 3,$$

одакле следи $a = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{-4} = \frac{-5 \pm 7}{-4}$, тј. $a = -\frac{1}{2}$ или $a = 3$. У случају $a = -\frac{1}{2}$ следило би $d^2 = (-\frac{1}{2})^2 - 5 = -\frac{19}{4} < 0$, па постављена једначина не би имала сва реална решења. У случају $a = 3$ имамо $d^2 = 3^2 - 5 = 4$ (и $d^2 = \frac{3^3 - 2\cdot 3^2 + 3}{3} = 4$, што је исто), тј. $d = 2$; постављена једначина тада гласи $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$, и њена решења су $x_1 = x_2 - d = 3 - 2 = 1$, $x_2 = 3$ и $x_3 = x_2 + d = 3 + 2 = 5$.

Дакле, једина таква вредност параметра a јесте $a = 3$.

5. Бројеви који у декадном запису имају тачно k цифара су управо сви природни бројеви од $1\underbrace{0\ldots0}_{k-1 \text{ пута}}$ до $\underbrace{99\ldots9}_{k \text{ пута}}$, тј. од 10^{k-1} до $10^k - 1$, и њих има $(10^k - 1) - 10^{k-1} + 1 = 10^k - 10^{k-1}$. Према томе, групишући једнаке сабирке добијамо:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{brc}(1) + \mathrm{brc}(2) + \cdots + \mathrm{brc}(\underbrace{99\ldots99}_{2019 \text{ пута}}) \\
&\quad = \sum_{k=1}^{2019} k(10^k - 10^{k-1}) = \sum_{k=1}^{2019} k10^k - \sum_{k=1}^{2019} k10^{k-1} = \sum_{k=0}^{2019} k10^k - \sum_{k=0}^{2018} (k+1)10^k \\
&\quad = 2019 \cdot 10^{2019} + \sum_{k=0}^{2018} (k - (k+1))10^k = 2019 \cdot 10^{2019} - \sum_{k=0}^{2018} 10^k \\
&\quad = 2019 \cdot (10^{2019} - 1) + 2019 - \frac{10^{2019} - 1}{9} = 2019 \cdot \underbrace{99\ldots99}_{2019 \text{ пута}} + 2019 - \underbrace{11\ldots11}_{2019 \text{ пута}},
\end{aligned}$$

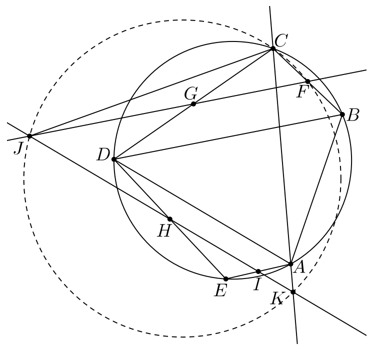
што је и требало показати.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23. 2. 2019.

Први разред – А категорија

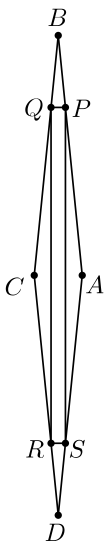
1. Дата једначина нема решења у скупу целих бројева. Посматрајмо једначину по модулу 7. У том случају десна страна једначине је конгруентна са 4. Показаћемо да лева страна никад није конгруентна са 4 по модулу 7. С обзиром на $6 \equiv -1 \pmod 7$ и $8 \equiv 1 \pmod 7$, лева страна је по модулу 7 конгруентна са $z^3 - x^3$. Приметимо, $0^3 = 0$, $(\pm 1)^3 = \pm 1$, $(\pm 2)^3 = \pm 8 \equiv \pm 1 \pmod 7$ и $(\pm 3)^3 = \pm 27 \equiv \mp 1 \pmod 7$; дакле, потпуни кубови по модулу 7 могу бити конгруенти само са -1, 0 и 1, па следи да $z^3 - x^3$ може по модулу 7 бити конгруентно са 0, 1, 2, -1 и -2, те не може бити конгруентно са 4. Тиме је задатак решен.

2. Како је IH средња линија у $\triangle AED$, следи $IH \parallel AD$, Слично, $FG \parallel BD$. Дакле, $\measuredangle IJF = \measuredangle ADB$. Како је петоугао $ABCDE$ тетиван, следи $\measuredangle ADB = \measuredangle ACB$. Свеукупно имамо $\measuredangle KJF = \measuredangle IJF = \measuredangle ACB = \measuredangle KCF$. Дакле, четвороугао $KFCJ$ је тетиван, тј. тачка K се налази на кружници описаној око $\triangle FCJ$.



Ок 2019 1А 2

3. Због $\{x\} \in [0,1)$, јасно је да сва решења x могу бити само у интервалу $[2019, 4038)$. Уведимо смену $x = 2019 + t$. Тада важи $\{x\} = \{t\}$, па се почетна једначина своди на $t = 2019\{t\}$, где $t \in [0, 2019)$. Из записа $t = \lfloor t \rfloor + \{t\}$ добијамо $\lfloor t \rfloor = 2018\{t\}$, тј. $\{t\} = \frac{\lfloor t \rfloor}{2018}$. Како $\lfloor t \rfloor$ може узимати вредности $0, 1, 2, \dots, 2018$, за сваку од ових могућности добићемо једнозначно одређену вредност $\{t\}$, са изузетком случаја $\lfloor t \rfloor = 2018$: наиме, тада би следило $\{t\} = \frac{2018}{2018} = 1$, што је немогуће због захтева $0 \leqslant \{t\} < 1$. Према томе, закључујемо да добијена једначина има укупно 2018 решења по t (и то су: 0, $1 + \frac{1}{2018}$, $2 + \frac{2}{2018}$, $3 + \frac{3}{2018}$, …, $2017 + \frac{2017}{2018}$), па и полазна једначина има укупно 2018 решења.



Ок 2019 1А 4

4. Одговор је потврдан. Нека је, на пример, четвороугао $ABCD$ ромб са теменима $A(1,0)$, $B(0,50)$, $C(-1,0)$ и $D(0,-50)$. Нека су тачке P и Q добијене у пресеку праве $y = 49$ са ромбом $ABCD$ (где је P десно од Q), а тачке R и S у пресеку праве $y = -49$ са ромбом $ABCD$ (где је R лево од S). Тада је $PQRS$ правоугаоник и за збир његових дијагонала важи $PR + QS > 2PS = 2 \cdot 98 = 196$, али $AC + BD = 2 + 100 = 102 < 196$.

5. Побеђује први играч. Он треба у првом потезу да упише број 673 у угаоно поље (притом приметимо, $673 = \frac{2019}{3}$). Други играч тада мора да упише свој број, рецимо x, у неко од поља b или c (уколико то не учини, тада би његов број био у истој врсти, колони или дијагонали са уписаним бројем 673, па би први играч у следећем потезу могао комплетирати збир 2019 уписивањем броја $2 \cdot 673 - x$ на треће поље; приметимо, ако је x неки од дозвољених бројева са списка, тада је и број $2 \cdot 673 - x$ дозвољен). Први играч потом треба да на незаузето од поља b и c упише број $2 \cdot 673 - x$. После овог потеза, где год да други играч упише свој наредни број, рецимо y, он ће бити у истој врсти, колони или дијагонали са уписаним бројем 673, па ће први играч (уписивањем броја $2 \cdot 673 - y$ на треће поље) моћи да комплетира збир 2019 и победи.

673		
		b
	c	

Ок 2019 1А 5

Други разред – А категорија

1. Да би лева страна била дефинисана, мора важити $\sin x, \cos x \geqslant 0$ и $\cos x - \sqrt{\cos x} \neq 0$ (а то се своди на $\cos x \neq 0$ и $\cos x \neq 1$). Након постављања ових услова, једначина се своди на $\sin x - \sqrt{\sin x} = \cos x - \sqrt{\cos x}$, тј. $\sin x - \cos x = \sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x}$, и коначно

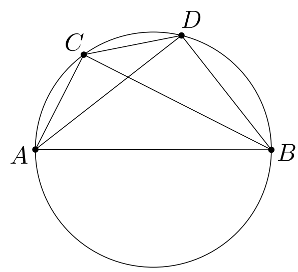
$$(\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x})(\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}) = \sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x}.$$

Претпоставимо прво $\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x} = 0$. Одатле следи $\sin x = \cos x$, тј. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, али због услова $\sin x, \cos x \geqslant 0$, преостаје само $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Претпоставимо сада $\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x} \neq 0$. Тада се скраћивањем горња једнакост своди на $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} = 1$. Означимо $a = \sqrt{\sin x}$ и $b = \sqrt{\cos x}$. Тада преостаје $a + b = 1$, при чему бројеви a и b испуњавају $0 < a, b < 1$ (неједнакости су строге због $\cos x \neq 0, 1$, а онда и $\sin x \neq 1, 0$). Међутим, онда важи $a + b > a^4 + b^4 = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, контрадикција.

Дакле, коначна решења чине само она добијена у првом случају, тј. $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ за $k \in \mathbb{Z}$.

2. Темена ма ког правоугаоника задовољавају наведени услов. Докажимо да није могуће одабрати 5 тачака са описаном особином. Претпоставимо супротно. Нека је AB најдужа дуж у скупу свих дужи чије су крајње тачке међу 5 уочених тачака. Тада три преостале тачке морају бити на кружници чији је пречник AB, те се бар две од њих налазе на истом луку $\widehat{AB}$. Нека је распоред тачака на луку $A - C - D - B$. Тада важи $\measuredangle ACD = \measuredangle ACB + \measuredangle BCD = 90^\circ + \measuredangle BCD > 90^\circ$, па је $\triangle ACD$ тупоугли, контрадикција.



Ок 2019 2А 2

Из наведеног следи да је тражени број тачака једнак 4.

3. Одговор: такви бројеви постоје. Међу свим разломцима мањим од π чији су имениоци не већи од 2019, нека је $\frac{m}{n}$ највећи. Између $\frac{m}{n}$ и π нема ниједног разломка $\frac{b}{a}$ за $a \leqslant 2019$. Другим речима, између $\frac{am}{n}$ и $a\pi$ нема ниједног целог броја b, одакле следи $\lfloor \frac{am}{n} \rfloor = \lfloor \frac{a}{\pi} \rfloor$ за све $a = 1, 2, \ldots, 2019$. Дакле, бројеви m и n испуњавају услове из поставке.

4. У случају да је један од a, b, c једнак 0, лако видимо да и преостала два морају бити 0, што даје једно решење. Претпоставимо сада да су a, b, c позитивни. Из прве једначине следи $\sqrt{b} > 1$ (у супротном би лева страна била мања од a), и слично из друге и треће $\sqrt{c} > 1$ и $\sqrt{a} > 1$. Не умањујући општост, узмимо $a = \max\{a, b, c\}$. Из друге једначине имамо $a = b(\sqrt{c} - 1) \leqslant a(\sqrt{c} - 1)$, одакле следи $c \geqslant 4$ (стога и $a \geqslant c \geqslant 4$). Из прве једначине имамо $c = a(\sqrt{b} - 1) \geqslant c(\sqrt{b} - 1)$, одакле следи $b \leqslant 4$. Међутим, сада из тога и $b = c(\sqrt{a} - 1) \geqslant 4(\sqrt{4} - 1) = 4$ следи да се у последњој неједнакости мора достићи једнакост, тј. $a = b = c = 4$.

Дакле, систем има два решења: $a = b = c = 0$ и $a = b = c = 4$.

5. Одаберимо k такмичара из првог предмета и распоредимо их у различите учионице. Затим међу преосталим ученицима одаберимо k такмичара из другог предмета и распоредимо их у различите учионице. Настављајући овај поступак укупно m пута, тј. за сваки од m предмета (где услов да се из сваког предмета такмичи mk ученика гарантује да ћемо у сваком кораку имати довољно преосталих ученика да бисмо направили тражени избор), добијамо тражени размештај.

Трећи разред – А категорија

1. Како је на поменутом интервалу cos опадајућа функција, из тога и познате неједнакости $\sin t < t$ добијамо $\cos(\sin x) > \cos x$. Из исте неједнакости одмах добијамо и $\sin(\cos x) < \cos x$. Све заједно, $\cos(\sin x) > \cos x > \sin(\cos x)$.

2. Означимо бројеве уписане у одређеним пољима посматране таблице као на слици. Примењујући услов из поставке за поља у којима су уписани бројеви a, b, e и f, добијамо $abef = 1$, $abcefg = 1$, $abefij = 1$ и $abcefgijk = 1$. Множећи ове четири једнакости добијамо $a^4b^4c^2e^4f^4g^2i^2j^2k = 1$, одакле следи $k = 1$. На аналоган начин добијамо $p = q = l = 1$.

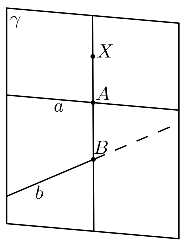
a	b	c	d		
e	f	g	h		
i	j	k	l		
m	n	p	q		

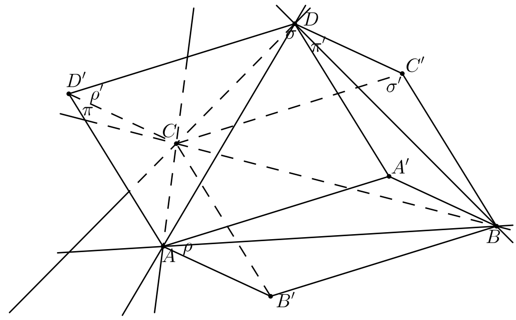
Ок 2019 3А 2

Сада, посматрајући поља у којима су уписани бројеви i и j, добијамо $efijmn = 1$ и $efgijkmnp = 1$, а множењем ових једнакости следи $e^2f^2i^2j^2m^2n^2gkp = 1$. Одавде, $gkp = 1$, а с обзиром на $k = p = 1$, остаје $g = 1$. Аналогно, $h = 1$, као и $j = n = 1$. Примењујући услов на поља у којима су бројеви a и b, и множећи те једнакости, добијамо $a^2b^2e^2f^2cg = 1$, па због $g = 1$ следи $c = 1$. Аналогно, $d = 1$, као и $i = m = 1$. Сада из услова за поље у ком је уписан број k добијамо $f = 1$ (јер су на свих осталих 8 поља јединице), потом из поља у ком је уписан број c добијамо $b = 1$ (јер су на свих осталих 5 поља јединице), аналогно добијамо $e = 1$, и коначно $a = 1$ (из услова за поље на ком је уписан број a).

