ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА
СРБИЈЕ

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА СРЕДЊОШКОЛАЦА 2005/2006.

Београд – Врњачка Бања 2006

СПОНЗОРИ ТАКМИЧЕЊА:

- **СО ВРЊАЧКА БАЊА**
- **ЧАЧАНСКА БАНКА А. Д.**, ЧАЧАК
- **Специјална болница Меркур**, Врњачка Бања
- **Хотел Славија**, Врњачка Бања
- **СТР Мими**, Врњачка Бања
- **Трмкакабл**, Врњачка Бања
- **Мабоса**, Врњачка Бања
- **Техноматик**, Врњачка Бања
- **Бели бор**, Врњачка Бања
- **Триас**, Врњачка Бања
- **Пионир**, Врњачка Бања
- **ИС Продукт**, Врњачка Бања
- **Алфа**, Врњци
- **Бобан комерц**, Ново Село
- **Врњачко врело**, Ново Село
- **Пекара Бина**, Врњачка Бања
- **Фемина**, Врњачка Бања
- **Емко**, Врњачка Бања
- **Гумар промет**, Врњачка Бања
- **Зубарска ординација Здравље**, Врњачка Бања
- **Гигант**, Врњци
- **Миркић**, Врњци
- **Омега**, Ново Село
- **Кључ**, Врњачка Бања
- **Дума**, Ново Село

ОРГАНИЗАЦИОНИ ОДБОР
48. РЕПУБЛИЧКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

1. Џамић Родољуб, председник Општине Врњачка Бања
2. Станојчић Дане, председник Скупштине општине Врњачка Бања
3. Славковић Ненад, начелник Школске управе Краљево
4. Сарић Славољуб, директор Гимназије у Врњачкој Бањи
5. др Бранислав Поповић, председник ДМС
6. др Драган Ђурчић, председник школског одбора Гимназије у Врњачкој Бањи
7. др Бајић Зоран, директор Угоститељско-туристичке школе у Врњачкој Бањи
8. Стодић Дојна, професор Гимназије у Врњачкој Бањи
9. Веселиновић Недељко, професор Гимназије у Врњачкој Бањи
10. Чкребо Славољуб, професор Гимназије у Врњачкој Бањи

РЕПУБЛИЧКА КОМИСИЈА

за такмичења из математике за ученике средњих школа

школска година 2005/2006.

1. Арсеновић др Милош, Математички факултет, Београд
2. Балтић Владимир, Економски факултет, Београд
3. Гајић др Борислав, Математички Институт САНУ
4. Димитријевић мр Слађана, ПМФ, Крагујевац
5. Долинка др Игор, ПМФ, Нови Сад
6. Дорословачки др Раде, ФТН, Нови Сад
7. Дугошија др Ђорђе, Математички факултет, Београд
8. Ђукић Душан, Универзитет у Торонту, Канада
9. Живаљевић др Раде, Математички Институт САНУ, **председник Републичке комисије**
10. Икодиновић др Небојша, ПМФ, Крагујевац
11. Кнежевић мр Миљан, Математички факултет, Београд
12. Кртинић мр Ђорђе, Математички факултет, Београд
13. Матић Иван, Беркли, САД
14. Милићевић Ђорђе, Принстон, САД
15. Милосављевић Милош, ПМФ, Ниш
16. Огњановић мр Срђан, Математичка гимназија, Београд
17. Сеничић Александар, Краљево
18. Станојевић Раде, Хамилтон Институт, Ирска
19. Стојаковић др Милош, ПМФ, Нови Сад
20. Томић Иванка, Гимназија, Ваљево
21. Чукић др Љубомир, Грађевински факултет, Београд
22. Шобот мр Борис, ПМФ, Нови Сад

Запис о Врњачкој Бањи

Грб Врњачке Бање

Врњачка Бања је највеће и најпознатије бањско лечилиште у Србији и Црној Гори и традиционално врло привлачан туристички центар за одмор и рекреацију. Бања се налази у централној Србији, око 200 km јужно од Београда. Друмском и железничком саобраћајницом која долином Западне Мораве спаја магистралне путеве Балкана, Београд – Софија и Београд – Атина, Врњачка Бања је веома добро повезана са свим крајевима Србије и Црне Горе, а добрим локалним путевима са својим шумско – планинским залеђем које чини широко подручје очуване природне средине. У овај комплекс спадају високе планине Копаоник (2017 m), Жељин (1785 m), затим Столови (1376 m) и оближњи питоми Гоч (1216 m).

