ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА
СРБИЈЕ

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА СРЕДЊОШКОЛАЦА 2022/2023.

Београд – Смедерево, 2023.

Организацију 65. Државног такмичења из математике за ученике средњих школа у Републици Србији – Б категорија, су помогли:

- Министарство просвете Републике Србије
- Друштво математичара Србије
- Општина Смедерево
- Гимназија Смедерево

Организациони одбор Државног такмичења:

- Александар Маринковић, Гимназија, Смедерево - директор
- Данијел Ђорђевић, Гимназија, Смедерево - помоћник директора и председник подружнице ДМС у Смедереву
- Мирослав Марић, Друштво математичара Србије
- Миљан Кнежевић, Математички факултет, Београд

- СМЕДЕРЕВО -

Прелепи град Смедерево је културно и економско седиште Подунавског округа. Налази се на обалама Дунава у североисточном делу Србије. Смедерево се по први пут помиње 1019. године у повељи византијског цара Василија II, када је у истоименом граду успостављена једна од епископија новостворене Охридске архиепископије. Важно је напоменути да се у писаним артефактима Смедерево следећи пут спомиње у повељи кнеза Лазара из 1381. године. Међутим, у 14. веку, са повлачењем српске државе на север пред турским налетима, град тек добија на важности и значају. Као град са традицијом престонице Смедерево се издвојило одмах по изградњи Смедеревске тврђаве 1430. године и био је седиште Деспотовине, са деспотом Ђурђем Бранковићем на челу, све до 1459. године, након чега потпада под власт Турака. Током дугог периода био је седиште Смедеревског санџака, све до доласка Аустријанаца у 18. веку.

Прва основна школа је у Смедереву основана 1806. године, током Првог српског устанка. У то време у граду је основан Правитељствујушчи совјет, на челу са Доситејем Обрадовићем и Смедерево је поново постало престоница. На почетку 20. века град је имао 7.000 становника, док се данас убраја у десет највећих градова у земљи.

Гимназија Смедерево је једина гимназија у Смедереву. За претечу је имала, најпре, Реалчицу (малу гимназију) која је у Смедереву отворена 1871. и то после вишегодишњих захтева смедеревских власти. Те године у први разред је уписано 35 ученика. Школа је била смештена у просторијама Начелства. Школа није радила током Првог светског рата 1918. Тек након ослобођења 1918. године је наставила са радом, прво као петоразредна, а потом је постала шесторазредна школа, под називом - Краљевска српска гимназија. Године 1920. постала је осморазредна школа и по први пут добија име „Смедеревска гимназија”, што је било од великог значаја за смедеревски округ. Временом, Гимназија постаје све значајнији образовни и културни чинилац града. За време окупације у Другом светском рату зграду Гимназије су за своје потребе заузели Немци, а школа је радила у просторијама основне школе и неким приватним зградама. У тим тешким временима Гимназија није успевала да успостави нормалан рад са ученицима, јер је наставу ометала честа промена намене школе за потребе збрињавања рањеника. Тек априла 1944. почела је редовна настава, након чега се догодило савезничко бомбардовање Смедерева, те је школа поново прекинула рад, који се нормализује након 1947. године.

Реорганизацијом образовног система 1951. године, када је уведено обавезно основно осмогодишње школовање, у Гимназији је почело постепено укидање нижих разреда почев од школске 1954/55. Гимназија постаје четворогодишња средња школа. Данас, након комплетног реновирања 2019. године, Гимназија располаже са 17 учионица опште намене и 9 кабинета и лабораторија. За реализацију наставног процеса користе се сви ресурси Школе. Образовни, педагошки и васпитни карактер Школе, ниво организације наставе и високи степен ангажовања наставника и професора умногоме је допринео да су бројни њени ученици остварили висока постигнућа у науци, техници, привреди, образовању, друштвеним, политичким, културним и спортским активностима. Гимназија је одликована Орденом заслуга за народ са златном звездом, добитник је престижне Вукове награде (КПЗ Србије, 1983) и Светосавске повеље (Смедерево, 1995).

* * * * *

РЕПУБЛИЧКА КОМИСИЈА

за такмичења из математике ученика средњих школа

школска година 2022/2023.

1. Драган Аздељковић, Економски факултет, Београд
2. Владица Андрејић, Математички факултет, Београд
3. Иван Анић, ИТС, Београд
4. Јован Аризановић, Математички факултет, Београд
5. Владимир Балтић, ВИШЕР, Београд
6. Теодор вон Бург, Математичка гимназија, Београд
7. Јожеф Б. Варга, ОШ „Петар Кочић”, Темерин
8. Немања Вучићевић, ПМФ, Крагујевац
9. Страхиња Гвоздић, Универзитет Париз - Сакле, Француска
10. Даница Зечевић, Математички факултет, Београд
11. Милутин Којић, Гимназија „Урош Предић”, Панчево
12. Миљан Кнежевић, Математички факултет, Београд - председник
13. Ђорђе Кртинић, Математички факултет, Београд
14. Миливоје Лукић, Универзитет Рајс, Хјустон, САД
15. Петар Марковић, ПМФ, Нови Сад
16. Павле Мартиновић, Математички факултет, Београд
17. Иван Матић, Барух Колеџ, Њу Јорк, САД
18. Немања Матић, Средња техничка школа „Колубара”, Лазаревац
19. Милош Милићев, Математички факултет, Београд
20. Алекса Милојевић, Универзитет Принстон, САД
21. Александра Милосављевић, ПМФ, Крагујевац
22. Милош Милосављевић, Гимназија „Светозар Марковић”, Ниш
23. Данка Мириловић, ЕТШ „Никола Тесла”, Панчево
24. Милан Митрески, Математички факултет, Београд
25. Сања Николић, ВШССОВиТ, Суботица
26. Невена Петровић, ПМФ, Крагујевац
27. Данијела Поповић, Математички институт САНУ, Београд
28. Вељко Радић, Математички факултет, Београд
29. Александра Росић, ИТС, Београд
30. Александар Сеничић, Гимназија, Краљево
31. Ђорђе Стакић, Економски факултет, Београд
32. Марко Станковић, Педагошки факултет, Врање
33. Милош Стојаковић, ПМФ, Нови Сад
34. Иља Узелац Бујишић, Универзитет Кембриџ, Велика Британија
35. Урош Цоловић, Математички факултет, Београд
36. Борис Шобот, ПМФ, Нови Сад

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ, 05. 02. 2023.

Први разред – А категорија

1. Дат је скуп $X = \{aca, konac, lopte, loto, prst\}$ и на том скупу две релације ϱ_1 и ϱ_2, које су дефинисане захтевом:

$$x \, \varrho_1 \, y \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad \text{речи} \quad x \text{ и } y \quad \text{су исте дужине,}$$

$$x \, \varrho_2 \, y \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad \text{речи} \quad x \text{ и } y \quad \text{се завршавају истим словом.}$$

(а) Да ли су дате релације рефлексивне, симетричне, антисиметричне и транзитивне?

(б) За сваку од релација ϱ_1 и ϱ_2 испитати да ли је релација еквиваленције, односно, да ли је иста релација поретка. У случају да је нека од њих релација еквиваленције, наћи све класе еквиваленције.

2. Дат је полином P са целобројним коефицијентима за који важи $P(P(2023)+2023) = 1$. Које све вредности може узети број $P(2023)$?

3. Дат је троугао ABC. Тангенте на описану кружницу тог троугла, конструисане у тачкама B и C, секу се у тачки X. Нека кружница описана око троугла ABX сече праву BC у тачки P и нека кружница описана око троугла ACX сече праву BC у тачки Q. Доказати да се тангенте конструисане у тачкама P и Q на описану кружницу троугла XPQ секу на правој AX.

4. Наћи све природне бројеве n такве да је број n^2+7n+2 производ неколико (барем два) узастопних природних бројева.

5. За таблу димензија $m \times n$ (m и n су природни бројеви) њеним скелетом ћемо звати скуп свих дужи које су ивице барем једног од mn јединичних квадрата од којих се иста састоји. Одредити све уређене парове природних бројева (m, n), такве да се скелет табле $m \times n$ може поплочати фигуром која се састоји од две нормалне јединичне дужи које имају једно заједничко теме.

Други разред – А категорија

1. Наћи сва реална решења једначине $x = 506 - (506 - x^2)^2$.

2. Одредити све могуће вредности реалног параметра a, ако се зна да за свако $x \in \mathbb{R}$ постоји барем један $y \in \mathbb{R}$ са својством да је $ax^2 + y^2 + 4xy + 2x + 2y = 0$.

3. Колико има природних бројева који у декадном запису имају 2023 цифре, при чему се, приликом брисања произвољне његове цифре, увек добија број дељив са 7?

4. Добрица и Милица желе да посете 2202 парка и у сваком од њих засаде известан број дрвећа. У сваком парку се на почетку налази по X дрвећа. План је да сваки од паркова обоје посете тачно једанпут. У k-том дану свако од њих ће ујутру обићи тачно један од паркова, не нужно исти, и у њему засадити тачно k дрвећа. Међутим, сваке вечери локални хулигани у сваком парку, у којем постоји барем једно дрво, секу по једно дрво. Због своје безбедности, Добрица и Милица не желе да иду у паркове у којима у тренутку доласка неког од њих нема нити једно дрво. Одредити минималну вредност за X, такву да Добрица и Милица могу да посете све паркове и посаде сво дрвеће као што желе, упркос ометањима хулигана.

5. Нека је тачка I средиште уписане кружнице троугла ABC. Означимо са D тачку пресека симетрале унутрашњег угла у темену A и странице BC тог троугла. Ако важи $BD = 3$, $CD = 4$ и $AD = 6$, наћи дужину дужи AI.

Трећи разред – А категорија

1. Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 3 & b \end{bmatrix}$. Одредити све вредности параметара a и b тако да важи матрична једнакост

$$A^2 - 5A = 2I,$$

при чему је са I означена одговарајућа јединична матрица.

2. Урош и Вељко играју игру на табли на којој су на почетку написани редом бројеви $n, n-1, n-2, ..., 1$, при чему је $n > 2$ дати природан број. У сваком потезу Урош има право да највише k пута изабере по два суседна броја са табле и да им замени места. Вељко у сваком потезу бира један број и премешта га на произвољну позицију на табли (може га и оставити на истом месту). Урошев циљ је да на табли буду растуће записани бројеви $1, 2, ..., n$, док је Вељков циљ да га спречи у томе. Колико најмање мора бити k тако да Урош има победничку стратегију?

3. Испитати да ли постоји прост број p, као и природни бројеви a и b, такви да важи $a^p + b^p = (2p-1)!$.

4. У оштроуглом троуглу ABC, $AB < AC$, тачке D, E и F су, редом, подножја нормала из темена A, B и C на одговарајуће странице BC, CA и AB тог троугла. Означимо са K пресек правих EF и BC, а са X тачку на дужи BC такву да је $CX - BX = 2(CD - BD)$. Доказати да кружница описана око троугла AKX садржи средиште дужи EF.

5. Ако ненегативни реални бројеви a, b и c задовољавају услов $a+b+c=3$, наћи максималну могућу вредност израза:

(а) $a+ab+bc+ca$;
(б) $a+ab+bc$.

Четврти разред – А категорија

1. Да ли постоји колекција $\{A_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, подскупова скупа природних бројева таквих да било која коначна подколекција те колекције има непразан пресек, али да важи

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \emptyset?$$

2. Дат је троугао ABC. Нека уписана кружница унутар троугла ABC додирује странице AB, BC и CA, редом, у тачкама F, D и E, а споља приписана кружница, која одговара страници BC, нека додирује праве AB и AC у тачкама у G и H, редом. Означимо са X другу тачку пресека кружница описаних око троуглова ABC и AEF, а са Y другу тачку пресека кружница описаних око троуглова ABC и AGH. Доказати да је $BX = CY$.

3. У граду G постоји $n \geqslant 8$ диско-клубова, $n \in \mathbb{N}$, од којих сваки користи светла у тачно једној од две боје, црвеној или плавој. Притом, између одређених клубова постоје директне аутобуске линије, како би грађани овог града могли с лакоћом да мењају места ноћног провода, а уз евентуално преседање, може се стићи из произвољног клуба до произвољног другог клуба. Ако је познато да је сваки диско-клуб повезан директном аутобуском линијом са тачно три друга диско-клуба, међу којима барем два користе светла црвене боје, колико највише може бити клубова са плавим светлима у том граду?

4. Нека су $a = BC, b = CA, c = AB$ дужине страница троугла ABC и нека је h_a дужина висине која одговара страници BC. Наћи највећу могућу вредност израза

$$\frac{a+h_a}{b+c}.$$

5. Одредити све природне бројеве k, такве да постоји бесконачно природних бројева n таквих да важи $\varphi(n) = \dfrac{n}{k}$, где је $\varphi(n)$, $n \in \mathbb{N}$, укупан број природних бројева не већих од n, који су узајамно прости са n.

Први разред – Б категорија

1. Дат је скуп $X = \{aca, konac, lopte, loto, prst\}$ и на том скупу две релације ϱ_1 и ϱ_2, које су дефинисане захтевом:

$$x \,\varrho_1\, y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{речи} \quad x \text{ и } y \quad \text{су исте дужине,}$$

$$x \,\varrho_2\, y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{речи} \quad x \text{ и } y \quad \text{се завршавају истим словом.}$$

(а) Да ли су дате релације рефлексивне, симетричне, антисиметричне и транзитивне?

(б) За сваку од релација ϱ_1 и ϱ_2 испитати да ли је релација еквиваленције, односно, да ли је иста релација поретка. У случају да је нека од њих релација еквиваленције, наћи све класе еквиваленције.

2. Одредити збир свих природних бројева n таквих да је број

$$\frac{n^2 + 2n + 51}{n^2 + 4n + 3}$$

такође природан.

3. Дат је једнакокраки троугао ABC са основицом AB. Симетрала крака BC сече праву AB у тачки D тако да важи распоред $D - A - B$. На правој CD дата је тачка E тако да је $CE = AD$, при чему се тачка C налази између тачака D и E. Доказати да је троугао DBE једнакокраки.

4. У купеу једног старог воза налазе се две клупе, са по пет места, окренуте једна према другој. Од десет путника који треба да буду смештени у тај купе, њих четворо желе да седе у смеру кретања, док троје од њих желе да седе у смеру супротном од кретања воза. Преосталим путницима смештеним у поменути купе није важна позиција места за седење. На колико начина је могуће тих десет путника сместити у купе, тако да се нико не буни?

5. У скупу реалних бројева наћи сва решења једначине

$$\left|\frac{1}{2x}\right| + \left|\frac{2x-1}{2x}\right| + \left|\frac{2x-2}{2x}\right| = \frac{4}{3}.$$

Други разред – Б категорија

1. Назовимо реалан број d *добрим* ако је за сваки реалан број x испуњено

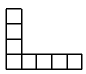
$$\frac{2x^2 - 14x + 27}{x^2 - 7x + 13} \leqslant d.$$

(а) Доказати да је број 8 добар.
(б) Наћи све добре бројеве.

2. У зависности од реалног параметра a дискутовати колико решења има једначина

$$\Big||x^2+7x+6|-(x^2+7x+10)\Big|=a.$$

3. Дат је троугао ABC. Нека су K_a, K_b и K_c квадрати конструисани у спољасњости троугла ABC над страницама BC, CA и AB, редом. Кружнице описане око квадрата K_b и K_c се секу у тачкама A и L. Доказати да права AL садржи пресек дијагонала квадрата K_a.

4. На колико начина можемо да упишемо бројеве $1, 2, \ldots 8$ у поља фигуре са слике , тако да је сваки од бројева уписан у тачно једно поље фигуре и да, ако је број записан испод неког броја, онда је он већи од тог броја изнад њега, као и да број који је записан десно од неког броја мора бити мањи од броја који је непосредно лево од њега?

5. Да ли постоје природни бројеви a, b и c такви да је вредност израза $(a+b)(b+c)(c+a)$ једнака:

(а) 2023^{2024};
(б) 2024^{2023}?

Трећи разред – Б категорија

1. Поређати бројеве $a=\sin 2023^\circ$, $b=\sin 4046^\circ$, $c=\cos 2023^\circ$ и $d=\cos 4046^\circ$ по величини, тј. од најмањег ка највећем.

2. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\begin{vmatrix} 2023 & x+3 & 1+x \\ 4046 & 3x+6 & 4+x \\ 6069 & x+7 & 5+6x \end{vmatrix} \leqslant 0.$$

3. Дат је разнострани тангентни четвороугао $ABCD$ у коме је $AB=2$ и $BC=4$. Ако је унутрашњи угао у темену B тог четвороугла оштар и ако су дужине дијагонале AC и страница CD и DA три узастопна природна броја, не обавезно тим редом, одредити $\measuredangle CAD$.

4. Наћи максималан број елемената скупа $\{1, 2, \cdots, 13\}$ које можемо изабрати тако да међу изабранима не постоје нека три, рецимо a, b и c, $a\neq b$, тако да $a-b \mid c$.

5. У групи од 2023 ученика сваки од њих или увек говори истину или увек лаже. Познато је да сваки ученик зна којој категорији припада он сам, а којој припадају остали ученици, као и да се свих 2023 ученика могу, један иза другог, распоредити у ред тако да свако, осим првог у реду, може да саопшти: "Ја сам иза лажова." Колико таквих редова, од 2023 ученика, је у том случају могуће направити?

Четврти разред – Б категорија

1. У четвороуглу $ABCD$ важи да $AB||CD$. Доказати да важи

$$\frac{PA}{PB} = \left(\frac{PD}{PC}\right)^2,$$

где је P тачка на страници AB таква да је $\measuredangle DAB = \measuredangle DPC = \measuredangle CBA$.

2. Нека је a највећа вредност функције $y = \sin(\sin x)$, $x \in \mathbb{R}$, а b однос најдуже странице и пречника описане кружнице око троугла чије су странице дужина 7, 8 и 13. Шта је веће a или b?

3. Ако је $\log 2 = a$ и $\log 3 = b$, одредити $\log_5 216$ у функцији од a и b ($\log x = \log_{10} x$, $x > 0$).

4. Наћи максималан број елемената скупа $\{1, 2, \cdots, 23\}$ које можемо изабрати тако да међу изабранима не постоје нека три, рецимо a, b и c, $a \neq b$, тако да $a - b \mid c$.

5. На колико начина на класичну шаховску таблу можемо на различита поља распоредити белог и црног краља тако да се не нападају?

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ, 04. 03. 2023.

Први разред – А категорија

1. Нека је ϱ бинарна релација дефинисана на скупу $\mathbb{N}$ тако да за све $x, y \in \mathbb{N}$ важи

$$x\ \varrho\ y \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad (\exists k \in A)\ x + 2y = 3k \cdot x.$$

У сваком од случајева:

(а) $A = \mathbb{N}$; (б) $A = \mathbb{T}$, где је $\mathbb{T}$ скуп непарних природних бројева; (в) $A = \mathbb{Q}$;

испитати да ли је релација ϱ релација поретка на скупу $\mathbb{N}$ и, у случају да јесте, испитати да ли је релација тоталног поретка. Такође, у сваком од случајева испитати да ли је релација ϱ релација еквиваленције на скупу $\mathbb{N}$ и, ако јесте, одредити одговарајуће класе еквиваленције?

2. На страницама оштроуглог троугла ABC дате су тачке $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$ и $C_1 \in AB$ тако да је $\sphericalangle CC_1B = \sphericalangle AA_1C = \sphericalangle BB_1A = \varphi$, где је φ оштар угао. Дужи AA_1, BB_1 и CC_1 секу се у тачкама M, N и P. Доказати да се ортоцентар троугла ABC поклапа са центром описаног круга троугла MNP.

3. Нека је S коначан подскуп скупа природних бројева такав да за свака два елемента x и y из скупа S важи да постоји $z \in S$ тако да $z \mid x - y$. Доказати да постоји елемент из скупа S који дели све остале елементе тог скупа. Да ли тврђење остаје на снази када је S коначан подскуп скупа целих бројева?

4. У једној основној школи свако од укупно 2023 ученика има један ормарић на којима су написани, редом, сви бројеви од 1 до 2023. Претпоставимо да су на почетку сви ормарићи затворени. Ученици те школе су одлучили да се поиграју, те да свако од њих оде и отвори/затвори поменуте ормариће. Први ученик полази и отвара, редом, све ормариће. За њим креће и други ученик и иде и затвара сваки други, тј. ормарић са парним бројем, итд. Ученик n иде до сваког n-тог ормарића и, ако је он отворен, затвори га, а, ако је затворен, онда га отвара. На крају, свих 2023 ученика приступило је процесу отварања/затварања ормарића.

(а) Након ове игре, колико је остало отворених ормарића?
(б) Колико је ормарића тачно два пута отворено и једном затворено?

5. Нека су $x, y \in \mathbb{R}$ такви да су $x + y$ и $x^2 + y$ рационални бројеви.

(а) Ако је и $x + y^2$ рационалан, морају ли x и y бити рационални?
(б) Ако је и $x^3 + y$ рационалан, морају ли x и y бити рационални?

Други разред – А категорија

1. Наћи сва реална решења једначине

$$\sqrt{x+\sqrt{4x+\sqrt{4^2x+\sqrt{\cdots+\sqrt{4^{2023}x+3}}}}}-\sqrt{x}=1.$$

2. Нека је тачка O средиште описане кружнице око троугла ABC у којем важи $\sin\alpha\cos\beta=\sin\gamma\cos\gamma$, где су α, β и γ, редом, величине унутрашњих углова у теменима A, B и C тог троугла. Доказати да се права AO, права одређена тежишном дужи, која садржи тачку B тог троугла, и симетрала унутрашњег угла у темену C секу у једној тачки.

3. Наћи све парове природних бројева (x, y) такве да важи $2^x + 11 = 3^y$.

4. Дат је скуп $S=\{1,2,\ldots,2022\}$. На колико се начина може одабрати k-точлани подскуп M скупа S $(2\leqslant k\leqslant 2022)$ такав да у скупу M не постоје два елемента чији је збир једнак 2022, нити два чији је збир једнак 2023?

5. Нека за позитивне реалне бројеве a, b и c важе једнакости

$$a^2+ab+b^2=144,\ \ b^2+bc+c^2=25\ \text{ и }\ c^2+ca+a^2=169.$$

Одредити вредност израза $ab+bc+ca$.

Трећи разред – А категорија

1. Уколико је $AB=A$ и $BA=B$, доказати да су матрице A и B идемпотентне, тј. да је $A^2=A$ и $B^2=B$.

2. Дат је троугао ABC. Нека су S и S_a, редом, средиште уписане кружнице и средиште споља приписане кружнице која одговара темену A тог троугла. Ако је D подножје висине из темена A и S' тачка симетрична тачки S у односу на праву BC, доказати да су тачке S_a, S' и D колинеарне.

3. Да ли постоји бесконачно много природних бројева r таквих да постоје природни бројеви $n, a_1, a_2, ..., a_r \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ такви да важи

$$n! = a_1!\cdot a_2!\cdot a_3!\cdot\ldots\cdot a_r!\,?$$

4. Дато је k мушкараца и n жена међу којима постоје неки парови који су међусобно компатибилни, при чему је свака жена компатибилна са барем једним мушкарцем. Познато је да није могуће сваког мушкарца оженити

са компатибилном женом, међутим, ако избацимо било ког мушкарца, ово постаје могуће за преостале. Доказати да је $k = n+1$.

5. Одредити све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ за које важи

$$f(y)f(x+y) + xf(x) + f(xy) = f(x+y)^2,$$

за свако $x, y \in \mathbb{R}$.

Четврти разред – А категорија

1. Дат је неконстантан иредуцибилан полином $P \in \mathbb{Q}[x]$. Нека су $a, b \in \mathbb{R}$ такви да је $P(a) = P(b) = 0$ и $a - b \in \mathbb{Q}$. Доказати да је $a = b$.

Напомена: За полином $P \in \mathbb{Q}[x]$ кажемо да је иредуцибилан ако се не може представити као производ два неконстантна полинома из $\mathbb{Q}[x]$.

2. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$. Нека су E и F тачке додира уписане кружнице троугла ABD са страницама AD и AB, редом, а G и H тачке додира уписане кружнице троугла BCD са страницама BC и CD, редом. Доказати да се праве EF, GH и BD секу у једној тачки или су све три паралелне ако и само ако је четвороугао $ABCD$ тангентан.

3. Одредити све функције $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такве да важи

$$f(m) + f(n) \mid m! + n!,$$

за све природне бројеве m и n.

4. (а) Колико постоји низова подскупова $A_1, A_2, ..., A_{100}$ и A_{101} скупа $\{1, 2, 3, ..., 2023\}$ тако да за свако $i \in \{1, 2, 3, ..., 100\}$ важи $|A_i \triangle A_{i+1}| = 101$?
(б) Колико има таквих низова подскупова за које додатно важи и $|A_{101} \triangle A_1| = 101$?

5. Дата је функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таква да за свака два различита природна броја $a, b \in \mathbb{N}$, таква да $a \mid b$, важи $f(a) < f(b)$. Да ли f мора бити неопадајућа?

Први разред – Б категорија

1. Група ученика учествовала је на кросу. Проценат броја ученика који су испунили норму је не мањи од $96,8\%$, а није ни већи од $97,2\%$. Који је најмањи могући број ученика који су учествовали на том кросу?

2. Тачка E је средиште странице AB четвороугла $ABCD$. Тачке F и G су такве да важи $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AD}$. Ако је тачка H средиште CD, доказати да су тачке F, G и H колинеарне.

3. Дат је природан број n који има 6 различитих природних делилаца чији је збир једнак 22. Доказати да је n дељив са 420.

4. Нека је $\mathbb{N}_{13} = \{1, 2, 3 \ldots, 13\}$. Колико има бијекција $f \colon \mathbb{N}_{13} \to \mathbb{N}_{13}$ таквих да је $f(3) = 13$, при чему, за све $x \in \mathbb{N}_{13} \setminus \{3\}$, важи да су x и $f(x)$ различите парности?

5. Једна просторија је на почетку празна. Сваког минута или једна особа уђе у њу или две особе из ње изађу. Може ли после тачно 100 сати у просторији бити тачно 2023 особе?

Други разред – Б категорија

1. Нека су a, b и c позитивни реални бројеви и нека је $a + b < c$. Доказати да вредност израза

$$\sqrt{a+b+c+2\sqrt{ac+bc}} + \sqrt{a+b+c-2\sqrt{ac+bc}}$$

не зависи од a и b.

2. Уколико постоји, испитати да ли је троугао чије су висине:

(а) $5\,\mathrm{cm}, 12\,\mathrm{cm}, 13\,\mathrm{cm}$; (б) $6\,\mathrm{cm}, 9\,\mathrm{cm}, 12\,\mathrm{cm}$;

оштроугли, правоугли или тупоугли.

3. Ако су сви коефицијенти квадратне једначине $ax^2+bx+c=0$ непарни цели бројеви, доказати да тада решења те једначине не могу бити рационални бројеви.

4. Доказати да се у три мерења на ваги са теразијама, од укупно 23 куглице, које су једнаке по свим атрибутима, осим што је тачно једна тежа од осталих, може пронаћи та тежа куглица.

5. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\sqrt{48} + \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}-1} \geqslant \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}+1}.$$

Трећи разред – Б категорија

1. Решити систем неједначина

$$x \cdot \log_{0,5}(x^2+3x) + \log_3 9^x > 0$$

$$x + 4 > \frac{2\log_2 3 - 3\log_8 45}{\log_4 75 + \log_{0,25} 3}.$$

2. Троугао ротира, редом, око својих страница чије су дужине a и b. У функцији од a и b изразити однос запремина тако добијених тела.

3. Наћи све природне бројеве $n > 1$ за које важи $n! \mid n^n - 2023$.

4. На колико начина се могу ставити бела дама и црни скакач на празну шаховску таблу 8×8 тако да ниједна од те две фигуре не напада другу?

5. Површина троугла ABC је $289\,cm^2$. Нека су M, N и P тачке на правама BC, CA и AB, различите од тачака B, C и A, редом, тог троугла такве да важи $CB = CM$, $AC = AN$ и $BA = BP$. Одредити површину троугла MNP.

Четврти разред – Б категорија

1. У зависности од реалног параметра m дискутовати колико реалних решења има једначина

$$|x^2 + x - 2| = x + m.$$

2. Доказати да је површина правилног осмоугла једнака производу дужина његове најмање и његове највеће дијагонале.

3. У скупу целих бројева решити једначину $x^3 + 24 = 2^x$.

4. Авио-компанија Ер-ДМС жели да 150 путника распореди на исто толико седишта у авиону, која су распоређена у 25 редова са по 6 седишта, 3 са сваке стране пролаза. При томе, неки путници путују у групама и Ер-ДМС жели да их распореди што ближе једне другима: две групе од четири путника, тако да двоје седе тачно испред друго двоје из групе; пет група од троје и осам група од двоје тако да седе на три, односно два, узастопна седишта у реду, непрекинута пролазом. На колико различитих начина Ер-ДМС може распоредити путнике у овај авион?

5. Нека је n природан број. Доказати да за $x > 1$ важи неједнакост

$$nx^{\frac{1}{n}} \leqslant x + n - 1.$$

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ,
А категорија, Београд, 25. 03. 2023.

Први разред

1. Нека су $x_1, x_2, \dots x_{2023} \in \{-1, 0, 1, 2\}$ такви да важи

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2023} = 111 \quad \text{и} \quad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2023}^2 = 999.$$

Наћи највећу могућу вредност израза

$$x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_{2023}^3.$$

2. Дат је троугао ABC. Нека је тачка D подножје висине из темена A на праву BC тог троугла и нека је ω је кружница конструисана над дужи AD као пречником. Означимо са G другу пресечну тачку кружнице ω и описане кружнице око троугла ABC. Права AG сече праву BC у тачки H. Доказати да ако кружнице описане око троуглова ABH и ACH, редом, секу кружницу ω и у тачкама I и J, онда тачка пресека правих BI и CJ припада ω.

3. Означимо са $f(n)$ најмањи заједнички садржалац бројева $1, 2, \cdots, n$, где је n произвољан природан број. Наћи све природне бројеве n такве да је

$$f(n) < f(n+1) < f(n+2) < f(n+3).$$

4. Дат је природан број n. Колико највише топова можемо поставити на таблу димензија $n \times n$ тако да сваки топ напада највише 3 друга топа (напади између произвољна два топа одвијају се према шаховским правилима, тј. један топ напада другог ако се налазе у истој врсти/колони табле и ако се у тој врсти/колони између њих не налази нити један други топ)?

Други разред

1. Означимо са $\mathbb{Z}$ скуп свих целих бројева. Наћи све функције $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такве да за свака два цела броја a и b важи

$$f(a + f(b)) = b + f(a) + 1.$$

2. Нека су D, E и F подножја висина из темена A, B и C, редом, на праве одређене страницама троугла ABC. Означимо са H ортоцентар тог троугла. На дужима AD, BE и CF, редом, дате су тачке X, Y и Z такве да важи

$$\frac{AX}{XD} = \frac{BY}{YE} = \frac{CZ}{ZF} = 2.$$

Доказати да тачке H, X, Y и Z припадају једној кружници.

3. Наћи све природне бројеве x такве да је број $2^x + 100x + 1$ потпун квадрат.