Како у свим обележеним пољима морају бити уписане јединице, на аналоган начин то важи и за остатак таблице.

3. Докажимо најпре следеће помоћно тврђење: ако се у неком скупу тачака T налазе све тачке с неке две мимоилазне праве a и b, и ако су α и β паралелне равни такве да важи $a \subseteq \alpha$ и $b \subseteq \beta$, тада се у скупу $\ell(T)$ налазе све тачке простора с могућим изузетком тачака равни α и β. Нека је X произвољна тачка простора која не лежи у $\alpha\cup\beta$. Означимо са γ раван одређену правом a и тачком X, и нека се γ и b секу у тачки B (морају се сећи због $\gamma \not\equiv \alpha$). Тада у равни γ права XB мора сећи праву a у некој тачки A (праве не могу бити паралелне јер све праве које су паралелне с правом a а секу се с правом b морају лежати у равни β, док $X \notin \beta$), па како $A, B \in T$, следи и $X \in T$. Тиме је помоћно тврђење доказано. Притом, лако се види да све тачке простора осим тачака из $\alpha\cup\beta$ управо и јесу све тачке које могу „генерисати“ тачке с правих a и b (поред, наравно, њих самих) — док, ако су праве a и b компланарне, оне „генеришу“ читаву раван њима одређену (и ништа сем тога).





Ок 2019 3А 2

Означимо тачке из скупа S датог у поставци са A, B, C и D. Скуп $\ell(S)$ је унија правих AB, AC, AD, BC, BD, CD. Нека су π и π' паралелне равни које садрже мимоилазне праве AC и BD, затим ρ и ρ' паралелне равни које садрже мимоилазне праве AB и CD, и најзад σ и σ' паралелне равни које садрже мимоилазне праве AD и BC, све респективно. Означимо $\pi' \cap \rho \cap \sigma = \{A'\}$, $\pi \cap \rho \cap \sigma' = \{B'\}$, $\pi' \cap \rho' \cap \sigma' = \{C'\}$ и $\pi \cap \rho' \cap \sigma = \{D'\}$ (тј. $AB'CD'A'BC'D$ је паралелопипед). Приметимо, поред тачака A, B, C и D, тачке A', B', C' и D' представљају једине четири тачке које се налазе у пресеку неких трију од равни π, π', ρ, ρ', σ и σ'. За сваку другу тачку у простору можемо одабрати један од парова равни $\{\pi, \pi'\}$, $\{\rho, \rho'\}$ или $\{\sigma, \sigma'\}$ где ниједна раван у том пару не садржи уочену тачку; према помоћном тврђењу с почетка, све такве тачке, дакле, припадају скупу $\ell(\ell(S))$, а према коментару с краја првог пасуса, тачке A', B', C' и D' нису у скупу $\ell(\ell(S))$.

Дакле, тражени број тачака јесте коначан, и износи 4.

4. У задатку ћемо више пута користити следеће: ако за природне бројеве a и b важи $a \mid b$, тада важи и $\varphi(a) \mid \varphi(b)$ (заиста, ако a и b запишемо преко својих простих факторизација, $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ и $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} q_1^{\gamma_1} q_2^{\gamma_2} \cdots q_l^{\gamma_l}$, где важи $\beta_i \geqslant \alpha_i$ за $i = 1, 2, \ldots, k$, тада имамо $\frac{\varphi(b)}{\varphi(a)} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i - \alpha_i} \prod_{j=1}^{l} q_j^{\gamma_j - 1}(q_j - 1) \in \mathbb{N}$, што смо и тврдили).

Уведимо нотацију $\varphi^k(n) = \varphi(\varphi^{k-1}(n))$ и $\varphi^1(n) = \varphi(n)$. Означимо $n = 3^\alpha \cdot 673^\beta \cdot k$ за $(k, 4038) = 1$ и $\alpha, \beta \geqslant 1$. Докажимо најпре $k = 1$. Ако то није, онда $2 \mid \varphi(k)$. Тада имамо $\varphi(n) = 3^{\alpha-1} \cdot 2 \cdot 673^{\beta-1} \cdot 672 \cdot \varphi(k) = 2^6 \cdot 3^\alpha \cdot 673^{\beta-1} \cdot 7 \cdot \varphi(k)$, а из тога следи $2^7 \cdot 3^\alpha \cdot 7 \mid \varphi(n)$. Одатле добијамо $2^8 \cdot 3^\alpha = \varphi(2^7 \cdot 3^\alpha \cdot 7) \mid \varphi^2(n)$, а одатле даље $2^8 \cdot 3^{\alpha-1} \mid \varphi^3(n)$, што повлачи $2^8 \mid \varphi^3(n)$. Применом функције φ још 7 пута на обе стране добијамо $2 \mid \varphi^{10}(n)$, што доводи до контрадикције.

Дакле, n се записује као $n = 3^\alpha \cdot 673^\beta$.

Докажимо $\alpha = \beta = 1$. Претпоставимо супротно: бар један од бројева α и β је већи од 1. Радићемо случај $\alpha \geqslant 2$, са напоменом да се $\beta \geqslant 2$ решава аналогно. Слично као у првом делу, рачунамо $\varphi(n) = 2^6 \cdot 3^\alpha \cdot 7 \cdot 673^{\beta-1}$. Одатле имамо редом $2^6 \cdot 3^\alpha \cdot 7 \mid \varphi(n)$, затим $2^7 \cdot 3^\alpha \mid \varphi^2(n)$, па $2^7 \cdot 3^{\alpha-1} \mid \varphi^3(n)$ и $2^7 \cdot 3^{\alpha-2} \mid \varphi^4(n)$. Из тога закључујемо $2^7 \mid \varphi^4(n)$, а потом и $2 \mid \varphi^{10}(n)$, што поново доводи до контрадикције. Дакле, једино решење је $n = 2019$.

5. Применимо неједнакост између аритметичке и геометријске средине на следећи начин:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{a+2b+3c}{3a+2b+c}} &= \frac{a+2b+3c}{\sqrt{(a+2b+3c)(3a+2b+c)}} \geqslant \frac{2(a+2b+3c)}{(a+2b+3c)+(3a+2b+c)} \\ &= \frac{2a+4b+6c}{4(a+b+c)}.\end{aligned}$$

Сабирањем овога и две аналогне неједнакости добијамо

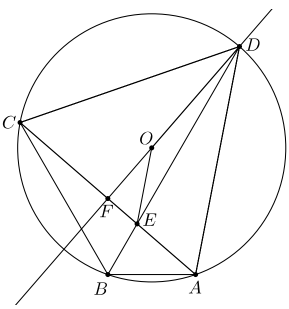
$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{a+2b+3c}{3a+2b+c}} + \sqrt{\frac{b+2c+3a}{3b+2c+a}} + \sqrt{\frac{c+2a+3b}{3c+2a+b}} \\ &\qquad\qquad \geqslant \frac{2a+4b+6c}{4(a+b+c)} + \frac{2b+4c+6a}{4(a+b+c)} + \frac{2c+4a+6b}{4(a+b+c)} = 3,\end{aligned}$$

што је и требало доказати.

Четврти разред – А категорија

1. Да би десна страна била дефинисана, мора важити $x \neq -1$. Постављена једначина се своди на $2^{x^2+2x}(x+1) = 2^{4x^4}x^2$, а множећи обе стране са 2, примећујемо да је ово еквивалентно са $2^{(x+1)^2}(x+1) = 2^{(2x^2)^2}(2x^2)$. Приметимо да је функција $f : t \mapsto 2^{t^2}t$ строго растућа (заиста, имамо $f'(t) = 2^{t^2}\ln 2 \cdot 2t \cdot t + 2^{t^2} = 2^{t^2+1}t^2 \ln 2 + 2^{t^2} > 0$), па тиме и инјективна. Одатле следи да мора важити $x+1 = 2x^2$, те су решења постављене једначине $x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2+4\cdot 2}}{4} = \frac{1\pm 3}{4}$, тј. $x_1 = 1$ и $x_2 = -\frac{1}{2}$ (оба испуњавају услов $x \neq -1$).

2. Како $\measuredangle ABD$ и $\measuredangle CBD$ износе по 60° (због једнакости периферијских углова), закључујемо да је BD симетрала $\measuredangle ABC$, па одатле следи $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$. Нека је F средиште дужи AC. Тада из претходног имамо $\frac{AE}{EF} = 2$, а како важи и $\frac{DO}{OF} = 2$ (јер је $\triangle ACD$ једнакостраничан), по обратној Талесовој теореми имамо $EO \parallel AD$. Одатле следи $\measuredangle FOE = \measuredangle FDA = 30^\circ$, а онда $\measuredangle DOE = 150^\circ$.



Ок 2019 4А 2

3. За запис свих природних бројева са не више од k бинарних цифара, уколико бројеве записујемо укључујући и водеће нуле (допуњавајући до тачно k цифара), потребно је укупно $2^k k$ цифара, и од тога тачно пола (тј. $2^{k-1}k$)

нула и тачно пола јединица; водећих нула на првој позицији слева има укупно 2^{k-1} (после прве водеће нуле надаље може доћи било који одабир цифара 0 и 1 за преосталу $k-1$ позицију), на другој позицији слева има укупно 2^{k-2} (тада су прве две цифре нуле па бирамо остале на 2^{k-2} начина) итд., тј. уколико избришемо водеће нуле преостаје нам укупно

$$2^k k - \sum_{i=1}^{k} 2^{k-i} = 2^k k - (2^k - 1) = 2^k(k-1) + 1$$

искоришћених цифара.

Како се у скупу A налазе сви природни бројеви мањи од 256, за њихов запис потребно је укупно $2^8 \cdot 7 + 1 = 1793$ цифара, и међу њима има тачно $2^7 \cdot 8 = 1024$ јединице. Посматрајмо првих 2019 цифара низа из поставке. У њему су, дакле, бар 1024 јединице. Такође приметимо и да у оквиру низа из поставке можемо пронаћи 2019 узастопних нула (на пример, број 2^{2019} садржи 2019 узастопних нула, а по услову задатка се налази у скупу A). Приметимо да, уколико уочимо произвољан блок од 2019 узастопних цифара посматраног низа, па тај блок померимо за једно место удесно, број јединица у блоку приликом овог поступка може се променити највише за 1. Дакле, како у полазном блоку имамо бар 1024 јединице, а у неком каснијем блоку немамо ниједну јединицу, на основу описаног следи да у неком блоку између ова два мора постојати тачно 1000 јединица.

4. Посматрајмо функцију $g(x) = e^{2019x} f(x)$. Функција $g(x)$ је такође диференцијабилна на $\mathbb{R}$ и има две различите нуле. Из Ролове теореме закључујемо да функција $g'(x)$ има бар једну реалну нулу. Међутим, $g'(x) = e^{2019x}(2019 f(x) + f'(x))$, одатле следи да и функција $2019f(x) + f'(x)$ има бар једну реалну нулу.

5. Претпоставимо $\frac{n}{f(n)} = k \in \mathbb{N}$. Нека су a и b прве две цифре слева у s-тоцифреном броју n. Приметимо,

$$(10a + b)10^{s-2} \leqslant n < (10a + b + 1)10^{s-2}$$

и

$$(10b + 1)10^{s-2} \leqslant f(n) < (10b + a + 1)10^{s-2},$$

из чега следи

$$\frac{10a + b}{10b + a + 1} < k < \frac{10a + b + 1}{10b + a}.$$

Лева неједнакост се своди на $(10-k)a - k < (10k-1)b$ а десна на $(10k-1)b < (10-k)a + 1$, тј. заједно имамо

$$(10-k)a - k < (10k-1)b < (10-k)a + 1.$$

Размотримо прво случај $b > 0$. За $k > 4$ имамо $10k - 1 > (10-k)9 + 1$, што је контрадикторно десној неједнакости. Остаје $k \leqslant 4$. Пример за $k = 1$ добијамо рецимо за $n = 11$. За $k = 2$ имамо $8a - 2 < 19b < 8a + 1$, одакле следи $19b \equiv 0, -1 \pmod 8$ и $19b < 8 \cdot 9 + 1 = 73$, а за шта видимо да није могуће; дакле, не можемо конструисати пример за $k=2$. За $k=3$ имамо $7a-3<29b<7a+1$, одакле следи $29b \equiv 0,-1,-2 \pmod 7$ и $29b<7\cdot 9+1=64$, за шта видимо да није могуће, те ни овде нема решења. За $k=4$ имамо $6a-4<39b<6a+1$, што је могуће само за $b=1$ и $a=7$. У том случају, нека је x број који се добија када у броју n са обрисане прве две цифре заменимо све појаве цифара 1 и 7 цифром 0; нека је A број који се добија када, слично, заменимо све појаве цифре 7 цифром 1, а све остале цифре цифром 0; а B број који се добија када све цифре различите од 1 заменимо цифром 0. Можемо записати

$$n=7\cdot 10^{s-1}+10^{s-2}+7A+B+x \quad \text{и} \quad f(n)=10^{s-1}+7\cdot 10^{s-2}+A+7B+x.$$

Услов $n=4f(n)$ се своди на $3\cdot 10^{s-1}+3A=27\cdot 10^{s-2}+27B+3x$, што даје $10^{s-1}+A=9\cdot 10^{s-2}+9B+x$, тј. $10^{s-2}+A=9B+x$. По конструкцији важи $x<10^{s-2}$, па следи $B>0$; међутим, тада на позицији прве ненула цифре здесна у броју B на десној страни једнакости имамо цифру 9 а на левој страни цифру 0, контрадикција. Дакле, коначно, ни за $k=4$ не можемо наћи одговарајуће n.