Бањски парк

Клима је умерено континентална. Утицај оближњих планина даје микро клими Врњачке Бање посебан карактер и чини је веома пријатном. Лета су умерено топла са свежим јутрима и вечерима, а зиме су снеговите и без оштрих мразева. Средња годишња температура је $10,5°C$, а средња летња $20°C$. Врњачка Бања има веома дугу лечилишну традицију. На Врњачком топлом минералном извору у времену од II до IV века Римљани су изградили своје лечилиште и опоравилиште AQUAE ORCINAE. О томе нам сведоче археолошки налази у ужем језгру римске бање, односно базен за купање, римски извор топле минералне воде (Fons Romanus) и мноштво кованог новца који је из култних мотива остављен у лековити извор.

Шира област Врњачке Бање прецтавља најбогатије и најзанимљивије туристичко подручје Србије. То је подручје где се на сваком кораку средњи век сусреће са модерним токовима. На северу је питома плодна ораница западног Поморавља, а на југу, преко 100 km дуга клисура Ибра који се хучно пробија планинским кланцима прастаре Дарданије, данашње Рашке, где је настала српска држава. Ту су и високе планине са познатим зимским спорцким центрима, међу којима се нарочито истиче Копаоник. Најзад, ово је регија са најзначајнијим споменицима српске средњевековне културе, посебно манастирима са монументалним фреско сликарством од којих је неке, као свецку културну баштину, заштитио UNESKO.

Окосницу привредног живота Врњачке Бање несумљиво чини туристичка делатност, али су се захваљујући њој, успешно развиле и неке друге привредне гране. Експлоатација минералних извора Врњачке Бање почела је 1970. године.

Преко целе године, посебно у месецима летње туристичке сезоне, Врњачка Бања својим посетиоцима нуди изузетно богат, садржајан и разноврстан културно – забавни програм. Бројни спорцко – рекреативни објекти и терени пружају врло повољне услове за рекреацију и погодни су за припреме врхунских спорцких екипа.

Неколико речи о школи домаћину

Изнад Врњачке Бање и Липовачке реке, у централном делу Врњачке Бање уздиже се Чајкино брдо на коме се у некадашњој вили "Терапија", налази једина гимназија у општини. Основана је на иницијативу грађана Врњачке Бање 1941. године и са радом је почела 17. новембра те године по наставном плану и скраћеном програму прописаном од тадашњег Министарства просвете. Данас је ово гимназија општег типа и током вишедеценијског рада, уз краткотрајне прекиде, изнедрила је многе успешне генерације и појединце.

У простору који дели са Угостотељско–туристичком школом Гимназија данас образује 480 ученика распоређених у 16 одељења сва четири разреда. Колектив броји преко 35 професора и један је од најмлађих у округу. Ученици ове школе сваке године учествују на многим такмичењима из разних области и показују врло добре резултате. Школа је често домаћин многих такмичења на свим нивоима. Од недавно Гимназија је постала члан UNESCO школа, што је још један од показатеља успешног рада и додатни стимуланс за рад у будућности.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ, 28. 01. 2006.

Први разред – А категорија

1. На колико начина се 3 топа могу могу поставити на шаховску таблу димензија 6×2006 тако да се узајамно не туку (тј. два топа се не могу истовремено наћи у истој врсти или истој колони)?

2. Одреди највећи заједнички делилац бројева $2^{2006}-1$ и $2^{2004}-1$.