4. У некој просторији се налази $n \geqslant 4$ људи. Познато је да важи следеће: у сваком скупу људи који садржи четири различите особе важи да је број парова људи који се познају међу тих четворо једнак 0, 3 или 4. За које n се из овог услова може закључити да постоји скуп величине барем $\frac{n}{2}$ тако да нико никог не зна?

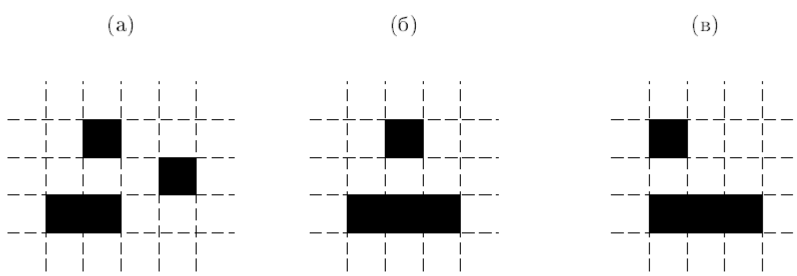
Трећи разред

1. У скупу природних бројева решити једначину $\log_5(2^n - 3) = \log_3 \frac{4n^2-10n+9}{5}$.

2. Одредити све уређене парове (x, y) природних бројева такве да су бројеви $x + y$ и $x^2 + y^2 - 2$ степени двојке.

3. Нека је M средиште странице BC, а H ортоцентар оштроуглог троугла ABC, $AB \neq AC$. Нека је L тачка на краћем луку BC описане кружнице троугла ABC тако да је $\sphericalangle CAL = \sphericalangle BAM$. Доказати да се нормала у тачки L на праву AL, нормала у тачки H на праву AM и тангента у тачки A на описану кружницу троугла ABC секу у једној тачки.

4. За сваку од фигура приказаних на сликама (а), (б) и (в), посебно, наћи све природне бројеве n такве да се табла $n \times n$ може поплочати фигуром као на датој слици. Под поплочавањем табле приказаном фигуром подразумевамо да је свако поље полазне табле прекривено тачно једанпут. Дозвољено је користити коначно много осних рефлексија и ротација (за 90° степени у оба смера).



Четврти разред

1. Нека је $\mathbb{C}$ скуп комплексних бројева. У скупу $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ решити једначину
$$(\operatorname{Im} z)^{\operatorname{Re} z} = e^{\frac{1}{2}(|z|^2 - z - \overline{z})}.$$

2. Дат је троугао ABC. Означимо са D, E и F, редом, тачке у којима уписана кружница унутар тог троугла, са центром у тачки S, додирује његове странице AB, BC и CA. Ако тежиште T троугла ABC припада правој DE, доказати да су тачке T, S и F колинеарне.

3. На табли је записан природан број n. Ана и Бојан играју следећу игру, наизменично вукући потезе. Потез се састоји од брисања написаног броја и замењивања истог са разликом тог броја и неког његовог делиоца који није 1, нити сам тај број (играч сам бира делилац). Ако Ана игра прва, у зависности од броја n, одредити који играч има победничку стратегију (игру губи онај играч који не може одиграти потез).

4. За конвексан четвороугао $ABCD$ кажемо да је леп ако дужине свих његових страница, дужина барем једне дијагонале и површина тог четвороугла имају целобројне вредности. Доказати да постоји бесконачно много лепих неподударних четвороуглова којима је дужина тачно једне странице прост број.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ,
Б категорија, Смедерево, 22. 04. 2023.

Први разред

1. На табли су записани бројеви
$$1 \cdot \sqrt{2022},\ 2 \cdot \sqrt{2021},\ 3 \cdot \sqrt{2020},\ \ldots,\ 2020 \cdot \sqrt{3},\ 2021 \cdot \sqrt{2},\ 2022 \cdot \sqrt{1}.$$
Који од записаних бројева је највећи?

2. Да ли постоји цифра a таква да је број $\overline{20\underbrace{aa...aa}_{2020}21}$ квадрат природног броја?

3. На страници EF правилног шестоугла $ABCDEF$ уочена је произвољна тачка X. Нека је AXY једнакостраничан троугао, при чему су тачке Y и F са различитих страна праве AX и BYZ једнакостраничан троугао, при

чему су тачке Z и C са различитих страна праве BY. Доказати да се тачка Z налази на дужи AO, где је O центар описане кружнице шестоугла $ABCDEF$.

4. Милица зна да шифра на коферу њеног брата представља троцифрени број коме су све цифре у строго опадајућем редоследу. Ако је познато да ће Милица, приликом покушаја отварања братовљевог кофера, тестирати само различите цифре, јер је паметна, колико највише проба Милица мора учинити да би са сигурношћу отворила братовљев кофер?

5. Одредити све $x \in \mathbb{R}$ такве да је

$$|x - x^2| = 2|x^2 - x^3| = 3|x^3 - x^6| = 6|x^6 - x|.$$

Други разред

1. Нека је $p > 2$ прост број и нека су x_1 и x_2 решења једначине $x^2 - px + \dfrac{1}{3} = 0$. Доказати да је ${x_1}^3 + {x_2}^3$ природан број дељив са 24.

2. Да ли постоји цифра a таква да је број $\overline{20\underbrace{aa...aa}_{2022}21}$ куб природног броја?

3. Дат је троугао ABC и нека су на његовим страницама BC, CA и AB дате, редом, тачке D, E и F такве да се праве AD, BE и CF секу у једној тачки. Означимо ту пресечну тачку са X.

(а) Доказати да се кружнице описане око троуглова AFE, BDF и CED секу у једној тачки, коју ћемо означити са Y;
(б) Доказати да је $X = Y$ ако и само ако су праве AD, BE и CF висине троугла ABC.

4. Познато је да квадратна једначина $x^2 + ax + b = 0$ има два реална и различита решења. Колико различитих реалних решења има једначина

$$x^4 + ax^3 + (b-2)x^2 - ax + 1 = 0\,?$$

5. Након што је оставио отворен прозор, током неког времена, $\frac{n(n+1)}{2}+1$ мува је улетела у Милорадову собу и одомаћила се на његовом ноћном сточићу, чија је површина облика једнакостраничног троугла странице $n \in \mathbb{N}$. Ипак, Милорад поседује муварицу, чији врх има облик квадрата странице 1, и помоћу ње жели да се реши неочекиваних уљеза. Претпоставимо ли да је Милорад довољно брз и прецизан, те да може да зада ударац муварицом на било ком делу сточића и у тренутку у коме то жели, као и да су муве занемарљиво малих димензија, доказати да је Милорад у стању да, без обзира на њихов распоред на сточићу, уклони барем две муве једним ударцем.

Трећи разред

1. Нека су x и y оштри углови за које важи $\sin x = \frac{3}{5}$ и $\operatorname{tg} y = 5\sqrt{2}-7$. Доказати да је $\frac{\pi-4x}{4y}$ природан број.

2. На ивицама SA, SB и SC пирамиде $SABC$ уочене су, редом, тачке A', B' и C' такве да је

$$\frac{SA'}{SA} + \frac{SB'}{SB} + \frac{SC'}{SC} = 1.$$

Доказати да је запремина пирамиде $SA'B'C'$ барем 27 пута мања од запремине пирамиде $SABC$.

3. Одредити све вредности реалног параметра a за које једначина

$$\log_{ax}\left(3^x + 4^x\right) = \log_{(ax)^2}\left(7^2\left(4^x - 3^x\right)\right) + \log_{(ax)^3} 8^{x-1}$$

има барем једно решење у скупу реалних бројева.

4. Дато је 12 тачака на кружници.

(а) На колико начина се могу изабрати две тетиве, са крајевима у датим тачкама, које имају тачно једну заједничку тачку?
(б) На колико начина се може изабрати троугао од тих тачака тако да се са обе стране сваке праве на којој лежи нека његова страница налази барем једна од преосталих тачака?

5. Милисав је замислио неки природан број n, те је на табли заaписао све делиоце тог броја који нису већи од $\sqrt{n}$. Алекса је уочио записане бројеве на табли и рекао да може да каже Милисаву коначан скуп неких бројева, такав да је број n, који је Милисав на почетку замислио, сигурно међу њима. Доказати да Алекса може да испуни свој циљ ако и само ако бројеви које је Милисав записао на табли не представљају скуп свих делилаца неког одређеног природног броја.

Четврти разред

1. Дат је низ $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ са: $a_1 = 0$ и $a_{n+1} = a_n + 4n + 3$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Изразити a_n у функцији од n, а затим, одредити и граничну вредност

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{4n}} + \sqrt{a_{4^2 n}} + \cdots + \sqrt{a_{4^{2022} n}}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{2n}} + \sqrt{a_{2^2 n}} + \cdots + \sqrt{a_{2^{2022} n}}}.$$

2. У унутрашњости сфере уочена је тачка O. Кроз тачку O конструсане су три праве p, q и r. Права p продире сферу у тачкама A и B, права q у тачкама C и D, а права r продире сферу у тачкама E и F. Испоставило се да важи:

$$\{OA, OB, OC, OD, OE, OF\} \supset \{1, 5, 15, 17, 51\}.$$

Колико најмање може бити полупречник сфере?

3. Решити систем једначина у скупу природних бројева

$$\begin{aligned} ab + 2a - b &= 58 \\ bc + 4b + 2c &= 300 \\ cd - 6c + 4d &= 101. \end{aligned}$$

4. Путнички део авиона се састоји из n редова од по 6 седишта и пролаза који иде по средини сваког реда. Притом се у сваком тренутку највише један путник може налазити на неком седишту, највише један путник се може налазити у пролазу у линији с неким редом седишта и не може се налазити ни на једном другом месту. Сваки од $6n$ путника има карту с јединственим бројем седишта. Путници улазе највише један сваке секунде у авион тако да је прва позиција на коју закораче увек она у пролазу у линији првог реда, и притом им је за прелазак с једне на другу позицију потребна тачно 1 секунда (где су могући прелази између суседних позиција у реду и суседних позиција у пролазу међу седиштима). Које је при овим условима минимално време потребно да свих $6n$ путника седну на своје место?

5. Наћи све уређене тројке (n, m, p), где су n и m цели, а p је прост број, за које важи

$$7^n - 3^n = p^2 \cdot 2^{mp}.$$

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – А категорија

1. (а) На скупу $X = \{aca, konac, lopte, loto, prst\}$ релација

$$x \,\varrho_1\, y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{речи} \quad x \text{ и } y \quad \text{су исте дужине}$$

је релација еквиваленције, што се тривијално провери, али није релација поретка, јер очигледно није антисиметрична. Класе еквиваленције релације ϱ_1, на скупу X, су: $\{aca\}$, $\{loto, prst\}$ и $\{konac, lopte\}$.
(б) На истом скупу X, релација

$$x \,\varrho_2\, y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{речи} \quad x \text{ и } y \quad \text{се завршавају истим словом}$$

је уједно и релација еквиваленције и релација поретка, јер у скупу X не постоје две речи које се завршавају истим словом, те се релација ϱ_2 своди на једнакост. Класе еквиваленције су тада једночлани скупови $\{aca\}$, $\{konac\}$, $\{lopte\}$, $\{loto\}$ и $\{prst\}$.

2. Нека је $\mathrm{P}(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ канонско представљање датог полинома P, при чему су $a_k \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Ако је полином P константан полином, тј. ако је $\mathrm{P}(x) = a_0$, за свако $x \in \mathbb{R}$, тада је, на основу услова задатка, испуњено $a_0 = 1$, одакле је $\mathrm{P}(2023) = 1$. Иначе је, према биномној формули, за $0 \le k \le n$, испуњено

$$\Big(\mathrm{P}\big(2023\big)+2023\Big)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mathrm{P}\big(2023\big)^{k-i} 2023^i = 2023^k + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \mathrm{P}\big(2023\big)^{k-i} 2023^i =$$

$$= 2023^k + \mathrm{P}\big(2023\big) \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \mathrm{P}\big(2023\big)^{k-i-1} 2023^i = 2023^k + \mathrm{P}\big(2023\big) \cdot A_k,$$

где је $A_k = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \mathrm{P}\big(2023\big)^{k-i-1} 2023^i$. Следи,

$$\mathrm{P}\Big(\mathrm{P}\big(2023\big) + 2023\Big) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Big(\mathrm{P}\big(2023\big) + 2023\Big)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \Big(2023^k + \mathrm{P}\big(2023\big) A_k\Big) =$$

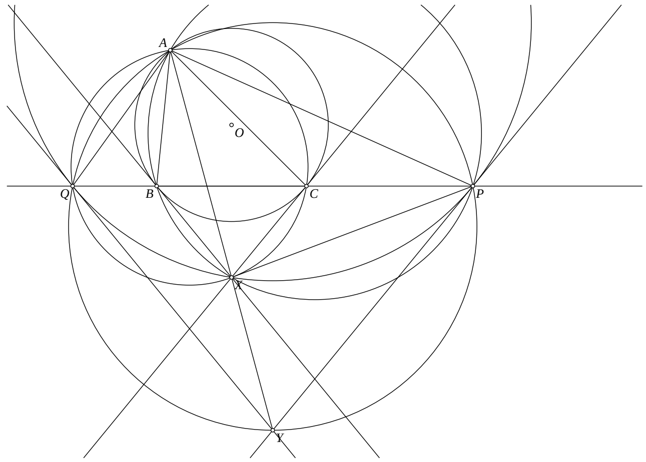
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k 2023^k + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}\big(2023\big) a_k A_k =$$

$$= \mathrm{P}\big(2023\big) + \mathrm{P}\big(2023\big) \sum_{k=0}^{n} a_k A_k = \mathrm{P}\big(2023\big)\Big(1 + \sum_{k=0}^{n} a_k A_k\Big),$$

одакле закључујемо да $P(2023)$ дели $P(P(2023) + 2023) = 1$, те су једине могућности за вредност $\mathrm{P}(2023)$ једнаке 1 или -1.

Очигледно је константан полином $\mathrm{P}(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, пример полинома за које је $\mathrm{P}(2023) = 1$. Уколико би постојао полином P са наведеним особинама, за који је $\mathrm{P}(2023) = -1$, тада би морало бити и $\mathrm{P}(\mathrm{P}(2023) + 2023) = \mathrm{P}(2022) = 1$. Следи, полином $\mathrm{P}(x) = (2022 - x) + (2023 - x) = 4045 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$, је пример полинома који, такође, задовољава услове задатка, за који је $\mathrm{P}(2023) = -1$. Дакле, све могуће вредности за $\mathrm{P}(2023)$ су 1 и -1.

3. Нека се тангенте у P и Q на XPQ секу у тачки Y. Нека је $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCA = \gamma$.



Приметимо да је $\sphericalangle XPA = 180^\circ - \sphericalangle XBA = 180^\circ - \alpha - \beta = \gamma$. Аналогно је $\sphericalangle XQA = \beta$. Из тетивности $ABXP$ је $\sphericalangle XAP = \sphericalangle XBP = \alpha$, а онда је и $\sphericalangle XAQ = \alpha$. Рачунамо тада и $PXQ = 360^\circ - \beta - \gamma - 2\alpha = 180^\circ - \alpha$. Одатле имамо да је $\sphericalangle YPQ = \sphericalangle YQP = \alpha$, те је $PYQ = 180^\circ - 2\alpha$, па је $APYQ$ тетиван. Сада лако видимо крај, јер је AY симетрала $\sphericalangle PAQ$ (јер је Y средиште лука), што важи и за AX (то смо већ доказали), одакле закључујемо да су тачке A, X, Y колинеарне.

4. Како квадрати целих бројева дају остатке 0 или 1, по модулу 3, закључујемо да број $l^2 + 7l + 2$ ни за једно l није дељив са 3, па не може бити ни производ више од два узастопна природна броја. Нека је $l^2 + 7l + 2 = n(n+1) = n^2 + n$, за неко $n \in \mathbb{N}$. Тада је $4l^2 + 28l + 9 = (2n+1)^2$, одакле следи да је $4l^2 + 28l + 9$ квадрат непарног природног броја.

Приметимо да је $(2l+3)^2 = 4l^2 + 12l + 9 < 4l^2 + 28l + 9 < 4l^2 + 28l + 49 = (2l+7)^2$, за свако $n \in \mathbb{N}$, те је, на основу претходног, $4l^2 + 28l + 9 = (2l+5)^2 = 4l^2 + 20l + 25$, односно $8l = 16$, тј. $l = 2$. Заиста, $2^2 + 7 \cdot 2 + 2 = 20 = 4 \cdot 5$, одакле следи да једино број 2 испуњава услове задатка.

5. Приметимо да је хоризонталних дужи тачно $n(m+1)$, док је вертикалних $m(n+1)$. Како свака фигура коју користимо поплочава једну хоризонталну и једну вертикалну дуж, добијамо да је $n(m+1) = m(n+1)$, одакле је $mn + m = mn + n$, односно $m = n$.

Ако је $m = n$, није тешко наћи поплочавање. Наиме, главном дијагоналом можемо поделити полазну таблу, за коју је $m = n$, на два дела, а онда, горњу половину табле поплочајмо фигурама које покривају горњу и десну ивицу сваког јединичног квадрата, који се налазе изнад главне дијагонале табле (за оне квадрате који секу главниу дијагоналу урадимо исто), а затим, доњу половину табле фигурама које прекривају доњу и леву ивицу сваког од јединичних квадрата (за оне квадрате који секу главну дијагоналу урадимо исто).

Други разред – А категорија

1. Једначину $x = 506 - (506 - x^2)^2$ можемо записати као $f(f(x)) = x$, где је $f(x) = 506 - x^2$. Нека је $\mathcal{R}_1$ скуп реалних решења једначине $f(x) = x$, а $\mathcal{R}_2$ скуп реалних решења полазне једначине. Очигледно је $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$. Са друге стране, једначина $f(x) = x$, тј. једначина $x^2 + x - 506 = 0$, има за решења реалне бројеве $x_1 = 22$ и $x_2 = -23$. Нађимо сада и остала решења полазне једначине. У том циљу, када једначину $f(f(x)) - x = 0$ поделимо са $(x-22)(x+23))$, $x \neq 22$, $x \neq -23$, добијамо квадратну једначину $x^2-x-505 = 0$, која има још 2 реална решења, тј. бројеве $x_3 = \dfrac{1+\sqrt{2021}}{2}$ и $x_4 = \dfrac{1-\sqrt{2021}}{2}$.

2. Нека је $x \in \mathbb{R}$ произвољно. Запишимо полазну једнакост у облику $y^2 + (4x+2)y + (ax^2+2x) = 0$ и посматрајмо је као квадратну једначину по y. На основу услова задатка иста мора имати ненегативну дискриминанту, тј. мора да важи

$$(4x+2)^2 - 4(ax^2+2x) \geqslant 0, \quad \text{тј.} \quad x^2(4-a) + 2x + 1 \geqslant 0,$$

за свако $x \in \mathbb{R}$. За $a = 4$ претходна неједнакост се своди на $2x + 1 \geqslant 0$, која не важи за свако $x \in \mathbb{R}$. За $a > 4$ неједнакост ће важити за свако $x \in \mathbb{R}$. Коначно, мора бити $4-a > 0$, тј. $a < 4$, као и да је дискриминанта квадратне функције са леве стране неједнакости $x^2(4-a) + 2x + 1 \geqslant 0$ непозитивна, односно, $4 - 4(4-a) \leqslant 0$, тј. $a \leqslant 3$. Дакле, за $a \leqslant 3$ су испуњени услови задатка.

3. Нека је тај број $\sum\limits_{i=0}^{2022} a_i 10^i$, где је $0 \leqslant a_i \leqslant 9$, за $0 \leqslant i \leqslant 2022$ и $a_{2022} \neq 0$. По услову задатка $7 \mid \sum\limits_{i=0}^{2021} a_i 10^i$ и $7 \mid \sum\limits_{i=0}^{2020} a_i 10^i + a_{2022}10^{2021}$, па $7 \mid (a_{2021} - a_{2022})10^{2021}$, односно, a_{2021} и a_{2022} дају исти остатак при дељењу са 7. Аналогно, за свако $k \in \{1, \ldots, 2020\}$ важи $7 \mid \sum\limits_{i=0}^{2022-k-1} a_i 10^i + \sum\limits_{i=2022-k+1}^{2022} a_i 10^{i-1}$ и $7 \mid \sum\limits_{i=0}^{2022-k-2} a_i 10^i + \sum\limits_{i=2022-k}^{2022} a_i 10^{i-1}$, па $7 \mid (a_{2022-k-1} - a_{2022-k})10^{2022-k-1}$, тј. $a_{2022-k-1}$ и a_{2022-k} дају исти остатак при дељењу са 7. Дакле, све цифре дају исти остатак при дељењу са 7, те како $7 \mid a_{2022} \cdot \sum\limits_{i=0}^{2021} 10^i$ и како важи $7 \mid \sum\limits_{i=0}^{2021} 10^i$, следи да цифра a_{2022} може бити произвољна из скупа $\{1, 2, \ldots, 9\}$. Ако је $a_{2022} \in \{1, 2, 7, 8, 9\}$, тада за остале цифре имамо по две могућности (рецимо, ако је $a_{2022} = 8$, тада остале цифре могу узети вредности из скупа $\{1, 8\}$), па је у овом случају укупан број природних бројева са описаним особинама једнак $5 \cdot 2^{2022}$. Са друге стране, ако је $a_{2022} \in \{3, 4, 5, 6\}$, тада све остале цифре морају бити једнаке a_{2022}, па таквих бројева у овом случају има тачно 4. Дакле, укупан број тражених бројева је $5 \cdot 2^{2022} + 4$.

4. Одговор је $X = 1101$. Најпре, приметимо да уколико за неки фиксиран парк Милица исти посети у a-том дану, а Добрица у b-том, тада тај парк у почетку мора имати барем $\max\{|a-b|, \min\{a,b\}\}$ дрвећа.

Претпоставимо да су Милица и Добрица успели да обиђу све паркове и да засаде сво дрвеће. Означимо паркове које Добрица, редом, обилази бројевима $1, 2, \ldots, 2202$. Са p_i означимои дан у ком је Милица посетила парк i, $1 \leqslant i \leqslant 2202$. Јасно је да је тада $(p_1, p_2, \ldots, p_{2202})$ пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, 2202\}$. Такође, из горе наведених запажања, јасно је да почетни број дрвећа мора бити барем

$$\max\Big\{\max\{|p_1 - 1|, \min\{p_1, 1\}\}, \ldots, \max\{|p_{2202} - 2202|, \min\{p_{2202}, 2202\}\}\Big\}.$$

Дакле, задатак се своди на тражење минималне вредности претходног израза по свим могућим пермутацијама $(p_1, p_2, \ldots, p_{2202})$ скупа $\{1, 2, \ldots, 2202\}$. Лако се проверава да се за пермутацију $(1102, 1103, \ldots, 2202, 1, 2, \ldots, 1101)$ вредност претходног израза своди на 1101.

Докажимо да се за сваку другу пермутацију $(p_1, p_2, \ldots, p_{2202})$ скупа $\{1, 2, \ldots, 2202\}$ не може добити мања вредност поменутог израза. У том циљу, посматрајмо парове (i, p_i), $i = 1, 2, \ldots, 2202$. Када посматрамо обе координате свих тих парова добијамо да се међу тим бројевима појављују 2204 броја већа од 1100 (сваки од бројева $1101, 1102, \ldots, 2202$ по два пута). Како парова има тачно 2202, то по Дирихлеовом принципу постоји пар код којег су обе координате веће од 1100. Нека је то k-ти пар, за неко $k > 1100$. Тада је

$$\max\Big\{\max\{|p_1 - 1|, \min\{p_1, 1\}\}, \ldots, \max\{|p_{2202} - 2202|, \min\{p_{2202}, 2202\}\}\Big\}$$
$$\geqslant \max\{|p_k - k|, \min\{p_k, k\}\} \geqslant \min\{p_k, k\} > 1100.$$

5. Нека је M друга тачка пресека праве AD и описане кружнице око троугла ABC. Из потенције тачке D у односу на ту кружницу важи $DM = \dfrac{DB \cdot DC}{DA} = 2$.

Међутим, знамо да је $MB = MC = MI$, одакле је $\sphericalangle MCD = \sphericalangle MCB = \sphericalangle MAB = \sphericalangle MAC$, па је $\Delta MCD \sim \Delta MAC$ (сви одговарајући углови су међусобно једнаки). Даље је $\dfrac{MC}{MD} = \dfrac{MA}{MC}$, односно, $MC^2 = MD \cdot MA = 2 \cdot (2+6) = 16$, $MB = MC = MI = 4$, одакле је $AI = AM - MI = AD + DM - MI = 6 + 2 - 4 = 4$.

Трећи разред – А категорија

1. Када убацимо матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 3 & b \end{bmatrix}$ у матричну једнакост $A^2 - 5A = 2I$ добијамо $\begin{bmatrix} 1+3a & a+ab \\ 3+3b & 3a+b^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 5a \\ 15 & 5b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, тј. $\begin{bmatrix} -4+3a & -4a+ab \\ -12+3b & 3a+b^2-5b \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Из ове матричне једнакости добијамо систем једначина, по a и b: $-4+3a=2$, $-4a+ab=0$, $-12+3b=0$, $3a+b^2-5b=2$, који има решење $a=2$, $b=4$ (које добијамо из прве и треће једначине. Коначно, тривијално се проверава да за $a=2$ и $b=4$ су задовољене и друга и четврта једначина система. Дакле, $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

2. Нека је π нека пермутација првих n природних бројева. Кажемо да је инверзија пермутације пар (i,j), $1 \leq i < j \leq n$, такав да је $\pi(i) > \pi(j)$. Број свих инверзија пермутације означићемо са $\mathrm{inv}(\pi)$. Приметимо да замена суседних елемената у пермутацији одговара промени броја инверзија за ± 1, што значи да Урошев потез који се састоји од највише k замена може променити број инверзија за највише k. Такође, Вељков потез који помера елемент са позиције j на позицију i можемо посматрати као узастопну примену $|j-i|$ суседних замена елемената, што одговара промени броја инверзија за највише $n-1$. Још једно битно запажање је да је за дату пермутацију увек могуће наћи два суседна елемента чијом заменом смањујемо број инверзија (осим уколико је број инверзија већ 0, што је еквивалентно томе да је пермутација $1,2,...,n$, а тада је Урош већ победник). Ако је $k=n$, тада је довољно да Урош бира потезе који константно смањују број инверзија, јер колико год Вељко повећао број инверзија у свом потезу, Урош ће након тога смањити број инверзија за више него што их је Вељко повећао, а како је број инверзија коначан, јасно је да ће Урош победити. Докажимо сада да $k=n-1$ није довољно. Приметимо да је Вељку потребно да одржава бар једно од следећа два стања (за оба стања важи $\mathrm{inv}(\pi) \geqslant n$, па Урош не може у једном свом потезу доћи до победе):

1. након Вељковог потеза је $\pi(n)=1$, $\pi(n-1) \neq n$,

2. након Вељковог потеза је $\pi(1)=n$, $\pi(2) \neq 1$.

На почетку су испуњена оба стања. Први случај: нека је у неком тренутку испуњено стање 1. Уколико је након тога Урошев потез резултирао тиме да је $\pi(1)=1$, тада Вељко може узети број 1 и поставити га опет на позицију n, чиме враћа позицију у стање 1. Уколико је након Урошевог потеза $\pi(1) \neq 1$ и $\pi^{-1}(1) < \pi^{-1}(n)$, тада Вељко може узети број n и поставити га на прву позицију, чиме остварује стање 2. Остаје још проверити могућност $\pi(1) \neq 1$ и $\pi^{-1}(1) > \pi^{-1}(n)$. Ако је $\pi(n) \neq 1$, тада број 1 постављамо на позицију n и добијамо стање 1. Иначе, n постављамо на позицију 1 и добијамо стање 2. Други случај, када је испуњено стање 2, се слично проверава. На основу претходног закључујемо да је решење $k=n$.

Напомена. Еквивалентно за случај $k=n-1$, довољно је било показати да уколико постоји инверзија у пермутацији и тренутно је Вељко на потезу, тада он може направити пермутацију са бар n инверзија. Алгоритам је сличан горе описаном.

3. За $p=2$ тривијално се проверава да не постоје природни бројеви a и b такви да важи $a^2+b^2=6$. Нека је $p>2$ непаран прост број. На основу мале Фермаове теореме је испуњено $0\equiv(2p-1)!=a^p+b^p\equiv a+b \pmod p$, одакле следи $b\equiv -a \pmod p$. Приметимо да је $a^p+b^p=(a+b)(a^{p-1}-a^{p-2}b+\ldots-ab^{p-2}+b^{p-1})$, као и да је $a^{p-1}-a^{p-2}b+\ldots-ab^{p-2}+b^{p-1}\equiv \sum\limits_{i=0}^{p-1}(-1)^i a^{p-1-i}(-a)^i\equiv\sum\limits_{i=0}^{p-1}a^{p-1}\equiv pa^{p-1}\equiv 0 \pmod p$, што нам даје да је a^p+b^p дељиво са p^2. Међутим, јасно је да $p^2\nmid(2p-1)!$, што значи да тражени природни бројеви a и b не постоје.

4. Нека су S и M средишта дужи EF и BC, редом. Приметимо да је сваку тачку U на дужи BC важи $|BU-CU|=2MU$, као и да је распоред тачака $K-B-X-D-M-C$, на основу услова $AB<AC$. Дакле, важи $MX=2MD$, одакле је $DX=DM$, па је ΔAXM једнакокрак и $\sphericalangle AXK=\sphericalangle AMC$.
Даље, четвороугао $BCEF$ је тетиван (тачке E и F су на кружници конструисаној над дужи BC као над пречником), одакле следи да су ΔABC и ΔAEF слични, јер имају међусобно једнаке одговарајуће углове. У тој сличности тачке M и S одговарају једна другој, па је $\sphericalangle AMC=\sphericalangle ASF=\sphericalangle ASK$. Дакле, $\sphericalangle ASK=\sphericalangle AXK$, одакле закључујемо да је четвороугао $ASXK$ тетиван, што је требало доказати.

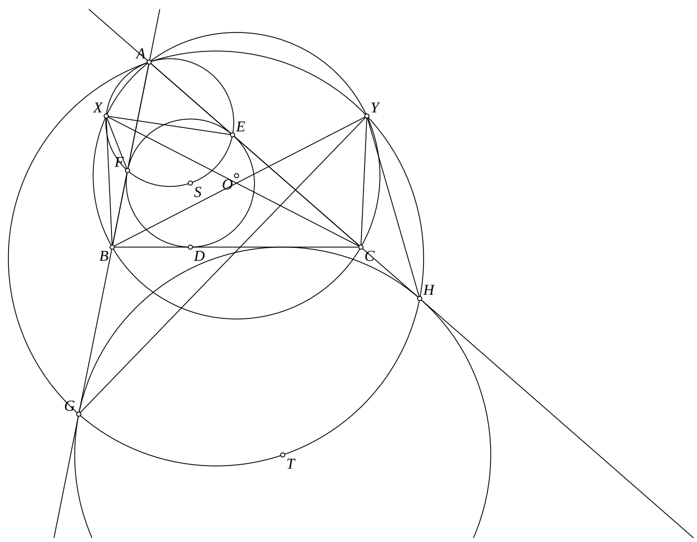
5. (а) Како је $bc\leqslant\frac{(b+c)^2}{4}\Leftrightarrow(b-c)^2\geqslant 0$, добијамо да је $a+ab+bc+ca=a(b+c+1)+bc\leqslant a(b+c+1)+\frac{(b+c)^2}{4}=a(4-a)+\frac{(3-a)^2}{4}=\frac14(10a+9-3a^2)=\frac14(\frac{52}{3}-3(a-\frac53)^2)\leqslant\frac{13}{3}$, при чему ће једнакост важити за $a=\frac53$ и $b=c=\frac23$.
(б) Из $a+b\leqslant a+b+c=3$, јер је $c\geqslant 0$, добијамо да је $a+ab+bc=a+b(a+c)=a+b(3-b)\leqslant(3-b)+b(3-b)=(b+1)(3-b)=4-(b-1)^2\leqslant 4$, при чему се једнакост може достићи за $a=2, b=1$ и $c=0$.