Сада радимо случај $b=0$. Из горедобијене неједнакости имамо $10-2k \leqslant (10-k)a-k<0<(10-k)a+1 \leqslant 91-9k$, те следи $k\in\{6,7,8,9,10\}$. За $k=6,7,9,10$ имамо примере, редом, $n=108,105,405,10$. Претпоставимо сада $k=8$. Тада имамо $2a-8<0$, па следи $a\in\{1,2,3\}$. Такође важи $s\geqslant 3$, јер за бројеве $\overline{a0}$ важи $\frac{\overline{a0}}{f(\overline{a0})}=\frac{\overline{a0}}{a}=10$. Дефинишимо сада бројеве x, A и B слично као у претходном пасусу (x добијамо заменом свих појава цифре a цифром 0, A добијамо заменом свих појава цифре a цифром 1 а осталих цифара цифром 0, а B добијамо заменом свих појава цифре 0 цифром 1 а осталих цифара цифром 0; све то у броју n са обрисане прве две цифре). Тада важи $n=a10^{s-1}+aA+x$ и $f(n)=a10^{s-2}+aB+x$, па се услов $n=8f(n)$ своди на

$$2a10^{s-2}+aA=8aB+7x.$$

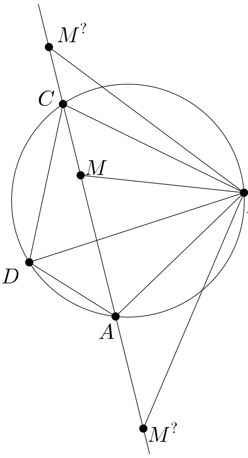
Претпоставимо да се n завршава цифром 0. Тада, по дефиницији бројева x, A и B имамо $10\mid x,A$ и $10\nmid B$, али ово је у контрадикцији с горњом једнакошћу (сви сабирци сем $8aB$ су дељиви са 10, а $8aB$ то није јер се B завршава цифром 1 и $a\in\{1,2,3\}$). Претпоставимо сада да се n завршава цифром a. Тада имамо $10\mid x,B$ и $10\nmid A$, што је опет контрадикција с горњом једнакошћу јер $10\nmid aA$. Најзад, претпоставимо да се n завршава цифром различитом од 0 и a. Тада имамо $10\mid A,B$ и $10\nmid x$, и поново контрадикција. Следи да не постоје решења за $k=8$.

Према свему, једине вредности израза $\frac{n}{f(n)}$ у скупу природних бројева су: 1, 6, 7, 9 и 10.

Први разред – Б категорија

1. Из четвртог услова (уз први) добијамо да у скупу A могу бити само бројеви 1, 2 и 3. Из трећег услова имамо $3\notin A$, а из другог $2\in A$. Даље, из последњег услова имамо $1\notin B$, а како $1\in A\cup B$, следи $1\in A$. Тиме смо једнозначно идентификовали скуп A: $A=\{1,2\}$. У скупу Bморају бити сви бројеви 3, 4, 5 и 6, како би био испуњен први услов. Из другог услова још имамо $2 \notin B$, а из последњег $1 \notin B$. Остаје, дакле, једино могуће $B = \{3,4,5,6\}$.

2. Приметимо, слова T и R у траженој шифри се јављају по три пута, а сва преостала слова по једном. Дакле, како прво и последње слово морају бити исто, по услову задатка то мора бити једно од слова T или R. Претпоставимо да шифра почиње и завршава се словом T. Тада унутар шифре преостаје укупно 10 слова, међу којима се R јавља три пута а преостала слова по једном; дакле, они се могу испермутовати на $\frac{10!}{3!}$ начина, што је и укупан број могућих шифара које почињу и завршавају се са T. Уколико шифра почиње словом R, рачун је потпуно аналоган, те у том случају добијамо још исто толико могућности. Дакле, укупно постоји $2 \cdot \frac{10!}{3!} = \frac{10!}{3}$ могућности које Бетмен треба да испроба.



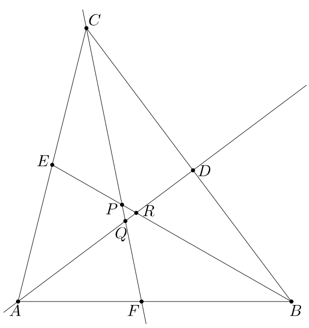
Ок 2019 1Б 3

3. Из тетивности четвороугла $ABCD$ добијамо $\measuredangle ACB = \measuredangle ADB = 50°$ и $\measuredangle CAB = \measuredangle CDB = 60°$. Претпоставимо да је тачка M изван дужи AC. Ако би важио распоред $A - C - M$, тада би $\measuredangle ACB$ био спољашњи за $\triangle BCM$, па би морало важити $\measuredangle ACB > \measuredangle AMB$, што је немогуће (та два угла износе 50° и 70°, редом). Слично, ако би важио распоред $C - A - M$, следило би $\measuredangle CAB > \measuredangle AMB$, опет немогуће. Дакле, преостаје једино могућност да је тачка M на дужи AC.

4. Приметимо,

$$10^{2019} - 9991 = 1\underbrace{00\ldots00}_{2019} - 9991 = \underbrace{99\ldots9}_{2015}0009 = 9 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{2015}0001.$$

Дакле, да би посматрани број био дељив са 81, довољно је још показати да је број $\underbrace{11\ldots1}_{2015}0001$ дељив са 9. Како његов збир цифара износи $2015 \cdot 1 + 1 = 2016$, што јесте дељиво са 9, следи да је и тај број дељив са 9, чиме је задатак решен.

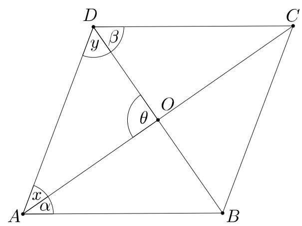


Ок 2019 1Б 5

5. Нека је AD висина, BE тежишна дуж, а CF симетрала угла у оштроуглом $\triangle ABC$. Нека се AD и BE секу у тачки R, AD и CF у тачки Q, а BE и CF у тачки P. Претпоставимо супротно тврђењу задатка, тј. да је $\triangle PQR$ једнакостраничан. Како важи $\measuredangle CQD = 60°$ и $\measuredangle QDC = 90°$, следи $\measuredangle QCD = 30°$. Како је CF симетрала угла, одатле добијамо $\measuredangle QCE = 30°$, а како важи и $\measuredangle CPE = 60°$, следи $\measuredangle PEC = 90°$. Сада уочавамо $\triangle ABE \cong \triangle CBE$ (због $BE \cong BE$, $AE \cong CE$ и $\measuredangle AEB = \measuredangle CEB = 90°$), па је $\triangle ABC$ једнакокрак, а како већ знамо да његов угао код темена C износи 60°, закључујемо да $\triangle ABC$ мора бити једнакостраничан. Међутим, тада се праве AD, BE и CF секу у једној тачки, контрадикција с претпоставком задатка.

Други разред – Б категорија

1. Уведимо смену $x^2+3x+6=t$. Једначина се своди на $\frac{5x}{t}+\frac{7x}{t+4x}=1$, тј. $5xt+20x^2+7xt=t^2+4tx$ (уз услове $t\neq 0$ и $t+4x\neq 0$), што је еквивалентно са $t^2-8tx-20x^2=0$. Дељењем обе стране са x^2 (уз постављање услова $x^2\neq 0$) једначина се даље своди на $(\frac{t}{x})^2-8\frac{t}{x}-20=0$, па увођењем нове смене $k=\frac{t}{x}$ добијамо $k^2-8k-20=0$. Решења ове квадратне једначине су $k_{1/2}=\frac{8\pm\sqrt{8^2-4\cdot(-20)}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{144}}{2}=\frac{8\pm 12}{2}$, тј. $k_1=\frac{8+12}{2}=10$ и $k_2=\frac{8-12}{2}=-2$. За $k=10$ после враћања смене имамо $x^2+3x+6=t=kx=10x$, тј. $x^2-7x+6=0$, чијим решавањем добијамо $x_{1/2}=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 6}}{2}=\frac{7\pm 5}{2}$, тј. $x_1=6$ и $x_2=1$. За $k=-2$ после враћања смене имамо $x^2+3x+6=t=kx=-2x$, тј. $x^2+5x+6=0$, чијим решавањем добијамо $x_{3/4}=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 6}}{2}=\frac{-5\pm 1}{2}$, тј. $x_3=-2$ и $x_4=-3$. Сва четири добијена решења испуњавају услове дефинисаности, па они заиста јесу решења полазне једначине.



Ок 2019 2Б 2

2. Означимо $\measuredangle BAC=\alpha$, $\measuredangle BDC=\beta$, $\measuredangle AOD=\theta$, $\measuredangle OAD=x$ и $\measuredangle ODA=y$. Тада имамо и $\measuredangle BCA=\alpha$ (јер је $\triangle ABC$ једнакокрак), а и $\measuredangle DBC=\beta$ (јер је $\triangle BCD$ једнакокрак), као и $\measuredangle BOC=\theta$ (унакрсан са $\measuredangle AOD$). Из $\triangle BOC$ имамо $\theta=180^\circ-\alpha-\beta$, а из $\triangle AOD$ имамо $\theta=180^\circ-x-y$, одакле следи $\alpha+\beta=x+y$. Даље, услов задатка се преводи у $2\theta=\alpha+x+\beta+y$, што уз закључак из претходне реченице даје $2\theta=2(\alpha+\beta)$, тј. $\theta=\alpha+\beta$; сада поново из $\triangle BOC$ добијамо $\theta=180^\circ-\theta$, тј. $\theta=90^\circ$. Дакле, дијагонале BD и AC су међусобно нормалне, тј. BO и CO су висине у $\triangle ABC$ и $\triangle BCD$, редом. Како су ови троуглови једнакокраки, њихове висине и тежишне дужи се поклапају, па следи да је O средиште дужи AC и BD. Према томе, у четвороуглу $ABCD$ дијагонале се полове, па је он паралелограм, а како су дијагонале још и међусобно нормалне, тај паралелограм је ромб.

3. У посматраних 9 боца укупно има 126 децилитара млека, па следи да свака домаћица треба да добије по 3 боце са укупно 42 децилитра млека.

Посматрајмо домаћицу која је добила боцу са 26 децилитара млека. У преостале две боце она има укупно још 16 децилитара, што је могуће само на следећа два начина: $2+14$ или $5+11$. Претпоставимо најпре да важи први случај. Тада она домаћица која је добила боцу са 23 децилитра у преосталим двема боцама има укупно 19 децилитара млека, што је (од неподељених боца) могуће добити само као $8+11$; тада трећој домаћици остају боце са 5, 17 и 20 децилитара млека. Дакле, у овом случају, у зависности од тога која је „прва“, која „друга“, а која „трећа“ домаћица, имамо 6 начина поделе (колико има и пермутација ове три домаћице). Слично, уколико претпоставимо да је прва домаћица добила боце са 5, 11 и 26 децилитара млека, тада видимо да она која је добила боцу са 23 децилитра мора добити још боце са 2 и 17 децилитара, а трећој онда остају боце са 8, 14 и 20 децилитара млека. Дакле, и овде имамо 6 начина поделе (опет у зависности од пермутације домаћица).

Према томе, укупно постоји 12 начина да поделе боце у складу с условима задатка.

4. Подизањем обе стране једначине на трећи степен (користећи идентитет $(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$), добијамо

$$x + 2 + 3\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{3x+1}(\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{3x+1}) + 3x + 1 = x - 3,$$

тј.

$$3\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{3x+1}(\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{3x+1}) = -3x - 6.$$

Израз у загради представља поново леву страну полазне једначине, па он мора бити једнак $\sqrt[3]{x-3}$; уврштавањем овога (и дељењем обе стране са 3) долазимо до

$$\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{3x+1}\sqrt[3]{x-3} = -(x+2).$$

Напоменимо, последња једначина није *еквивалентна* с полазном (само је њена последица); то значи да за свако нађено решење те последње једначине морамо проверити да ли оно заиста задовољава и полазну једначину.

Подизањем обе стране последње једначине на трећи степен добијамо

$$(x+2)(3x+1)(x-3) = -(x+2)^3.$$

Једно решење је очигледно $x = -2$. Директно се проверава да је то заиста решење и полазне једначине (обе стране износе $\sqrt[3]{-5}$). Под претпоставком $x \neq -2$, скраћивањем $x+2$ са обе стране остаје $(3x+1)(x-3) = -(x+2)^2$, тј. $3x^2 - 9x + x - 3 = -(x^2 + 4x + 4)$, што је еквивалентно са $4x^2 - 4x + 1 = 0$. Решавањем ове квадратне једначине добијамо $x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4}}{8} = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2}$. Проверимо да ли и ово решење испуњава полазну једначину. На левој страни добијамо $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + 2} + \sqrt[3]{3 \cdot \frac{1}{2} + 1} = 2\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$, а на десној страни $\sqrt[3]{\frac{1}{2} - 3} = \sqrt[3]{-\frac{5}{2}}$, па $x = \frac{1}{2}$ *није* решење полазне једначине.

Дакле, једино решење је $x = -2$.

5. Како је број a дељив са 9, и збир његових цифара мора бити дељив са 9, тј. број b је дељив са 9. Одатле, из истог разлога, и број c је дељив са 9, а потом закључујемо да је и број d дељив са 9. Даље, како број a има 2019 цифара, а свака његова цифра може бити највише 9, следи да број b износи највише $2019 \cdot 9 = 18171$. Број c, дакле, износи највише $1 + 8 + 9 + 9 + 9 = 36$ (јер цифре у броју b на четвртој и петој позицији здесна, ако уопште постоје, износе највише 8 и 1, тим редом, док су остале цифре највише 9), а онда број d може бити највише $2 + 9$, тј. највише 11. Дакле, обједињавањем добијених закључака констатујемо да је d број који није већи од 11 а који је дељив са 9; према томе, једина могућност је $d = 9$.

Трећи разред – Б категорија

1. Израчунавамо:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg} 5 + \operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} 5) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{2}{3})}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} 5)\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{2}{3})}$$

$$= \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 5)} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 5)} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{5} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}} = 1.$$

Из $5 > 1$ и чињенице да је arcctg опадајућа функција, добијамо $0 < \operatorname{arcctg} 5 < \operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Слично, како је arctg растућа функција и $0 < \frac{2}{3} < 1$, добијамо $0 < \operatorname{arctg} \frac{2}{3} < \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Дакле, израз у поставци се налази у интервалу између 0 и $\frac{\pi}{2}$, па како његов тангенс износи 1, вредност тог израза је $\frac{\pi}{4}$ (тј. реч је о углу од 45°).

2. Очигледно, $p > 3$ (јер би у супротном лева страна била мања од десне), па како је p прост број, следи $p \equiv \pm 1 \pmod 3$. Одатле имамо $p^2 \equiv 1 \pmod 3$. Такође имамо и $2500 \equiv 1 \pmod 3$, те уколико постављену једначину трансформишемо у облик

$$p^2 - 2500 = qr,$$

лева стране је дељива са 3, па то мора бити и десна. Како су q и r прости бројеви, један од њих мора бити 3. Претпоставимо, без умањења општости, да је то q. Приметимо $2500 = 50^2$, па се лева страна може факторисати као разлика квадрата, после чега преостаје $(p-50)(p+50) = qr = 3r$. Како је r прост број, имамо само следеће две могућности.

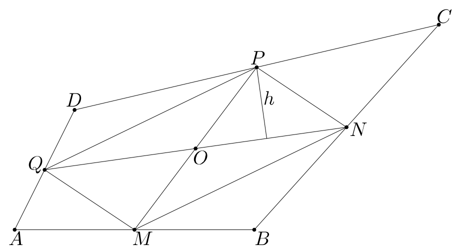
- $p - 50 = 3$, $p + 50 = r$: Следи $p = 53$ и $r = 103$, што јесу прости бројеви па имамо једно решење.

- $p - 50 = 1$, $p + 50 = 3r$: Следи $p = 51$, што није прост број, те овде немамо решења.

Узимајући у обзир и то да q и r могу заменити улоге, постоје укупно две тројке које задовољавају услове задатка: $(p, q, r) \in \{(53, 3, 103), (53, 103, 3)\}$.

3. За леву страну постављене неједначине имамо $x^2 - 2x + 3 = (x^2 - 2x + 1) + 2 = (x-1)^2 + 2 \geqslant 2$, а за десну имамо $\sqrt{4 - x^2} \leqslant \sqrt{4} = 2$. Дакле, једина могућност је да и лева и десна страна буду једнаке 2. Међутим, из извођења малопре примећујемо да је лева страна једнака 2 само за $x = 1$, а десна је једнака 2 само за $x = 0$. Дакле, никада не могу обе стране истовремено бити једнаке 2, па постављена неједначина нема решења.

4. Означимо средишта страница AB, BC, CD, DA са M, N, P, Q, редом, и нека се дужи MP (дужине 2) и NQ (дужине 3) секу у тачки O. Тада су MN, NP, PQ, QM средње линије у $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$ и $\triangle DAB$, редом, па важи $P(\triangle MBN) = \frac{1}{4}P(\triangle ABC)$, $P(\triangle NCP) = \frac{1}{4}P(\triangle BCD)$, $P(\triangle PDQ) = \frac{1}{4}P(\triangle CDA)$ и $P(\triangle QAM) = \frac{1}{4}P(\triangle DAB)$. Сабирањем ове четири једнакости добијамо



Ок 2019 3Б 4

$$\begin{aligned} P(\triangle MBN) + P(\triangle NCP) + P(\triangle PDQ) + P(\triangle QAM) \\ &= \frac{1}{4}(P(\triangle ABC) + P(\triangle CDA) + P(\triangle BCD) + P(\triangle DAB)) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2P(ABCD) = \frac{1}{2}P(ABCD). \end{aligned}$$

Одатле следи и $P(MNPQ) = \frac{1}{2}P(ABCD)$. Такође због уочених средњих линија имамо $MN \parallel AC \parallel QP$ и $NP \parallel BD \parallel MQ$, па је $MNPQ$ паралелограм. Нека је h висина повучена из тачке P на дијагоналу NQ. Тада због угла од $45°$ имамо $h = \frac{PO}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{MP}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (средњу једнакост добијамо на основу чињенице да се дијагонале паралелограма полове). Одатле израчунавамо $P(MNPQ) = 2P(\triangle NPQ) = 2 \cdot \frac{QN \cdot h}{2} = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, па коначно и $P(ABCD) = 2P(MNPQ) = 3\sqrt{2}$.

5. а) Посматрајмо шестоугао са уписаним бројевима који испуњавају услове задатка. Како нису сви бројеви исти, постоје два суседна темена таква да је у једном од њих уписан број -1 а у другом 1; нека су то A и B, редом, и нека су наредна темена C, D, E и F. Тада у C мора бити 1 (да би производ бројева у A, B и C био -1), па затим у D мора бити -1 (због B, C и D), потом у E мора бити 1 (због C, D и E), и коначно и у F мора бити 1. Према томе, збир износи $-1 + 1 + 1 + (-1) + 1 + 1 = 2$.

b) Као у делу под а) налазимо темена A_1 и A_2 у којима су уписани бројеви -1 и 1, редом. Тада у темену A_3 мора бити број 1, па онда у темену A_4 број -1, па у темену A_5 број 1, у A_6 број 1, у A_7 број -1 итд. Примећујемо да се образац понавља, тј. да је у теменима чији индекс даје остатак 1 при дељењу са 3 увек уписан број -1 (другим речима, на сваком трећем темену), а у свим осталим теменима број 1. Према томе, у $\frac{2019}{3}$, тј. 673 темена је уписан број -1, а у преосталих 1346 темена број 1, па збир свих уписаних бројева износи: $673 \cdot (-1) + 1346 \cdot 1 = 673$.

Четврти разред – Б категорија

1. Квадрирајмо обе једнакости дате у поставци и потом их саберимо. Добијамо:

$$
\begin{aligned}
61 &= (16\sin^2\alpha + 40\sin\alpha\cos\beta + 25\cos^2\beta) + (25\sin^2\beta + 40\sin\beta\cos\alpha + 16\cos^2\alpha) \\
&= 16(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + 25(\sin^2\beta + \cos^2\beta) + 40(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) \\
&= 16 + 25 + 40\sin(\alpha+\beta) = 41 + 40\sin(180° - \gamma) = 41 + 40\sin\gamma.
\end{aligned}
$$

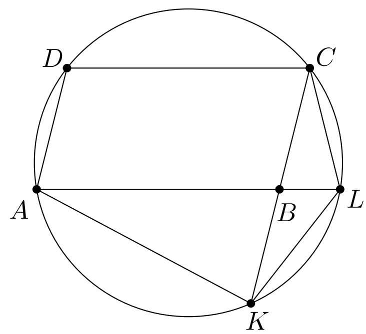
Одатле имамо $\sin\gamma = \frac{61-41}{40} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$, тј. $\gamma = 30°$ или $\gamma = 150°$. Друга могућност отпада због услова да је $\triangle ABC$ оштроугли, па остаје $\gamma = 30°$.

2. Да би израз у поставци био дефинисан, мора важити $\log_2(\cos\frac{\pi x}{\sqrt{2}}) \geqslant 0$, тј. $\cos\frac{\pi x}{\sqrt{2}} \geqslant 1$. Но како, по дефиницији функције cos, лева страна не може бити већа од 1, остаје $\cos\frac{\pi x}{\sqrt{2}} = 1$, тј. $\frac{\pi x}{\sqrt{2}} = 2k\pi$ за неко $k \in \mathbb{Z}$, те остаје $D = \{2\sqrt{2}k : k \in \mathbb{Z}\}$. Према томе, за $x \in D$, број x^2 може бити $8 \cdot 0^2$, $8 \cdot 1^2$, $8 \cdot 2^2$... Како имамо $8 \cdot 15^2 = 1800 < 2019 < 8 \cdot 16^2 = 2048$, најмања вредност израза $|2019 - x^2|$ постиже се за $x = 2\sqrt{2} \cdot 16$ и износи $2048 - 2019 = 29$, што јесте прост број.

3. Важи $n^2 + 4n - 15 = n^2 + 4n + 4 - 19 = (n+2)^2 - 19$, па пошто овај број треба да буде дељив са 361 а имамо $361 = 19^2$, следи да је посматрани број дељив и са 19. Онда $19 \mid (n+2)^2$, па пошто је 19 прост број, добијамо и $19^2 \mid (n+2)^2$. Но, тада из овога и $361 \mid (n+2)^2 - 19$ следи $361 \mid 19$, што је очигледна контрадикција. Дакле, такав број не постоји.

4. Пребројмо прво колико максимално може бити таквих бројева чије су цифре у опадајућем поретку. Сваки такав број је једнозначно одређен одабиром пет (различитих) цифара које га сачињавају (након што су цифре одабране, број добијамо њиховим сортирањем у опадајућем поретку), па пошто имамо 10 цифара на располагању, таквих бројева има $\binom{10}{5}$. Пребројмо сада оне бројеве чије су цифре у растућем поретку. Слично као малопре, и сваки такав број је једнозначно одређени одабиром цифара које га сачињавају; притом сада на располагању имамо само 9 цифара од којих можемо бирати 5, јер међу одабраним цифрама не сме бити 0 (ако би била, онда би она, због растућег поретка, морала ићи на почетак телефонског броја, што је забрањено условом задатка). Дакле, у овом случају имамо $\binom{9}{5}$ бројева. Укупан резултат је: $\binom{10}{5} + \binom{9}{5} = 252 + 126 = 378$ телефонских бројева.

5. Из $CL = CB$ добијамо $\measuredangle CLB = \measuredangle CBL = 180^\circ - \measuredangle ABC = 180^\circ - \measuredangle ADC$, па тачке A, L, C и D леже на истој кружници (због суплементности периферијских углова над истом тетивом с различитих страна). На сличан начин, из $AK = AB$ добијамо $\measuredangle AKB = \measuredangle ABK = 180^\circ - \measuredangle ABC = 180^\circ - \measuredangle ADC$, па и тачке A, K, C и D леже на истој кружници. Дакле, свих пет тачака A, K, L, C и D леже на истој кружници, што је и требало доказати.



Ок 2019 4Б 5

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 16. 3. 2019.

Први разред – А категорија

1. Нека је x једна целобројна нула полинома P. Тада имамо $1 - x \mid P(1) - P(x) = 2 - 0 = 2$, тј. $1 - x \in \{-2, -1, 1, 2\}$, а одатле следи $x \in \{-1, 0, 2, 3\}$. Како по услову задатка P има две различите непозитивне целобројне нуле, то морају бити -1 и 0. Сада имамо $0 = P(0) = a_0$, што решава део под а), и такође

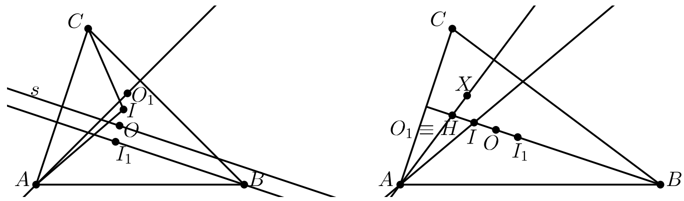
$$0 = P(-1) = \sum_{i=0}^{n} a_i(-1)^i = \sum_{2|i} a_i - \sum_{2\nmid i} a_i,$$

одакле добијамо и део под b).

2. Означимо углове код темена A, B и C са α, β и γ, редом.

Докажимо најпре $BA = BC$. Претпоставимо супротно: без умањења општости, нека важи $BC > BA$. Нека је s симетрала странице AC. Тачке A и B су у истој полуравни с ивицом s, а због $BI_1 \parallel s$ (јер је BI_1 висина), у тој полуравни је и тачка I_1. Даље, с обзиром на $\measuredangle CAI = \frac{\alpha}{2} > \frac{\gamma}{2} = \measuredangle ACI$, добијамо $CI > AI$, одакле следи да је и тачка I у тој полуравни. Међутим, како s садржи тачку

O, а тачке I и I_1 су централносиметричне у односу на O, оне би морале бити у различитим полуравнима, контрадикција. Дакле, $BA = BC$. Одатле одмах следи и да су тачке B, O, I, O_1 и I_1 све колинеарне (на висини из B), а како је O_1 на висини из A, следи да се O_1 поклапа са H, ортоцентром $\triangle ABC$.



Др 2019 1А 2

Сада ћемо доказати да се тачке O и I поклапају. Претпоставимо супротно. У сваком троуглу су праве AO и AH осносиметричне у односу на AI (што се лако види израчунавајући да оба угла $\measuredangle CAH$ и $\measuredangle BAO$ износе по $90^\circ - \frac{\gamma}{2}$). Нека је X осносиметрична слика тачке O у односу на AI (X припада правој AO_1). У случају $X \not\equiv O_1$ примећујемо да права AI пролази кроз I, што је средиште дужи OO_1, а такође пролази и кроз средиште дужи OX, па следи $AI \parallel O_1X$, али ово је немогуће јер се ове две праве секу у тачки A (а притом се, по претпоставци, не поклапају). Остаје могућност $X \equiv O_1$, али тада имамо $\measuredangle AIO = 90^\circ$, одакле следи да би I морало бити средиште основице AC, што је опет контрадикција (јер је I центар уписане кружнице). Дакле, претпоставка да су O и I различите тачке води у контрадикцију, па се O и I морају поклапати, а одатле директно следи да је $\triangle ABC$ једнакостраничан.

3. За $m = 4$ и $n = 5$ имамо $m^2 = 4^2 = 16$ и $n^2 = 5^2 = 25$, а збирови делилаца ова два броја износе: $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$ и $1 + 5 + 25 = 31$; дакле, пар $(m, n) = (4, 5)$ чији један тражени пар.

Нека је p произвољан прост број различит од 2 и 5. Број $16p^2$ има следеће делиоце: $1, 2, 4, 8, 16, p, 2p, 4p, 8p, 16p, p^2, 2p^2, 4p^2, 8p^2, 16p^2$, и њихов збир износи: $(1 + 2 + 4 + 8 + 16)(1 + p + p^2) = 31(1 + p + p^2)$. Број $25p^2$ има следеће делиоце: $1, 5, 25, p, 5p, 25p, p^2, 5p^2, 25p^2$, и њихов збир износи: $(1 + 5 + 25)(1 + p + p^2) = 31(1 + p + p^2)$. Према томе, сваки пар облика $(m, n) = (4p, 5p)$ за прост број p различит од 2 и 5, испуњава постављени услов, те таквих парова заиста има бесконачно много.