Четврти разред – А категорија

1. Одговор: Постоји. Нека је $A_n = \{i \in \mathbb{N} \,|\, i > n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Јасно је да је $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, јер би сваки елемент који би евентуално припадао пресеку морао бити већи од било ког природног броја, што није могуће.

Са друге стране, пресек било које коначне подколекције формиране колекције скупова $\{A_n\}$ је непразан. Заиста, посматрајмо неку коначну подколекцију $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, $n_i \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$, колекције $\{A_n\}$. Тада, сваки природан број, који је већи од n_k, припада пресеку $\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_{n_i}$.

2. Нека су a, b, c и p дужине страница и полуобим троугла ABC. Јасно је да је $\triangle XBF \sim \triangle XCE$, јер је $\sphericalangle XBF = \sphericalangle XCE$ (као периферијски углови над тетивом AX круга описаног око троугла ABC), као и $\sphericalangle BFX = 180^\circ - \sphericalangle XFA = 180^\circ - \sphericalangle XEA = \sphericalangle CEX$ (углови $\sphericalangle XFA$ и $\sphericalangle XEA$ су једнаки као периферијски углови над тетивом AX круга описаног око троугла AFE).



Аналогно је, $\triangle YBG \sim \triangle YCH$, па је $\dfrac{BX}{BF} = \dfrac{CX}{CE}$, $\dfrac{YB}{BG} = \dfrac{YC}{CH}$. Стога, $\dfrac{BX}{CX} = \dfrac{BF}{CE}$, $\dfrac{YC}{YB} = \dfrac{CH}{BG}$. Међутим, како је $BG = CE = p - c$ и $CH = BF = p - b$, то је $\dfrac{BX}{CX} = \dfrac{CY}{BY}$. Како се тачке X и Y налазе на истој страни лука BC круга описаног око троугла ABC, као и тачка A, и како је тачка X Микелова тачка за троуглове ABC и AEF, тј. кружнице описане око њих, те како је тачка Y Микелова тачка за троуглове ABC и AGH, тј. кружнице описане око њих, то је $BY = CX$, па је $BX = CY$.

3. Град G можемо представити као 3-регуларни граф $G=(V,E)$ (из сваког чвора полазе тачно 3 гране) на $|V|=n$ чворова обојених у некој од две боје и тако да сваки чвор има бар два црвена суседа. Како из сваког чвора полазе тачно 3 гране, а свака грана има тачно два крајња чвора, закључујемо $3n=2|E|$, па n мора бити паран, односно $n=2k$ за $k\geqslant 4$.

Ако са c и p означимо редом број црвених и плавих чворова, тада важи $2n\leqslant 3c$, јер сваки чвор има бар два црвена суседа, а сваки црвени чвор је црвени сусед за тачно три друга чвора. Према томе, $c\geqslant \frac{2}{3}n$ и $p=n-c\leqslant \frac{1}{3}n$, односно $p\leqslant \lfloor \frac{2}{3}k\rfloor$. Овим закључујемо да не може бити више од $\lfloor \frac{2}{3}k\rfloor$ плавих чворова, те остаје још да проверимо да је за свако $k\geqslant 4$ овај број плавих чворова и остварив при условима задатка.

Уколико је $k=3l$, $l\geqslant 1$, тражимо $p=\lfloor \frac{2}{3}3l\rfloor=2l$ и $c=4l$. Нека су $v_1,v_2,\ldots,v_{4l}$ црвени, а $u_1,\ldots,u_{2l}$ плави чворови. Додајмо гране тако да добијемо два дисјунктна циклуса $v_1v_2\ldots v_{2l}$ и $v_{2l+1}v_{2l+2}\ldots v_{4l}$ и за свако $1\leqslant i\leqslant 2l$ додајмо гране v_iu_i и u_iv_{2l+i}. Тада су сви црвени чворови степена три, а плави степена два. Но, како је број плавих чворова паран, можемо још за свако $1\leqslant i\leqslant l$ додати грану $u_{2i-1}u_{2i}$, чиме добијамо 3-регуларан граф који задовољава услове и $p=2l=\frac{2}{3}k$.

Уколико је $k=3l+1$, $l\geqslant 2$, тражимо $p=2l$ и $c=4l+2$. Уочимо поново циклусе $v_1v_2\ldots v_{2l+1}$ и $v_{2l+2}v_{2l+3}\ldots v_{4l+2}$ и за свако $1\leqslant i\leqslant 2l$ гране v_iu_i и u_iv_{2l+1+i}, те за свако $1\leqslant i\leqslant l$ грану $u_{2i-1}u_{2i}$. Тада су сви чворови степена 3, сем v_{2l+1} и v_{4l+2}, па њиховим повезивањем добијамо 3-регуларан граф који задовољава услове.

Коначно, за $k=3l+2$, $l\geqslant 1$, тражимо $p=2l+1$ и $c=4l+3$. Још једном уочимо циклусе $v_1v_2\ldots v_{2l+1}$ и $v_{2l+2}v_{2l+3}\ldots v_{4l+3}$ и за свако $1\leqslant i\leqslant 2l+1$ гране v_iu_i и u_iv_{2l+1+i}, те за свако $1\leq i\leq l$ грану $u_{2i-1}u_{2i}$. Тада су сви чворови степена 3, осим u_{2l+1} и v_{4l+3}, па њиховим повезивањем добијамо 3-регуларан граф који такође задовољава услове.

Према томе, у граду G може бити највише $p=\lfloor \frac{2}{3}k\rfloor=\lfloor \frac{n}{3}\rfloor$ клубова са плавим светлима.

4. Приметимо да се за фиксиране вредности a и h_a вредност израза максимизује када је $b+c$ најмање. Посматрајмо праву p која садржи тачку A и паралелна је страници a, као и тачку C' која је осна рефлексија тачке C у односу на праву p. Дуж AC' је подударна дужи $AC=b$, па имамо да је $b+c=AC+BA=BA+AC'\geqslant BC'=\sqrt{a^2+(2h_a)^2}$, а једнакост се достиже ако и само ако је $b=c$. Уз смену $x=\frac{h_a}{a}$ и на основу претходног, свели смо задатак на тражење највеће могуће вредности израза $\frac{1+x}{\sqrt{1+(2x)^2}}$.
Из неједнакости квадратне и аритметичке средине добијамо

$$\sqrt{\frac{1+(2x)^2}{5}}=\sqrt{\frac{4(\frac{1}{2})^2+(2x)^2}{5}}\geqslant \frac{4\frac{1}{2}+2x}{5}=\frac{2}{5}(1+x).$$

Одавде имамо

$$\frac{a+h_a}{b+c}\leqslant \frac{1+x}{\sqrt{1+(2x)^2}}\leqslant \frac{\sqrt{5}}{2},$$

а обе једнакости се достижу ако и само ако је $b = c$ и $a = 4h_a$.

Напомена. Највећа могућа вредност израза $\frac{1+x}{\sqrt{1+(2x)^2}}$ се може наћи налажењем првог извода. Из услова $\left(\frac{1+x}{\sqrt{1+(2x)^2}}\right)' = \frac{1-4x}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$, добијамо потенцијални екстремум у тачки $x = \frac{1}{4}$.

5. Доказаћемо да су решења $k = 2$ и $k = 3$. За њих постоји бесконачно много одговарајућих n, јер је довољно узети бројеве 2^α и $3 \cdot 2^\alpha$, за $\alpha \in \mathbb{N}$. Докажимо да за нити једно друго k такво n не постоји. Претпоставимо супротно, тј. да постоје n и k из скупа $\mathbb{N}$ такви да је $\varphi(n) = \dfrac{n}{k}$, $k \neq 2$ и $k \neq 3$. Нека је $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_l^{\alpha_l}$ канонска факторизација броја n. Тада је

$$k = \frac{n}{\varphi(n)} = \frac{p_1 p_2 \dots p_l}{(p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_l - 1)}.$$

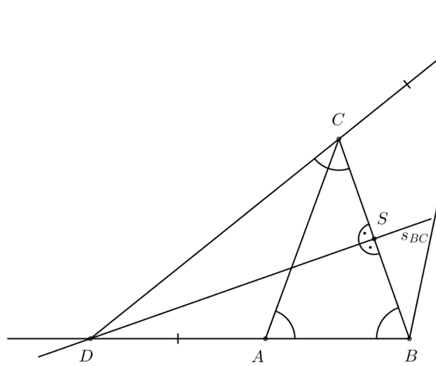
Да би добијени разломак био цео, јасно је да међу простим бројевима p_1, p_2, итд, не може бити више од једног непарног. Дакле, $l \leqslant 2$. За $l = 1$ тривијално налазимо $p_1 = 2$, тј. $k = 2$. За $l = 2$ добијамо да је $p_1 = 2$, $p_2 - 1 \mid 2p_2$, па $p_2 - 1 \mid 2$. Дакле, $p_2 = 3$ и $k = 3$. Дакле, у оба случаја смо добили конрадикцију, јер је $k \neq 2$ и $k \neq 3$.

Први разред – Б категорија

1. Видети решење 1. задатка са општинског такмичења за 1. разред, А категорија.

2. Растављањем датог разломка добијамо $\dfrac{n^2 + 2n + 51}{n^2 + 4n + 3} = 1 + 2\dfrac{24 - n}{n^2 + 4n + 3}$. Дакле, треба да одредимо све природне бројеве n тако да $n^2 + 4n + 3$ дели $24 - n$, као и да је број $1 + 2\dfrac{24 - n}{n^2 + 4n + 3}$ такође природан. Прво закључујемо да $\dfrac{24 - n}{n^2 + 4n + 3} = \dfrac{24 - n}{(n + 3)(n + 1)} \geqslant 0$, па је $n \leqslant 24$. За $n = 24$ важе услови задатка. Провером се тривијално проверава да природни бројеви 1 и 2 не задовољавају услове. За $n \geqslant 3$ ће важити да је $n^2 + 4n + 3 \geqslant 24$, док је $24 - n \leqslant 21$, па не може важити да $n^2 + 4n + 3 \mid 24 - n$. Дакле, једино решење је $n = 24$, колики је тражени збир.

3. Нека је S средиште крака BC и s_{BC} симетрала истог. Троуглови DBS и DSC су подударни, на основу става СУС ($BS = SC$, $\sphericalangle DSB = 90^\circ = \sphericalangle DSC$, $DS = DS$). Из ове подударности следи да је $DB = DC$ и $\sphericalangle DBS = \sphericalangle DCS$. Са друге стране, $\sphericalangle DBS = \sphericalangle ABC = \sphericalangle CAB$, зато што је ABC једнакокраки троугао. Како је $\sphericalangle ECB = 180^\circ - \sphericalangle DCS = 180^\circ - \sphericalangle DBS = 180^\circ - \sphericalangle CAB = \sphericalangle DAC$, добијамо, на основу става СУС, да су троуглови DAC и CBE подударни ($AD = CE$, $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ECB$, $AC = BC$). Из подударности ових



троуглова следи да је $DC = BE$, а с обзиром да је је $DB = DC$, добија се да је $BE = DB$, одакле произилази да је троугао DBE једнакокраки.

4. Четворо путника, који желе да седе у правцу кретања воза, можемо распоредити на $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ начина, док троје њих, који ће седети са супротне стране купеа, можемо сместити на $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ начина. Преостала три путника можемо распоредити било где, тј. на $3! = 6$ начина. Дакле, укупан број размештаја је $120 \cdot 60 \cdot 6 = 43200$ начина.

Напомена. Задатак смо могли да урадимо и директно. Наиме, четири путника, који би седели у правцу кретања воза, треба да распоредимо на 5 могућих места. Укупан број таквих могућности је $4! \cdot \binom{5}{4} = 24 \cdot 5 = 120$. За сваку такву могућност, троје путника, на супротну страну, можемо сместити, аналогно, на $3! \cdot \binom{5}{3} = 6 \cdot 10 = 60$ начина. Дакле, укупан број могућности је $3! \cdot 120 \cdot 60 = 43200$, јер преостала три путника можемо сместити на $3! = 6$ начина.

5. Разликоваћмо четири случаја.
1° $x < 0$: Једначина постаје $-\dfrac{1}{2x} + \dfrac{2x-1}{2x} + \dfrac{2x-2}{2x} = \dfrac{4}{3}$, тј. $\dfrac{4x-4}{2x} = \dfrac{4}{3}$, тј. $x = 3$, што није решење у овом случају.
2° $0 < x \leqslant \dfrac{1}{2}$: Једначина постаје $\dfrac{1}{2x} - \dfrac{2x-1}{2x} - \dfrac{2x-2}{2x} = \dfrac{4}{3}$, тј. $\dfrac{-4x+4}{2x} = \dfrac{4}{3}$, тј. $x = \dfrac{3}{5}$, што, такође, није решење у овом случају.
3° $\dfrac{1}{2} < x \leqslant 1$: Једначина постаје $\dfrac{1}{2x} + \dfrac{2x-1}{2x} - \dfrac{2x-2}{2x} = \dfrac{4}{3}$, тј. $\dfrac{2}{2x} = \dfrac{4}{3}$, тј. $x = \dfrac{3}{4}$, што јесте решење у овом случају.
4° $x > 1$: Једначина постаје $\dfrac{1}{2x} + \dfrac{2x-1}{2x} + \dfrac{2x-2}{2x} = \dfrac{4}{3}$, тј. $\dfrac{4x-2}{2x} = \dfrac{4}{3}$, тј. $x = \dfrac{3}{2}$, што јесте решење у овом случају.

Дакле, једина решења су $x = \dfrac{3}{4}$ или $x = \dfrac{3}{2}$.

Други разред – Б категорија

1. (а) За $d = 8$ треба да покажемо да је $\dfrac{2x^2 - 14x + 27}{x^2 - 7x + 13} - 8 \leqslant 0$, за све реалне бројеве x. То се своди на $\dfrac{-6x^2 + 42x - 77}{x^2 - 7x + 13} \leqslant 0$, тј. на $\dfrac{6x^2 - 42x + 77}{x^2 - 7x + 13} \geqslant 0$. За обе квадратне функције је $D < 0$ (-84 и -3), а како су коефицијенти уз x^2 позитивни, то важи и $6x^2 - 42x + 77 \geqslant 0$ и $x^2 - 7x + 13 \geqslant 0$, па смо показали да важи и $\dfrac{2x^2 - 14x + 27}{x^2 - 7x + 13} - 8 \leqslant 0$, тј. да је број $d = 8$ добар.

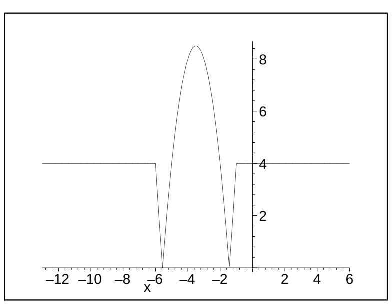
(б) Слично као у претходном делу задатка, неједнакост $\dfrac{2x^2 - 14x + 27}{x^2 - 7x + 13} - d \leqslant 0$ се своди на

$$\frac{(d-2)x^2 + (14 - 7d)x + (13d - 27)}{x^2 - 7x + 13} \geqslant 0.$$

За квадратну функцију $x^2 - 7x + 13$ смо већ показали да је увек позитивна, а $(d-2)x^2 + (14 - 7d)x + (13d - 27)$ је увек ненегативна, ако је њен коефицијент $A = d - 2 > 0$, а дискриминанта $D = -3d^2 + 16f - 20 \leqslant 0$. Имамо да $A = d - 2 > 0$ важи за $d > 2$, док је $D = -3d^2 + 16f - 20 \leqslant 0$, за $d \in (-\infty, 2) \cup (\frac{10}{3}, +\infty)$, па то важи за $d \in (\frac{10}{3}, +\infty)$.

Остаје још да се провери за $d = 2$ шта се дешава, јер тад немамо у бројиоцу квадратну функцију. Тад треба да важи $\dfrac{2x^2 - 14x + 27}{x^2 - 7x + 13} \leqslant 2$, што се своди на $\dfrac{-1}{x^2 - 7x + 13} - 8 \geqslant 0$, што је увек негативно (а треба да буде позитино). Зато, број $d = 2$ не укључујемо у решење.

2. За $a < 0$ и $a > \frac{17}{2}$ нема решења, док за $a = \frac{17}{2}$ има једно решење. За $a = 0$ и $4 < a < \frac{17}{2}$ има два решења, али за $0 < a < 4$ налазимо да једначина има четири решења. Коначно, за $a = 4$ има бесконачно много решења. На слици је дат график функције $f(x) = \big||x^2 + 7x + 6| - (x^2 + 7x + 10)\big|$.



3. Приметимо да је $\sphericalangle ALC = \sphericalangle ALB = 135°$, тако да је $\sphericalangle BLC = 90°$. Следи да је AL симетрала $\sphericalangle BLC$. Нека је X пресек дијагонала квадрата K_a. Тада је четвороугао $BLCX$ тетиван и $BX = CX$, па је LX симетрала $\sphericalangle BLC$. Дакле, A, L, X су колинеарне.

4. У ћошку мора да буде највећи број, тј. 8. Када изаберемо три броја која су изнад њега, њих морамо да ставимо од већих ка мањим на горе, а преоста четири броја треба да стављамо слева у десно, исто од већих ка мањим. Дакле, избором која три броја су изнад постављеног у ћошку, све је одређено, а то можемо да урадимо на $\binom{7}{3} = 35$ начина.

5. (a) Такви бројеви не постоје. Заиста, како је $(a+b)+(b+c)+(c+a) = 2(a+b+c)$ паран број, барем један од бројева $a+b, b+c$ и $c+a$ је паран, па је њихов производ такође паран број.
(б) Такви бројеви постоје. Ставимо да је, на пример, $(a+b) = (c+a) = 2024^{1011}$ и $b+c = 2024$. Тада је $b = c = 1012$, али и $a = 2024^{1011} - 1012$.

Трећи разред – Б категорија

1. Како је $2023 = 5 \cdot 360 + 223 = 22 \cdot 90 + 43$ и $4046 = 11 \cdot 360 + 86$ имамо да је $a = \sin 2023° = -\sin 43°$, $b = \sin 4046° = \sin 86°$, $c = \cos 2023° = -\cos 43°$ и $d = \cos 4046° = \cos 86°$. Даље, како је за $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ функција синус растућа функција, а косинус опадајућа и како је $\cos 45° = \sin 45°$, имамо $0 < d = \cos 86° < \cos 45° = \sin 45° < \sin 86° = b$. Слично добијамо и да је $c = -\cos 43° < -\cos 45° = -\sin 45° < -\sin 43° = a < 0$.
Коначно, дати бројеви поређани по величини од мањих ка већим су: $c < a < 0 < d < b$.

2. Ако прву врсту помножимо са -2 и додамо другој врсти, те помножимо са -3 и додамо трећој, добијамо: $\begin{vmatrix} 2023 & x+3 & 1+x \\ 4046 & 3x+6 & 4+x \\ 6069 & x+7 & 5+6x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2023 & x+3 & 1+x \\ 0 & x & 2-x \\ 0 & -2x-2 & 2+3x \end{vmatrix} = 2023(x^2+4x+4) = 2023(x+2)^2 \leqslant 0$, што важи само за $x = -2$.

3. Према косинусној теореми, примењеној на ΔABC, налазимо да је

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos\angle ABC < AB^2 + BC^2 = 20,$$

$$AC^2 > AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC = 4,$$

где прву неједнакост добијамо јер је $\sphericalangle ABC$ оштар, па је његов косинус позитиван. Према томе, $2 < AC < 2\sqrt{5}$, па је $AC = 3$ или $AC = 4$, због тога што је дужина AC природан број. Са друге стране, из услова тангентности четвороугла $ABCD$, налазимо да је $AB+CD = BC+DA$, односно $CD-DA = BC-AB = 2$, па дужина дијагонале AC мора бити средњи од три узастопна природна броја. Ако је $AC = 3$, налазимо да је $CD = 4$ и $DA = 3$, што није могуће због различитости дужина страница четвороугла. Ако је, пак, $AC = 4$, добијамо да важи $CD = 5$ и $DA = 3$, па у ΔCAD важи $CD^2 = 25 = 16+9 = AC^2+AD^2$, те је према Питагориној теореми он правоугли, односно $\sphericalangle CAD = 90^\circ$.

4. Одговор: 7. Приметимо да ако изабаремо бројеве $1, 3, \cdots, 13$, сви су непарни, тако да је разлика $a-b$ парна, те тада она никад не може да дели c јер је он непаран. Ако изаберемо 8 бројева, онда ће морати да постоје нека два, рецимо a и b, $a > b$, које смо изабрали и који су суседни, односно за које је $a-b = 1$, па за било које c које изаберемо ће важити $a-b|c$.

5. Свака особа ће рећи за особу испред себе да је лажов ако и само ако те две особе су из различите групе (лажови и истинољупци). Нумеришимо редове, од почетка до краја, са 1,2,...,2023. Једну групу чине људи на парним, а други на непарним местима. Због непарности броја 2023, те две групе имају различит број чланова и ако је на једном распореду на парним, на свим осталима је, такође, на парним местима. Исто важи и за непарна места, за која имамо 1012! начина за распоред, док за парна места имамо 1011! начина. Стога, укупан број распореда је $1011! \cdot 1012!$.

Четврти разред – Б категорија

1. Како је $AB \| DC$, то је $\sphericalangle APD = \sphericalangle PDC$ и $\sphericalangle BPC = \sphericalangle PCD$. Такође, $\sphericalangle DAP = \sphericalangle DPC = \sphericalangle CBP$, па је $\triangle DPC \sim \triangle PAD \sim \triangle CBP$. Тада је $\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{PD}{DC}$, одакле следи $PA = \dfrac{PD^2}{DC}$, као и $\dfrac{DC}{PC} = \dfrac{PC}{PB}$, те је $PB = \dfrac{PC^2}{DC}$. Дељењем претходних једнакости тврђење тривијално следи.

2. Како је $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 < \frac{\pi}{2}$, највећа вредност a је $a = \sin(1)$, а из Косинусне теореме, примењене на троугао са страницама $7cm$, $8cm$ и $a = 13cm$, добијамо да је $\cos\alpha = \dfrac{13^2-7^2-8^2}{2\cdot 7\cdot 8} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{2\pi}{3}$, док из Синусне теореме, налазимо да је $b = \dfrac{a}{2R} = \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Како је $a = \sin 1 = \sin\dfrac{\pi}{\pi} < \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\dfrac{2\pi}{3} = b$, добијамо да је веће b.

3. Ако је $\log 2 = a \Rightarrow \log_2 10 = \frac{1}{a}$, тј. $\log_2 2 + \log_2 5 = \frac{1}{a} \Rightarrow \log_2 5 = \frac{1}{a} - 1 = \frac{1-a}{a} \Rightarrow \log_5 2 = \frac{a}{1-a}$.
Када $\log 3 = b$ поделимо са $\log 2 = a$, добијамо да је $\log_2 3 = \frac{b}{a}$, односно $\log_3 2 = \frac{a}{b}$.
$\log 3 = b \Rightarrow \log_3 10 = \frac{1}{b}$, тј. $\log_3 2 + \log_3 5 = \frac{1}{b} \Rightarrow \log_3 5 = \frac{1}{b} - \frac{a}{b} = \frac{1-a}{b} \Rightarrow \log_5 3 = \frac{b}{1-a}$.
Коначно, $\log_5 216 = \log_5(2^3\cdot 3^3) = 3\log_5 2 + 3\log_5 3 = 3\cdot\frac{a}{1-a} + 3\cdot\frac{b}{1-a} = \frac{3a+3b}{1-a}$.

4. Одговор: 12. Приметимо да ако изабаремо бројеве $1, 3, \cdots, 23$, сви су непарни, тако да је разлика $a-b$ парна, те тада она никад не може да дели c јер је он непаран. Ако изаберемо 13 бројева, онда ће морати да постоје нека два, рецимо a и b, $a>b$, које смо изабрали и који су суседни, односно за које је $a-b=1$, па за било које c које изаберемо ће важити $a-b|c$.

5. Фиксирајмо белог краља. Претпоставимо, прво, да је он у једном у четири могућа ћошка табле. За сваку такву позицију, црног краља можемо поставити на осталих 60 поља. Дакле, уколико је бели краљ у неком од ћошкова, укупан број могућности је 240. Претпоставимо да је сада бели краљ на ивици табле, али не и у ћошковима табле. Тада, црног краља можемо сместити на осталих 58 поља табле. Дакле, у овом случају, укупан број могућности је $24 \cdot 58 = 1392$.

Коначно, претпоставимо да бели краљ није у ћошковима табле, нити на ивичним пољима, већ негде у средини табле. За њега ћемо имати тачно 36 могућности, док, за сваку од њих, црног краља можемо сместити на осталих 55 слободних поља. Дакле, у овом случају је укупан број могућности 1980. Дакле, према условима задатка, укупно распореда је 3612.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – А категорија

1. Поновимо да је на скупу $\mathbb{N}$ дата релација ϱ захтевом

$$x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad (\exists k \in A)\ y = \frac{3k-1}{2} \cdot x.$$

(а) Нека је $A = \mathbb{N}$. Јасно је да релација ϱ није транзитивна, јер је $4\,\varrho\,10$, што се добија за $k=2$ ($y = \frac{5}{2}x$), као и $10\,\varrho\,25$, што је тачно, такође, за $k=2$ ($y=\frac{5}{2}x$). Међутим, $(4, 25) \notin \varrho$, јер би у противном $25 = \frac{3k-1}{2} \cdot 4$, тј. $k = \frac{9}{2} \notin \mathbb{N}$). Самим тим није ни релација еквиваленције, нити релација поретка.
(б) Нека је, сада, $A = \mathbb{T}$, где је $\mathbb{T}$ скуп непарних природних бројева. Јасно је да је релација ϱ рефлексивна, јер за свако $x \in \mathbb{N}$ важи $(x, x) \in \varrho$, што се добија за $k = 1 \in \mathbb{T}$. Како важи $(2, 8) \in \varrho$, тј. $2\,\varrho\,8$ (добија се за $k = 3 \in \mathbb{T}$), те како $(8, 2) \notin \varrho$, то релација ϱ није симетрична, а самим тим ни релација еквиваленције. Међутим, тривијално се показује да је у овом случају релација ϱ антисиметрична и транзитивна. Заиста, ако би било $x\varrho y$ и $y\varrho x$, имали бисмо да постоје $k, \ell \in \mathbb{T}$ такви да је $x+2y = 3k\cdot x$ и $y+2x = 3\ell\cdot y$. Сабирањем ових једнакости добијамо да важи $3x+3y = 3kx+3\ell y$, одакле је $3k = 3\ell = 3$, тј. $k = \ell = 1$. Када то вратимо у једнакост $x+2y = 3k\cdot x$, добијамо да је $x = y$, односно да је релација ϱ антисиметрична.

Да бисмо показали транзитивност релације ϱ, претпоставимо да је $x\varrho y$ и $y\,\varrho\, z$, за неке $x, y, z \in \mathbb{N}$. Тада, постоје $k, m \in \mathbb{T}$ такви да је $x + 2y = 3k \cdot x$ и $y + 2z = 3m \cdot y$. Када из прве једнакости изразимо y преко x, добијамо $y = \frac{3k-1}{2}x$, што кад уврстимо у другу једнакост даје $z = \frac{3k-1}{2} \cdot \frac{3m-1}{2} \cdot x = \frac{3\frac{(3km-k-m+1)}{2}-1}{2} \cdot x$. Како су $k, m \in \mathbb{T}$ непарни, имамо да је $k = 2a+1$ и $m = 2b+1$, па је и $\frac{(3km-k-m+1)}{2} = \frac{(3(2a+1)(2b+1)-(2a+1)-(2b+1)+1)}{2} = \frac{(12ab+4a+4b+2)}{2} = 2(3ab + a+b)+1 \in \mathbb{T}$, јер је непаран. Тиме смо показали да из $x\varrho y$ и $y\varrho z$ следи $x\varrho z$, па је ова релација и транзитивна. Дакле, како важе особине рефлексивности, антисиметричности и транзитивности релације ϱ, закључујемо да је она једна релација поретка на скупу $\mathbb{N}$. Она није релација тоталног поретка, јер очигледно важи $(1, 3) \notin \varrho$, као и $(3, 1) \notin \varrho$ (може се показати да је ϱ релација парцијалног поретка на $\mathbb{N}$.)

(в) Нека је, сада, $A = \mathbb{Q}$. Како је $k = \dfrac{x + 2y}{3x} \in \mathbb{Q}$, закључујемо да је сваки елемент из $\mathbb{N}$ у релацији са сваким другим, па је та релација рефлексивна, симетрична и транзитивна, тј. једна релација еквиваленције на скупу $\mathbb{N}$. С обзиром да је сваки елемент из $\mathbb{N}$ у релацији са сваким другим, иста има само једну класу еквиваленције, цео скуп $\mathbb{N}$. Са друге стране, како није антисиметрична, јер из $(1, 2) \in \varrho$ и $(2, 1) \in \varrho$ не следи $1 = 2$, то она није релација поретка на скупу $\mathbb{N}$.

2. Нека је $AA_1 \cap BB_1 = M$, $BB_1 \cap CC_1 = N$ и $CC_1 \cap AA_1 = P$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$. Тада је $\angle PMN = \varphi - \angle B_1BC = \varphi - (\varphi - \gamma) = \gamma$. Слично, $\angle MNP = \alpha$ и $\angle NPM = \beta$. Нека је H ортоцентар троугла ABC. Како је $\angle HCC_1 = \angle HBB_1 = \angle HAA_1 = 90^\circ - \varphi$, следи да је сваки од четвороуглова $ABMH$, $BCNH$ и $ACHP$ тетиван (четвороугао је тетиван акко се страница из преостала два темена види под истим угловима). То значи да је $\angle HMA = \angle HBA = 90^\circ - \alpha$ и $\angle HPM = 180^\circ - \angle APH = \angle ACH = 90^\circ - \alpha$, одакле следи да је $HP = HM$, односно да се тачка H налази на симетрали странице MP. Слично бисмо показали да се тачка H налази на симетрали странице MN. Дакле, H је центар описаног круга троугла MNP.