4. Претпоставимо супротно тврђењу задатка: постоји позитиван реалан број c такав да никоје три црвене тачке не образују троугао површине c, број z такав да никоје три зелене тачке не образују троугао површине z, и број p такав да никоје три плаве тачке не образују троугао површине p. Постоји боја којом су обојене бар две тачке; без умањења општости, нека је то црвена, и нека су A и B две црвене тачке. Посматрајмо скуп свих тачака на удаљености $\frac{2c}{|AB|}$ од праве AB; те тачке формирају цилиндар $\mathscr{C}_1$. Ниједна од тих тачака не сме бити црвена, иначе би та тачка с тачкама A и B формирала црвени троугао површине c, што је супротно претпоставци; дакле, свака тачка на цилиндру $\mathscr{C}_1$ је или зелена, или плава. Нека су X, Y и Z три колинеарне тачке на цилиндру $\mathscr{C}_1$ такве да је права p која их садржи паралелна са AB, и да притом важи $XY = YZ = d > \frac{\max\{z,p\}|AB|}{c}$. По Дирихлеовом принципу, бар две од ове три тачке су исте боје, рецимо (без умањења општости) зелене. Те две зелене тачке су на растојању d или $2d$, па слично као при почетку доказа констатујемо да све тачке које су на удаљености $\frac{2z}{d}$ односно $\frac{2z}{2d}$ од праве p чине цилиндар $\mathscr{C}_2$ такав да ниједна тачка на цилиндру $\mathscr{C}_2$ не сме бити зелена. Како имамо

$$\frac{2z}{2d} < \frac{2z}{d} < \frac{2zc}{\max\{z,p\}|AB|} \leqslant \frac{2c}{|AB|},$$

следи да се цилиндри $\mathscr{C}_2$ и $\mathscr{C}_1$ секу. Њихов пресек су две паралелне праве, а како тачке у пресеку не смеју бити ни зелене (због $\mathscr{C}_2$), ни црвене (због $\mathscr{C}_1$), следи да све тачке на тим двема паралелним правима морају бити плаве. Међутим, ако је растојање између тих правих рецимо h, тада одабиром две тачке на једној правој на међусобној удаљености $\frac{2p}{h}$, и треће произвољне тачке на другој правој, добијамо три плаве тачке које образују троугао површине p, контрадикција с претпоставком. Дакле, мора постојати боја која испуњава услове задатка.

Други разред – А категорија

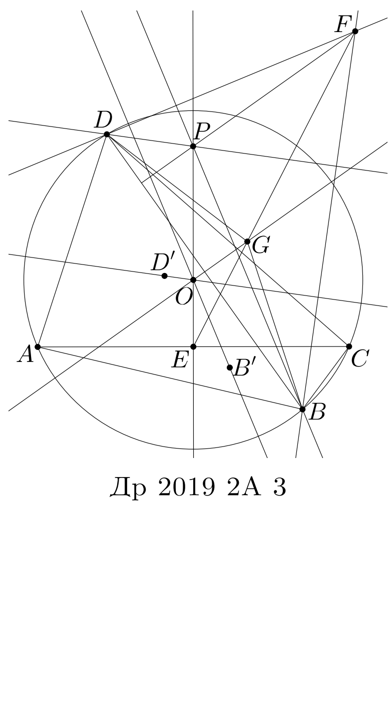
1. За сваки цео број n имамо:

$$P(P(n)+1) \equiv P(1) = 1 + 2018 + 2016 + 2015 = 6050 \pmod{P(n)}.$$

Према томе, да би био испуњен постављени услов, мора важити $P(n) \mid 6050$. Међутим, приметимо да за $n \geqslant 2$ важи $P(n) > 2^{2019} > 6050$, а за $n \leqslant -2$ важи $P(n) < -2^{2019} < -6050$. Дакле, једине могућности су $n \in \{-1, 0, 1\}$. Директно израчунавамо $P(-1) = -1 - 2018 - 2016 + 2015 = -2020 \nmid 6050$, $P(0) = 2015 \nmid 6050$ и $P(1) = 6050$. Дакле, једино решење је $n = 1$.

2. Могуће је постићи $k = 1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$ узимањем свих подскупова скупа X кардиналности не веће од 3. Докажимо да је ово и максимална могућа вредност броја k. Довољно је показати да у одабраној колекцији $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ за максимално k нема скупова кардиналности веће од 3. Претпоставимо супротно: нека је нпр. Y_1 кардиналности бар 4. Нека су $Z_1, Z_2, \ldots, Z_t$ сви трочлани подскупови скупа Y_1; њих има бар 4. Колекција $Z_1, Z_2, \ldots, Z_t, Y_2, \ldots, Y_k$ такође задовољава услове задатка а обухвата више од k скупова, што је контрадикција с максималношћу броја k. Тиме је доказ завршен.

3. Нека је O центар кружнице k описане око четвороугла $ABCD$, нека су B' и D' тежишта $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$, редом, и нека је P тачка на правој EO таква да важи распоред $E-O-P$ и $EP = 3EO$. Из обратне Талесове теореме имамо $D'O \parallel DP$ и $B'O \parallel BP$, па како по дефиницији тачке F знамо $D'O \perp BF$ и $B'O \perp DF$, следи $DP \perp BF$ и $BP \perp DF$. Дакле, P је ортоцентар $\triangle BFD$, па следи $FP \perp BD$. Из обратне Талесове теореме имамо и $GO \parallel FP$, па из овог и претходног следи $GO \perp BD$. Но, како



Др 2019 2А 3

су тачке B и D на кружници k а O је њен центар, одавде следи да је GO симетрала дужи BD, па добијамо $GB = GD$.

4. Приметимо најпре да за све i и i', $i \neq i'$, важи $a_i \neq a_{i'}$: заиста, у супротном би следило $p \mid (a_i^2 + b_i)^2 - (a_{i'}^2 + b_{i'}^2) = b_i^2 - b_{i'}^2 = (b_i - b_{i'})(b_i + b_{i'})$, што је немогуће због $0 < b_i, b_{i'} < \frac{p}{2}$ и $b_i \neq b_{i'}$.

Имамо $p \mid 2(a_i^2 + b_i^2) = (b_i - a_i)^2 + (b_i + a_i)^2$. Означимо са c_i разлику $b_i - a_i$, а са d_i онај од бројева $b_i + a_i$ и $p - b_i - a_i$ који је мањи од $\frac{p}{2}$. Јасно, $p \mid c_i^2 + d_i^2$ и бројеви c_i и d_i су позитивни и не већи од $\frac{p-1}{2}$; додатно, из $d_i - c_i \in \{2a_i, p - 2b_i\}$ добијамо $d_i > c_i$, па, све заједно, закључујемо да је (c_i, d_i) један од уређених парова (a_j, b_j).

Даље, за $i \neq i'$ имамо $c_i \neq c_{i'}$: заиста, у случају $c_i = c_{i'} = c$ имали бисмо

$$a_i^2 + (a_i + c)^2 = a_i^2 + b_i^2 \equiv 0 \equiv a_{i'}^2 + b_{i'}^2 = a_{i'}^2 + (a_{i'} + c)^2 \pmod p,$$

одакле следи

$$\begin{aligned} 0 &\equiv a_i^2 + (a_i + c)^2 - a_{i'}^2 - (a_{i'} + c)^2 = (a_i - a_{i'})(a_i + a_{i'}) + (a_i - a_{i'})(a_i + a_{i'} + 2c) \\ &= 2(a_i - a_{i'})(a_i + a_{i'} + c) = 2(a_i - a_{i'})(a_i + b_{i'}) \pmod p, \end{aligned}$$

али ово је немогуће јер $p \nmid a_i - a_{i'}$ (због $a_i \neq a_{i'}$) и $p \nmid a_i + b_{i'}$ (због $0 < a_i + b_{i'} < \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = p$). Дакле, низ $c_1, c_2, \ldots, c_k$ мора чинити пермутацију бројева $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Одатле следи

$$\sum_{i=1}^{k} b_i - \sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{k} (b_i - a_i) = \sum_{i=1}^{k} c_i = \sum_{i=1}^{k} a_i,$$

одакле имамо тражено тврђење.

Трећи разред – А категорија

1. Приметимо да за $x_{n+1}, x_{n+2} \neq 0$ имамо

$$x_{n+1}x_{n+2}x_{n+3} = x_n x_{n+1} x_{n+2} - 1.$$

Дефинишимо низ $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ са $y_1 = 16 \cdot 3 \cdot 2019 = 96912$ и

$$y_{n+1} = \begin{cases} y_n - 1, & \text{за } y_n \geqslant 1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Приметимо да важи $y_n = x_n x_{n+1} x_{n+2}$. Дакле, најмањи природан број n за који важи $x_n = 0$ јесте управо најмањи природан број n за који важи $y_{n-2} = 0$; из дефиниције низа $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ следи да се 0 у том низу први пут појављује за $y_{96913} = 0$, па је тражени одговор $n = 96915$.

2. Нека је m број који испуњава услове из поставке (уз одговарајућу вредност b), и запишимо $m = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$, $n \geqslant 4$. По услову задатка, бројеви $\overline{a_1 a_2 \ldots b a_n}$ и $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n b}$ морају бити једнаки k^2 и l^2, неким редом. Претпоставимо прво $l \neq k$, и узмимо, без умањења општости, $k < l$. Тада важи

$$\begin{aligned} 81 &\geqslant 9|b - a_n| = |\overline{a_1 a_2 \ldots b a_n} - \overline{a_1 a_2 \ldots a_n b}| = l^2 - k^2 \\ &\geqslant (k+1)^2 - k^2 = 2k + 1 \geqslant 2 \cdot 10^{\frac{n}{2}} + 1 \geqslant 201, \end{aligned}$$

контрадикција. Дакле, остаје $l = k$, а одатле $a_n = b$. Сада имамо

$$k^2 = \overline{a_1 a_2 \dots bb} \equiv \overline{bb} = 11b \equiv 3b \pmod 4,$$

одакле следи да $3b$ даје остатак 0 или 1 при дељењу са 4 (јер потпуни квадрати могу давати само та два остатка), па закључујемо $b \in \{3, 4, 7, 8\}$. Даље, имамо $k^2 \equiv b \pmod 5$, па како потпуни квадрати при дељењу са 5 могу давати само остатке 0, 1 и 4, једина могућност која остаје је $b = 4$.

Посматрајмо сада бројеве $\overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1} 44}$ и $\overline{a_1 a_2 \dots 4 a_{n-1} 4}$, који морају бити потпуни квадрати, рецимо k_1^2 и l_1^2 (неким редом) и $k_1 \leqslant l_1$. Последња цифра бројева k_1 и l_1 мора бити једнака 2 или 8 (јер им се квадрат завршава цифром 4). У случају $k_1 \neq l_1$ имамо $l_1 - k_1 \geqslant 4$, па важи (слично као горе)

$$\begin{aligned} 450 = 90 \cdot 5 \geqslant |90(a_{n-1} - 4)| &= l_1^2 - k_1^2 \\ &\geqslant (k_1 + 4)^2 - k_1^2 = 8k_1 + 16 \geqslant 8 \cdot 10^{\frac{n}{2}} + 16 \geqslant 816, \end{aligned}$$

контрадикција. Дакле, остаје $l_1 = k_1$, а одатле $a_{n-1} = 4$. Сада посматрајмо бројеве $\overline{a_1 a_2 \dots a_{n-2} 444}$ и $\overline{a_1 a_2 \dots 4 a_{n-2} 44}$, и нека су они једнаки k_2^2 и l_2^2 (неким редом) и $k_2 \leqslant l_2$. Имамо $k_2^2 \equiv l_2^2 \equiv 44 \pmod{100}$. Сада посматрамо двоцифрене завршетке бројева чија је цифра јединица 2 или 8 и проверавамо двоцифрене завршетке њихових квадрата, како је приказано у следећој таблици.

k_2	02	08	12	18	22	28	32	38	42	48
k_2^2	04	64	44	24	84	84	24	44	64	04
k_2	52	58	62	68	72	78	82	88	92	98
k_2^2	04	64	44	24	84	84	24	44	64	04

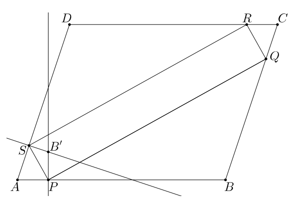
Дакле, двоцифрени завршетак бројева k_2 и l_2 мора бити из скупа $\{12, 38, 62, 88\}$. У случају $k_2 \neq l_2$ имамо $l_2 - k_2 \geqslant 24$, и онда

$$\begin{aligned} 4500 = 900 \cdot 5 \geqslant |900(a_{n-2} - 4)| &= l_2^2 - k_2^2 \\ &\geqslant (k_2 + 24)^2 - k_2^2 = 48k_2 + 576 \geqslant 48 \cdot 10^{\frac{n}{2}} + 576 \geqslant 5376, \end{aligned}$$

контрадикција. Дакле, остаје $l_2 = k_2$, а одатле $a_{n-2} = 4$.

Коначно, доказаћемо да број $\overline{a_1 \dots 4444}$, тј. $4444 + 10000A$, никада није потпун квадрат. Претпоставимо супротно, тј. $10000A + 4444 = t^2$. Број t мора бити паран, рецимо $t = 2t_1$. После дељења са 4 остаје $2500A + 1111 = t_1^2$. Међутим, лева страна даје остатак 3 при дељењу са 4, па не може бити потпун квадрат.

Дакле, не постоји ниједан природан број m тражен у поставци.



Др 2019 3А 3

3. Нека је B' пресек нормале из P на AB и нормале из S на AD. Из $\measuredangle B'PS = 90^\circ - \measuredangle B'PQ = \measuredangle BPQ$ и $\measuredangle B'SP = 90^\circ - \measuredangle B'SR = \measuredangle DSR$ следи $\triangle B'PS \sim \triangle BPQ \cong \triangle DRS$ (последња подударност следи из једнаких углова и $PQ = RS$). Одатле имамо $PB' =$

$\frac{PS}{PQ} \cdot BP$ и $SB' = \frac{PS}{PQ} \cdot DS < DS$. Сада,

$$AD^2 = (AS + DS)^2 = AS^2 + 2 \cdot AS \cdot DS + DS^2 > AS^2 + DS^2$$
$$> AS^2 + SB'^2 = AB'^2 = AP^2 + PB'^2 = AP^2 + \left(\frac{PS}{PQ} \cdot BP\right)^2,$$

одакле добијамо

$$PR^2 \cdot AD^2 > (PS^2 + PQ^2)\left(AP^2 + \left(\frac{PS}{PQ} \cdot BP\right)^2\right)$$
$$\geqslant (PS \cdot AP + PS \cdot BP)^2 = (PS \cdot (AP + BP))^2 = PS^2 \cdot AB^2$$

(између првог и другог реда смо користили Коши–Шварцову неједнакост); дакле, $\frac{PR}{PS} > \frac{AB}{AD}$.