3. Нека су елементи скупа S поређани у поретку $s_1 < s_2 < \cdots < s_n$. Доказаћемо индукцијом да s_1 дели најмањих k чланова из S, где је $1 \leqslant k \leqslant n$. Базни случај $k = 1$ је, наравно, тривијалан. Стога, можемо претпоставити да $s_1 \mid s_1, \cdots, s_{k-1}$, за неко $2 \leqslant k \leqslant n$. Посматрајмо вредност $s_k - s_1$, која је дељива са неким s_i. Међутим, како је $0 < s_k - s_1 < s_k$, то је $i < k$ (ако би важило $i \geqslant k$, онда $s_k - s_1 > s_i \geqslant s_k$, што је наравно контрадикција). Следи $s_i \mid s_k - s_1$ за неко $i < k$, а по индукцији је $s_1 \mid s_i$, одакле закључујемо да $s_1 \mid s_k - s_1$, односно $s_1 \mid s_k$, што нам завршава индуктивни корак.

За целе бројеве није тачно тврђење. На пример, узмимо $S = \{2, -3, 5\}$, јер $2 \mid 5 - (-3)$, $3 \mid 5 - 2$ и $5 \mid 2 - (-3)$, али НЗД$(2, -3, 5) = 1$, те би морало бити да је 1 или -1 у скупу, што није тачно.

4. (а) Приметимо да су на крају отворени ормарићи само са оним броје-

вима који имају непаран број делилаца, а то су тачни квадрати. Тачних квадрата не већих од 2023 има $\lfloor\sqrt{2023}\rfloor = 44$, па ће на крају бити 44 отворена ормарића.
(б) То су ормарићи са бројевима који имају тачно 3 делиоца, тј. ормарићи са бројевима облика p^2, где је p прост број. Заиста, како је $\sqrt{2023} < 45$, потребно је наћи све просте бројеве који су мањи од 45, тј. у Ератостеновом ситу треба прецртати све бројеве који су дељиви са 2, 3 или 5, након чега нам остаје 14 бројева (то су бројеви 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43), те је само 14 ормарића тачно два пута отворено и једном затворено (то су они са бројевима $2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2, 29^2, 31^2, 37^2, 41^2, 43^2$).

5. (а) Ако је $x = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ и $y = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$, онда је $x + y = 1 \in \mathbb{Q}$, $x^2 + y = x + y^2 = \frac{5}{4} \in \mathbb{Q}$, али x и y нису рационални.
(б) Ако је x рационалан, како је $x + y$ рационалан, следи да је и y рационалан. Иначе, важи $x \notin \{0, 1\}$, те је по условима рационалан и $\frac{(x^3+y)-(x^2+y)}{(x^2+y)-(x+y)} = \frac{x^2(x-1)}{x(x-1)} = x$, а како је $x + y$ рационалан, следи рационалност и y.

Други разред – А категорија

1. Једначина има смисла за $x \geqslant 0$. Ако квадрирамо обе стране једнакости

$$\sqrt{x + \sqrt{4x + \sqrt{4^2x + \sqrt{\cdots + \sqrt{4^{2023}x + 3}}}}} = \sqrt{x} + 1,$$

добијамо

$$\sqrt{4x + \sqrt{4^2x + \sqrt{\cdots + \sqrt{4^{2023}x + 3}}}} = 2\sqrt{x} + 1.$$

Ако квадрирамо обе стране ове релације, добијамо да је

$$\sqrt{4^2x + \sqrt{4^3x + \cdots + \sqrt{4^{2023}x + 3}}} = 4\sqrt{x} + 1.$$

Ако наставимо процедуру квадрирања, добијамо једначину

$$4^{2023}x + 3 = 4^{2023}x + 2 \cdot 2^{2023} \cdot \sqrt{x} + 1,$$

одакле је $x = \frac{1}{4^{2023}}$.

2. Нека је B_1 средиште дужи AC и нека права AO сече праву BC у тачки D. Означимо са E пресек симетрале унутрашњег угла у темену C и праве AB. Ако би угао β био прав, тада би важило $\sin\gamma\cos\gamma = 0$, па би и угао γ био такав, што је немогуће. Следи, $\cos\beta \neq 0$, па је $BD/DC = \dfrac{c\cos\gamma}{b\cos\beta} = \dfrac{\sin\gamma\cos\gamma}{\sin\beta\cos\beta}$, као и $CB_1/B_1A = 1$, $AE/EB = AC/BC$, одакле следи да је, када измножимо добијено, $\dfrac{BD}{DC}\dfrac{CB_1}{B_1A}\dfrac{AE}{EB} = 1$, тј. поменуте праве, на основу Чевине теореме, се секу у једној тачки.

3. Како је $3^y = 2^x + 11 \geq 12 > 9 = 3^2$, то је $y \geqslant 3$. За $y = 3$ важи $2^x = 16$, па је $x = 4$ и пар $(4, 3)$ је решење. За $y \geqslant 4$ имамо: $2^x = 3^y - 11 \geqslant 81 - 11 = 70 > 64 = 2^6$. Следи, $x \geqslant 7$. Како је $2^x + 11 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 9)$ (6 је поредак броја 2 по модулу 9), те како је $2^x \equiv 7 \,(\mathrm{mod}\, 9)$, следи $x \equiv 4 \,(\mathrm{mod}\, 6)$. Због Мале Фермаове теореме је $3^y = 2^x + 11 \equiv 2^4 + 11 \,(\mathrm{mod}\, 7)$, тј. $3^y \equiv 27 = 3^3 \,(\mathrm{mod}\, 7)$. Међутим, како је 6 поредак броја 3 по модулу 7, то је $y \equiv 3 \,(\mathrm{mod}\, 6)$. Такође, $3^y \equiv 11 \equiv 3^7 \,(\mathrm{mod}\, 32)$, па како је поредак броја 3 по модулу 32 једнак 8, то је $y \equiv 7 \,(\mathrm{mod}\, 8)$, тј. $y \equiv 3 \,(\mathrm{mod}\, 4)$, тј. $3^y \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 5)$, па је $2^x = 3^y - 11 \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 5)$. Коначно, из чињенице да је број 4 поредак броја 2 по модулу 5, то $4 \mid x$, па 2^x даје могуће остатке 1 и 16 при дељењу са 17, а $3^y = 2^x + 11$ даје могуће остатке 10 и 12 при дељењу са 17. Следи, $y \equiv 3 \,(\mathrm{mod}\, 16)$ или $y \equiv 5 \,(\mathrm{mod}\, 16)$. Међутим, како већ знамо да је $y \equiv 7 \,(\mathrm{mod}\, 8)$, добијамо да једначина нема решења за $y \geqslant 4$. Дакле, једино решење је пар $(4, 3)$.

4. За $k > 1011$ има 0 начина да изаберемо тражени подскуп M, јер дате бројеве можемо разбити у 1011 дисјунктних скупова $A_1 = \{2022, 1\}$, $A_2 = \{2021, 2\}$, $A_3 = \{2020, 3\}$,..., $A_{1009} = \{1014, 1009\}$, $A_{1010} = \{1013, 1010\}$, $A_{1011} = \{1012, 1011\}$, па по Дирихлеовом принципу постоје бар 2 која су из истог скупа A_i и њихов је збир једнак 2023.

За $2 \leqslant k \leqslant 1011$ поређају се у низ (x_n) бројеви:

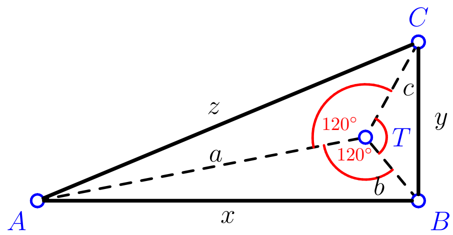
$$2022, 1, 2021, 2, 2020, 3, 2019, 4, ..., 1008, 1014, 1009, 1013, 1010, 1012, 1011$$

(ово је коначан низ који садржи првих 2022 природних бројева у горенаведеном редоследу).

Тада, не смеју да се одаберу два узастопна члана низа (x_n), јер је њихов збир или 2023 или 2022. Збир било која два несуседна члана није једнак ни 2023, нити 2022. Остаје да одредимо на колико начина можемо изабрати k чланова овог низа, тако да међу њима не постоје два који су суседни у низу. То се своди на избор индекса $j_1, j_2, ..., j_k$, за које важи $1 \leqslant j_1 < j_2 - 1 < j_3 - 2 < \ldots < j_k - (k-1) \leqslant 2022 - (k-1)$ (са оваквим условима смо добили да не постоје два узастопна индекса j_ℓ и $j_{\ell+1}$, што је еквивалентно да немамо два узастопна члана низа x_{j_ℓ} и $x_{j_{\ell+1}}$). Сада уведимо смену $s_m = j_m - (m-1)$, за $1 \leqslant m \leqslant k$, и проблем смо свели на избор бројева $s_1, s_2, ..., s_k$, за које важи $1 \leqslant s_1 < s_2 < s_3 < \ldots < s_k \leqslant 2022 - (k-1)$. Избор k различитих бројева $s_1, s_2, ..., s_k$ у потпуности одређује избор бројева $j_1, j_2, ..., j_k$, у коме се не налазе два суседна броја (и обрнуто). То можемо учинити на $\binom{2022-(k-1)}{k} = \binom{2023-k}{k}$ начина.

5. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Нека су углови $\sphericalangle ATB = \sphericalangle BTC = \sphericalangle CTA = 120°$. Тада из косинусних теорема за троуглове $\triangle ATB$, $\triangle BTC$ и $\triangle CTA$ добијамо: $x^2 = a^2 - 2ab\cos 120° + b^2 = a^2 + ab + b^2 = 144 = 12^2$, $y^2 = b^2 - 2bc\cos 120° + c^2 = b^2 + bc +$

$c^2 = 25 = 5^2$, $z^2 = c^2 - 2ca\cos 120° + a^2 = c^2 + ca + a^2 = 169 = 13^2$, одакле добијамо да су странице $\triangle ABC$ једнаке $x = 12$, $y = 5$ и $x = 13$. Помоћу Хероновог обрасца (или ако приметимо да је овај троугао правоугли) добијамо да је површина овог троугла $P_{\triangle ABC} = 30$.
Са друге стране, добијамо да је ова површина
$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ABT} + P_{\triangle BCT} + P_{\triangle CAT} = \dfrac{ab\sin 120°}{2} + \dfrac{bc\sin 120°}{2} + \dfrac{ca\sin 120°}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(ab + bc + ca)$. Изједначавањем ових израза добијамо да је $ab + bc + ca = 40\sqrt{3}$.



(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Ако би неки од a, b, c био једнак 0 (нпр. $a = 0 \Rightarrow b = 12$ и $c = 13 \Rightarrow b^2 + bc + c^2 = 469$, а не 25; аналогно би се показало и ако је $b = 0$ или $c = 0$). Стога су $a, b, c \neq 0$.

Дакле, можемо узети да је $a = kb$ и $c = \ell b$ $(k, \ell \neq 0)$. Тада имамо да је:
$a^2 + ab + b^2 = k^2b^2 + kb^2 + b^2 = b^2(k^2 + k + 1) = 144$,
$b^2 + bc + c^2 = b^2 + \ell b^2 + \ell^2 b^2 = b^2(\ell^2 + \ell + 1) = 25$,
$c^2 + ca + a^2 = \ell^2 b^2 + k\ell b^2 + k^2 b^2 = b^2(\ell^2 + k\ell + k^2) = 169$.
Одавде је $b^2[(k^2 + k + 1) + (\ell^2 + \ell + 1) - (k^2 + k\ell + \ell^2)] = 144 + 25 - 169 = 0$, тј. $b^2[2 + k + \ell - k\ell] = 0$. Даље, како је $b \neq 0$, добијамо да је $2 + k + \ell - k\ell = 0$, одакле добијамо да је $2 + k = k\ell - \ell$, тј. $\ell = \dfrac{2+k}{k-1}$ (ако би било $k = 1$, онда би било $b = a$, што даје $a^2 = b^2 = 48$, што је немогуће, јер је $b^2 + bc + c^2 = 25$ и $b, c > 0$).
Из $b^2(k^2 + k + 1) = 144$ и $b^2(\ell^2 + \ell + 1) = 3b^2\dfrac{k^2 + k + 1}{(k-1)^2} = 25$, добијамо да је $\dfrac{25}{144} = \dfrac{3}{(k-1)^2}$, одакле је $k - 1 = \frac{12}{5}\sqrt{3}$. Коначно имамо $ab + bc + ca = kb^2 + \dfrac{2+k}{k-1}b^2 + k\dfrac{2+k}{k-1}b^2 = 2b^2\dfrac{k^2 + k + 1}{k-1} = \dfrac{2 \cdot 144}{\frac{12}{5}\sqrt{3}} = 40\sqrt{3}$.

Трећи разред – А категорија

1. Ако једначину $AB = A$ помножимо матрицом A, са десне стране, а једначину $BA = B$ помножимо матрицом A, са леве стране, добијају се једначине

$ABA = A^2$ и $ABA = AB$. Како је $AB = A$ по услову задатка, то имамо да је $ABA = A^2 = A$, тј. показали смо да је матрица A идемпотентна. Аналогно се показује и $B^2 = B$.

2. Познато је да су тачке A, S и S_a колинеарне (све три леже на симетрали унутрашњег угла у темену A троугла ABC), па је због обрата Талесове теореме довољно доказати да је $\frac{S_aS}{S_aA} = \frac{SS'}{AD}$ (јер је по дефиницији $AD \perp BC$ и $SS' \perp BC$, па је $AD \parallel SS'$). Нека су a, b, c дужине страница, наспрам темена A, B, C, редом, и нека су s полуобим, h_a висина из темена A, r полупречник уписане кружнице и S површина полазног троугла. Тада је јасно да је $\frac{SS'}{AD} = \frac{2r}{h_a} = \frac{\frac{2S}{s}}{\frac{2S}{a}} = \frac{a}{s}$.

Нека су, даље, P и Q додири уписане и споља приписане кружнице са правом AB, редом. Тада је из Талесове теореме испуњено $\frac{S_aS}{S_aA} = \frac{QP}{QA} = \frac{a}{s}$, јер је $AP = \frac{b+c-a}{2}$ и $AQ = s$. Према томе, $\frac{S_aS}{S_aA} = \frac{a}{s} = \frac{SS'}{AD}$, па су S_a, S' и D, заиста, колинеарне.

3. Да! Штавише, доказаћемо да за сваки природан број r постоје природни бројеви $a_1, a_2, a_3, ..., a_r$, као и природан број n, који имају тражено својство. У том циљу, довољно је узети произвољне природне бројеве $a_1, a_2, ..., a_{r-1}$. Ставимо да је $a_r = a_1!a_2!...a_{r-1}! - 1$. Тада за $n = a_1!a_2!...a_{r-1}!$ очигледно важи

$$\begin{aligned} n! &= (a_1!a_2!...a_{r-1}!)! \\ &= (a_1!a_2!...a_{r-1}!)(a_1!a_2!...a_{r-1}! - 1)! \\ &= a_1!a_2!...a_{r-1}!a_r!. \end{aligned}$$

4. Видимо одмах да је $n \geqslant k - 1$, јер $k - 1$ мушкараца можемо упарити са n жена. У даљем, искористићемо Холову теорему за решавање задатка. Приметимо да за сваки прави подскуп скупа мушкараца важи да је он подскуп неког $(k-1)$-точланог подскупа скупа мушкараца, па је могуће упарити тај подскуп са неким подскупом скупа жена, па самим тим је и суседство тог скупа веће кардиналности од нашег скупа. Међутим, како услов Холове теореме није испуњен, закључујемо да мора да постоји неки подскуп скупа мушкараца који има суседство мање кардиналности, а како то није ниједан прави подскуп, то мора бити цео скуп свих мушкараца. Међутим, како је свака жена компатибилна са барем једним мушкарцем, знамо да је суседство кардиналности управо n, те је онда $k < n$. Сада је у потпуности јасно да мора бити $k = n + 1$.

5. Одговор: $f(x) = x$, као и $f(x) = 0$, за свако $x \in \mathbb{R}$.
Убацивањем $x = 0$ у полазну релацију налазимо да је $f(0) = 0$. Затим, убацивањем вредности $y = 0$, налазимо $xf(x) = f(x)^2$, тако да је $f(x) = x$ или $f(x) = 0$, за свако x. Међутим, ово није довољно да бисмо закључили да је увек иста „опција". Претпоставимо да је $f(a) = 0$ и $f(b) = b$, за $a, b \neq 0$. Узмимо, сада, $x = b$ и $y = a - b$. Тада је $f(a-b)f(a) + bf(b) + f((a-b)b) = f(a)^2$, односно, $b^2 + f((a-b)b) = 0$. Тада је, очито, $f((a-b)b) = -b^2 \neq 0$, па

је $(a-b)b = b^2$. Стога је $a = 2b$. Међутим, није могуће да ово важи за сваки овакав пар (a, b). На пример, можемо узети неко $c \neq 0$, које је уједно различито од a и b. За њега важи да је или $f(c) = 0$ или $f(c) = c$, а не важи ни $a = 2c$, нити $c = 2b$. Тривијално се проверава да су оба наведена решења валидна, те је тиме доказ завршен.

Четврти разред – А категорија

1. Нека је $a - b = q \in \mathbb{Q}$. Посматрајмо полином $Q(x) = P(x-q)$, $x \in \mathbb{R}$. Јасно је да је овако конструисани полином истог степена (барем један) као и полином P, да има рационалне коефицијенте, јер је такав полином P, али и исти водећи коефицијент као и полином P. Ако означимо са $R(x) = \text{НЗД}\,(P(x), Q(x))$ налазимо да и полином R, такође, има рационалне коефицијенте, јер исти добијамо коришћењем Еуклидовог алгоритма, примењеног на полиноме P и Q (кори7ћењем те процедуре налажења полинома R, сви његови коефицијенти остају унутар $\mathbb{Q}$). Такође, како је $Q(a) = P(a-q) = P(b) = 0 = P(a)$, то (гледано над $\mathbb{R}[x]$) важи да $x - a \mid R$, тј. степен полинома R је барем 1, а како $R \mid P$ и како је P иредуцибилан, то је степен полинома R, заправо, једнак степену полинома P, одакле налазимо да је $P(x) = r_1 R(x)$ и $Q(x) = r_2 R(x)$, за свако $x \in \mathbb{R}$ и неке рационалне бројеве r_1 и r_2. Међутим, из чињенице да су водећи коефицијенти полинома P и Q идентични, добијамо да је $r_1 = r_2$, тј. да важи $P(x) = Q(x)$, за свако $x \in \mathbb{R}$. Коначно, $0 = P(a) = Q(a) = P(a-q) = Q(a-q) = P(a-2q) = Q(a-2q) = \cdots = P(a-kq) = \cdots$, те ако би важило $q \neq 0$, тада би полином P имао бесконачно много нула, што није могуће. Дакле, $q = 0$, тј. $a = b$.

2. Конвексан четвороугао $ABCD$ је тангентан ако и само ако је $AB + CD = AD + BC$. Дужи EF и BD су паралелне ако и само ако важи $\frac{AE}{AF} = \frac{AD}{AB}$, па како је $AE = AF$, то мора бити $AD = AB$ и обрнуто. Аналогно, дужи GH и BD су паралелне ако и само ако је $BC = CD$. Стога, ако су све три дужи паралелне, добијано да важи $AB + CD = AD + BC$, тј. да је четвороугао $ABCD$ тангентан.

Претпоставимо да се праве одређене трима дужима EF, BD и HG секу у једној тачки, рецимо S. Применом Менелајеве теоремом добијамо $\frac{\overrightarrow{BS}}{\overrightarrow{SD}} = -\frac{\overrightarrow{FB}}{\overrightarrow{AF}} \cdot \frac{\overrightarrow{EA}}{\overrightarrow{DE}} = -\frac{BF}{AF} \cdot \frac{EA}{ED} = -\frac{BF}{ED}$, због усмерености одговарајућих дужи и $AF = AE$. Аналогно, $\frac{\overrightarrow{BS}}{\overrightarrow{SD}} = -\frac{BG}{HD}$. Следи, $\frac{BG}{HD} = \frac{BF}{ED}$, а добијено важи ако кругови уписани у троуглове ABD и BCD додирују праву BD у истој тачки, што је еквивалентно са $\frac{BA+BD-AD}{2} = \frac{BC+BD-DC}{2}$, тј. $BA - AD = BC - DC$, тј. $BA + DC = BC + AD$, па је четвороугао $ABCD$ тангентан.

Коначно, ако је четвороугао $ABCD$ тангентан, тада, ако је $AB = AC$ и $CB = CD$, то су (знамо из првог дела доказа) дужи BD, GH и EF паралелне. Ако $AB \neq AD$ и $CB \neq CD$, тада никоје две од правих BD, EF и GH нису паралелне. Стога, претпоставимо да се праве BD и EF секу у тачки X, а BD и GH у тачки Y. Применом Менелајеве теореме добијамо: $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XD}} = -\frac{\overrightarrow{FB}}{\overrightarrow{AF}} \cdot \frac{\overrightarrow{EA}}{\overrightarrow{DE}} = -\frac{BF}{AF} \cdot \frac{EA}{ED} = -\frac{BF}{ED}$, као и $\frac{\overrightarrow{BY}}{\overrightarrow{YD}} = -\frac{\overrightarrow{GB}}{\overrightarrow{AG}} \cdot \frac{\overrightarrow{HA}}{\overrightarrow{DH}} = -\frac{BG}{AG} \cdot \frac{HA}{HD} = -\frac{BG}{DH}$, те користећи раније једнакости, $BG = \frac{BA+BD-AD}{2} = \frac{BC+BD-CD}{2} = BF$, $DH = \frac{AD+BD-AB}{2} = \frac{CD+BD-CB}{2} = DE$, одакле следи $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XD}} = \frac{\overrightarrow{BY}}{\overrightarrow{YD}}$, што је еквивалентно са $X = Y$, па се све три праве секу у једној тачки.

3. За $m = n$ имамо $f(n) \mid n!$. Стога, $f(1) = 1 = 1!$ и за $n = m = 1$ имамо $f(n) + 1 \mid n! + 1$. Стога, $f(n) \mid n! - f(n)$, $f(n) + 1 \mid n! - f(n)$, те како су $f(n)$ и $f(n) + 1$ узајамно прости, имамо $f(n)(f(n) + 1) \mid n! - f(n)$. За $f(n) < n!$, $n > 1$, је $n! \geqslant f(n)(f(n) + 1) > f(n)^2$, па је $f(n) < \sqrt{n!}$. За $n = 2$, имамо $f(2) + 1 \mid 3$, а како је $f(2) + 1 > 1$ и 3 је прост, следи $f(2) + 1 = 3$, тј. $f(2) = 2 = 2!$. За $n = 3$, имамо $f(3) + 1 \mid 7$, а како је $f(3) + 1 > 1$ и 7 је прост, следи $f(3) + 1 = 7$ и $f(3) = 6 = 3!$. За $n = 4$, имамо $f(4) + 1 \mid 25$, па је $f(4) \in \{5 - 1, 25 - 1\} = \{4, 24\}$ и кад узмемо $m = 2$, имамо $f(4) + 2 \mid 26$, а за $f(4) = 4$ имамо да $6 \mid 26$, што је нетачно, па је $f(4) = 24 = 4!$. За $n = 5$, имамо $f(5) + 1 \mid 121$, $f(5) + 1 \in \{11, 121\}$, па је $f(5) \in \{10, 120\}$. Ако је $f(5) = 10$, за $n = 5$, $m = 2$, добијамо $12 \mid 122$, што је нетачно. Стога, $f(5) = 120 = 5!$. За $n = 6$ је $f(6)+1 \mid 721$, па је $f(6) \in \{6, 102, 720\}$. За $f(6) = 6$ и $m = 2$ важи $8 \mid 722$, што није тачно. За $f(6) = 102$ и $m = 2$ важи $104 \mid 722$, што опет није тачно. Стога $f(6) = 720 = 6!$. Доказујемо индукцијом да је $f(n) = n!$, за свако $n \geqslant 7$. Ако $f(n-1) = (n-1)!$, онда је $f(n)+(n-1)! \mid (n-1)!\,(n+1)$, па за неко природно k, имамо $kf(n) + k(n-1)! = (n-1)!\,(n+1)$, тј. $kf(n) = (n-1)!(n+1-k) > 0$, па је $n + 1 > k$, тј. $k \leqslant n$. Такође, важи $f(n) = \frac{(n-1)!(n+1-k)}{k} \geqslant \frac{(n-1)!}{n}$. Ако $f(n) \neq n!$, како $f(n)+1 \mid n!+1$, знамо да је $f(n) \leqslant n!$, одакле следи да можемо претпоставити да је $f(n) < n!$, па $f(n) < \sqrt{n!}$. Стога, имамо $\frac{(n-1)!}{n} < \sqrt{n!}$, па је $\sqrt{(n-1)!} < \sqrt{n} \cdot n = \sqrt{n^3}$, односно $(n-1)! < n^3$. Међутим, ово није тачно за $n \geqslant 7$. Заиста, $(n-1)!$, за $n = 7$, је $6! = 720$, а $7^3 = 343$, контрадикција. За $n \geqslant 8$, $(n-1)! \geqslant ((n-1) \cdot 2) \cdot ((n-2) \cdot 3) \cdot ((n-3) \cdot 4) > n \cdot n \cdot n = n^3$. Дакле, за све $n \geqslant 1$ је $f(n) = n!$, као и за све $n < 5$ је $f(n) = n!$. Стога, $f(n) = n!$, за све природне n. Тривијално се проверава да поменута функција задовољава услове задатка.

4. (а) Одговор је $2^{2023}\binom{2023}{101}^{100}$. Заиста, за први скуп имамо 2^{2023} избора. Докажимо да за сваки следећи скуп имамо $\binom{2023}{101}$ начина, одакле следи наведено. Приметимо да важи $B \cap C = B \setminus (B \triangle C)$ и $C \setminus B = (B \triangle C) \setminus B$, што се лако проверава. Одатле следи да важи и $C = (B \setminus (B \triangle C)) \cup ((B \triangle C) \setminus B)$. Дакле, уколико фиксирамо неки скуп $S \subset \{1, 2, 3, ..., 2023\}$, такав да је $|S| = 101$, јединствено је одређен скуп C такав да $|B \triangle C| = S$. Такође, очито није могуће да два различита таква скупа S дају исти скуп C, па је број тражених скупова C једнак броју скупова S за које важи $|S| = 101$, а он је тачно $\binom{2023}{101}$.
(б) Одговор је 0, због парности. Заиста, приметимо да за свака два скупа B и C, $B, C \subset \{1, 2, 3, ..., 2023\}$, за које важи $|B \triangle C| = 101$, такође важи да је парност бројева $|B|$ и $|C|$ различита. То директно следи из идентитета

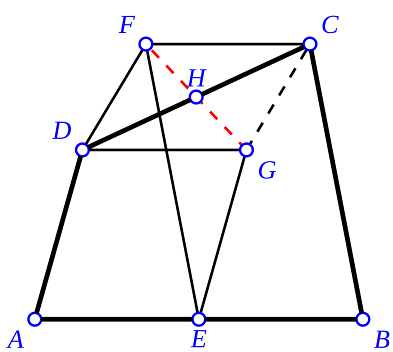
$|A|+|B| = |A\triangle B|+2\,|A\cap B|$, који се тривијално да проверити. Дакле, уколико бисмо имали низ скупова $A_1, A_2, ..., A_{101}$ који испуњава тражено, морало би бити да су $|A_1|, |A_3|, ..., |A_{101}|$ исте парности, али то није могуће, јер, због додатне особине, тј. чињенице да важи и $|A_1 \triangle A_{101}| = 101$, бројеви $|A_1|$ и $|A_{101}|$ морају бити различите парности.

5. Одговоре је не. Посматрајмо функцију $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ задату са $f(2) = 3$, $f(3) = 2$, $f(n) = n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{2, 3\}$. Лако се проверава да она испуњава услов из задатка, а није неопадајућа, јер $f(2) > f(3)$.

Први разред – Б категорија

1. Како је $\dfrac{1}{31} > 0,03 > 0,004 = 0,972 - 0,968$, тј. $\dfrac{1}{31} + 0,968 > 0,972$, то за све рационалне бројеве облика $\dfrac{k}{l}$, $2 \leqslant l \leqslant 31$ и $1 \leqslant k \leqslant l-1$, а који су мањи од 1, важи да су, такође, мањи и од $0,968$. Одавде налазимо да тражени број мора бити већи од 31. Како је $\dfrac{31}{32} = 0,96875$ ($\dfrac{30}{32} = 0,9375$) у овом затвореном интервалу, добијамо да је тражени број 32.

2. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Из услова задатка имамо да је $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AD}$. Како је E средиште AB и H средиште CD имамо да је $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$ и $\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{DH} = \vec{0}$, па је $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH}$ и $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CH}$. Сабирањем ове 2 једнакости добијамо да је $2\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{EF}$, тј. $\overrightarrow{EH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$, па је тачка H средиште дужи FG.



(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Из услова задатка имамо да је $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow$ четвороугао $EFCB$ је паралелограм, па је и $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Слично, имамо да је $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow$ четвороугао $EGDA$ је паралелограм, па је и $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Стога је и $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{DG}$, па је и четвороугао $FCGD$ је паралелограм. Како се дијагонале паралелограма полове, добијамо да је тачка H и средиште дијагонале CD и дијагонале FG, чиме смо показали да су тачке F, G и H колинеарне.

3. Приметимо да је $1+2+3+4+5+6=21$ и $1+2+3+4+5+7=22$, а свака сума 6 различитих бројева је већа од 22, можемо закључити да су $1,2,3,4,5,7$ сви делиоци од n. Онда је n дељив и са НЗС$\{1,2,3,4,5,7\}=420$.

4. Како је вредност $f(3)=13$ већ дата, остаје да одредимо још вредности за $f(1), f(5), f(7), f(9), f(11)$ и $f(13)$ (то су све различити парни бројеви из $\mathbb{N}_{12}$), као и вредности за $f(2), f(4), f(6), f(8), f(10)$ и $f(12)$ (то су све различити непарни бројеви из $\mathbb{N}_{11}$). И једно и друго можемо одредити на $6! = 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 720$ начина, па тражених функција има $(6!)^2 = 720^2 = 518\,400$.

5. У сваком минуту укупан број особа се промени за број који даје остатак 1 при дељењу са 3. Означимо са S_i број особа у просторији након i-тог минута. На почетку је $S_0=0$, а због описаног правила је $S_{i+1}\equiv S_i+1 \pmod 3$. Зато је за свако $k\in\mathbb{N}$ испуњено $S_{3k}\equiv S_{3(k-1)}+3\equiv S_{3(k-1)}\equiv\cdots\equiv S_0\equiv 0 \pmod 3$. Дакле, након 100 сати, тј. након 6000 минута, број особа у просторији мора бити дељив са 3. Међутим, како 3 не дели 2023, одговор на питање из задатка је одречан.

Други разред – Б категорија

1. Према условима задатка, дати израз, означимо га са I, можемо трансформисати на следећи начин:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{a+b+c+2\sqrt{c}\sqrt{a+b}}+\sqrt{a+b+c-2\sqrt{c}\sqrt{a+b}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{c}+\sqrt{a+b})^2}+\sqrt{(\sqrt{c}-\sqrt{a+b})^2} \\ &= \sqrt{c}+\sqrt{a+b}+\sqrt{c}-\sqrt{a+b} \\ &= 2\sqrt{c}. \end{aligned},$$

јер је $\sqrt{a+b}<\sqrt{c}$. Одавде је јасно да дати израз не зависи од a и b.