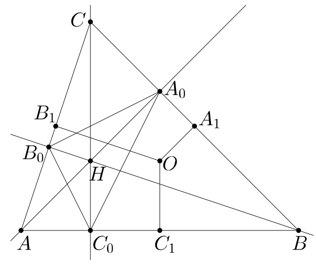
4. Приметимо да, полазећи од квадрата $ABCD$, после два разрезивања у тако добијеној квад-подели (која притом јесте балансирана) постоје три квадрата међу којима су свака два суседна, па су за бојење те квад-поделе потребне бар 3 боје, тј. $k \geqslant 3$. Докажимо да су 3 боје и довољне, тј. да се свака балансирана квад-подела може обојити са 3 боје.

Нека темена квадрата $ABCD$ имају координате $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ и $(1,0)$. Квадрати у свакој квад-подели имају странице дужине $\frac{1}{2^m}$ за ненегативан цео број m (не нужно исти за све квадрате те квад-поделе), и притом се центар квадрата странице $\frac{1}{2^m}$ налази у тачки $(\frac{i}{2^{m+1}}, \frac{j}{2^{m+1}})$ за неке непарне бројеве i и j. Ово се лако доказује индукцијом: за квадрат $ABCD$ тврдња јесте испуњена, а приликом једног разрезивања од квадрата странице $\frac{1}{2^m}$ с центром у $(\frac{i}{2^{m+1}}, \frac{j}{2^{m+1}})$ добијамо четири квадрата странице $\frac{1}{2^{m+1}}$ с центрима у $(\frac{i}{2^{m+1}} \pm \frac{1}{2^{m+2}}, \frac{j}{2^{m+1}} \pm \frac{1}{2^{m+2}})$, тј. у $(\frac{2i\pm1}{2^{m+2}}, \frac{2j\pm1}{2^{m+2}})$, што завршава индукцијски корак.

Сада ћемо конструисати бојење произвољне балансиране квад-поделе са 3 боје. Назовимо боје 0, 1 и 2. Квадрат с центром у $(\frac{i}{2^{m+1}}, \frac{j}{2^{m+1}})$ (његова страница је $\frac{1}{2^m}$) обојићемо бојом $(-1)^m(i-j)$, где боју рачунамо по модулу 3. Докажимо да овакво бојење испуњава услове задатка. Посматрајмо два суседна квадрата (рецимо један поред другог; аналогно је ако је један изнад другог). Ако су они једнаких страница, рецимо $\frac{1}{2^m}$, тада имају центре у $(\frac{i}{2^{m+1}}, \frac{j}{2^{m+1}})$ и $(\frac{i}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^m}, \frac{j}{2^{m+1}})$, тј. $(\frac{i+2}{2^{m+1}}, \frac{j}{2^{m+1}})$, и обојени су бојама $(-1)^m(i-j)$ и $(-1)^m(i+2-j)$, што су очигледно различите боје. Ако су они различитих страница, рецимо $\frac{1}{2^m}$ и $\frac{1}{2^{m+1}}$ (морају бити два узастопна степена двојке због балансираности), тада имају центре у $(\frac{i}{2^{m+1}}, \frac{j}{2^{m+1}})$ и $(\frac{i}{2^{m+1}} \pm (\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^{m+2}}), \frac{j}{2^{m+1}} \pm \frac{1}{2^{m+2}})$, тј. $(\frac{2i\pm3}{2^{m+2}}, \frac{2j\pm1}{2^{m+2}})$, и обојени су бојама $(-1)^m(i-j)$ и $(-1)^{m+1}(2(i-j) \pm 3 \pm 1)$ (знаци представљени са „$\pm$“ се могу бирати независно један од другог); друга боја се по модулу 3 своди на $(-1)^m(i-j\mp1)$, те су и у овом случају боје различите. Тиме је задатак решен.

Четврти разред – А категорија

1. Нека је H ортоцентар посматраног троугла. Четвороугао AC_0HB_0 је тетиван, AH је његов пречник а B_0C_0 његова тетива (која притом сигурно није



Др 2019 4А 1

пречник због оштрог угла код A), па имамо $AH > B_0C_0$. Аналогно, $BH > A_0C_0$ и $CH > A_0B_0$. Такође је познато $AH = 2OA_1$, $BH = 2OB_1$ и $CH = 2OC_1$. Одатле следи $B_0C_0+A_0C_0+A_0B_0 < AH+BH+CH = 2(OA_1+OB_1+OC_1)$, што је и требало доказати.

2. Одговор: постоји $(n+1)!-1$ таквих низова.

Доказ спроводимо индукцијом по n. За $n=1$ имамо само један такав низ (једночлани низ чији је једини члан 1). Претпоставимо сада да тврђење важи за $n-1$, и докажимо га за n.

Нека је $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ један такав низ. По услову задатка, сваки следећи члан је или не мањи од претходног, или мањи тачно за 1. Поделимо низ на блокове узастопних чланова на такав начин да сваки блок чини опадајући низ (и тада то морају бити узастопни природни бројеви) и да блокови буду дужине колике год је могуће. Тврдимо да је први елемент сваког следећег блока строго већи од првог елемента претходног блока. Заиста, уколико то не би био случај, тада би се први елемент следећег блока налазио и у претходном блоку (јер би био не већи од првог елемента претходног блока, и такође, због максималности блокова, био би не мањи од последњег елемента претходног блока, па констатација следи из чињенице да су блокови састављени од узастопних бројева), те бисмо имали контрадикцију с трећим условом из поставке (где би $k+1$ била позиција почетка следећег блока, а k позиција завршетка претходног). Избројмо сада колико постоји тражених низова са елементима из скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$. Уколико се у њима не појављује елемент n, таквих има, по индуктивној претпоставци, $n!-1$. Уколико се у њима појављује елемент n, тада он мора бити на почетку последњег блока, и тај последњи блок може бити нешто од следећег: n, $(n, n-1)$, $(n, n-1, n-2)$, $\ldots$, $(n, n-1, \ldots, 1)$, тј. n могућности. Ако је тај блок и једини постојећи, то даје још n тражених низова. Ако није, брисањем тог последњег блока добијамо неки од тражених низова са елементима из скупа $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, каквих има $n!-1$, и на сваки од њих можемо дописати произвољан од наведених n блокова. Дакле, коначан резултат је:

$$(n!-1)+n+(n!-1)n = n!-1+n+n!\cdot n-n = n!(1+n)-1 = (n+1)!-1,$$

што је и требало доказати.

3. Одговор је негативан.

Докажимо прво следеће помоћно тврђење: $f(n) = f(n+22)$ кад год бројеви $n+1$ и $n+22$ имају једнак број цифара. Нека бројеви $n+1$ и $n+22$ имају по k цифара. Следи $x_{n+22} = (n+22)+10^k(n+21)+10^{2k}(n+20)+\cdots+10^{21k}(n+1)+10^{22k}x_n$, одакле добијамо

$$x_{n+22} \equiv \sum_{i=1}^{22}(-1)^{(22-i)k}(n+i)+(-1)^{22k}x_n \pmod{11}.$$

Према томе, за парно k имамо $x_{n+22} \equiv \sum_{i=1}^{22}(n+i)+x_n = 22n+\frac{22\cdot 23}{2}+x_n \equiv x_n \pmod{11}$, а за непарно k имамо $x_{n+22} \equiv \sum_{i=1}^{22}(-1)^{22-i}(n+i)+x_n = 11+x_n \equiv x_n$

(mod 11). Дакле, заиста важи $f(n) = f(n+22)$ кад год бројеви $n+1$ и $n+22$ имају једнак број цифара.

Доказаћемо сада да, уколико бројеви тражени у поставци постоје, тада и за одабир $t = 22$ постоји одговарајућа вредност n_0 таква да услови из поставке буду задовољени. Нека су t и n_0 неки бројеви који испуњавају постављене услове. Можемо претпоставити, без умањења општости, $t > 22$ (јер ако t испуњава постављене услове, тада и сваки његов умножак испуњава те услове, па можемо одабрати довољно велик умножак). Нека је s довољно велик природан број (конкретно, довољно је да важи $10^{s+1} - 10^s > 2t$ и $10^s > n_0$). Тврдимо да за све природне бројеве n, $n \geqslant 10^{s+1}$, важи $f(n+22) = f(n)$ (другим речима, за бројеве t и n_0 можемо узети вредности 22 и 10^{s+1}, респективно). Нека је n произвољан природан број, $n \geqslant 10^{s+1}$. Уочимо најмањи број m из интервала $[10^s, 10^{s+1})$ који при дељењу са t даје исти остатак као и број m (такав број постоји пошто је дужина тог интервала већа од t). Тада, по избору броја t и дефиниције функције f, важи $f(m) = f(n)$ и $f(n+22) = f(m+22)$. Број $m+22$ такође припада интервалу $[10^s, 10^{s+1})$ (јер је тај интервал дужине бар $2t$ и $t > 22$). То значи да бројеви $m+1$ и $m+22$ имају једнак број цифара, те следи $f(m+22) = f(m)$, па све заједно имамо:

$$f(n+22) = f(m+22) = f(m) = f(n).$$

Тиме је тврдња доказана.

Дакле, можемо узети $t = 22$, и неку одговарајућу вредност n_0. Нека је z неки природан број облика $10^{2k-1} - 3$ и $z \geqslant n_0$. Тада мора важити $f(z+22) = f(z)$, али, с друге стране,

$$\begin{aligned}
x_{z+22} &\equiv (z+22) + 10^{2k}(z+21) + 10^{2\cdot 2k}(z+20) + \cdots + 10^{19\cdot 2k}(z+3) + 10^{20\cdot 2k}(z+2) \\
&\qquad + 10^{21\cdot 2k-1}(z+1) + 10^{22\cdot 2k-2}x_z \\
&\equiv (z+22) + (z+21) + \cdots + (z+2) - (z+1) + x_z \\
&= 21z + \frac{22\cdot 23}{2} - 1 - (z+1) + x_z \equiv -2z - 2 + x_z \\
&\equiv (-2)\cdot(-4) - 2 + x_z = 6 + x_z \pmod{11},
\end{aligned}$$

контрадикција. Тиме је задатак решен.

4. Означимо $f(1) = c$. Убацујући $x = y = 1$ у задату једнакост добијамо $2c = 2f(c)c$, одакле следи $f(c) = 1$. Убацујући само $y = 1$ добијамо $f(x) + c = (f(f(x)) + 1)f(x)$, тј. $f(f(x)) = \frac{f(x)+c}{f(x)} - 1 = \frac{c}{f(x)}$. Означимо са A скуп свих слика функције f. Из претходне једнакости следи да за све $x \in A$ имамо $f(x) = \frac{c}{x}$. Важи и обратно: ако је за неко x испуњено $f(x) = \frac{c}{x}$, тада имамо $f(\frac{c}{x}) = f(f(x)) = \frac{c}{f(x)} = x$, тј. $x \in A$. Дакле, имамо да $x \in A$ ако и само ако $\frac{c}{x} \in A$. Уврстимо сада у почетну једначину $f(f(x)) = \frac{c}{f(x)}$ (и исто за y), чиме добијамо $f(x) + f(y) = (\frac{c}{f(x)} + \frac{c}{f(y)})f(xy) = \frac{c(f(y)+f(x))}{f(x)f(y)}f(xy)$, одакле следи $f(xy) = \frac{f(x)f(y)}{c}$. Сада, ако узмемо $x, y \in A$ (подсетимо се, тада важи $f(x) = \frac{c}{x}$ и $f(y) = \frac{c}{y}$), из претходне једнакости добијамо $f(xy) = \frac{c^2}{cxy} = \frac{c}{xy}$, одакле имамо $\frac{c}{xy} \in A$, а онда и $xy \in A$.

Знамо да $c \in A$. Ако је то и једини елемент скупа A, тада је f константна функција $f(x) \equiv c$, и убацивањем овога у полазну једначину имамо $2c = 2c \cdot c$, одакле следи $c = 1$, тј. једно решење је $f(x) \equiv 1$.

Претпоставимо сада да f није константна функција. Тада постоји бар један реалан број z различит од 1 у скупу A. Онда следи да су сви бројеви облика z^k, $k \in \mathbb{N}$, у скупу A, што значи да скуп A садржи бесконачно много различитих реалних бројева. Докажимо најпре да је у том случају f инјекција. Претпоставимо супротно: за неке различите x и y имамо $f(x) = f(y)$. Нека је $w_1, w_2, w_3 \ldots$ низ реалних бројева таквих да су вредности $f(w_1), f(w_2), f(w_3) \ldots$ све различите. Тада имамо $f(w_k x) = \frac{f(w_k)f(x)}{c} = \frac{f(w_k)f(y)}{c} = f(w_k y)$; дакле, за свако k, вредност $\frac{f(w_k)f(x)}{c}$ се налази у скупу слика функције f али има бар два оригинала (то су $w_k x$ и $w_k y$), што је у супротности са условом задатка. Следи да f мора бити инјекција (ако није константна функција). Сада имамо $f(\frac{c}{f(x)}) = f(f(f(x))) = \frac{c}{f(f(x))} = f(x)$, те следи $\frac{c}{f(x)} = x$, а одатле $f(x) = \frac{c}{x}$ за све x. Провером се добија да и ово решење задовољава почетну једначину (за произвољну вредност c).

Дакле, сва решења постављене функционалне једначине су: $f(x) \equiv 1$ и $f(x) = \frac{c}{x}$ за произвољно $c \in \mathbb{R}^+$.

Први разред – Б категорија

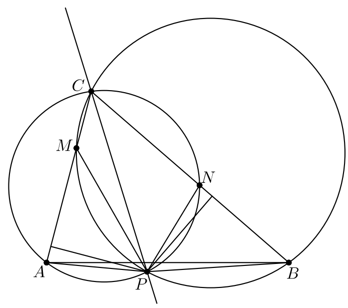
1. Претпоставимо да су тачна прва два исказа, а трећи нетачан. Због другог исказа, n је непаран и дељив са 5. Сада, да би трећи исказ био нетачан, n мора бити дељив са 3 (и дељив са 5, што смо већ рекли). Међутим, како је n дељив са 3 а непаран је, следи да импликација из првог исказа није тачна, контрадикција.

Нека је сада нетачан први исказ, а тачна преостала два. Опет из другог закључујемо да је n дељив са 5 и непаран. Из трећег следи да n није дељив са 3 (јер јесте дељив са 5, па остаје само ова могућност). Међутим, тада је лева страна импликације из првог исказа нетачна, па читава импликација јесте тачна, тј. у овом случају су тачна сва три исказа, опет контрадикција.