2. (а) Из $P=\frac{a\cdot5}{2}=\frac{b\cdot12}{2}=\frac{c\cdot13}{2}\Rightarrow a=\frac{2P}{5}, b=\frac{2P}{12}, c=\frac{2P}{13}$. Како за ове странице не важи неједнакост троугла $a=\frac{2P}{5}=\frac{2P\cdot25}{125}>b+c=\frac{2P}{12}+\frac{2P}{13}=\frac{2P\cdot25}{156}$, такав троугао не постоји.
(б) Из $P=\frac{a\cdot6}{2}=\frac{b\cdot9}{2}=\frac{c\cdot12}{2}\Rightarrow a=\frac{2P}{6}$, $b=\frac{2P}{9}$, $c=\frac{2P}{12}$. Како за ове странице важи неједнакост троугла, јер $a=\frac{2P}{6}=\frac{2P\cdot6}{36}<b+c=\frac{2P}{9}+\frac{2P}{12}=\frac{2P\cdot7}{36}$, такав троугао постоји (довољно је проверити само ову неједнакост, јер је a најдужа страница). Како важи $b^2+c^2=\frac{4P^2}{81}+\frac{4P^2}{144}=\frac{4P^2\cdot25}{1296}<\frac{4P^2\cdot36}{1296}=\frac{4P^2}{36}=a^2\Rightarrow\triangle$ је тупоугли.

3. Означимо са D дискриминанту полазне квадратне једначине. Тада важи $D\geqslant0$ и с обзиром да су решења исте рационални бројеви, то је $0\leqslant\sqrt{D}=$

$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, за неке узајамно просте природне бројеве p и q, тј. за неке природне бројеве p и q за које је НЗД $(p, q) = 1$. Стога, мора бити $D = \frac{p^2}{q^2}$, тј. $q^2 D = p^2$, одакле важи да $q \mid p^2$, тј. $q \mid p$, јер је НЗД $(p, q) = 1$, што је могуће само у случају $q = 1$. Дакле, $D = p^2$, па је дискриминанта D квадрат природног броја.

Покажимо, у даљем, да при датим условима, дискриминанта полазне једначине мора дати остатак 5 по модулу 8. У том циљу, нека је $a = 2n - 1$, $b = 2m - 1$ и $c = 2k - 1$, за неке целе бројеве m, n и k. Тада важи

$$D = (2m - 1)^2 - 4(2n - 1)(2k - 1),$$

те како је $(2m - 1)^2 = 4m^2 - 4m + 1 = 4m(m - 1) + 1 \equiv 1 \pmod 8$, јер је број $m(m - 1)$ паран, и $4(2n - 1)(2k - 1) \equiv 4 \pmod 8$, то је $D \equiv 5 \pmod 8$. Лако се показује да квадрати целих бројева при дељењу са 8 не могу давати остатак 5. Могу дати само остатке 0, 1 или 4, одакле закључујемо да дисkиминанта дате квадратне једначине не може бити потпун квадрат, одакле следи да су решења квадратне једначине ирационални бројеви.

4. Ако бисмо од 3 објекта једнака по свим атрибутима, осим што је један тежи од осталих, тражили најтежи објекат, довољно је само једно мерење. То можемо извести тако што можемо ставити по један објекат на сваки од тасова. У слуцају неравнотеже, тражени објекат је онај на тасу који претеже, свакако. У супротном, тражени објекат је онај који није ни на једном од тасова.

Ако бисмо имали 9 куглица од којих је једна тежа од осталих, потребна су нам два мерења да пронадемо управо ту тежу. Заиста, 9 куглица можемо поделити у три групе од по три куглице и применити два пута претходно разматрану стратегију. У случају са 23 куглице, можемо направити три групе тако да у њима имамо редом 9, 9 и 5 куглица и онда на вагу ставити, рецимо, прве две групе. Ако наступи неравнотежа, задатак се своди на разматрани случај са 9 куглица. У супротном, додавањем 4 мерене куглице у трећу групу, задатак се опет своди на случај са укупно 9 куглица. Како нам је за случај са 9 куглица потребно тачно 2 мерења, довољан број мерења да пронађемо најтежу је 3.

5. Неједначина је дефинисана за $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1]$, јер мора бити $1 - x \geqslant 0$ и $\sqrt{1 - x} \neq 1$. Пребацивањем израза са десне стране на леву, након сређивања, добијамо

$$\frac{\sqrt{1 - x} - 2\sqrt{3}\, x}{(\sqrt{1 - x} - 1)(\sqrt{1 - x} + 1)} \geqslant 0.$$

Очигледно је да знак израза у имениоцу зависи само од знака израза $\sqrt{1 - x} - 1$, јер је за савако $x \leqslant 1$ испуњено $\sqrt{1 - x} + 1 \geqslant 1$. Стога, размотримо два случаја.

1°: $\sqrt{1-x}-1>0$, тј. $1<\sqrt{1-x}$, тј. $1<1-x$, тј. $x<0$
У овом случају неједначина постаје $\sqrt{1-x}-2\sqrt{3}\,x\geqslant 0$, односно $2\sqrt{3}\,x\leqslant\sqrt{1-x}$, што је тачно за све $x<0$.

2°: $\sqrt{1-x}-1<0$, тј. $\sqrt{1-x}<1$, тј. $1-x<1$, тј. $x\in(0,1]$, због области дефинисаности неједначине
У овом случају неједначина постаје $\sqrt{1-x}-2\sqrt{3}\,x\leqslant 0$, односно $\sqrt{1-x}\leqslant 2\sqrt{3}\,x$, тј. $12x^2+x-1\geqslant 0$. Анализом добијене квадратне функције тривијално налазимо да мора бити $x\in(-\infty,-\frac{1}{3}]\cup[\frac{1}{4},+\infty)$, те како је у овом случају $x\in(0,1]$, то је $x\in[\frac{1}{4},1]$.

Коначно, узимајући у обзир добијено у оба случаја, долазимо до закључка да је скуп решења полазне неједначине скуп $(-\infty,0)\cup[\frac{1}{4},1]$.

Трећи разред – Б категорија

1. Услов да је први логаритам дефинисан је $x^2+3x>0$, односно, $x\in(-\infty,-3)\cup(0,+\infty)$.

Прву неједначину можемо написати у облику $x\cdot\big(\log_{0.5}(x^2+3x)+2\big)>0$. Производ два броја је позитиван уколико су оба броја позитивни или оба броја негативни, одакле добијамо два система са по две неједначине:

$$(x>0,\ \log_{0.5}(x^2+3x)+2>0)\quad\text{и}\quad(x<0,\ \log_{0.5}(x^2+3x)+2<0).$$

Једначина $\log_{0.5}(x^2+3x)+2>0\ \Leftrightarrow\log_{0.5}(x^2+3x)>-2=\log_{0.5}4$, па кад се ослободимо логаритма (због $0.5<1$ мења се знак!), добијамо квадратну неједначину $x^2+3x-4<0$, која има решење $x\in(-4,1)$. Решење првог система, тј. система неједначина $(x>0,\ \log_{0.5}(x^2+3x)+2>0)$, је $x\in(0,1)$.

Слично, $\log_{0.5}(x^2+3x)+2<0\ \Leftrightarrow\log_{0.5}(x^2+3x)<-2=\log_{0.5}4$, па кад се ослободимо логаритма (због $0.5<1$ мења се знак!), добијамо квадратну неједначину $x^2+3x-4>0$, која има решење $x\in(-\infty,-4)\cup(1,+\infty)$. Решење другог система, тј. система неједначина $(x<0,\ \log_{0.5}(x^2+3x)+2<0)$, је $x\in(-\infty,-4)$.

Коначно, спајањем решења ова два система добијамо да је решење прве логаритамске неједначине једнако $x\in(-\infty,-4)\cup(0,1)$.

Сређивањем израза у другој неједначини полазног система добијамо да је

$$\frac{2\log_2 3-3\log_8 45}{\log_4 75+\log_{0.25}3}=-1,$$

те се ова неједначина своди на $x+4>-1$ и она има решење $x>-5$.

Укупно решење добијамо као пресек ова два решења: $x\in(-5,-4)\cup(0,1)$.

2. Нека је ABC дати троугао. Означимо са a и b, редом, дужине страница BC и CA, а са β и γ унутрашње углове у теменима B и C тог троугла, редом. Претпоставимо, прво, да троугао ротира око своје a странице, тј. око странице BC. У случају да је тачно један од углова β или γ једнак 90°, у том процесу ћемо добити обртно тело (обичну праву купу), које има полупречник основе једнак $h_a = \frac{2P}{a}$ и висину једнаку a. Уколико су β и γ оштри углови, независно од величине угла у темену A, добићемо две купе, истих полупречника основа једнаких h_a (основе су наслоњене једна на другу), чији је збир висина једнак, управо, a. У случају да је неки од (тачно један) углова β или γ туп, приликом ротације ће се формирати тело идентично телу које настаје када из једне купе ,,извадимо" мању купу, истог полупречника основе, с тим што је разлика висина тих купа једнака a. У сваком од ова три случаја добијамо исту запремину обртног тела: $V_a = \frac{1}{3}\left(\frac{2P}{a}\right)^2 \cdot a = \dfrac{4P^2\pi}{3a}$. Аналогно се добија и да је запремина обртног тела које добијамо када троугао ротира око своје странице b једнака $V_b = \dfrac{4P^2\pi}{3b}$. Одалте имамо да је тражени однос $V_a : V_b = \dfrac{4P^2\pi}{3a} : \dfrac{4P^2\pi}{3b} = \dfrac{1}{a} : \dfrac{1}{b}$, тј. $V_a : V_b = b : a$.

3. Из почетног услова имамо да је $n^n \equiv 2023 \pmod{n}$, одакле следи $n \mid 2023 = 7 \cdot 17^2$. Такође, уколико је $n \geqslant 14$, тада би важило $0 \equiv n^n \equiv 2023 \pmod{49}$, што није могуће. Из претходних запажања преостаје још испитати случај $n = 7$, што и јесте решење полазног проблема. Заиста, да би важило $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 7! \mid 7^7 - 2023$, треба показати да $16 \mid 7^7 - 2023$, $9 \mid 7^7 - 2023$, као и да $5 \mid 7^7 - 2023$, јер, свакако, $7 \mid 7^7 - 2023$. Стога, треба упоредити остатке при дељењу бројева 7^7 и 2023 са 16, 9 и 5.

Имамо да број 48 даје остатак 0 при дељењу са 16, одакле следи да 7^2 даје остатак 1 при дељењу са 16. Дакле, 7^7 мора дати остатак 7 при дељењу са 16, а то је уједно и остатак при дељењу броја 2023 са 16, јер $16 \mid 2016$. Слично, остатак при дељењу броја 7^7 са 9 је 7, јер $9 \mid (7^3 - 1) = 342$, што је уједно и остатак при дељењу броја 2023 са 9 (знамо да $9 \mid 2016$). Коначно, 7^4 при дељењу са 5 даје остатак 1, одакле следи да 7^7 даје остатак 3 при дељењу са 5. Како је остатак при дељењу броја 2023 са 5 једнак 3, то $5 \mid 7^7 - 2023$.

4. На следећим сликама је у свако поље шаховске табле уписан број колико поља напада дама са тог поља (слика лево) и колико поља напада скакач са тог поља (слика 2. слева) – то је исто и са колико поља би скакач нападао даму уколико се налази на том пољу.

8	21	21	21	21	21	21	21	21
7	21	23	23	23	23	23	23	21
6	21	23	25	25	25	25	23	21
5	21	23	25	27	27	25	23	21
4	21	23	25	27	27	25	23	21
3	21	23	25	25	25	25	23	21
2	21	23	23	23	23	23	23	21
1	21	21	21	21	21	21	21	21
	a	b	c	d	e	f	g	h

8	2	3	4	4	4	4	3	2
7	3	4	6	6	6	6	4	3
6	4	6	8	8	8	8	6	4
5	4	6	8	8	8	8	6	4
4	4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	8	8	8	8	6	4
2	3	4	6	6	6	6	4	3
1	2	3	4	4	4	4	3	2
	a	b	c	d	e	f	g	h

8	23	24	25	25	25	25	24	23
7	24	27	29	29	29	29	27	24
6	25	29	33	33	33	33	29	25
5	25	29	33	35	35	33	29	25
4	25	29	33	35	35	33	29	25
3	25	29	33	33	33	33	29	25
2	24	27	29	29	29	29	27	24
1	23	24	25	25	25	25	24	23
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*

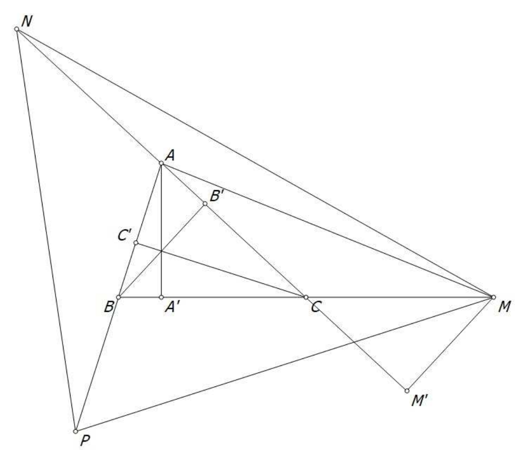
8	40	39	38	38	38	38	39	40
7	39	36	34	34	34	34	36	39
6	38	34	30	30	30	30	34	38
5	38	34	30	28	28	30	34	38
4	38	34	30	28	28	30	34	38
3	38	34	30	30	30	30	34	38
2	39	36	34	34	34	34	36	39
1	40	39	38	38	38	38	39	40
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*

Када саберемо ове бројеве добијамо слику 3. слева, а ту је у свако поље уписан број поља које напада дама са тог поља или би дама била нападнута ако би ту био скакач (приметимо да су ова поља дисјунктна, зато их само сабирамо). На последњој слици (скроз десно) је број поља на којима може бити скакач тако да нит њега напада дама нит он даму (то укупно 64 поља одузмемо 1 поље где се налази дама и d поља која напада дама са тог поља и s поља са којих скакач напада даму на том пољу, тј. $63-(d+s)$, тј. од 63 одузмемо број са 3. слике лево).

Укупан број начина да се ставе бела дама и црни скакач на шаховску таблу 8×8 тако да ниједна од те 2 фигуре није нападнута је једнак збиру свих бројева са слике скроз десно, а то је једнако:

$4 \cdot 40 + 8 \cdot 39 + 16 \cdot 38 + 4 \cdot 36 + 16 \cdot 34 + 12 \cdot 30 + 4 \cdot 28 = 2\,240.$

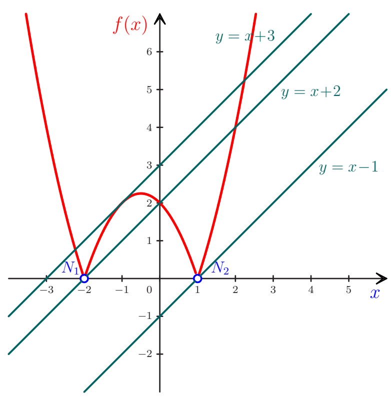
5. Уколико је XYZ троугао у равни, са P_{XYZ} ћемо означити његову површину. Докажимо да је P_{MNP} једнако 2023 cm^2. Заиста, нека су A', B' и C' подножја висина из темена A, B и C троугла ABC, која одговарају страницама BC, CA и AB, редом, и нека је M', такође, подножје висине из темена M троугла CMN, које одговара страници NC. Означимо са a, b и c дужини страница BC, CA и AB, тим редом, троугла ABC. Како је $NC = 2b$, то је $P_{CMN} = b \cdot MM'$. Са друге стране, ако посматрамо троуглове BCB' и MCM', закључићемо, одмах, да су подударни (УСУ), јер је $BB' || MM'$. Следи, $BB' = MM'$, па је $P_{CMN} = b \cdot BB' = 2P_{ABC}$.



Аналогно се показује да је $P_{ANP} = c \cdot CC' = 2P_{ABC}$, као и $P_{BPM} = a \cdot AA' = 2P_{ABC}$. Дакле, $P_{MNP} = P_{ABC} + P_{CMN} + P_{ANP} + P_{BPM} = 7P_{ABC} = 2023\ cm^2$.

Четврти разред – Б категорија

1. Квадратна функција $f(x) = x^2 + x - 2$ има нуле $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$, а теме параболе је тачка $T(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4})$.
Фунција $g(x) = -f(x) = -x^2 - x + 2$ има исте нуле, а теме параболе јој је $T'(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4})$.
Стога је $|x^2 + x - 2| = \begin{cases} x^2 + x - 2, & x \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty) \\ -x^2 - x + 2, & x \in (-2, 1). \end{cases}$
Одредимо за које вредности параметра m права $y = x + m$ пролази кроз неку од тачака $N_1(-2, 0)$ и $N_2(1, 0)$ или је тангента на параболу $y = -x^2 - x + 2$.
Када убацимо координате тачке $N_1(-2, 0)$ у једначину праве $y = x + m$ добијамо $m = 2$. Када убацимо координате тачке $N_2(1, 0)$ у једначину праве $y = x + m$ добијамо $m = -1$.
Одредимо m тако да права $y = x + m$ и парабола $y = -x^2 - x + 2$ имају једну заједничку тачку (тад је та права тангента параболе): $x + m = -x^2 - x + 2$, тј. добијамо квадратну једначину $x^2 + 2x + m - 2 = 0$ која има дискирминанту $D = 4 - 4(m - 2) = 12 - 4m$. Да би имали јединствено решење мора бити $D = 0$, па добијамо $m = 3$.
Ове 3 праве, $y = x + 2$, $y = x - 1$ и $y = x + 3$, су гранични случајеви за то колико пресечних тачака имају права $y = x + m$ и график функције $y = |x^2 + x - 2|$. То је све представљено на наредној слици.



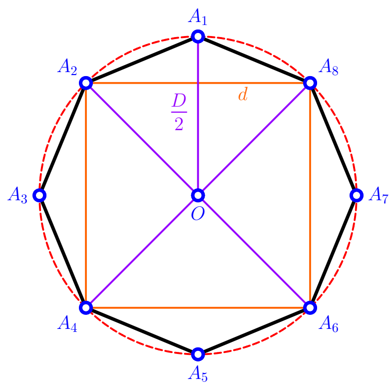
За $m < -1$ нема решења; за $m = -1$ има једно решење, за $-1 < m < 2$ и $m > 3$ има два решења; за $m = 2$ и $m = 3$ има три решења; за $2 < m < 3$ има четири решења.

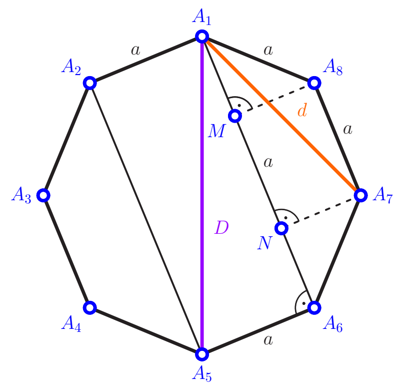
Напомена. Може се гледати и колико пресечних тачака има график функције

$|x^2+x-2|-x = \begin{cases} x^2-2, & x \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty), \\ -x^2-2x+2, & x \in (-2, 1), \end{cases}$ са правом $y = m$, где је $m \in \mathbb{R}$.

2. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Из квадрата $A_2A_4A_6A_8$, странице d и дијагонале D, добијамо везу $D = d\sqrt{2}$.

Површина делтоида $OA_2A_1A_8$ је $\dfrac{d \cdot \frac{D}{2}}{2} = \dfrac{d \cdot D}{4}$, док је површина целог осмоугла $4 \cdot \dfrac{d \cdot D}{4} = d \cdot D$, чиме смо показали да је површина правилног осмоугла једнака производу дужина његове најмање и највеће дијагонале.





(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Површина P осмоугла је збир површина 2 подударна трапеза $A_1A_8A_7A_6$ и $A_2A_3A_4A_5$ и правоугаоника $A_1A_2A_5A_6$. Нека је a страница правилног осмоугла. Тада је дијагонала A_1A_6 једнака $A_1A_6 = A_1M + MN + NA_6$. Висина трапеза $h = A_8M = \dfrac{a}{\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, а основице трапеза су $A_1A_6 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} + a + \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = a + a\sqrt{2} = a(1+\sqrt{2})$ и $A_8A_7 = a$, па је површина трапеза $P_{A_1A_8A_7A_6} = \dfrac{A_1A_6 + A_8A_7}{2} \cdot A_8M = \left(a + \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Површина правоугаоника $A_1A_2A_5A_6$ је $P_{A_1A_2A_5A_6} = A_1A_2 \cdot A_1A_6 = a \cdot \left(a + a\sqrt{2}\right)$, па је површина целог осмоугла $P = 2P_{A_1A_8A_7A_6} + P_{A_1A_2A_5A_6} = 2a^2(1+\sqrt{2})$.

Из правогулог троугла $A_1A_6A_5$ налазимо дијагоналу $A_1A_5{}^2 = A_1A_6{}^2 + A_5A_6{}^2 = a^2 + a^2(1+\sqrt{2})^2 = a^2(4+2\sqrt{2})$, тј. највећа дијагонала је $D = A_1A_5 = a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. Из правогулог $\triangle A_1NA_7$ налазимо дијагоналу

$$A_1A_7{}^2 = A_1N^2 + NA_7{}^2 = \left(a + \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2(2+\sqrt{2}),$$

тј. најмања дијагонала је $d = A_1A_7 = a\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Дакле, производ највеће и најмање дијагонале полазног осмоугла је

$$D \cdot d = a\sqrt{4+2\sqrt{2}} \cdot a\sqrt{2+\sqrt{2}} = a^2\sqrt{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 = 2a^2(1+\sqrt{2}) = P,$$

што је и требало доказати.

3. Тривијално се проверава да $x = 10$ јесте решење полазне једначине. Очигледно, ако је $x \in \mathbb{Z}$ решење дате једначине, да мора важити $x \geqslant 0$, јер за $x < 0$ лева страна једначине је цео број, док је десна рационалан, који није цео.

Такође, лако проверавамо (једноставним убацивањем вредности) да цели бројеви $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ и 9 нису решења полазне једначине (лева страна је у свим тим случајевима строго већа од десне).

Нека је сада $x = n \geqslant 11$. Како је $n \in \mathbb{Z}$ и $n \geqslant 11$, то је n природан број не мањи од 11. Тривијалном применом принципа математичке индукције доказујемо да за свако $n \geqslant 11$ важи $6(n+1) < 2^n$. Заиста, за $n = 11$ тврђење се своди на $72 < 2^{11} = 2048$, што је тачно. Ако бисмо претпоставили да исто важи за неко $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 11$ (индуктивна хипотеза), тада ће важити $6(n+2) = 6n+12 = 6(n+1)+6 < 2^n+6 < 2^n+2^n = 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$, јер је за $n \geqslant 11$ испуњено $6 < 2048 \leqslant 2^n$. Дакле, за свако $n \geqslant 11$ важи $6(n+1) < 2^n$.

Коришћењем претходно показаног, тј. неједнакости $6(n+1) < 2^n$, $n \geqslant 11$, слично се показује да за свако $n \geqslant 11$ важи и $3n^2+3n+1 < 2^n$. Заиста, за $n = 11$ неједнакост постаје $397 < 2^{11} = 2048$, која је тачна. Ако би неједнакост важила за неко природно $n \geqslant 11$, тј. ако би било $3n^2+3n+1 < 2^n$, тада би, на основу претходно доказане неједнакости, важило и $3(n+1)^2 + 3(n+1)+1 = 3n^2+3n+1+6n+6 = 3n^2+3n+1+6(n+1) < 2^n+2^n = 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$, одакле, на основу принципа математичке индукције, следи да је за свако природно $n \geqslant 11$ испуњено $3n^2+3n+1 < 2^n$.

Коначно, користићи, поново, принцип математичке индукције, докажимо на крају да ће за свако $n \geqslant 11$ важити $n^3+24 < 2^n$. За $n = 11$ је тврђење тривијално тачно, јер је $1355 < 2^{11} = 2048$. Ако би за неко $n \geqslant 11$, $n \in \mathbb{N}$, важило $n^3+24 < 2^n$ (индуктивна хипотеза), тада ће, на основу индуктивне хипотезе и друге показане наједнакости, за следићи природан број, тј. за $n+1$, бити испуњено $(n+1)^3+24 = n^3+3n^2+3n+25 = n^3+24+(3n^2+3n+1) < 2^n+2^n = 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$. Дакле, $n^3+24 < 2^n$, за свако природно $n \geqslant 11$, одакле следи да полазна једначина нема решења у скупу природних бројева који нису мањи од 11.

Из свега показаног, једино решење једначине је $x = 10$.

4. 2 групе од по 4 особе можемо распоредити на $(14\cdot 14+2\cdot\frac{12\cdot 13}{2})\cdot 2!\cdot 2^2\cdot(4!)^2 = 1622016$ начина!

Објашњење: Ако је једна група лево, а друга десно, онда можемо први ред сваке од тих група изабрати на 14 начина – од 1. до 14. и то даје $14\cdot 14$ избора. Ако су обе групе на истој страни то се своди на избор 2 броја од 1 до 14 који нису узастопни: ако је изабран мањи број 1 други може од 3 до 14 (12 могућности), ако је изабран мањи број 2 други може од 4 до 14 (11 могућности), ако је изабран мањи број 3 други може од 4 до 14 (10 могућности), … , ако је изабран мањи број 12 други може само 14 (1 могућност), па оваквих избора на свакој страни има $12+11+10+\ldots+1 = \frac{12\cdot 13}{2}$, а укупно их има $2\cdot\frac{12\cdot 13}{2}$. Која је четворка где, то можемо одредити на $2!$ начина. Када смо одабрали редове и страну где се налази наша четворка, можемо их сместити на седишта (АБ или АЦ), што су још 2 могућности за свако од ове 2 четворке. Када смо одредили позиције на којима су, људе можемо распоредити ту на још $4!$ начина, за сваку од ове 2 четворке. Тиме су нам заузете 4 реда од укупно 50.

5 група од по 3 особе можемо распоредити на $\binom{46}{5}\cdot 5!\cdot(3!)^5 = 933120\cdot\binom{46}{5} = 1279077972480$ начина!

Објашњење: Редове у којима су неки од људи из четворке не можемо бирати, па остаје да од преосталих 46 редова одаберемо 5, то је $\binom{46}{5}$. Која је тројка где, то можемо одредити на $5!$ начина. Када смо одредили позиције на којима су, људе можемо распоредити ту на још $2!$ начина, за сваку од ових 5 тројки. Након овога нам је заузето $4+5=9$ редова од укупно 50.

8 група од по 2 особе можемо распоредити на $\binom{41}{8}\cdot 8!\cdot 2^8\cdot(2!)^8 = 2642411520\cdot\binom{41}{8} = 252477783303782400$ начина!

Објашњење: Редове у којима су неки од људи из четворке или тројке не можемо бирати, па остаје да од преосталих 41 редова одаберемо 8, то је $\binom{41}{8}$. Која је двојка где, то можемо одредити на $8!$ начина. Када смо одабрали редове где се налазе наше двојке, можемо их сместити на седишта (АБ или АЦ), што су још 2 могућности за свако од ових 8 двојки. Када смо одредили позиције на којима су, људе можемо распоредити ту на још $2!$ начина, за сваку од ових 8 двојки.

Овим смо распоредили $2\cdot 4+5\cdot 3+8\cdot 2=39$ људи. Преосталих $150-39=111$ можемо распоредити на остала места на $111!$ начина.

Укупно тражених распореда има:

$$\left(14\cdot 14+2\cdot\frac{12\cdot 13}{2}\right)\cdot 2!\cdot 2^2\cdot(4!)^2 \quad\cdot\quad \binom{46}{5}\cdot 5!\cdot(3!)^5 \quad\cdot\quad \binom{41}{8}\cdot 8!\cdot 2^8\cdot(2!)^8 \quad\cdot\quad 111!$$

5. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине добијамо

$$\frac{x+n-1}{n} = \frac{x+\overbrace{1+1+\ldots+1}^{n-1}}{n} \geqslant \sqrt[n]{x}.$$

Множењем последње неједнакости са n добијамо тражену неједнакост.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Посматрајмо функцију $f(x) = nx^{\frac{1}{n}} - x + 1$, $x > 1$. Тада је $f'(x) = x^{\frac{1}{n}-1} - 1$, за свако $x > 1$. Како је за $x > 1$ очигледно $f'(x) \leqslant 0$, за било које $n \in \mathbb{N}$, то је f опадајућа на $(1, +\infty)$, па важи $f(x) \leqslant f(1) = n$, за свако $x > 1$.

(ТРЕЋЕ РЕШЕЊЕ) Нека је $n = 1$. Тада је неједнакост тривијално испуњена, јер се своди на једнакост, тј. на $x \leqslant x$, што је тачно, за свако $x > 1$.

Нека је, даље, $n \geqslant 2$. Дата неједнакост је еквивалентна са $n(x^{\frac{1}{n}} - 1) \leqslant x - 1$, за свако $n \geqslant 2$ и $x > 1$. Познато је да важи

$$y^n - 1 = (y-1)(y^{n-1} + \ldots + y + 1),$$

за свако $n \in \mathbb{N}$ и $y \in \mathbb{R}$, одакле, за $y = x^{\frac{1}{n}}$, добијамо

$$x - 1 = (x^{\frac{1}{n}} - 1)(x^{\frac{n-1}{n}} + \ldots + x^{\frac{1}{n}} + 1).$$

Како је $x > 1$, то је $x^{\frac{i}{n}} > 1$, за свако $i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$, па је

$$x^{\frac{n-1}{n}} + \ldots + x^{\frac{1}{n}} + 1 > n,$$

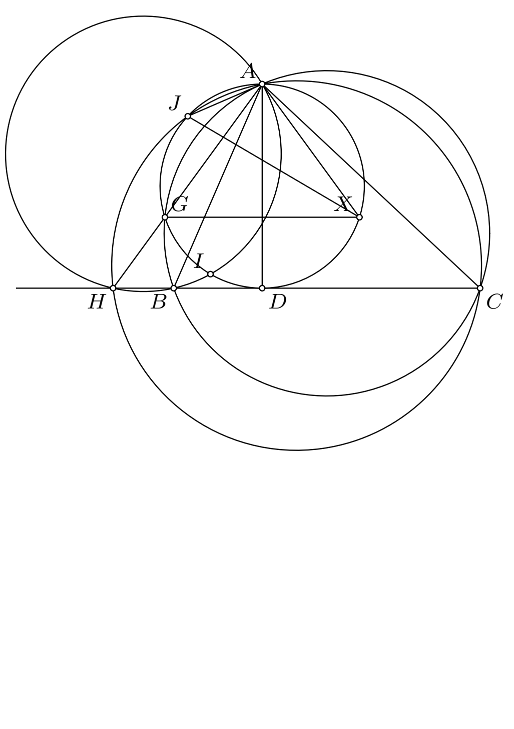
одакле следи да је $x - 1 = (x^{\frac{1}{n}} - 1)(x^{\frac{n-1}{n}} + \ldots + x^{\frac{1}{n}} + 1) > n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$, тј. $nx^{\frac{1}{n}} < x + n - 1$, за свако $n \geqslant 2$ и $x > 1$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ – А категорија

Први разред – А категорија

1. Означимо са a, b и c број појављања, редом, бројева -1, 1 и 2. Тада су a, b и c цели бројеви за које важи $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $-a+b+2c=111$ и $a+b+4c=999$, тј. $a=444-c \geqslant 0$, као и $b=555-3c \geqslant 0$, $c \geqslant 0$. Стога, треба максимизовати израз $-a+b+8c=111+6c$, уз ограничење $0 \leqslant c \leqslant \dfrac{555}{3}=185$. Међутим, сада је јасно је да се максимална вредност претходног израза добија за $c=185$ и она износи $111+6\cdot 185=1221$. У том случају је $a=259$, $b=0$ и $c=185$, док су сви остали x_i једнаки нула.

2. Нека је X тачка симетрична тачки G у односу на праву AD. Претпоставимо да су тачке G и J са исте стране праве AD. Како је испуњено $\sphericalangle AJX = \sphericalangle AGX$, јер су у питању периферијски углови над тетивом AX кружнице ω, као и $\sphericalangle AHC = \sphericalangle AJC$, јер су у питању периферијски углови над тетивом AC кружнице описане око троугла AHC, то је, због паралелности правих GX и HC, испуњено $\sphericalangle AHC = \sphericalangle AGX$, па је $\sphericalangle AJX = \sphericalangle AJC$, одакле следи да су тачке C, X и J колинеарне.



Такође, $\sphericalangle BIA = 180^\circ - \sphericalangle BHA$, јер тачке A, H, B и I припадају кружници описаној око троугла AHB, па је $\sphericalangle BIA = 180^\circ - \sphericalangle XGA = 180^\circ - \sphericalangle XIA$, па су тачке B, I и X такође колинеарне. Међутим, тачка $X \in \omega$, па се BI и CJ секу на ω управо у тачки X.

3. Одговор је $n \in \{1, 2, 6\}$. Прво, приметимо да је неједнакост $f(n) > f(n-1)$, $n \geqslant 2$, еквивалентна са тиме да је n степен простог броја. Заиста, ако је $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, за неко $k > 1$ и $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, тада се сваки од бројева облика $p_i^{\alpha_i}$ већ појавио у досадашњем рачунају НЗС-а, одакле закључујемо да се $f(n)$ не може повећати. Са друге стране, ако је $n = p^\alpha$, за неки прост број p и $\alpha \in \mathbb{N}$, тадаа је $f(n) = pf(n-1) > f(n-1)$, јер је $p \geqslant 2$ и степен p^α се није појавио ни у једном броју мањем од n. Дакле, бројеви $n+1$, $n+2$ и $n+3$ су сви степени простих бројева.

Размотримо, прво, случај када је n непаран природан број. Тада су бројеви $n+1$ и $n+3$ степени простих бројева и парни, одакле следи да су оба степени двојке и то два степена двојке, која се разликују за 2. Очигледно је то једино могуће у случају да су у питању бројеви 2 и 4, тј. да је $n = 1$.

Нека је сада $n+2$ паран број. Тада је $n+2 = 2^a$, за неко $a \in \mathbb{N}$. Тада је један од бројева $n+1$ и $n+3$ дељив са 3, па је самим тим и степен тројке. Ако је $n+1 = 3^b$, тада решавамо једначину $3^b + 1 = 2^a$, за неке природне бројеве a и b. Да би десна страна давала остатак 1 по модулу 3, мора бити a парно, па је $3^b = (2^{\frac{a}{2}} - 1)(2^{\frac{a}{2}} + 1)$, што значи да су бројеви $2^{\frac{a}{2}} - 1$ и $2^{\frac{a}{2}} + 1$ оба степени тројке који се разлику за 2, што једино може када су у питању бројеви 1 и 3, те је $a = 2$ и $b = 1$, тј. $n = 2$.

Најзад, нека је $n+3 = 3^b$, за неко $b \in \mathbb{N}$. Тада важи $2^a + 1 = 3^b$, за неке позитивне целе бројеве a и b. Ако је $a = 1$, то би имплицирало да је $n = 0$, што не може. Дакле, важи $a > 1$ и лева страна, стога, даје остатак 1 по модулу 4. Да би и десна страна давала остатак 1 по модулу 4, мора b бити паран број, па је $2^a = (3^{\frac{b}{3}} - 1)(3^{\frac{b}{3}} + 1)$, тј. бројеви $3^{\frac{b}{2}} - 1$ и $3^{\frac{b}{2}} + 1$ су оба степени двојке који се разликују за 2. То могу бити само бројеви 2 и 4, па је $b = 2$ и $a = 3$. У том случају налазимо да је $n = 6$. Тривијално се проверава да ово заиста јесу решења задатка.

4. За $n = 1$ можемо поставити највише једног топа на таблу димензија 1×1 и тако постављени топ не ремети услове задатка. Дакле, за $n = 1$ одговор је 1.

За $n = 2$ можемо поставити највише 4 топа, јер сва 4 топа на табли испиуњавају услове задатка (услов да сваки напада највише 3 друга топа је испуњен). Дакле, за $n = 2$ одговор је 4.

За $n = 3$, не можемо поставити топове на свих 9 поља, наравно, али ако изоставимо централно поље, имаћемо укупно $8 = 4 \cdot 3 - 4$ топова који задовољавају услове задатка. Нека је, сада, $n \geqslant 4$. Поставимо топове на свако поље табле које припада првој или последњој врсти табле, односно, првој или последњој колони. Остала поља, на тренутак, оставимо празна. На тај начин смо сместили $n^2 - (n-2)^2 = 4n - 4$ топа и сваки од њих испуњава услове задатка. Дакле, можемо их поставити барем $4n - 4$.

Посматрајмо неки други распоред топова, којих има барем $4n-3$, и који задовољава услове задатка. Рећи ћемо да је x оса било која хоризонтала дуж поља у односу на таблу, а y оса ће нам бити било која вертикала. Назовимо топове крајњим по x оси, акко са једне стране x осе нема ниједног топа. Иначе ћемо их звати средишњим по x оси. Аналогно дефинишемо топове који су крајњи или средишњи по y оси. Топ не може бити средишњи по обе осе, јер тада напада 4 друга топа. Нека је, даље, a укупан број средишњих топова по x, b укупан број средишњих топова по y оси, а d укупан број крајњих топова по обе осе. Број крањих топова по y оси је, свакако, $a+d \leqslant 2n$, док је укупан број топова који су крајњи по x оси $b+d \leqslant 2n$. Стога је број топова $a+b+d=(a+d)+(b+d)-d \leqslant 4n-d$, а како их имамо барем $4n-4$, то је $(a+d)+(b+d)-d \geqslant 4n-4$. Зато, у случају највећег могућег броја топова, који није испод $4n-4$, ће важити $4n-4 \leqslant 4n-d$, тј. $d \leqslant 4$. Тривијално се показује да мора бити $d \geqslant 4$, јер топови који су крајњи у различитим врстама морају бити различити, као и они који су крајњи у различитим колонама. Дакле, највећи могући број топова које можемо поставити је $4n-4$, за све $n \geqslant 2$, док је у питању број 1, за $n=1$.

Други разред – А категорија

1. Као и обично, означимо услов који задовољава функција f са $P(a,b)$, $a,b \in \mathbb{Z}$. Из $P(1,-f(1))$ закључујемо да је $f(t)=1$, за $t=1+f(-f(1))$. Сада је, из $P(x,t)$ испуњено $f(x+1)=f(x)+c$, где је $c=t+1$ константа. Једноставном индукцијом, на обе стране (јер је $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$), закључујемо да је f линеарна функција (вредности функције у суседним целим бројевима се разликују за константу). То значи да је, за неке фиксне целе бројеве m и n, $f(x)=mx+n$, за свако $x \in \mathbb{Z}$. Стога, наш услов постаје $m(a+mb+n)+n = b+ma+n+1 \Leftrightarrow (m^2-1)b+(mn-1)=0$, за све целе бројеве b, одакле је $m^2=1$ и $mn=1$, тј. $m=n=1$ или $m=n=-1$, што одговара функцијама $f(x)=x+1$, $x \in \mathbb{Z}$, односно $f(x)=-x-1$, $x \in \mathbb{Z}$. Једноставном провером закључујемо да обе функције испуњавају услов задатка.

2. Нека су тачке A_1, B_1, C_1 и G, редом, средишта одговарајућих страница и тежиште троугла ABC. По обрнутој Талесовој теореми, због $\frac{AX}{XD}=\frac{AG}{GA_1}=2$, имамо $GX \parallel BC$, односно, $\sphericalangle GXH=90^\circ$. Дакле, тачка X лежи на кружници над пречником GH, што аналогно важи и за тачке Y и Z, одакле следи тврђење задатка.

3. Једноставном провером се види да бројеви 1 и 2 не испуњавају услов задатка. За $x \geqslant 3$ провером по модулу 8 закључујемо да мора x бити паран број, одакле, стављајући $x=2t$, $t \in \mathbb{N}$, имамо да је $4^t+200t+1$ потпун квадрат непарног броја већег од 2^t. Он не може бити квадрат броја 2^t+1, јер би било $2^{t+1}=200t$, односно $5 \mid 2^{t+1}$, што је немогуће. Дакле, мора бити $4^t+200t+1 \geqslant (2^t+3)^2=4^t+6\cdot 2^t+9$, па је $50t \geqslant 3\cdot 2^{t-1}+2$. Једноставном индукцијом се показује да последње не важи за $t \geqslant 9$, па је $t \leqslant 8$. Такође, анализирањем израза $4^t + 200t + 1$ по модулу 5 закључујемо да је t непарно. Коначно, једноставном провером, за $t \in \{1, 3, 5, 7\}$, закључујемо да је једино решење $t = 5$ (број 7 отпада, јер израз $4^7 + 200 \cdot 7 + 1$ даје остатак 5 при дељењу са 7, док квадрати целих бројева при дељењу са 7 могу дати само остатке из скупа $\{0, 1, 2, 4\}$). Такође, за $t = 1$, односно $t = 3$, тривијално проверавамо да израз $4^t + 200t + 1$ није квадрат природног броја. Међутим, за $t = 5$, тј. $x = 10$, важи $2^{10} + 100 \cdot 10 + 1 = 2025 = 45^2$, те је $x = 10$ једини природан број који задовољава услов задатка.

4. Одговор: Сваки природан број n, осим бројева $n = 5$ или $n = 6$, има тражену особину. У том циљу, пређимо на језик графова.
Прво, ако је $n = 4$, пошто међу тим чворовима има највише 4 гране, постоје неке две особе које се не познају. Ако је $n = 5$, узмимо циклус C_5 дужине 5. Кад изаберемо било која 4 чвора, видимо да ћемо увек имати тачно 3 гране, тако да нам граф испуњава све услове. Такође, јасно се види да у том случају не постоје 3 чвора која чине независан скуп, тј. која чине скуп чворова у графу за која важи да никоја два чвора нису суседна. За $n = 6$ нека су нам чворови $\{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$. Такође, нека су нам спојени чворови a_i и a_j, за свако $i \neq j$, као и b_i и b_j, за свако $i \neq j$, али и a_i и b_i, за свако i. Нека је $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Ако узмемо 3 чвора из A и један из B, или 3 из B и један из A, имаћемо тачно 4 гране. Ако узмемо по два чвора из A и B види се да ћемо увек имати 3 или 4 гране, па нам овај граф испуњава све услове. Међутим, како год узели 3 чвора биће бар два или из A или из B, па тај скуп чворова неће бити независан.
Нека је, сада, $n \geqslant 7$. Како је $n \geqslant 6 = R(3, 3)$, у овом графу постоји или празан троугао или пун троугао. Докажимо да не постоји пун троугао и у ту сврху претпоставимо супротно. Нека су $T = \{t_1, t_2, t_3\}$ у троуглу, односно нека су сви повезани. За сваки чвор a ван T, посматрањем скупа $T \cup \{a\}$, добијамо да је свако a повезано са највише једним чвором из троугла T. Нека је B_1, $T \cap B_1 = \emptyset$, скуп свих чворова који су повезани само са t_1 или ни са једним, B_2, $T \cap B_2 = \emptyset$, скуп свих који су повезани са t_2 или ни са једним и B_3, $T \cap B_3 = \emptyset$, скуп свих који су повезани са t_3 или ни са једним. Како је $|B_1| + |B_2| + |B_3| \geqslant n - 3 \geqslant 7 - 3 = 4$, следи да је барем један кардиналности барем 2. Нека је то B_1, без умањења општости. Ако су $a, b \in B_1$ и ако посматрамо скуп $\{t_2, t_3, a, b\}$, тада ћемо имати једно или два суседства, што је немогуће. Дакле, постоји $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ независан скуп величине 3. Нека је B највећи независан скуп у овом графу. Нека је C скуп чворова ван B. За свако $c \in C$ важи да постоји $b \in B$ тако да су b и c повезани. Онда за свако $b' \in B$ постоји $b'' \in B$ различито од b и b' (јер је $|B| \geqslant 3$) и гледајући тројку $\{c, b, b', b''\}$ закључујемо да ту мора да има тачно 3 гране, па су c и b' повезани. Ово значи да је сваки чвор из C повезан са сваким чвором из B. Нека су $c_1, c_2 \in C$ и $b_1, b_2 \in B$. Посматрајући скуп $\{c_1, c_2, b_1, b_2\}$ имаћемо 4 или 5 грана у зависности од тога да ли су чворови c_1 и c_2 повезани. Дакле, чворови c_1 и c_2 нису повезани. Стога, скуп чворова C је такође независан скуп. Дакле, $2|B| \geqslant |B| + |C| = n$, те је $|B| \geqslant \frac{n}{2}$, чиме је доказ завршен.

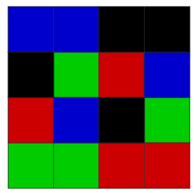
Трећи разред – А категорија

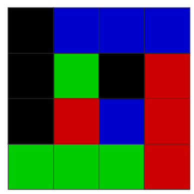
1. Једначина је дефинисана за $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и еквивалентна је са $2^n = 3 + (\frac{4n^2-10n+9}{5})^{\log_3 5}$. Како је $5^2 = 25 < 27 = 3^3$, следи $\log_3 5 < \frac{3}{2}$, а важи и $\frac{4n^2-10n+9}{5} < \frac{(2n-5)^2}{4}$, па је $(\frac{4n^2-10n+9}{5})^{\log_3 5} < \frac{(2n-5)^3}{8}$. Како је $2^9 - 3 = 509 > \frac{(2\cdot 9-5)^3}{8}$ и како из $2^n - 3 > \frac{(2n-5)^3}{8}$ следи $2^{n+1} = 2\cdot 2^n > 2\cdot\big(3+\frac{(2n-5)^3}{8}\big) > 3+\frac{(2n-3)^3}{8}$, за $n \geqslant 7$, на основу индукције наведена једначина нема решења за $n \geqslant 9$, док провером вредности $n \in \{2, \ldots, 8\}$ следи да је решење наведене једначине $n \in \{2, 3, 7\}$.

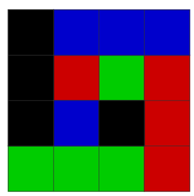
2. Приметимо прво да $x = y = 1$ није решење, па можемо да претпоставимо да је $x \neq 1$ или $y \neq 1$, као и да је онда $x^2 + y^2 - 2 > x + y$, јер $(x^2 - x) + (y^2 - y) \geq 3 + 0 > 2$. Одатле знамо, пошто су оба степени двојке, да важи $2x + 2y | x^2 + y^2 - 2$. Међутим, онда $2x + 2y \mid (x + y)^2 - 2 - 2xy$, односно $2x + 2y \mid 2xy + 2$ (како је $x + y$ паран, $2x + 2y \mid (x + y)^2$). Даље, знамо $2x+2y \mid 2xy-2x-2y+2$, тј. $x+y \mid (x-1)(y-1)$. Пошто је $x+y = 2^k$ степен двојке (већи од 2) и важи да је неки од x, y конгруентан са 1 по модулу 4, док је други конгруентан са 3 по модулу 4. Без умањења општости, претпоставимо да је $x \equiv 1 \pmod 4$. Знамо да је $k = v_2(x+y) \leqslant v_2((x-1)(y-1)) \leqslant 1 + v_2(x-1)$, односно $v_2(x-1) \geqslant k-1$, па $2^{k-1} \mid x-1$. Међутим, како је $x < 2^k$, онда једине могућности за x су 1 и $2^{k-1} + 1$.
Ако је $x = 1$, онда су $y + 1$ и $y^2 - 1 = (y + 1)(y - 1)$ степени двојке, па су и $y + 1$ и $y - 1$, такође, степени двојке који се разликују за 2, одакле је $y = 3$. Преостаје и други случај, тј. $x = 2^{k-1}+1$ и $y = 2^{k-1}-1$. Тада је $x^2+y^2-2 = (2^{k-1} + 1)^2 + (2^{k-1} - 1)^2 - 2 = 2^{2k-1}$, што значи да је $x = 2^t + 1$ и $y = 2^t - 1$ заиста решење. Стога, решење је пар $(2^t + 1, 2^t - 1)$ (и обрнуто) за свако $t \in \mathbb{N}$ (претходно нађено решење $(1, 3)$ се такође уклапа у ову шему).

3. Нека се нормала на праву AL у тачки L и тангента у тачки A на описану кружницу секу у тачки X. Нека је Y средиште дужи AX и нека је Z средиште дужи AH. Потребно је доказати да је $XH \perp AM$, што је еквивалентно са тим да је права YZ нормална на AM. Како је $\sphericalangle ALX$ прав, а Y средиште дужи AX, то је $YX = YA = YL$, те како је YA тангента на описану кружницу, можемо закључити да је YL такође тангента на ту кружницу. Пошто је $\sphericalangle CAL = \sphericalangle BAM$, следи да је четвороугао $ABLC$ хармонијски, па се Y као пресек тангенти у тачкама A и L налази на продужетку дијиагонале BC, односно Y је пресек тангенте из A на описану кружницу ABC и праве BC. Да бисмо довршили доказ, показаћемо да је Z ортоцентар троугла AYM. Јасно је да је $AZ \perp YM$. Такође, ако пресликамо H преко M у A', познато је да је AA' пречник описане кружнице троугла ABC, па је зато $AA' \perp AY$. Због средње линије је и $MZ || AA'$, односно $MZ \perp AY$. Стога је Z заиста ортоцентар троугла AYM и важи $XH || YZ \perp AM$, што смо и желели да докажемо.

4. Доказаћемо да број n мора бити дељив са 4 и да за $4 \mid n$ имамо поплочавање било којом фигуром. За сваку фигуру имамо да n мора бити парно, јер је број поља које заузима свака фигура паран, а самим тим и укупан број поља. За $4 \mid n$ очигледно је довољно конструисати пример за 4×4 таблу и то чинимо као на сликама. Даље, претпоставимо да $4 \mid n-2$.







(а) Обојимо поља тако да су поља у парним колонама црна, а остала бела. Видимо да ће фигура заузимати непаран број црних поља, а укупан број црних поља је паран, па је и укупан број фигура паран. Ипак, како свака фигура заузима 4 поља, укупан број поља је дељив са 8, одакле следи да $4 \mid n$. Контрадикција!
(б) Почевши од горњег левог ћошка нумеришемо врсте од 0 до $n-1$. Урадимо исто и за колоне. У поље које се налази у k-тој колони и l-тој врсти упишемо број i^{k+l}, где је $i^2 = -1$, тј. решење једначине $x^2 + 1 = 0$, које припада горњој полуравни $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$. Лако се проверава да је сума бројева уписаних у поља која покрива фигура једнака нула, али и да је сума бројева на целој табли једнака

$$\left(\sum_{j=0}^{n-1} i^j\right)^2 = \left(\frac{i^n - 1}{i - 1}\right)^2 = 2i \neq 0,$$

што је контрадикција.
(в) Обојимо таблу у црно-бело, као шаховску. Свака фигура покрива непаран број црних поља. Како је број црних поља паран, укупан број фигура мора бити такође паран, тако да имамо контрадикцију као и у делу описаном у тачки (а).

Четврти разред – А категорија

1. Нека је $\operatorname{Re} z = a > 0$, $\operatorname{Im} z = b$, $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Видимо да из услова дефинисаности имамо $b > 0$. Једначину можемо записати као:

$$b^a = e^{\frac{1}{2}((a^2+b^2)-2a)}$$

јер је $z + \overline{z} = 2a$, односно:

$$e^{a\ln b + a} = e^{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}$$

што даје:

$$a(\ln b + 1) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

Даље, имамо да је $\ln b + 1 \leqslant b$, за $b > 0$, где једнакост важи ако и само ако $b = 1$ (што, на пример, добијамо из класичне неједнакости: $e^x \geqslant 1 + x$, за $x \in \mathbb{R}$). Даље је, за $0 < b \leqslant e^{-1}$, испуњено $a(\ln b + 1)| \leqslant 0$, док је $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) > 0$, па једначина нема решења. За $b > e^{-1}$ важи $a(\ln b + 1) \leqslant ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, где је друга неједнакост, заправо, неједнакост између геометријске и аритметичке средине (a и b су позитивни, па је $|ab| = ab$). Према томе, једнакост у првој од две неједнакости важи ако и само ако $b = 1$, а у другој ако и само ако је $a = b$, тј. једнакост важи ако и само ако $a = b = 1$. Према томе, једина могућност за решење је $a = b = 1$, тј. $z = 1 + i$, што се провером и потврђује.

2. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Претпоставимо да је $AB = BC$. Тада је троугао ABC једнакокраки, одакле следи да тачке T и S припадају BF, па је тврђење тривијално испуњено. Нека је, даље, $AB > BC$. Означимо са M, N и P, редом, средишта страница AB, BC и CA. Нека је $\measuredangle DTM = \measuredangle CTE = x$. Из синусних теорема за $\triangle DTM$ и $\triangle ECT$ имамо (приметимо $\measuredangle TDM = \frac{\pi-\beta}{2}$ и $\measuredangle TEC = \frac{\pi+\beta}{2}$):

$$\frac{\sin x}{\sin\frac{\pi-\beta}{2}} = \frac{DM}{MT} \text{ и } \frac{\sin x}{\sin\frac{\pi+\beta}{2}} = \frac{EC}{CT},$$

па како је $\sin\frac{\pi-\beta}{2} = \sin\frac{\pi+\beta}{2} = \cos\frac{\beta}{2}$ и $CT = 2TM$, добијамо $CE = 2DM = 2BD - 2BM = 2BD - c$. Приметимо сада да је $AD = AF = x$, $BD = BE = y$, $CE = CF = z$ и

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & c \\ y & + & z & = & a \\ z & + & x & = & b \end{array}$$

Добијени систем се тривијално решава, одакле налазимо да је $x = s - a, y = s - b, z = s - c$. Сада, како је $CE = z$ и $BD = y$, из добијене једнакости $CE = 2BD - c$, имамо да је $s - c = 2s - b - c$, тј. $s = 2b$, па је $a + c = 3b$. Нека је $\mathcal{P}$ површина троугла $\triangle ABC$. Тада важи $\mathcal{P} = rs = 2br$. Даље, површина троугла TCA је $\mathcal{P}_{TCA} = \frac{1}{3}\mathcal{P} = \frac{2}{3}br$. Нека је сада h висина троугла TCA која одговара страници CA. Тада је $\mathcal{P}_{TCA} = \frac{1}{2}bh = \frac{2}{3}br$, одакле је

$h = \frac{4}{3}r$. Даље важи и $\mathcal{P} = \frac{ac\sin\beta}{2} = 2br$, одакле је $r = \frac{ac\sin\beta}{4b}$, па је $h = \frac{ac\sin\beta}{3b}$. Из косинусне теореме за $\triangle ABP$ се добија $t_b = \frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{2}$, па је $TP = \frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{6}$. Коначно, нека је сада X тачка праве AC таква да важи $TX \perp AC$ и $TX = h$. Због $AB > BC$, важи распоред $A - P - X - C$. Троугао PTX је правоугли са хипотенузом PT, па је $PX^2 = PT^2 - TX^2$. Сада сређујемо:

$$\begin{aligned} PT^2 - TX^2 &= \frac{2a^2+2c^2-b^2}{36} - \frac{a^2c^2\sin^2\beta}{9b^2} \\ &= \frac{2a^2b^2+2c^2b^2-b^4-4a^2c^2\sin^2\beta}{36b^2} \\ &= \frac{c^4-2a^2c^2+a^4}{36b^2}, \end{aligned}$$

јер је $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$, па је

$$\begin{aligned} PT^2 - TX^2 &= \tfrac{(c^2-a^2)^2}{36b^2} = \tfrac{(c-a)^2\cdot(c+a)^2}{36b^2} \\ &= \frac{(c-a)^2\cdot 9b^2}{36b^2} = \frac{(c-a)^2}{4}. \end{aligned}$$

Одавде је сада $PX = \frac{c-a}{2}$. Међутим, приметимо да је $PF = AF - AP = s - a - \frac{b}{2} = \frac{3b}{2} - a = \frac{c-a}{2}$ и важи распоред $A - P - F - C$, па је из свега наведеног $X \equiv F$, тј. $TF \perp CA$, али и права која је норална на CA у F пролази кроз S. Дакле, тачке T, S и F су колинеарне.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Доказаћемо да тачка $P = DS \cap EF$ припада тежишној дужи CM, $M \in AB$ (у општој ситуацији, без задате претпоставке о тежижту). Тада би очигледно следио тврђење, јер је, по услову, $T = CM \cap EF = P$, односно тачке T и P би биле једнаке.
Заиста, нека права кроз тачку P, паралелна са AB, сече странице AC и BC у тачкама X и Y, редом. Очигледно је $\sphericalangle SPY = \sphericalangle SEY = \sphericalangle SPX = \sphericalangle SFX = 90^\circ$, па су четвороуглови $SEYP$ и $SPFX$ тетивни (кругови над пречницима SY и SX). Сада је $\sphericalangle SYP = \sphericalangle SEP = \sphericalangle SFP = \sphericalangle SXP$, при чему средња једнакост важи због $SE = SF$, док спољне важе на основу поменутих тетивности. Одавде је $SY = SX$, односно троугао SXY је једнакокраки и тачка P је средижте дужи XY (због $SP \perp XY$). Како је $XY \parallel AB$, из хомотетије, која слика троугао CXY на троугао CAB, закључујемо да су тачке C, P и M колинеарне, одакле следи тврђење.

3. Претпоставићемо да су играчи рационални, тј. да неће одиграти потез након којег ће, након извесног времена, са сигурношћу изгубити.
Ако је n једнак 1 или је прост, Ана не може одиграти потез, па Бојан побеђује. Ако је на табли у нечијем потезу број k и ако тај играч одабере делилац d, $d|k-d$, $1 < d$, противник губи у следећем потезу акко је $k - d$ прост, а како d дели $k - d$, то је $k - d = d$, тј. $k = 2d$, па је и d прост.

Стога, ако је на табли непаран број и ако играч X може одигарти потез, противник Y ће имати паран број на табли који је дељив оним делиоцем који је одабрао играч у прошлом потезу. Дакле, он ће бирати исти тај делилац, одакле следи да ће на табли играч X имати опет непаран број. Међутим, како на табли мора бити паран број да би играч Y изгубио, играч X неће победити уколико је на табли записан непаран број. Дакле, ако је на табли непарно n, Бојан побеђује.
За n парно, које није степен броја 2, Ана обабира делилац од n који је непаран, а није 1. Бојан има непаран број на табли, те ће изгубити, на основу реченог изнад. Дакле, у овом случају Ана побеђује.
Ако је $n = 4$, то Ана побеђује, јер, након бирања броја 2, Бојан неће моћи да одигра потез. Нека је, зато, на табли записан степен броја 2, тј. број 2^l, $l \geqslant 3$. Његов делилац ће бити, такође, степен броја 2. Ако играч одабере 2^x, за $1 \leqslant x < l-1$, тада ће након његовог потеза на табли бити број $2^l - 2^x = 2^x(2^{l-x}-1)$, па како је број $2^{l-x}-1$ непаран и већи од 1, противник на табли добија паран број, али који није степен броја 2, те противник добија. Стога, за бројеве $n = 2^{2m+1}$, $m \geqslant 1$, Ана одабира делилац 2^{2m}, па Бојан губи не одабере ли делилац 2^{2m-1}. Међутим, уколико одабере делилац облика 2^{2m-1}, Ана ће у следећм кругу имати на табли број 2^{2m-1}, одакле следи, спуштајући се уназад, да за бројеве n претходног облика Бојан побеђује, јер ће након m потеза Бојан на табли имати записан број $4 = 2^2$, што Ани не омогућује да одигра следећи потез, јер Бојан мора бирати 2 (ако гледамо претходни потез, Ана је имала записан број 2^3, па је изабрала $2^2 = 4$). Аналогно, за $n = 2^{2m}$, $m \geqslant 2$, Ана побеђује. Заиста, за $m = 2$ је тврђење тачно, јер ће Ана у првом потезу бирати 2^3. Бојан у следећем 2^2, јер је на табли остао 2^3. Стога, непосредно пред Анин следећи потез, на табли је број $2^2 = 4$, па ће Ана морати да одабере број 2, те Бојан неће моћи да одигра потез. Претпоставимо, зато, да Ана побеђује када је на табли записан број $n = 2^{2m}$, за неко $m \in \mathbb{N}$ (индуктивна хипотеза). Тада, за бројеве облика 2^{2m+2}, Ана губи не одабере ли 2^{2m+1} за делилац, те након бирања тог делиоца, Бојан ће морати да бира делилац 2^{2m}, те ће Ани пре него што одигра потез, након Бојановог потеза, на табли бити записан број 2^{2m}, што нам омогућује да применимо индуктивну хипотезу, тј. да закључимо да ће Ана имати победничку стратегију. Дакле, на основу принципа математичке индукције, Ана побеђује за све $n = 2^{2m}$, $m \geqslant 2$.

4. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Нека је p прост број такав да $24 | p - 17$ и нека је $p = a^2 + b^2$ и $a = 2m$. Тада је b непарно, одакле следи да је $b^2 \equiv 1 \pmod 8$, па како $8 \mid a^2 + b^2 - 17$, то $8 \mid a^2$, тј. $8 \mid 4m^2$, па $2 \mid m$. Дакле, m је парно. Следи да постоји правоугли троугао са странама

$$\left(2ab, |a^2 - b^2|, p\right).$$

Такође, постоји правоугли троугао са странама

$$\left(4mb, |m^2 - (2b)^2|, m^2 + (2b)^2\right).$$

„Залепимо" ова два троугла по подударним страницама дужина $2ab = 4mb$, тако да добијемо трапез. Површина и дужине свих страница истог су цели бројеви, као и једна дијагонала и постоји барем један прост број међу странама, али, такође, и највише један, јер важи:

- $2 \mid m^2 - (2b)^2$
- $2 \mid m^2 + (2b)^2$
- $3 \mid a^2 - b^2$.