Коначно остаје могућност да је нетачан други исказ, а преостала два тачна. Претпоставимо да је n дељив са 3. Због првог исказа n мора бити паран. Тада је други исказ свакако нетачан. Да би трећи био тачан, n не сме бити дељив са 5 (јер већ јесте дељив са 3). Збирно, дакле, у овом случају n мора бити дељив са 6 а не сме бити дељив са 5, па при дељењу са 30 даје неки од остатака 6, 12, 18 или 24. Коначно, размотримо случај када n није дељив са 3. Први и трећи искази су тада аутоматски тачни. Други исказ је нетачан или ако је n паран број, или ако није дељив са 5 (или оба). У првом подслучају могући остаци при дељењу са 30 су $2, 4, 8, 10, 14, 16, 20, 22, 26, 28$, а у другом $1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 22, 23, 26, 28, 29$.

Дакле, узето све заједно, при дељењу са 30 број n може давати било који остатак *осим* 0, 3, 5, 9, 15, 21, 25 и 27.

2. Како је четвороугао $APNC$ тетиван, следи $\measuredangle PAC = 180^\circ - \measuredangle PNC = \measuredangle PNB$. Аналогно, $\measuredangle PBC = \measuredangle PMA$. Одатле, по ставу УСУ имамо $\triangle APM \cong \triangle BPN$ су подударни по ставу УСУ. Одатле је висина из P на AM подударна



Др 2019 1Б 2

висини из P на BN; међутим, ово су управо растојања тачке P од кракова угла код темена C, па тачка P лежи на симетрали угла код темена C, што је и требало доказати.

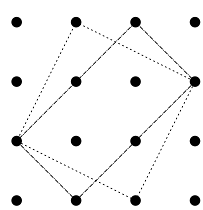
3. a) Нека је n згодан природан број такав да је и број $n+1$ згодан. Јасно је да збир цифара било ког згодног броја мора бити паран. Дакле, последња цифра броја n мора бити 9 (јер би у супротном збир цифара броја $n+1$ био за 1 већи од збира цифара броја n, па не би оба ова збира могла бити парна). Једини двоцифрен згодан број који се завршава цифром 9 је број 99, али имамо $99+1=100$, а 100 није згодан број; дакле, тражени број n је бар троцифрен. Уколико запишемо $n=\overline{ab9}$, тада имамо $n+1=\overline{a(b+1)0}$ (очито, $b<9$, јер $\overline{a99}$ не може бити згодан). Да би и n и $n+1$ били згодни, мора важити $a+b=9$ и $a=b+1$, а одатле следи $a=5$ и $b=4$. Дакле, најмањи тражени број n је 549.

b) Као што смо добили у делу под a), да би и n и $n+1$ били згодни бројеви, n се мора завршавати цифром 9, а на исти начин, да би и $n+1$ и $n+2$ били згодни бројеви, $n+1$ се мора завршавати цифром 9. Ово очигледно није могуће, па следи да тројка тражена у поставци не постоји.

4. Приметимо да је функција f дефинисана за све реалне аргументе осим за $\frac{1}{3a}$. Дакле, да би $f(f(x))$ било дефинисано, једначина $f(x)=\frac{1}{3a}$ не сме имати ниједно решење x у скупу $\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{3a}\}$. Једначина $f(x)=\frac{1}{3a}$, тј. $\frac{ax+2}{3x-\frac{1}{a}}=\frac{1}{3a}$, своди се на $3a^2x+6a=3x-\frac{1}{a}$, што је еквивалентно са $(a^2-1)x=-2a-\frac{1}{3a}$. У случају $a=\pm1$ очигледно немамо ниједно решење x (што смо и желели). За $a\neq\pm1$ имамо $x=\frac{-2a-\frac{1}{3a}}{a^2-1}$, и једини случај који нам овде одговара јесте да x буде $\frac{1}{3a}$, тј. $\frac{1}{3a}=\frac{-2a-\frac{1}{3a}}{a^2-1}$, што се своди на $a^2-1=-6a^2-1$, тј. $a=0$, а ово је немогуће јер за $a=0$ израз из поставке није дефинисан.

Дакле, остаје $a=\pm1$, и треба још проверити да ли обе ове вредности за a заиста испуњавају услове из поставке. За $a=1$ имамо $f(x)=\frac{x+2}{3x-1}$ и $f(f(x))=\frac{\frac{x+2}{3x-1}+2}{3\frac{x+2}{3x-1}-1}=\frac{\frac{7x}{3x-1}}{\frac{7}{3x-1}}=x$, што је и тражено. За $a=-1$ имамо $f(x)=\frac{-x+2}{3x+1}$ и $f(f(x))=\frac{-\frac{-x+2}{3x+1}+2}{3\frac{-x+2}{3x+1}+1}=\frac{\frac{7x}{3x+1}}{\frac{7}{3x+1}}=x$, што је и тражено.

Дакле, постоје две тражене вредности a, и то су $a=1$ и $a=-1$.



Др 2019 1Б 5

5. Изборјмо прво правоугаонике са страницама паралелним ивицама решетке. Сваки такав правоугаоник је одређен одабиром два наспрамна темена, тј. две тачке од постојећих 16 које нису на истој хоризонтали нити вертикали. Прву тачку можемо одабрати на 16 начина а другу на 9 начина (после прве тачке преостаје још 9 тачака које нису на истој хоризонтали нити вертикали с њом), па тражених парова тачака имамо $\frac{16\cdot9}{2}=72$ (делимо са 2 јер редослед тачака није битан). Коначно, овим одабирима парова наспрамних темена сваки правоугаоник смо заправо убројали два пута (јер сваки правоугаоник има два пара наспрамних темена), па број посматраних правоугаоника износи 36.

Даље, имамо још и 4 „искошена“ квадрата странице $\sqrt{2}$ (која стоје под углом од 45° у односу на ивице решетке), као и 2 квадрата странице $\sqrt{5}$. Коначно, постоје још и два „искошена“ правоугаоника чије су странице $\sqrt{2}$ и $\sqrt{8}$ (на слици је приказан један такав правоугаоник и један непосредно претходно поменут квадрат).

Дакле, решење задатка је: $36 + 4 + 2 + 2 = 44$ правоугаоника.

Други разред – Б категорија

1. Имамо $18171 = 9 \cdot 2019 = 3^2 \cdot 2019$, па следи $\log_3 18171 = \log_3 3^2 + \log_3 2019 = 2 + \log_3 2019$. Уведимо смену $t = \log_3 2019$. Тада треба упоредити бројеве t и $4 + \sqrt{2+t}$. Из $3^6 = 729 < 2019 < 2187 = 3^7$ следи $6 < t < 7$. Доказаћемо неједнакост $t < 4 + \sqrt{2+t}$, тј. $t - 4 < \sqrt{2+t}$. Након квадрирања преостаје доказати $t^2 - 8t + 16 < 2 + t$, тј. $t^2 - 9t + 14 < 0$. Квадратна функција с леве стране има нуле у тачкама $\frac{9 \pm \sqrt{81-56}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2}$, па је негативна за $t \in (2, 7)$; како важи $6 < t < 7$, тражена функција је заиста негативна за $t = \log_3 2019$, па следи да је међу посматрана два броја већи $4 + \sqrt{\log_3 18171}$.

2. Нека је Ана на почетку имала n пита. Након првог сата јој је остало $\frac{3n-1}{4}$ пита, након другог сата $\frac{4}{5}\frac{3n-1}{4} - \frac{1}{5}$, тј. $\frac{3n-2}{5}$ пита, након трећег сата $\frac{3}{4}\frac{3n-2}{5} - \frac{1}{4}$, тј. $\frac{9n-11}{20}$ пита, након четвртог сата $\frac{3}{4}\frac{9n-11}{20} - \frac{1}{4}$, тј. $\frac{27n-53}{80}$ пита, а након петог сата $\frac{4}{5}\frac{27n-53}{80} - \frac{1}{5}$, тј. $\frac{27n-73}{100}$ пита. Сви ови изрази треба да буду цели бројеви, одакле лако видимо да мора важити $n \equiv -1 \pmod{4, 5, 20, 80, 100}$, тј. $n+1$ мора бити дељиво свим наведеним бројевима. Како важи НЗС$(4, 5, 20, 80, 100) = 400$, последњи услов је еквивалентан са $400 \mid n + 1$, те најмањи могућ број пита које је Ана могла понети износи 399.

3. Почетни услов је $x + 6 \geqslant 0$ (тј. $x \geqslant -6$). Додајмо обема странама једначине израз $4(x + 6)$. Добијамо $x^2 + 4x\sqrt{x+6} + 4(x + 6) \leqslant 9(x + 6)$, тј. $(x + 2\sqrt{x+6})^2 \leqslant 9(x + 6)$, што се своди на $|x + 2\sqrt{x+6}| \leqslant 3\sqrt{x+6}$, тј. $-3\sqrt{x+6} \leqslant x + 2\sqrt{x+6} \leqslant 3\sqrt{x+6}$.

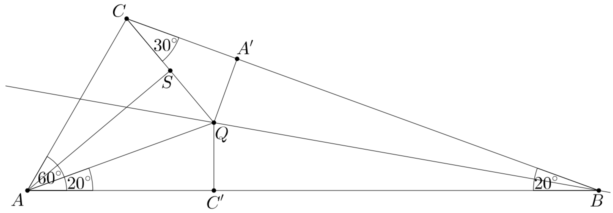
Решимо прво неједначину $-3\sqrt{x+6} \leqslant x + 2\sqrt{x+6}$, тј. $-5\sqrt{x+6} \leqslant x$. Она је увек задовољена за $x \geqslant 0$, док за $x < 0$ након квадрирања остаје $25(x + 6) \geqslant x^2$ (мења се знак неједнакости), тј. $x^2 - 25x - 150 \leqslant 0$; функција на левој страни има нуле у тачкама $\frac{25 \pm \sqrt{25^2+600}}{2} = \frac{25 \pm 35}{2}$, па је за $x < 0$ непозитивна на интервалу $x \in [-5, 0)$. Дакле, решење посматране неједначине је $x \in [-5, \infty)$.

Решимо сада неједначину $x + 2\sqrt{x+6} \leqslant 3\sqrt{x+6}$, тј. $x \leqslant \sqrt{x+6}$. Она је увек задовољена за $x \in [-6, 0]$, док за $x > 0$ након квадрирања остаје $x^2 \leqslant x + 6$, тј. $x^2 - x - 6 \leqslant 0$; функција на левој страни има нуле у тачкама $\frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$, па је за $x > 0$ ненегативна на интервалу $x \in (0, 3]$. Дакле, решење посматране неједначине је $x \in [-6, 3]$.

Све заједно, решење неједначине из поставке је:

$$x \in [-5, \infty) \cap [-6, 3] = [-5, 3].$$

4. Означимо са C' и A', редом, подножја нормала из тачке Q на странице AB и BC. Важи $\measuredangle ACB = 180^\circ - 60^\circ - 20^\circ = 100^\circ$ и $\measuredangle ACQ = \measuredangle ACB - \measuredangle QCB =$



Др 2019 2Б 4

$100^\circ - 30^\circ = 70^\circ$. Одатле, $\measuredangle CQA = 180^\circ - \measuredangle ACQ - \measuredangle CAQ = 180^\circ - 70^\circ - 40^\circ = 70^\circ = \measuredangle ACQ$, па следи да је $\triangle ACQ$ једнакокрак, тј. $AC = AQ$. Означимо са S средиште дужи CQ. Из претходног следи да је AS висина у $\triangle ACQ$, и такође симетрала угла код темена A. Сада примећујемо да $\triangle ASQ$ и $\triangle AC'Q$ имају све углове једнаке, као и заједничку хипотенузу AQ, па су они подударни. Одатле следи $QC' = QS$. С друге стране, у правоуглом $\triangle CA'Q$ угао код темена C једнак је 30°, па закључујемо $CQ = 2QA'$; како је S средиште дужи CQ, имамо $QS = QA'$. Из овога и ранијег $QS = QC'$ следи $QA' = QC'$, али ово значи да је тачка Q једнако удаљена од кракова угла код темена B, те она припада симетрали тог угла.

5. Ако су све цифре исте, таквих бројева има 9 (сви осим 00000, јер он не испуњава услове задатка). Надаље посматрајмо бројеве који имају бар две различите цифре.

Пребројмо прво колико максимално може бити таквих бројева чије су цифре у неопадајућем поретку. Сваки такав број је једнозначно одређен одабиром пет цифара које га сачињавају (након што су цифре одабране, број добијамо њиховим сортирањем у неопадајућем поретку), и притом међу цифрама не сме бити 0 (ако би била, онда би она, због неопадајућег поретка, морала ићи на почетак телефонског броја, што је забрањено условом задатка). Ако је број сачињен од само две различите цифре, оне формирају један од следећих образаца: прво једна цифра, а потом четири исте (веће од претходне); прво две исте, а потом три исте (веће од претходних); прво три исте, а потом још две исте; прво четири исте, а потом још једна већа. Дакле, од две фиксиране цифре можемо направити 4 телефонска броја, а како те 2 цифре можемо одабрати на $\binom{9}{2}$ начина, тих телефонских бројева има $4 \cdot \binom{9}{2}$. Ако је број сачињен од три различите цифре, оне формирају један од следећих образаца: $3+1+1$, $1+3+1$, $1+1+3$, $2+2+1$, $2+1+2$ или $1+2+2$, што је 6 могућности, а како те три цифре можемо одабрати на $\binom{9}{3}$ начина, то даје $6 \cdot \binom{9}{3}$ бројева. Ако је број сачињен од четири различите цифре, оне формирају један од следећих образаца: $1+1+1+2$, $1+1+2+1$, $1+2+1+1$ или $2+1+1+1$, па таквих бројева има $4 \cdot \binom{9}{4}$. И коначно, оних којима су све цифре различите има $\binom{9}{5}$.

Пребројмо сада оне бројеве чије су цифре у нерастућем поретку. Резон је потпуно исти, само треба имати у виду да сада имамо 10 цифара у оптицају (јер овде бројеви могу садржати и цифру 0), па добијамо још $4 \cdot \binom{10}{2} + 6 \cdot \binom{10}{3} + 4 \cdot \binom{10}{4} + \binom{10}{5}$ телефонских бројева.