Међутим, како на основу Дирихлеове теореме о простим бројевима постоји бесконачно много таквих простих бројева p, доказ је завршен.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) По Дирихлеовој теореми, како су 13 и 3 узајамно прости, постоји бесконачно много простих бројева p таквих да је $p \equiv_{13} 3$. Нека је $p > 3$ прост број таквог облика и нека је $p^2 = 4a+1$ и $b = 2a^2+2a$. Тада је $a \equiv_{13} 2$ и $b+1 \equiv_{13} 0$ (те због $p > 3$ имамо $b+1 > 13$), те је $b+1$ сложен број. Троуглови са страницама p, $2a$ и $2a+1$, односно $2a+1, b$ и $b+1$ су правоугли. Четвороугао $ABCD$, код кога је $AB = p, BC = 2a, CD = b, DA = b+1$ и $AC = 2a+1$ очигледно задовољава све услове задатка, чиме је доказ комплетиран.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ – Б категорија

Први разред – Б категорија

1. Означимо бројеве са $x_n = n\sqrt{2023-n}$, за $n \in \{1, 2, ..., 2022\}$ и упоредимо суседне бројеве са табле. Одредимо за које бројеве $n \in \{1, 2, ..., 2021\}$ важи $x_{n+1} > x_n$. Имамо:

$$x_{n+1} > x_n \Leftrightarrow (n+1)\sqrt{2023-(n+1)} > n\sqrt{2023-n} \Leftrightarrow$$

$$(n+1)^2(2022-n) > n^2(2023-n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -n^3 + 2020n^2 + 4043n + 2022 > -n^3 + 2023n^2 \Leftrightarrow 2022 - n > 3n(n-1348). \quad (1)$$

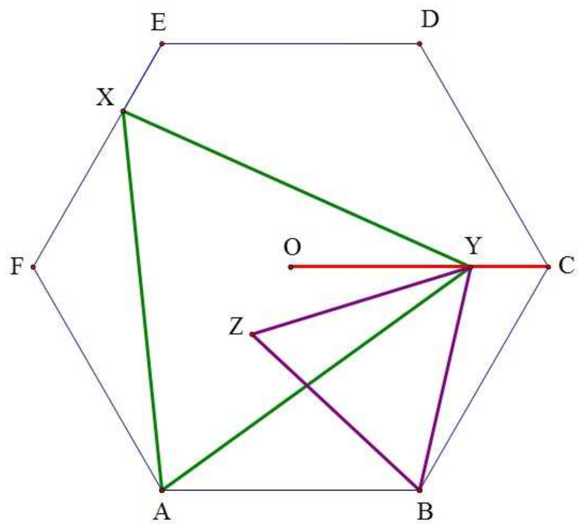
Уколико је $n \leqslant 1348$ неједнакост (1) је задовољена, пошто је десна страна непозитивна, а лева је позитивна. За $n \geqslant 1349$ важи $3n(n-1348) \geqslant 3 \cdot 1349 \cdot 1 > 2022 > 2022 - n$, те неједнакост (1) није задовољена. Овим смо утврдили да $x_1 < x_2 < ... < x_{1348} < x_{1349}$ и $x_{1349} > x_{1350} > ... > x_{2021} > x_{2022}$, те је највећи број $x_{1349} = 1349\sqrt{674}$.

2. Коришћењем критеријума дељивости са 11 имамо:

$$\overline{20\underbrace{aa...aa}_{2020}21} \equiv_{11} (1 + \underbrace{a + ... + a}_{1010} + 0) - (2 + \underbrace{a + ... + a}_{1010} + 2) \equiv_{11} 8.$$

Са друге стране, ако је x природан број, онда је $x \equiv_{11} 0$ или $x \equiv_{11} \pm 1$ или $x \equiv_{11} \pm 2$ или $x \equiv_{11} \pm 3$ или $x \equiv_{11} \pm 4$ или $x \equiv_{11} \pm 5$, па је $x^2 \equiv_{11} 0$ или $x^2 \equiv_{11} 1$ или $x^2 \equiv_{11} 4$ или $x^2 \equiv_{11} 9$ или $x^2 \equiv_{11} 5$ или $x^2 \equiv_{11} 3$. Дакле, бројеви $\overline{20\underbrace{aa...aa}_{2020}21}$ и x^2 при дељењу са 11 дају различите остатке, те не могу бити међусобно једнаки. Дакле, цифра са траженом особином не постоји.

3. Уочимо на дужи OC тачку Y' такву да је $OY' = FX$. Како је $AF = AO$, $FX = OY'$ и $\sphericalangle AFX = 120^\circ = \sphericalangle AOY'$, то су троуглови AFX и AOY' подударни. Отуда је $AX = AY$ и $\sphericalangle FAX = \sphericalangle OAY'$, те је $\sphericalangle XAY' = \sphericalangle XAO + \sphericalangle OAY' = \sphericalangle XAO + \sphericalangle FAX = \sphericalangle FAO = 60^\circ$. Зато је троугао XAY' једнакокрак са углом при вргу од 60°, те је једнакостраничан. Отуда се тачке Y' и Y поклапају.



Уочимо тачку Z' на дужи OA такву да је $OZ' = YC$. Како је $Z'O = YC$, $OB = BC$ и $\sphericalangle Z'OB = 60^\circ = \sphericalangle YCB$, троуглови $Z'OB$ и YCB су подударни. Из ове подударности имамо да је $BZ' = BY$ и $\sphericalangle OBZ' = \sphericalangle CBY$, те је $\sphericalangle YBZ' = \sphericalangle YBO + \sphericalangle OBZ' = \sphericalangle YBO + \sphericalangle CBY = 60^\circ$. Одавде је троугао YBZ' једнакокраки троугао са углом при врху $\sphericalangle YBZ' = 60^\circ$, те је једнакостраничан. Отуда се тачке Z' и Z поклапају, па је тачка Z заиста на дужи OA.

4. Ако поређамо цифре у опадајући редослед 9876543210 избором 3 од ових 10 цифара добијамо неку шифру. Стога, шифри има $\binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120$. Дакле, у 120 покушаја Милица сигурно отвара кофер.

5. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Из $|x| \cdot |1-x| = |x-x^2| = 2|x^2-x^3| = 2|x|^2 \cdot |1-x|$ следи да је или $x = 0$ или $x = 1$ или $|x| = \frac{1}{2}$, тј. $x \in \{0, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$. Међутим, за $x \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ није задовољено $|x - x^2| = 3|x^3 - x^6|$, па ово нису решења система, док се провером успоставља да решење јесте $x \in \{0, 1\}$.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Ако је $m = |x - x^2|$, тада је $|x^2 - x^3| = \frac{m}{2}$, $|x^3 - x^6| = \frac{m}{3}$ и $|x^6 - x| = \frac{m}{6}$, па је

$$m = |x - x^2| \leqslant |x^2 - x^3| + |x^3 - x^6| + |x^6 - x| = \frac{m}{2} + \frac{m}{3} + \frac{m}{6} = m,$$

те се у наведеној примени неједнакости троугла достиже једнакост, одакле закључујемо да међу бројевима $x - x^3, x^3 - x^6$ и $x^6 - x$ не постоје два који су различитог знака. Међутим, ако је $x < 0$, тада је $x^3 - x^6 < 0$ и $x^6 - x > 0$, док, ако је $x \in (0,1)$, тада је $x - x^3 > 0$ и $x^6 - x < 0$. Са друге стране, ако је $x \in (1, \infty)$, добијамо да је $x - x^3 < 0$ и $x^6 - x > 0$, те у овим случајевима нема решења. Следи да је решење наведеног система $x \in \{0, 1\}$.

Други разред – Б категорија

1. Из Виетових формула имамо да је $x_1 + x_2 = p$ и $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{3}$. Даље је ${x_1}^3 + {x_2}^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = p^3 - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot p = p^3 - p = (p-1)p(p+1) \in \mathbb{N}$. Ако је $p = 3$, онда је $(p-1)p(p+1) = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Ако је $p > 3$ прост број, тада је $p = 6k \pm 1$, па су $p - 1$ и $p + 1$ узастопни парни природни бројеви, па је један од њих дељив са 4, а други паран, те је њихов производ дељив са $4 \cdot 2 = 8$. Међутим, производ три узастопна природна броја $(p-1)p(p+1)$ је дељив и са 3. Тиме је показано да је ${x_1}^3 + {x_2}^3 = (p-1)p(p+1)$ дељиво са $8 \cdot 3 = 24$.

2. Коришћењем критеријума дељивости са 7 имамо:

$$\overline{20\underbrace{aa...aa}_{2022}21} \equiv_7 \overline{a21} - \overline{aaa} + \overline{aaa} - \overline{aaa} + ... - \overline{aaa} + \overline{0aa} - 2 \equiv_7 19 \equiv_7 -2.$$

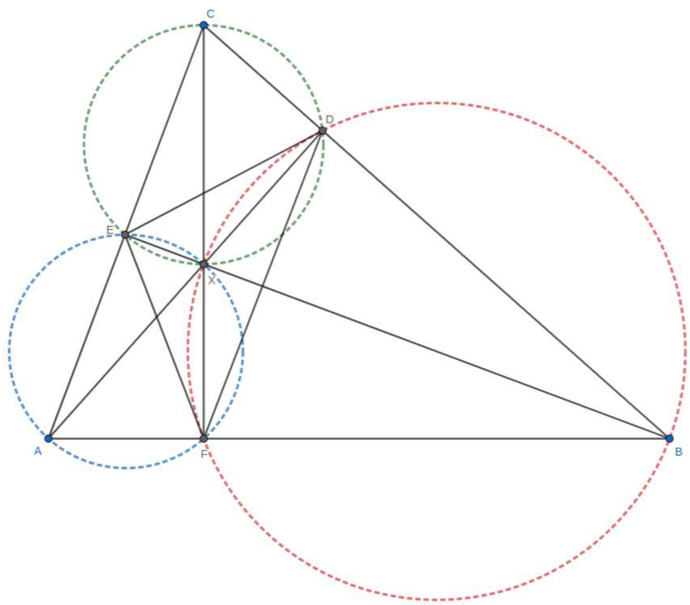
Са друге стране, ако је x природан број, онда је $x \equiv_7 0$ или $x \equiv_7 \pm 1$ или $x \equiv_7 \pm 2$ или $x \equiv_7 \pm 3$, па је $x^3 \equiv_7 0$ или $x^3 \equiv_7 \pm 1$ или $x^3 \equiv_7 \pm 1$ или $x^3 \equiv_7 \mp 1$. Дакле, бројеви $\overline{20\underbrace{aa...aa}_{2022}21}$ и x^3 при дељењу са 7 дају различите остатке, те не могу бити међусобно једнаки. Цифра са траженом особином не постоји.

3. Обележимо дате кружнице редом са k_A, k_B и k_C.

(а) Нека се k_A и k_B секу у $Y \neq F$. Из тетивности четвороуглова $AFYE$ и $BDYF$ важи $\sphericalangle FYE = \pi - \alpha$ и $\sphericalangle DYF = \pi - \beta$. Сада је $\sphericalangle DYE = 2\pi - \sphericalangle DYF - \sphericalangle FYE = \alpha + \beta = \pi - \gamma$. Међутим, из $\sphericalangle DCE + \sphericalangle DYE = \pi$, следи да је $CEYD$ тетиван, одакле следи тврђење.

(б) Нека је $X \equiv Y$. Приметимо следеће сличности:

- $\triangle ABX \sim \triangle ADF$
  $\sphericalangle ABX = \sphericalangle ADF$ (периферијски углови над истим луком)
  $\sphericalangle BAX = \sphericalangle DAF$
- $\triangle AFC \sim \triangle XEC$ (аналогно важе сличности $\triangle BFC \sim \triangle XDC$ и $\triangle AEB \sim \triangle XFB$)
  $\sphericalangle AFC = \sphericalangle XEC$ (следи из $\sphericalangle AFC + \sphericalangle AEX = \pi$, $\sphericalangle CEX + \sphericalangle AEX = \pi$)
  $\sphericalangle ACF = \sphericalangle XCE$



- $\triangle ABC \sim \triangle DBF$
  $\sphericalangle CAB = \sphericalangle FDB$ (из $\triangle AEB \sim \triangle XFB$, следи $\sphericalangle CAB = \sphericalangle EAB = \sphericalangle FXB$, док је $\sphericalangle FXB = \sphericalangle FDB$, јер су у питању углови над истом тетивом)
  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DBF$.

Показаћемо да је $\triangle AXB \sim \triangle EXD$. Како је $\sphericalangle AXB = \sphericalangle EXD$, довољно је показати $\frac{AX}{BX} = \frac{EX}{DX}$. Из $\triangle ABX \sim \triangle ADF$ је испуњено $\frac{AX}{BX} = \frac{AF}{DF}$. Из $\triangle AFC \sim \triangle XEC$ важи $\frac{AF}{EX} = \frac{AC}{CX}$, па је $AF = EX \cdot \frac{AC}{CX}$, те је тада $\frac{AX}{BX} = EX \cdot \frac{AC}{DF \cdot CX}$. Из $\triangle ABC \sim \triangle DBF$ је испуњено $\frac{AC}{DF} = \frac{CB}{FB}$, па је $\frac{AX}{BX} = EX \cdot \frac{CB}{FB \cdot CX}$. Коначно, из $\triangle FBC \sim \triangle DXC$ важи $\frac{FB}{DX} = \frac{CB}{CX}$, па је $\frac{AX}{BX} = \frac{EX}{DX}$, те је $\triangle AXB \sim \triangle EXD$. Сада имамо низ једнакости: $\sphericalangle DCX = \sphericalangle DEX = \sphericalangle XAB = \sphericalangle XAF$, одакле, користећи сличност троуглова $\triangle AXF$ и $\triangle CXD$, следи $\sphericalangle XFA = \sphericalangle XDC$. Међутим, $\sphericalangle XDC = \pi - \sphericalangle XDB = \sphericalangle XFB = \pi - \sphericalangle XFA$, па је $\sphericalangle XFA = \frac{\pi}{2}$, одакле је $CF \perp AB$ и аналогно $AD \perp BC$ и $BE \perp CA$, што је и требало показати.

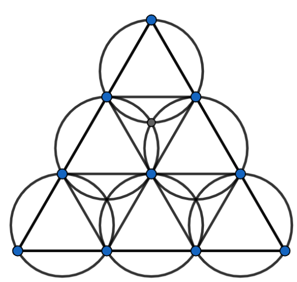
Са друге стране, ако су AD, BE и CF висине, тада је X ортоцентар троугла $\triangle ABC$. Како су троуглови AEX и AFX правоугли са хипотенузом AX, важи да тачке A, F, X и E припадају једној кружници, те то мора бити описана кружница око $\triangle AFE$. Слично, кружнице описане око $\triangle BDF$ и $\triangle CED$ садрже тачку X, па се та три круга секу у X. Дакле $X \equiv Y$.

4. Очигледно $x = 0$ није решење једначине $x^4 + ax^3 + (b-2)x^2 - ax + 1 = 0$. Зато је она еквивалентна са једначином која се добија дељењем полазне са x^2, односно са једначином

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + a(x - \frac{1}{x}) + b - 2 = 0.$$

Увођењем смене $y = x - \frac{1}{x}$, последња једначина постаје $y^2 + 2 + ay + b - 2 = 0$, односно $y^2 + ay + b = 0$. Из услова задатка познато је да ова једначина има два реална и различита решења. Обележимо их са y_1 и y_2. Једначина $x - \frac{1}{x} = y_1$ еквивалентна је са $x^2 - y_1 x - 1 = 0,\ x \neq 0$. Како је дискриминантна последње једначине једнака $y_1^2 + 4 > 0$ и како $x = 0$ није њено решење, она има два реална и различита решења. Аналогно и једначина $x - \frac{1}{x} = y_2$ има два реална и различита решења. Уколико би један те исти број x био решење и једначине $x - \frac{1}{x} = y_1$ и једначине $x - \frac{1}{x} = y_2$, важило би $y_1 = y_2$, што није случај. Из свега наведеног закључујемо да посматрана једначина има четири реална и међусобно различита решења.

5. Поделимо ли дати троугао на n^2 јединичних троуглова, добијамо мрежу у којој је тачно $\frac{n(n+1)}{2}$ троуглова са врховима окренутим на горе. Назовимо такве троуглове усправним. Остале ћемо назвати обореним. Пречник описаног круга сваког од усправних троуглова је $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, што је мање од $\sqrt{2}$, тј. од дијагонале квадрата која представља врх муварице. Према томе, уколико би се две муве налазиле у истом описаном кругу неког од ових усправних троуглова, њих би Милорад могао уклонити једним ударцем, јер може да их удари по дијагонали квадрата врха муварице (која је довољно дугачка). Стога је довољно да докажемо да ови описани кругови прекривају цео дати троугао, јер ће тада по Дирихлеовом принципу постојати барем један у коме се налазе барем две муве.



Јасно је да сваки од кругова прекрива припадајући усправни троугао. Што се оборених троуглова тиче, сваки од њих је окружен са тачно три усправна и, притом, описани кругови та три суседна троугла садрже центар посматраног обореног, одакле је јасно и да унија ова три круга прекрива тај оборени троугао. Цео велики троугао је, дакле, прекривен овим круговима, што смо и хтели да докажемо.

Трећи разред – Б категорија

1. Лако налазимо да је $\cos x = \frac{4}{5}$, те је $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$. Одавде је $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}} = \frac{1}{7}$. Са друге стране имамо да је и $\operatorname{tg} 2y = \frac{2\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg}^2 y} = \frac{2(5\sqrt{2}-7)}{1-(5\sqrt{2}-7)^2} = \frac{1}{7}$. Како је $2y \in (0,\pi)$, а $\operatorname{tg} 2y > 0$, то је и $2y$ оштар угао. Дакле, тангенси оштрих углова $\frac{\pi}{4} - x$ и $2y$ су једнаки, одакле су и сами углови једнаки. Зато је $\frac{\pi - 4x}{4y} = \frac{\frac{\pi}{4} - x}{y} = 2$.

2. Посматрајмо пирамиде $SABC$ и $SA'B'C'$ као да су им основе, редом, троуглови SAB и $SA'B'$, а врхови, редом, C и C'. Нека је H висина пирамиде $SABC$ из C, а h висина пирамиде $SA'B'C'$ из C'. Из сличности правоуглих троуглова којима су хипотенузе SC' и SC, а катете h и H, имамо да је $\frac{h}{H} = \frac{SC'}{SC}$. Нека је $\varphi = \sphericalangle ASB$. Сада је

$$\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{\frac{P_{SA'B'}\cdot h}{3}}{\frac{P_{SAB}\cdot H}{3}} = \frac{h}{H} \cdot \frac{SA' \cdot SB' \cdot \sin\varphi}{SA \cdot SB \cdot \sin\varphi} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC},$$

те на основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине, уз коришћење полазног услова, имамо $1 = \frac{SA'}{SA} + \frac{SB'}{SB} + \frac{SC'}{SC} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}}$. Одавде је $\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} \leqslant \frac{1}{27}$, што је и требало доказати.

3. Пошто је $ax > 0$ и $4^x - 3^x > 0$, следи да је $a > 0$ и $x > 0$. За $a > 0$, $x > 0$ и $ax \neq 1$ једначина је еквивалентна са једначином

$$\log_{ax}(3^x + 4^x) = \frac{1}{2}\left(\log_{ax} 7^2 + \log_{ax}(4^x - 3^x)\right) + \frac{1}{3}\log_{ax} 2^{3(x-1)},$$

односно

$$\log_{ax}(3^x + 4^x) = \log_{ax} 7 + \log_{ax}\sqrt{4^x - 3^x} + \log_{ax} 2^{x-1}.$$

Из ове једначине добијамо једначину

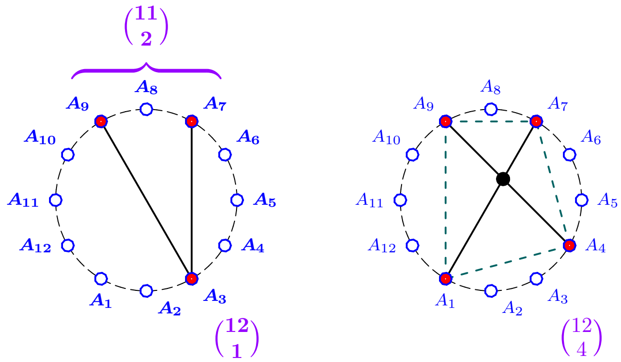
$$3^x + 4^x = 7 \cdot 2^{x-1}\sqrt{4^x - 3^x}.$$

Квадрирањем и дељењем последње једначине са 3^{2x} добија се једначина

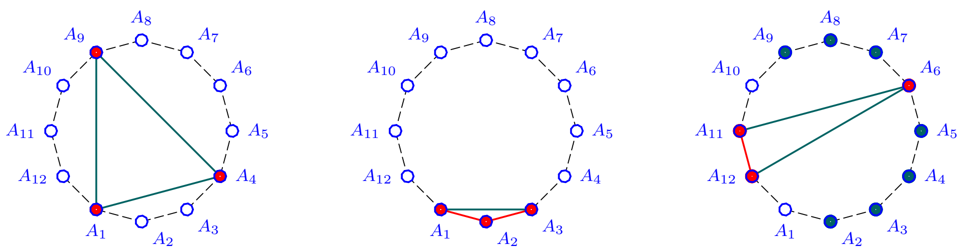
$$45\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 57\left(\frac{4}{3}\right)^x - 4 = 0.$$

Увођењем смене $t = \left(\frac{4}{3}\right)^x > 0$ и решавањем квадратне једначине $45t^2 - 57t - 4 = 0$, добијамо да је $t = \frac{4}{3}$ (решење $t = -\frac{1}{15}$ није позитивно). Дакле, једино решење је $x = 1$ и добија се под условом $ax \neq 1$, што значи да је $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$.

4. (а) За две тетиве са крајевима у датим тачкама које имају тачно једну заједничку тачку имамо два различита случаја: 1° да се секу у некој од датих тачака или 2° да се секу у унутрашњости круга.



1° Тачку у којој се секу можемо одабрати на $\binom{12}{1} = 12$ начина, а друга два краја ових тетива на $\binom{11}{2} = 55$ (од преосталих 11 тачака бирамо две), па укупно има $\binom{12}{1} \cdot \binom{11}{2} = 12 \cdot 55 = 660$ таквих тетива.
2° Када одаберемо 4 тачке од свих $\binom{4}{2} = 6$ правих које оне одређују, само се дијагонале секу у унутрашњости круга, па стога тражених тетива у овом случају има колико и избора 4 тачке од 12, што можемо урадити на $\binom{12}{4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495$ начина.
Укупно парова тетива које се секу у једној тачки има $660 + 495 = 1155$.



(б) Спојимо сваку од 12 тачака са следећом на кружници. На тај начин добијамо 12-тоугао. Услов да се са обе стране сваке праве, на којој лежи нека страница изабраног троугла, налази барем једна од преосталих тачака је еквивалентан са тим да је свака страница изабраног троугла, заправо, дијагонала новоуведеног 12-тоугла. Стога, задатак ћемо решити тако што ћемо од укупног броја свих троуглова одузети број оних који имају две странице које су уједно и странице 12-тоугла, као и број оних који имају тачно једну страницу која је, такође, и страница поменутог 12-тоугла. Укупан број свих троуглова је $\binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$. Троуглова који имају две странице које су и странице 12-тоугла има онолико колико и темена 12-тоугла, јер су те две странице суседне у 12-тоуглу и у потпуности су одређене избором једног од темена 12-тоугла. Дакле, укупан број поменутих троуглова је 12. Коначно, троуглова који имају тачно једну страницу која је уједно и страница 12-тоугла има $\binom{12}{1} \cdot \binom{8}{1} = 12 \cdot 8 = 96$, јер на $\binom{12}{1}$ начина можемо изабрати једну страницу 12-тоугла, док на $\binom{8}{1}$ начина можемо изабрати преостало теме тог троугла. Дакле, укупан број тражених троуглова је $220 - 12 - 96 = 112$.

5. Ако је скуп на табли скуп свих делилаца неког броја x, онда за свако просто $p > x$, ако је Милисав замислио број xp, се не би нити један број дељив са p могао појавити на табли због своје величине, тј. вредности, те би, заиста, Милисав написао само све делиоце од x.
Са друге стране, нека је x најмањи заједнички садржалац свих бројева записаних на табли. С обзиром да записани бројеви на табли нису сви могући делиоци неког одређеног природног броја, тада x мора да дели n. Међутим, број x, свакако, није написан на табли (да је на табли, онда би на табли били баш сви делиоци броја x). Стога, знамо да је $n < x^2$, тако да ако Алекса да скуп $\{1, 2, \cdots, x^2\}$, Милисављев број се сигурно налази унутар њега.

Четврти разред – Б категорија

1. Користећи рекурентну релацију добијамо да је за свако $k \in \mathbb{N}$ испуњено $a_k = a_{k-1} + 4(k-1) + 3 = a_{k-2} + 4(k-2) + 4(k-1) + 2 \cdot 3 = \ldots = a_1 + 4(1 + 2 + \cdots + k - 1) + (k-1) \cdot 3 = 2k(k-1) + 3(k-1) = (2k+3)(k-1)$. Са друге стране, ако бројилац и именилац поделимо са n и приметимо да је

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{a_{kn}}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\left(2k + \frac{3}{n}\right)\left(k - \frac{1}{n}\right)} = k\sqrt{2},$$

добићемо да је тражена гранична вредност једнака

$$\frac{1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{2022}}{1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{2022}} = \frac{4^{2023} - 1}{3(2^{2023} - 1)} = \frac{2^{2023} + 1}{3}.$$

2. Нека је $a = OA,\ b = OB,\ c = OC,\ d = OD,\ e = OE$ и $f = OF$. Посматрајмо раван π која садржи праве p и q (таква раван постоји пошто се праве p и q секу). Пресек равни π и сфере је нека кружница k_1. Тачке A, B, C и D припадају k_1, па из потенције тачке O на k_1 имамо да је $a \cdot b = c \cdot d$. Аналогно претходном закључујемо да је $a \cdot b = e \cdot f$, при чему A, B, E и F припадају кружници k_2. Одавде закључејемо да се елементи скупа $\{1, 5, 15, 17, 51, x\}$, за неко $x > 0$ (не обавезно различито од 1,5,15,17 и 51), могу поделити у три пара тако да су производи бројева у паровима међусобно једнаки. Једноставном анализом закључујемо да је то једино могуће у случају $5 \cdot 51 = 15 \cdot 17 = 1 \cdot x$. Одавде је $x = 255$, те је једна тетива кружнице k_1 или k_2 дужине $1 + 255 = 256$, те је пречник неке од њих бар 256. Како је пречник те кружнице не већи од пречника великог круга, добијамо да је полупречник сфере не мањи од 128. Докажимо да је могуће постићи да полупречник буде баш једнак 128. Нека је AB пречник кружнице k, тако да је $AB = 256$. На дужи

AB уочимо тачку O такву да је $AO = 1$. Конструишимо, у равни кружнице k, кружницу w са центром у тачки O, пулупречника 5. Како је $1 < 5 < 255$, то се кружнице k и w секу. Нека је једна њихова пресечна тачка C. Права CO сече k у D, $D \neq C$. Из потенције тачке O у односу на k добијамо да је $OD = 51$. Аналогно птетходном конструишемо и тачке E и F.

3. Из прве једначине груписањем добијамо да је $a(b+2) - b = 58$, тј. $(a-1)(b+2) = 56$. Аналогном применом сличних трансформација у осталим јендачинама добијамо систем

$$\begin{aligned}(a-1)(b+2) &= 55\\(b+2)(c+4) &= 308\\(c+4)(d-6) &= 77.\end{aligned}$$

Из последње једначине имамо да је вредност $c+4$ једнака $1, 7, 11$ или 77. Први случај, када је $c+4 = 1$, није решење због услова да је c природан број. Друга могућност је да је $c+4 = 7$, одакле је $c = 3$, те, стога, из друге једначине, добијамо да је $b = 2$, тј. $a - 1 = \frac{14}{11}$, што није могуће. Слично, заменом у преостале једначине из преостала два случаја добијамо решења

$$(a, b, c, d) \in \{(3, 26, 7, 13), (15, 2, 73, 7)\}.$$

4. Нумеришимо седишта у сваком реду од 1 до 6 и редове од 1 до n. Тада је минимално време потребно путнику са j-тим седиштем у i-том реду (писаћемо (i, j)) да дође на своје место (од секунде непосредно пре него што закорачи у авион) једнако $i+1+\lfloor|3.5-j|\rfloor$ ($i+1$ за седишта до пролаза, $i+2$ за она у средини и $i+3$ за она до прозора). Претпоставимо да тај путник закорачи у авион у $(t+1)$-ој секунди од почетка укрцавања. Тада се укрцавање свакако не може завршити за мање од $t+(i+1+\lfloor|3.5-j|\rfloor)$ секунди. Притом, последњи путник може закорачити у авион најраније у $6n$-тој секунди (ако су пре њега путници улазили сваке секунде), док је $i \geqslant 1$ и $\lfloor|3.5-j|\rfloor \geqslant 0$, па се укрцавање не може обавити за мање од $(6n-1)+1+1+0 = 6n+1$ секунди.

Докажимо да је могуће обавити га за $6n+1$ секунду. Ако је редослед укрцавања путника следећи: $(n, 1), (n-1, 1), ..., (2, 1), (1, 1)$, $(n, 2), ..., (1, 2)$, $(n, 3), ..., (1, 3)$, $(n, 6), ..., (1, 6)$, $(n, 5), ..., (1, 5)$, $(n, 4), ..., (1, 4)$, видимо да је време укрцавања управо $6n+1$ јер ће прво n путника са првим седиштем у сваком реду доћи до одговарајућег реда и одмах потом закорачити у део за седење у сваком реду, па ће бити слободан пролаз да у том тренутку крене друга група од n људи. На крају ће у шестој групи свако доћи до свог реда у $6n$-тој секунди и у $(6n+1)$-ој ће сви они сести на своје место, приводећи тиме укрцавање крају.

5. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Ако је $n \leqslant 0$, тада је $7^n - 3^n \leqslant 0$, па једначина нема решења. Дакле, n мора бити природан број. Ако је $m < 0$, једначина је еквивалентна са $2^{-mp}(7^n - 3^n) = p^2$, па мора бити $p = 2$ и $7^n - 3^n = 1$, што нема решење у скупу природних бројева. Закључујемо да мора бити $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Јасно је да за $p = 3$ и $p = 7$ једначина нема решења. У наставку ћемо разматрати парност броја n. Ако је n непаран број, тада, из $7^n - 3^n = 4(7^{n-1} + 7^{n-2} \cdot 3 + \cdots + 7 \cdot 3^{n-2} + 3^{n-1})$, закључујемо да тачно 2^2 дели $7^n - 3^n$ ($4 \mid 7^n - 3^n$, али $8 \nmid 7^n - 3^n$, јер је $7^{n-1} + 7^{n-2} \cdot 3 + \cdots + 7 \cdot 3^{n-2} + 3^{n-1}$ непарно), те 2^2 тачно дели и $p^2 \cdot 2^{mp}$. Уколико је $p = 2$, онда је $mp = 0$, односно $m = 0$. Тада је $7^n - 3^n = 4$, па је одатле $n = 1$ (за $n \geqslant 2$ се лако показује да је $7^n > 3^n + 4$). Уколико је $p \neq 2$, тада је $mp = 2$, односно $m = \dfrac{2}{p}$, што није цео број. Ако је n паран број, тада је $n = 2n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$. Покажимо да је и mp паран број. Пошто је $p^2 \equiv 1 \pmod 3$ и $7^n - 3^n \equiv 1 \pmod 3$, то мора бити $2^{mp} \equiv 1 \pmod 3$, одакле следи да mp мора бити парно. Ако је $a = p \cdot 2^{mp/2}$, тада је једначина еквивалентна са $7^{2n_0} - 3^{2n_0} = a^2$, односно $(7^{n_0} - a)(7^{n_0} + a) = 3^{n_0}$. Пошто су $7^{n_0} - a$ и $7^{n_0} + a$ узајамно прости, то мора бити $7^{n_0} - a = 1$ и $7^{n_0} + a = 3^{n_0}$. Сабирањем претходних једначина добијамо $2 \cdot 7^{n_0} = 1 + 3^{n_0}$, те анализом исте по модулу 3 видимо да последња једначина нема решења у скупу природних бројева. Дакле, једино решење дате једначине је $(n, m, p) = (1, 0, 2)$.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Ако је $n \leqslant 0$, тада је $7^n - 3^n \leqslant 0$, па једначина нема решења. Дакле, n мора бити природан број. Ако је $m < 0$, једначина је еквивалентна са $2^{-mp}(7^n - 3^n) = p^2$, па мора бити $p = 2$ и $7^n - 3^n = 1$, што нема решење у скупу природних бројева. Закључујемо да мора бити $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Јасно је да за $p = 3$ и $p = 7$ једначина нема решења.

Ако је $p = 2$, тада је $4 \cdot 2^{2m} = 7^n - 3^n = 4(7^{n-1} + 7^{n-2} \cdot 3 + \cdots + 7 \cdot 3^{n-2} + 3^{n-1})$. Ако је $m = 0$, тада је $n = 1$, па $(n, m, p) = (1, 0, 2)$ испуњава услове дате једначине. Ако је $m > 0$, онда, из $2^{2m} = 7^{n-1} + 7^{n-2} \cdot 3 + \cdots + 7 \cdot 3^{n-2} + 3^{n-1}$, следи да n мора бити паран број (2^{2m} је једнако суми n непарних бројева). Нека је $n = 2n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$. Тада је $2^{2+2m} = (7^{n_0} - 3^{n_0})(7^{n_0} + 3^{n_0})$. Ако је $7^{n_0} - 3^{n_0} = 2^{k_1}$ и $7^{n_0} + 3^{n_0} = 2^{k_2}$ (где је $k_1 + k_2 = 2 + 2m$), онда, сабирањем ових једначина, добијамо $2 \cdot 7^{n_0} = 2^{k_1} + 2^{k_2} = 2^{k_1}(2^{k_2 - k_1} + 1)$, одакле је $k_1 = 1$, те је $7^{n_0} - 3^{n_0} = 2$, што је немогуће.

За $p \neq 2$, због парности, мора бити $m > 0$. Надаље ћемо разматрати парност броја n. За непарно n је $7^{n-1} + 7^{n-2} \cdot 3 + \cdots + 7 \cdot 3^{n-2} + 3^{n-1}$ непарно, па број mp мора бити једнак 2, што је немогуће. Ако је n парно, тада је $n = 2n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ и важи $(7^{n_0} - 3^{n_0})(7^{n_0} + 3^{n_0}) = p^2 \cdot 2^{mp}$. Како је p прост број, разликоваћемо следеће случајеве:

1° $p \mid 7^{n_0} - 3^{n_0}$ и $p \mid 7^{n_0} + 3^{n_0}$: Тада $p \mid 2 \cdot 3^{n_0}$, па је $p \in \{2, 3\}$, што смо већ размотрили.

2° $p^2 \mid 7^{n_0} - 3^{n_0}$: Тада постоји $k \in \mathbb{N}_0$ такав да је $7^{n_0} - 3^{n_0} = p^2 \cdot 2^k$ и $7^{n_0} + 3^{n_0} = 2^{mp-k}$. Сабирањем ове две једначине добијамо $2 \cdot 7^{n_0} = p^2 \cdot 2^k + 2^{mp-k}$, одакле је $k = 1$ или $mp - k = 1$. За $mp - k = 1$ је $7^{n_0} + 3^{n_0} = 2$, што је немогуће, а за $k = 1$ имамо да 4 дели $7^{n_0} - 3^{n_0}$, али не дели $p^2 \cdot 2^k$, што је, такође, немогуће.

3° $p^2 \mid 7^{n_0} + 3^{n_0}$: Тада постоји $k \in \mathbb{N}_0$ такав да је $7^{n_0} + 3^{n_0} = p^2 \cdot 2^k$ и $7^{n_0} - 3^{n_0} = 2^{mp-k}$. Сабирањем ове две једначине добијамо $2 \cdot 7^{n_0} = p^2 \cdot 2^k + 2^{mp-k}$, одакле је $k = 1$ или $mp - k = 1$. За $mp - k = 1$ је $7^{n_0} + 3^{n_0} = 2$, што је немогуће. Ако је $k = 1$, онда је $7^{n_0} - 3^{n_0} = 2^{mp-1}$ и како важи $mp - 1 \geqslant 2$, слично као и у случају за $p = 2$, закључујемо да је то једино могуће за $n_0 = 1$. Међутим, тада би морало да важи и да је $7 + 3 = 2 \cdot p^2$, што није могуће.

17. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

1. април 2023. године

Први дан

1. Нека је O средиште описане кружнице разностраног троугла ABC и H његов ортоцентар, $H \notin \{A, B, C\}$. Означимо са O_a, O_b и O_c, редом, средишта описаних кружница троуглова AOH, BOH и COH. Доказати да се праве AO_a, BO_b и CO_c секу у једној тачки.

2. Дата је коцка ивице 2021. На колико различитих начина је могуће на ободу ове коцке додати једну јединичну коцкицу тако да се новодобијено тело може попунити телима димензије $1 \times 1 \times k$, за неки природан број k, $k \geqslant 2$?

3. Претпоставимо да су дати природни бројеви m и n, као и низ целих бројева a_1, a_2, $\ldots$, за који важи $a_i = a_{i-n}$, за свако i, $i \in \mathbb{N}$, $i > n$. За сваки природан број j, $1 \leqslant j \leqslant n$, дефинишемо l_j као најмањи природан број такав да је број $a_j + a_{j+1} + \cdots + a_{j+l_j-1}$ дељив са m. Доказати да је

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_n \leqslant mn.$$

Предвиђено време за израду задатака је 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 бодова.
Решења задатака детаљно образложити.

17. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

2. април 2023. године

Други дан

4. Нека је q прост број, а n природан број. Доказати да $n^q + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ није потпун степен броја q.

5. Тата Зоран је усхићено рекао своме сину Перици да је пронашао занимљиву функцију $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ која испуњава следеће особине:

- $f(m) = m$, за све целобројне m;
- $f(\frac{a+b}{c+d}) = \frac{f(\frac{a}{c})+f(\frac{b}{d})}{2}$, за свака четири цела броја a, b, c, d таква да је $|ad - bc| = 1$, $c > 0$ и $d > 0$;
- f је монотоно растућа.

(а) Доказати да је Зоран пронашао јединствену функцију са наведеним особинама.

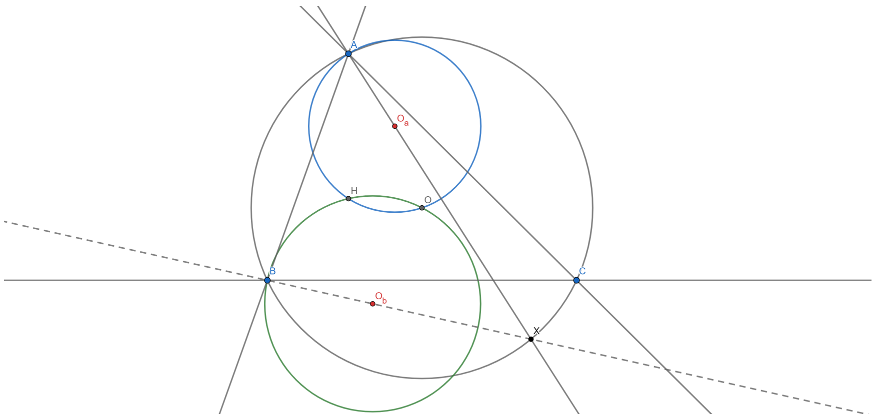
(б) Ако је Перица израчунао вредност $f(\frac{\sqrt{5}-1}{2})$, који број је добио?

6. Дат је троугао ABC, $AB \neq AC$, са описаном кружницом ω. Означимо са I средиште уписане кружнице тог троугла. Нормала конструисана из тачке I на праву AI сече странице AB и AC у тачкама E и F, редом. Описана кружница троугла AEF сече ω и праву AI у тачкама G и H, редом. Тачка D је подножје нормале из тачке I на праву BC. Тангента на ω у тачки G сече праву BC у тачки J, а права AJ сече описану кружницу трогла ABC по други пут у тачки K. Доказати да се кружнице описане око троуглова DJK и GIH додирују.

Предвиђено време за израду задатака је 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 бодова.
Решења задатака детаљно образложити.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - СМО

Први дан



1. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Нека је $X = AO_a \cap BO_b$. Докажимо да и права CO_c садржи тачку X. Стога, довољно је доказати да тачка X припада кружници описаној око троугла ABC. Имамо да важи:

$$\sphericalangle BXA = \sphericalangle 180 - \sphericalangle O_bBA - \sphericalangle O_aAB =$$

$$180 - \sphericalangle HBA - \sphericalangle O_bBH - \sphericalangle HAB - \sphericalangle HAO_a =$$

$$= \sphericalangle BHA - 180 + \sphericalangle \frac{BO_bH}{2} + \sphericalangle \frac{AO_aH}{2} =$$

$$= \sphericalangle BHA - 180 + \sphericalangle BOH + \sphericalangle AOH = \sphericalangle BHA - 180 + \sphericalangle AOB = \sphericalangle ACB,$$

те је тиме је тврђење доказано.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Нека су ℓ_a, ℓ_b и ℓ_c нормале из A, B и C, редом, на OH. Приметимо да су праве ℓ_a, ℓ_b и ℓ_c паралелне, односно да су конкурентне у тачки у бесконачности. Такође, знамо да су ℓ_a и AO_a симетричне у односу на симетралу угла $\measuredangle OAH$, што је уједно и симетрала угла $\measuredangle BAC$, односно ℓ_a и AO_a су изогоналне у односу на $\measuredangle BAC$. Исто се може закључити за ℓ_b и BO_b, као и за ℓ_c и CO_c. Међутим, како су праве ℓ_a, ℓ_b и ℓ_c конкуре-нтне (у бесконачној тачки), онда су конкуренте и AO_a, BO_b и CO_c у тачки изогонално спрегнутој бесконачној тачки пресека (изогоналне тачке тачака у бесконачности свкако леже на описаној кружници).

(ТРЕЋЕ РЕШЕЊЕ) Доказ ћемо спровести комплексним бројевима. Комплексну координату произвољне тачке $W \in \mathbb{C}$ ћемо означити одговарајућим малим словом, односно w. Без умањења општости нека је описана кружница ABC јединична. Нека је X тачка дијаметрално супротно A на описаној кружници око AOH. Јасно је да је $XH||BC$ и да је $OX \perp AO$. Записивањем ово на језику комплексних бројева, знамо да је $\frac{x}{\overline{x}} = -\frac{a}{\overline{a}} = -a^2$ и $\frac{x-h}{\overline{x-h}} = \frac{b-c}{\overline{b-c}} = -bc$. Одатле изводимо $\overline{x} = -\frac{x}{a^2}$. Затим, користећи $h = a+b+c$, изводимо $x - a - b - c = \frac{xbc}{a^2} + \frac{ab+bc+ca}{a}$, а сређивањем налазимо $x = \frac{2a^2b+2a^2c+a^3+abc}{a^2-bc}$. Најзад, ако AX сече кружницу ABC у T, онда је $-at = \frac{a-t}{\overline{a-t}} = \frac{x-a}{\overline{x-a}}$. Приступамо рачуну $x - a = 2a\frac{ab+bc+ca}{a^2-bc}$, па је онда

$$t = -\frac{1}{a}\frac{x-a}{\overline{x-a}} = -\frac{1}{a}\frac{2a\frac{ab+bc+ca}{a^2-bc}}{\frac{2}{a}\frac{\frac{a+b+c}{abc}}{\frac{bc-a^2}{a^2bc}}} = \frac{ab+bc+ca}{a+b+c}.$$

Како је ово симетрично по a, b, c, јасно видимо да се праве AO_a, BO_b и CO_c секу у тачки T.

Аутор задатка: Урош Цоловић

2. Нека је за неко k и неку додату коцкицу могуће попуњавање. У сваку јединичну коцкицу са координатама (x, y, z), $0 \leqslant x, y, z \leqslant 2020$, упишимо број ε^{x+y+z}, где је $\varepsilon = e^{i\frac{2\pi}{k}}$. На идентичан начин, у додату јединичну коцкицу (a, b, c), упишимо број ε^{a+b+c}. Како год поставимо квадар $1 \times 1 \times k$, збир бројева у пољима која он прекрива једнак је нули. Нека је $2021 = qk + r$, $0 < r < k$. Збир свих придружених бројева једнак је

$$0 = (1 + \varepsilon + ... + \varepsilon^{2020})^3 + \varepsilon^{a+b+c} = (1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + ... + \varepsilon^{r-1})^3 + \varepsilon^{a+b+c}. \tag{1}$$

Одавде је $|1+\varepsilon+\varepsilon^2+...+\varepsilon^{r-1})|^3 = |-\varepsilon^{a+b+c}|$, те је $|\frac{1-\varepsilon^r}{1-\varepsilon}| = 1$, односно бројеви ε и ε^r су на једнаком растојању од броја 1. Зато је $r = k-1$ или је $r = 1$. Ако је $r = 1$, онда је $k = 2$, па је и тада обавезно $r = k-1$. Дакле, ако су за неко k испуњени услови, онда $k \mid 2022$ и због (1) важи $a+b+c \equiv_k 3(k-1)$. Без умањења општости можемо узети да је додата коцкица $(a, b, -1)$. Сада имамо $k \mid a+b+2$. Због симетрије проблема додата коцкица може бити и коцкица $(2020-a, b, -1)$, те $k \mid (2020-a+b+2)$. Ако за неко сложено k постоји решење, онда постоји и за било који његов делилац. Зато можемо претпоставити да је k прост број. Зато из $k \mid a+b+2$ и $k \mid 2020-a+2020-b+2$, за $k > 2$, $k \mid 2022$, добијамо $a \equiv_k b \equiv_k -1$. За $k = 2$ је $a \equiv_2 b$. Докажимо да за овакве (које задовољавају претходне услове) јединичнице коцкице, заиста, постоји одговарајуће попуњавање. Нека је $k \in \{2, 3, 337\}$ и $a \equiv_k b \equiv_k -1$. Уочимо да је квадрат, чија поља имају координате (x, y), $0 \leqslant x, y \leqslant 2020$, из ког је избачен квадратић (a, b), за $a \equiv_k b \equiv_k -1$ могуће поплочати правоугаоницима $k \times 1$. То је засита могуће урадити пошто се квадрат са таквим избаченим пољем може поплочати правоугаоницима димензије $(a+1) \times b$, $(2020-a) \times (b+1)$, $(2021-a) \times (2020-b)$ и $a \times (2021-b)$, а сваки такав правоугаоник правоугаоницима $k \times 1$ (пошто $k \mid a+1, b+1, 2021-a, 2021-b$). Најнижих $k-1$ "слојева" велике коцке димензије 2021 попуњавамо на описани начин, а остатак је квадар $2021 \times 2021 \times (2022-k)$ које се, због $k \mid 2022-k$, лако попуњава са $1 \times 1 \times k$. Слично радимо за $k=2$ и $a \equiv_2 b \equiv_2 0$, тако што квадрат без поља (a, b) можемо поплочати правоугаоницима $a \times (b+1)$, $(2021-a) \times b$, $(2020-a) \times (2021-b)$ и $(a+1) \times (2020-b)$.

Треба још избројати колико има уредђених парова (a, b), $0 \leqslant a, b \leqslant 2020$, за које важи $a \equiv_2 b$ или $a \equiv_3 b \equiv_3 -1$ или $a \equiv_{337} b \equiv_{337} -1$. Лако моыхемо установити да је таквих парова $\frac{2021^2+1}{2} + 2 \cdot \frac{674}{2} \cdot \frac{672}{2} + 2 \cdot 3 \cdot 2 = 2268697$. Отуда, због симетрије, коначан број тражених коцкица је $6 \times 2268697 = 13612182$.

Аутор задатка: Милош Милосављевић

3. Нека је b_i за $i \geq 0$ дефинисано као остатак суме првих i бројева из низа a при дељењу са m. Такође, ради лакше нотације означимо b_n са S. Јасно је да је $b_{n+i} \equiv b_i + S \pmod{m}$. За свако i је l_i заправо дистанца до следећег појављивања b_i у низу. Нека се $r \in \{0, 1, 2, ..., m-1\}$ појављује у низу $b_1, b_2, ..., b_n$ на индексима $x_1, x_2, ..., x_t$ за $t \in \mathbb{N}_0$. Тада је $l_{x_j} = x_{j+1} - x_j$ за $j \in \{1, 2, .., t-1\}$, док је $l_{x_t} = p - x_t$, где је p индекс првог појављивања броја r у b после првих n. Тако сабирајући претходно по свим $j \in \{1, 2, 3, ..., t\}$, налазимо да је сума l-ова на позицијама где се налази r баш разлика између првог појављивања r у b после n и првог уопште.

Нека је $d = \text{НЗД}(S, m)$ и $0 \leq r < d$. Нека су $r_1, r_2, \cdots, r_k$ све вредности које се јављају међу $b_1, b_2, \cdots b_n$, такве да дају остатак r при дељењу са d (претпоставимо да $k \neq 0$). Доказаћемо да је сума l_i који одговарају овим вредностима највише $\frac{m}{d} \cdot n$. Пошто имамо највише d непразних класа по модулу d, ако докажемо ово, одмах имамо тврђење задатка. Нека је j_i прво појављивање r_i у $b_1, b_2, ..., b_n$. Потребно је за свако r_i наћи прво појављивање тог броја у b после првих n. Поређајмо вредности r, $r+S$, $r+2S$, $\cdots$, $r + \left(\frac{m}{d} - 1\right) S$ на кружницу, и претпоставимо без умањења општости да се на овој кружници појављују бројеви $r_1, r_2, \cdots, r_k$ баш тим редом, на позицијама $c_1, c_2, \cdots, c_k$. Лако се проверава да важи $b_{(c_2-c_1)n+j_1} \equiv r_2 (mod\, m)$, па важи да је прво појављивање r_2 у низу b после n неки индекс $i \leq (c_2 - c_1)n + j_1$, тако да сума l која одговара r_2 јесте највише $(c_2 - c_1)n + j_1 - j_2$. За оне који одговарају r_i је аналогно $(c_i - c_{i-1})n + j_{i-1} - j_i$, док је за r_1 та сума $\left(c_1 + \frac{m}{d} - c_k\right) n + j_k - j_1$. Сумирајући ово налазимо да је тражена сума максимално $n \cdot \left(\frac{m}{d} + c_1 - c_k + c_2 - c_1 + c_3 - c_2 + \cdots + c_k - c_{k-1}\right) + j_2 - j_1 + j_3 - j_2 + \cdots + j_1 - j_k = \frac{m}{d} n$.

Напоменимо да се, додатно, лако показује да је споменута сума у другом пасусу увек тачно $\frac{m}{d} n$.

Аутор задатка: Павле Мартиновић

Други дан

4. Претпоставимо супротно. Прво, видимо да је n непаран број, јер $\frac{n-1}{2}$ мора бити био цео. Нека је $n = 2a+1$, за неко ненегативно цело a. Стога, $n^q + (\frac{n-1}{2})^2$ постаје $a^2 + (2a+1)^q$ и мора бити степен броја q, тј. облика q^k, за неко $k \in \mathbb{N}$. Анализирајући поменути израз по модулу q, те користећи Малу Фермаову теорему, добијамо $0 \equiv a^2 + (2a+1)^q \equiv a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2 \pmod{q}$, тј. $q \mid a+1$. Ако је $q = 2$, тада је по претходном a непарно, па је $a^2 + (2a+1)^2 \equiv 2 \pmod{4}$, те је, стога, испуњено $a^2 + (2a+1)^2 = 2$, што је немогуће.
Нека је, сада, $q \geqslant 3$, а самим тим и непаран прост број. Приметимо да је $a^2+(2a+1)^q = (a^2-1)+((2a+1)^q+1)$. Сада је $v_q(a^2-1) = v_q(a-1)+v_q(a+1) = v_q(a+1)$, с обзиром да q не може да дели $a-1$, јер дели $a+1$ и $q > 2$. Са друге стране, како $q \mid (2a+1)+1$, то по леми од дизању екпонената (ЛТЕ) важи $v_q((2a+1)^q+1) = v_q((2a+1)+1)+v_q(q) = v_q(2a+2)+1 = v_q(a+1)+1$, опет, јер је $q > 2$. Одавде је $v_q(a^2+(2a+1)^q) = \min\{v_q(a^2-1), v_q((2a+1)^q+1)\} = v_q(a+1)$, што значи да је $a^2 + (2a+1)^q = q^{v_q(a+1)} \leqslant a+1$, што је очито немогуће. Контрадикција!

Аутор задатка: Павле Мартиновић

5. (а) Претпоставимо да постоји још једна функција са наведеним особинама у формулацији. Да бисмо доказали да су оне једнаке на скупу рационалних бројева, користићемо строгу индукцију по имениоцу (за разломке у упрошћеној форми). За $n = 1$, први услов је довољан. За $n > 1$ претпоставимо једнакост за све разломке са имениоцима мањим од n. Нека је НЗД$(m, n) = 1$. Постоје цели бројеви m' и n' такви да је $mn' - nm' = 1$, а да притом важи и $0 < n' < n$. По строгој индукцији, функције су једнаке на $\frac{m'}{n'}$ и $\frac{m-m'}{n-n'}$, па су по другом услову једнаке и на $\frac{m}{n}$.

Нека је, даље, x произвољан реалан број. Дефинишимо низове $(a_n), (b_n), (c_n)$ и (d_n), $n \in \mathbb{N}_0$, захтевом: $a_0 = [x], b_0 = a_0 + 1, c_0 = d_0 = 1$; за $\frac{a_n+b_n}{c_n+d_n} < x$, је $(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1}) = (a_n + b_n, b_n, c_n + d_n, d_n)$, иначе је $(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1}) = (a_n + b_n, b_n, c_n, c_n + d_n)$, $n \geqslant 1$. Уз помоћ принципа математичке индукције тривијално се доказује да важи $|a_n d_n - b_n c_n| = 1$ и $f(\frac{b_n}{d_n}) - f(\frac{a_n}{c_n}) = 2^{-n}$, за свако $n \in \mathbb{N}_0$ (за $n = 0$ је тривијално, док је индуктивни корак подела на случајеве и позивање на други услов). Такође, индуктивно се доказује и да је $\frac{a_n}{c_n} < x < \frac{b_n}{d_n}$, за све $n \in \mathbb{N}_0$, иако је очигледно. Стога, у случају да поменуте две функције имају различите вредности у тачки x, можемо наћи њихову разлику ϵ (већа минус мања) и одабрати $n \in \mathbb{N}$ тако да $2^{-n} < \epsilon$. Без губитка општости, нека је $f(x)$ минимум скупа вредности у тачки x обе функције. Из претходног, мора бити $f(\frac{a_n}{c_n}) + f(x) + \epsilon \leqslant f(x) + f(\frac{b_n}{d_n})$, јер је f растућа функција. Међутим, из претходног важи да је $2^{-n} \geqslant \epsilon$, што је контрадикција. Дакле, обе функције у тачки x имају исту вредност, тј. постоји само једна реална функција дефинисана на $\mathbb{R}$ са наведеним особинама.

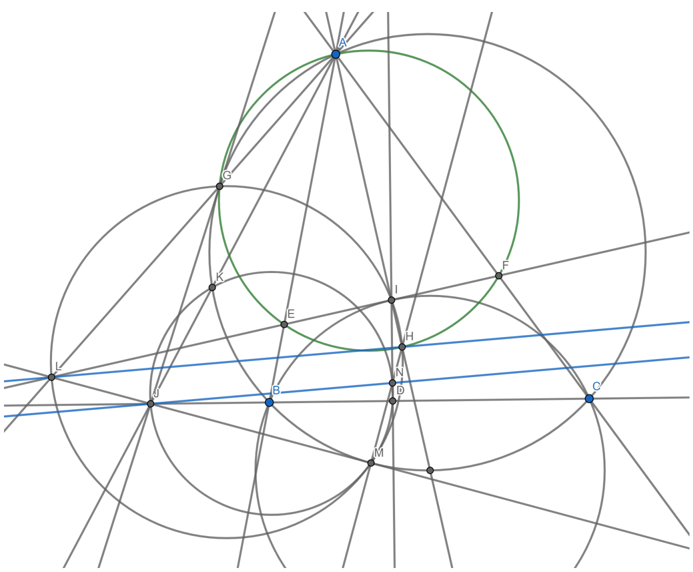
(б) Ако је $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ и $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ за $n \geqslant 0$, онда је $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\phi^n - \psi^n)$ за $n \in \mathbb{N}$, где је $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} > 1$ и $\psi = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} \in (-1, 0)$. Такође је $f_{n+1}f_{n+2} - f_n f_{n+3} = (-1)^n$, за $n \in \mathbb{N}_0$, а како је $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\phi}$, треба одредити $f(\frac{1}{\phi})$.

Нека је $a_n = \frac{f_{2n}}{f_{2n+1}}$ и $b_n = \frac{f_{2n+1}}{f_{2n+2}}$, за $n \in \mathbb{N}_0$. Како је $\frac{f_{n+2}}{f_{n+3}} - \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{f_{n+1}f_{n+2} - f_n f_{n+3}}{f_{n+3}f_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{f_{n+3}f_{n+1}}$, следи да је (a_n) растући, а (b_n) опадајући низ, а како је $\phi > 1 > |\psi|$, важи $a_n \to \frac{1}{\phi}$ и $b_n \to \frac{1}{\phi}$, кад $n \to \infty$. На основу услова задатка, примењеног на четворку $(a, b, c, d) = (f_n, f_{n+1}, f_{n+1}, f_{n+2})$, и наведеног идентитета добијамо да је $f\left(\frac{f_{n+2}}{f_{n+3}}\right) = \frac{f\left(\frac{f_n}{f_{n+1}}\right) + f\left(\frac{f_{n+1}}{f_{n+2}}\right)}{2}$. Такође, важи да је $f(a_0) = f(0) = 0$ и $f(b_0) = f(1) = 1$, а ако за неко $n \in \mathbb{N}_0$ важи и $f(a_n) = \frac{2\cdot 4^n - 2}{3\cdot 4^n}$ и $f(b_n) = \frac{2\cdot 4^n + 1}{3\cdot 4^n}$, онда ће важити

$$\begin{aligned} f(a_{n+1}) &= \frac{f(a_n)+f(b_n)}{2} = \frac{\frac{2\cdot 4^n-2}{3\cdot 4^n} + \frac{2\cdot 4^n+1}{3\cdot 4^n}}{2} = \frac{4\cdot 4^n - 1}{6\cdot 4^n} = \frac{2\cdot 4^{n+1}-2}{3\cdot 4^{n+1}}, \text{ па је} \\ f(b_{n+1}) &= \frac{f(b_n)+f(a_{n+1})}{2} = \frac{\frac{2\cdot 4^n+1}{3\cdot 4^n} + \frac{2\cdot 4^{n+1}-2}{3\cdot 4^{n+1}}}{2} = \frac{4\cdot 4^{n+1}+2}{6\cdot 4^{n+1}} = \frac{2\cdot 4^{n+1}+1}{3\cdot 4^{n+1}}. \end{aligned}$$

Дакле, на основу принципа математичке индукције, важи да је $f(a_n) = \frac{2\cdot 4^n - 2}{3\cdot 4^n}$ и $f(b_n) = \frac{2\cdot 4^n + 1}{3\cdot 4^n}$, за свако $n \in \mathbb{N}_0$, па како је f растућа, тј. неопадајућа, следи $\frac{2}{3} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f(a_n) \leqslant f(\frac{1}{\phi}) \leqslant \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f(b_n) = \frac{2}{3}$, одакле је $f(\frac{1}{\phi}) = \frac{2}{3}$.

Аутор задатка: Огњен Ковачевић



6. Без умањења општости, нека је конфигурација као на слици. Остали случајеви се слично раде. Такође у току решења ће (XYZ), за тачке X, Y, Z, означавати описану кружницу троугла X, Y, Z.

Нека је тачка M додир уписаног A-микстилиенарног круга и ω . Тврдимо да је тачка M тражени додир кружница. Нека је S други пресек MD са ω и $L = AG \cap EF$.

Лема 1. Важи $(G, B; M, C) = -1$ и права JM је тангента на ω.

Доказ 1. Прво тврђење имплицира друго, због особина хармонијских четвороуглова, те је, стога, довољно показати да важи први део тврђења.

Након инверзије са центром у тачки A полупречника $\sqrt{AB \times AC}$, компоноване са осном рефлексијом у односу на симетралу $\sphericalangle BAC$, лема се своди на следеће познато тврђење:

Лема 2. Нека је дат троугао ABC и тачке P, Q, R на страницама BC, CA, AB, тим редом, тако да су праве AP, BQ, CR конкурентне. Означимо са T пресек правих BC и QR. Тада је $(T, P; B, C) = -1$.

Дакле, тврђење Леме 1 је показано.

Познато је да је $AS||BC$. Користећи претходно, приметимо да важи

$$\sphericalangle MKJ = \sphericalangle ASM = \sphericalangle JDM,$$

па је, због тога, $M \in (DJK)$. Даље, приметимо да је L радикални центар A-мисктилинеарног круга, (AEF) и ω, па су тачке L, J и M колинеарне. Како је

$$90^\circ = \sphericalangle HIL = \sphericalangle HGL = \sphericalangle HML,$$

следи да тачке $M, L \in (GIH)$. Коначно, покажимо да се кружнице (DJK) и (GIH) додирују у тачки M. У том циљу, нека је $N = MH \cap ID$. Тачка $N \in (DMJK)$, где је $(DMJK)$ кружница која садржи тачке D, M, J и K, јер важи

$$\sphericalangle NDJ = 90^\circ = \sphericalangle HMJ = \sphericalangle NMJ.$$

Стога, довољно је показати да је $NJ||HL$, одакле, због хомотетије, ће следити да се кружнице (DJK) и (GIH), заиста, додирују у тачки M. Како је

$$\sphericalangle MNJ = \sphericalangle MDJ = \sphericalangle ASM,$$

где смо једнакости углова добили из паралелности правих AS и BC, те како је

$$\sphericalangle MHL = \sphericalangle MGL = \sphericalangle MGA,$$

добијамо да је $NJ||HL$, па је тиме тврђење доказано.
Аутор задатка: Урош Цоловић

САДРЖАЈ

* * * * *

Уредник: Миљан Кнежевић, Математички факултет, Београд

* * * * *