Укупан резултат је: $9+4\cdot\binom{9}{2}+6\cdot\binom{9}{3}+4\cdot\binom{9}{4}+\binom{9}{5}+4\cdot\binom{10}{2}+6\cdot\binom{10}{3}+4\cdot\binom{10}{4}+\binom{10}{5} = 9+144+504+504+126+180+720+840+252 = 3279$ телефонских бројева.

Трећи разред – Б категорија

1. Пошто постоји укупно 5 непарних цифара: 1, 3, 5, 7 и 9, од њих можемо саставити укупно $125 (= 5^3)$ троцифрених бројева. За сваку од 5 непарних цифара, постоји укупно 25 посматраних троцифрених бројева који имају ту цифру на месту јединица. Исто важи и за цифру десетица и цифру стотина. Дакле, групишући збирове на месту стотина, десетица и јединица, израчунавамо да тражени збир износи: $100 \cdot 25 \cdot (1+3+5+7+9) + 10 \cdot 25 \cdot (1+3+5+7+9) + 25 \cdot (1+3+5+7+9) = 62500 + 6250 + 625 = 69375$.

2. Да би израз с леве стране био једнак 1 за целобројну основу и целобројни експонент, мора важити један од следећих услова: експонент је 0 а основа је различита од нуле; основа је 1 а експонент произвољан; основа је -1 а експонент паран број. Размотримо сада ове могућности понаособ.

- $n^3 + 14n^2 + 33n = 0$ и $n^4 - 9n^2 + 19 \neq 0$: Имамо $0 = n^3 + 14n^2 + 33n = n(n^2 + 14n + 33)$, па су, поред $n = 0$, решења још и $n = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 33}}{2} = \frac{-14 \pm 8}{2}$, тј. $n = -3$ и $n = -11$. Директно се проверава да сва ова решења заиста испуњавају и услов $n^4 - 9n^2 + 19 \neq 0$.
- $n^4 - 9n^2 + 19 = 1$: Једначина $n^4 - 9n^2 + 19 = 1$ се увођењем смене $n^2 = t$ своди на $t^2 - 9t + 18 = 0$, чија су решења $t = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 18}}{2} = \frac{9 \pm 3}{2}$, тј. $t = 6$ и $t = 3$. С обзиром на $n = \pm\sqrt{t}$, овде не добијамо целобројна решења за n.
- $n^4 - 9n^2 + 19 = -1$ и $n^3 + 14n^2 + 33n$ је паран број: Једначина $n^4 - 9n^2 + 19 = -1$ се увођењем смене $n^2 = t$ своди на $t^2 - 9t + 20 = 0$, чија су решења $t = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 20}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2}$, тј. $t = 5$ и $t = 4$. У првом случају не добијамо целобројна решења за n, док у другом добијамо $n = 2$ и $n = -2$. Примећујемо да за обе ове вредности израз $n^3 + 14n^2 + 33n$ јесте паран број, па то јесу решења једначине из поставке.

Дакле, решења полазне једначине су: $n \in \{-11, -3, -2, 0, 2\}$.

3. Поткорену величину можемо трансформисати на следећи начин: $x^2 - 6xz + 6x + 9z^2 - 18z + 9 = (x - 3z)^2 + 6(x - 3z) + 9 = (x - 3z + 3)^2$, па је први сабирак заправо $|x - 3z + 3|$. Приметимо да су сви сабирци ненегативни, па да би њихов збир био 0, сви морају бити једнаки нули. Према томе, једначина из поставке је заправо еквивалентна следећем систему:

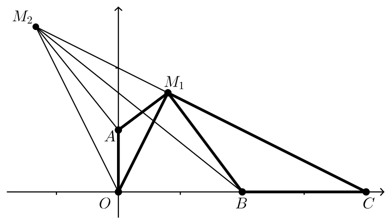
$$\begin{aligned} x \phantom{{}+ky} - 3z &= -3; \\ 2x + ky - z &= -2; \\ x + 2y + kz &= 1. \end{aligned}$$

Прву једначину помножену са $-\frac{1}{3}$ додамо другој, а помножену са $\frac{k}{3}$ додамо трећој, чиме се оне своде на $\frac{5}{3}x + ky = -1$ и $\frac{k+3}{3}x + 2y = 1 - k$. Прву од две последњенаведене једначине помножимо са $-\frac{k+3}{5}$ и додамо следећој, чиме се она своди на $\frac{10 - k^2 - 3k}{5}y = \frac{8 - 4k}{5}$, тј. $(10 - k^2 - 3k)y = 8 - 4k$. Према томе, горњи систем је еквивалентан са

$$\begin{aligned} x - 3z &= -3; \\ \tfrac{5}{3}x + ky &= -1; \\ (10 - k^2 - 3k)y &= 8 - 4k. \end{aligned}$$

За $10-k^2-3k\neq 0$ систем има јединствено решење (из последње једначине рачунамо y, из претходне x, а потом из прве z). Израз на левој страни је 0 за $k=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2+4\cdot 10}}{-2}=\frac{3\pm 7}{-2}$, тј. за $k=-5$ и $k=2$. Дакле, за $k\neq -5,2$ систем има јединствено решење. За $k=-5$ последња једначина се своди на $0=28$, па систем тада нема решења, а за $k=2$ последња једначина је испуњена за ма које y (и за свако y можемо наћи одговарајуће x и z), па систем тада има бесконачно много решења.

4. Нека су (x,y) координате тачке M. Из услова задатка следи $\triangle MAO\sim\triangle MBC$, па добијамо $\frac{MC}{MO}=\frac{MB}{MA}=\frac{BC}{AO}$, што се (након квадрирања) своди на $\frac{(4-x)^2+y^2}{x^2+y^2}=\frac{(2-x)^2+y^2}{x^2+(y-1)^2}=4$, а одавде имамо систем $16-8x+x^2+y^2=4x^2+4y^2$ и $4-4x+x^2+y^2=4x^2+4y^2-8y+4$. Одузимањем прве једначине од друге добијамо $4x-12=-8y+4$, тј. $x=4-2y$. Заменом овога нпр. у другу једначину добијамо $4-4(4-2y)+(4-2y)^2+y^2=4(4-2y)^2+4y^2-8y+4$, што после сређивања даје $-15y^2+64y-64=0$. Решавањем ове једначине добијамо $y_{1/2}=\frac{-64\pm\sqrt{64^2-4\cdot 15\cdot 64}}{-30}=\frac{-64\pm 16}{-30}$, тј. $y_1=\frac{8}{5}$ и $y_2=\frac{8}{3}$. Овим вредностима одговарају $x_1=4-\frac{16}{5}=\frac{4}{5}$ и $x_2=4-\frac{16}{3}=-\frac{4}{3}$.



Др 2019 3Б 4

Дакле, постоје две могућности за координате такве тачке M: $(\frac{4}{5},\frac{8}{5})$ и $(-\frac{4}{3},\frac{8}{3})$.

5. Приметимо да по модулу 10 важи $3^3=27\equiv 7 \pmod{10}$, $3^4\equiv 7\cdot 3=21\equiv 1 \pmod{10}$, $3^5\equiv 1\cdot 3=3 \pmod{10}$, $3^6\equiv 3\cdot 3=9 \pmod{10}$, $3^7\equiv 9\cdot 3=27\equiv 7 \pmod{10}$ и даље се остаци по модулу 10 (тј. последње цифре степена тројке) периодично понављају (период је $7,1,3,9$). Претпоставимо да се број 3^n завршава цифрама $\overline{ab}$, тј. $3^n=100k+10a+b$. Тада имамо $3^{n+1}=300k+30a+3b$, те су последње две цифре броја 3^{n+1} исте као последње две цифре броја $30a+3b$, а ако је a паран број, претпоследња цифра је, дакле, исте парности као и претпоследња цифра броја $3b$ (уколико је $3b$ једноцифрен број, сматрамо да му је претпоследња цифра 0). За полазни степен тројке (тј. 27) имамо да је претпоследња цифра парна, а како b може узимати само вредности 7, 1, 3 и 9, и како у овим случајевима $3b$ износи 21, 3, 9 и 27, редом, видимо да је и претпоследња цифра броја $3b$ увек парна, па по тврдњи из претходне реченице видимо да ће та парност претпоследње цифре и надаље остати очувана, тј. сви бројеви 3^n за $n\geqslant 3$ имају парну цифру десетица.

Четврти разред – Б категорија

1. Из једнакости $z^{2019}=1$ следи $|z^{2019}|=1$, а онда и $|z|^{2019}=1$, одакле добијамо $|z|^{2019}=1$. На исти начин следи $|z+1|=1$. Запишимо $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$. Једнакост $|z|=1$ своди се на $a^2+b^2=1$, док се $|z+1|=1$ своди не $(a+1)^2+b^2=1$. Одузимањем претпоследње једнакости од последње добијамо $2a+1=0$, тј. $a=-\frac{1}{2}$. Сада имамо $(-\frac{1}{2})^2+b^2=1$, тј. $b^2=\frac{3}{4}$, одакле следи $b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Дакле, једини могући кандидати за бројеве који испуњавају тражени услов су $z = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. У том случају имамо $z+1 = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и онда $(z+1)^3 = (\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3 = (\frac{1}{2})^3 \pm 3 \cdot (\frac{1}{2})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}i + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2}i)^2 \pm (\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3 = \frac{1}{8} \pm \frac{3\sqrt{3}}{8}i - \frac{9}{8} \mp \frac{3\sqrt{3}}{8}i = -1$, па одатле $(z+1)^{2019} = ((z+1)^3)^{673} = (-1)^{673} = -1$, што не одговара услову.

Према томе, не постоји ниједан комплексан број који испуњава постављени услов.

2. Одговор је потврдан.

Означимо $x_n = 200\ldots0019$, где се 0 понавља n пута; другим речима, $x_n = 2 \cdot 10^{n+2} + 19$. Тада $2019 \mid x_n$ ако и само ако $2019 \mid x_n - 2019$. Приметимо, $x_n - 2019 = 2 \cdot 10^{n+2} + 19 - 2000 - 19 = 2000(10^{n-1} - 1)$, па је довољно доказати да постоји природан број n, $n \geqslant 2$, такав да $2019 \mid 10^{n-1} - 1$. Докажимо да међу бројевима $10^1 - 1, 10^2 - 1, ..., 10^{2019} - 1$ постоји број који је дељив са 2019. Претпоставимо супротно. Како имамо укупно 2019 посматраних бројева, а ниједан није дељив са 2019, нека два међу њима морају давати исти остатак при дељењу са 2019 (што следи из Дирихлеовог принципа, будући да постоји само 2018 ненула остатака при дељењу са 2019). Нека су то бројеви $10^a - 1$ и $10^b - 1$, за $1 \leqslant a < b \leqslant 2019$. Међутим, тада би важило $2019 \mid (10^b - 1) - (10^a - 1) = 10^a(10^{b-a} - 1)$, па како су 10 и 2019 узајамно прости, следило би $2019 \mid 10^{b-a} - 1$; како $b - a \in \{1, 2, ..., 2018\}$, ово је контрадикција са претпоставком. Овим је доказано да постоји природан број k такав да $2019 \mid 10^k - 1$, што значи да постоји и природан број n, $n > 1$, такав да $2019 \mid x_n$.

3. Оптужени не може бити лажов, јер би у том случају његова изјава била нетачна па би он био крив, али по услову задатка лажов није крив за почињени злочин.

Препоставимо да је оптужени истинољубац. Тада је његова изјава тачна па је он невин, а у том случају је и браоничева изјава тачна, па бранилац мора бити нормалац (не може бити истинољубац јер је оптужени истинољубац). Преостаје да је у том случају тужилац лажов, па он не може бити крив, те је у овом случају крив бранилац.

Претпоставимо сада да је оптужени нормалац, и да је невин. Тада је браниочева изјава тачна, па он мора бити истинољубац. Преостаје да је тужилац лажов, те је он невин, и у овом случају је поново крив бранилац.

Претпоставимо коначно да је оптужени нормалац и да је крив. Тада бранилац мора бити лажов, и преостаје да је тужилац истинољубац.

Када све сумирамо, видимо да (на основу дешавања пре доласка инспектора) преостају само следеће три опције:

	опција 1	опција 2	опција 3
оптужени	невин истинољубац	невин нормалац	крив нормалац
бранилац	крив нормалац	крив истинољубац	невин лажов
тужилац	невин лажов	невин лажов	невин истинољубац

Приметимо да је у свим могућностима тужилац невин, и притом ни у једној од њих тужилац није нормалац. Дакле, након што је инспектор чуо одговор на прво питање, установио је да ли је тужилац истинољубац или лажов (у зависности од тога да ли добије одговор „не“ или „да“, респективно). Пошто је инспектор након тога поставио и друго питање, следи да је тужилац лажов (у супротном би инспектор једнозначно идентификовао опцију 3 па, по услову задатка, не би ни постављао друго питање). На друго постављено питање, бранилац истинољубац би одговорио „не“, а бранилац нормалац би могао одговорити и „да“ и „не“. Према томе, уколико би одговор на друго инспекторово питање био „не“, инспектор не би могао да утврди да ли је посреди опција 1 или опција 2; како је инспектор после другог питања сазнао све што је хтео, следи да је чуо одговор „да“, и да је коначно решење представљено опцијом 1.

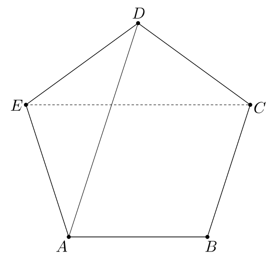
4. Можемо записати

$$\begin{aligned}a_n &= \sin^2 \pi\sqrt{n^2+n} = \sin^2 \pi(\sqrt{n^2+n}-n+n)\\ &= \sin^2 \pi\left(\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}+n\right) = \sin^2 \pi\left(\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}+n\right)\\ &= \sin^2 \pi\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}+n\right) = \sin^2\left(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}+n\pi\right) = \sin^2 \frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}.\end{aligned}$$

Како важи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$, добијамо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$.

5. Одговор: постоји.

Нека је $ABCDE$ правилан петоугао. Тврдимо да нпр. четвороугао $ABCD$ испуњава услове из поставке. Заиста, које год његово теме да обришемо, уместо њега можемо одабрати тачку E, и добијени четвороугао ће бити подударан четвороуглу $ABCD$ (будући да, због симетрије, сви четвороуглови чија су темена неких 4 од 5 темена правилног петоугла јесу међусобно подударни).



Др 2019 4Б 5

Садржај