3. Збир 49 природних бројева једнак је 999. Наћи највећу могућу вредност њиховог највећег заједничког делиоца. (**M388**)

4. Одредити углове једнакокраког троугла у коме је дужина симетрале угла на основици једнака двострукој дужини висине која одговара основици. (**M362**)

5. Може ли се једнакостранични троугао поделити на 2006 једнакостраничних троуглова? (**M327**)

Други разред – А категорија

1. Одредити све целе бројеве a за које су изрази $96+a$ и $5+a$ кубови целих бројева. (**M405**)

2. Може ли се једнакостранични троугао поделити на 2006 једнакостраничних троуглова? (**M327**)

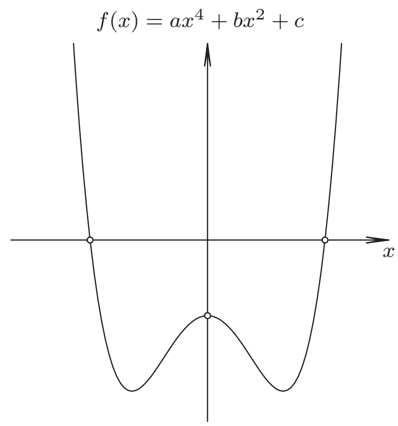
3. Наћи $\sphericalangle ACB$ оштроуглог $\triangle ABC$ ако је познато да дуж HN, која спаја подножја висина AH и BN, полови симетралу $\sphericalangle ACB$. (**M436**)

4. Наћи све $x \in \mathbb{R}$ за које је неједначина

$$(2-a)x^3 + (1-2a)x^2 - 6x + (5+4a-a^2) < 0$$

тачна бар за једну вредност $a \in [-1, 2]$.

5. На слици је скица графика функције $y = ax^4 + bx^2 + c$. Какве знаке имају коефицијенти a, b и c?



Трећи разред – А категорија

1. Решити систем једначина

$$\begin{aligned} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z &= 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x &= 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y &= 2. \end{aligned}$$

2. Наћи све парове реалних бројева (a, b) такве да је

$$(a + bi)^{2006} = a - bi.$$

3. Између страница троугла постоји релација $a - b = b - c \geqslant 0$. Доказати да други по величини угао не прелази $60°$. (**M470**)

4. Нека је $a + b + c = 1$ и нека су a, b, c дужине страница троугла. Доказати да је $a^2 + b^2 + c^2 < \frac{1}{2}$. (Тангента 34, стр. 8)

5. Постоје ли цели позитивни бројеви x, y и z за које важи:

$$x^3 + y^4 = z^5.$$

Четврти разред – А категорија

1. Нека је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задата формулом $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$. Одредити максималну и минималну вредност ове функције.

2. Наћи највећу вредност функције

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 9} + \frac{1}{x^2 - 6x + 21} + \cos 2\pi x$$

на интервалу $(0, +\infty)$. (**M375**)

3. Претпоставимо да смо реалну функцију ψ увели на следећи начин

$$\psi(x) = \begin{cases} x, & x > 2, \\ 2, & 1 < x \leqslant 2, \\ 2x, & x \leqslant 1. \end{cases}$$

Решити следеће формуле по $x \in \mathbb{R}$:
(a) $\psi(x) < x$;
(b) $\psi(x) + \psi(1-x) + \psi(\psi(x)) = 2$. (**M359**)

4. Наћи све функције f, такве да за произвољне реалне бројеве x и y важи једнакост $f(x-y) = f(x) + f(y) - 2xy$. (**M403**)

5. Постоје ли цели позитивни бројеви x, y, z и t за које важи:

$$x^3 + y^4 = z^5.$$

Први разред – Б категорија

1. Одредити број деветоцифрених бројева дељивих са 225, код којих су све цифре различите а цифра стотина им је 7. (Тангента 36, стр. 26)

2. На колико начина се 3 топа могу могу поставити на шаховску таблу димензија 6×2006 тако да се узајамно не туку (тј. два топа се не могу истовремено наћи у истој врсти или истој колони)?

3. Нека је $S = \{a, b, c\}$. Колико има функција $f : S \to S$ за које важи $f(f(x)) = x$?

4. Наћи све парове реалних бројева (x, y) који задовољавају једначине

$$|x + y - 4| = 5, \quad |x - 3| + |y - 1| = 5.$$ (**M324**)

5. Збир 49 природних бројева једнак је 999. Наћи највећу могућу вредност њиховог највећег заједничког делиоца. (**M388**)

Други разред – Б категорија

1. Одредити све комплексне бројеве $z = x + iy$, за које важи $|z-2| = |z+2i|$ и $|z+2| = |z-2i|$. (Тангента 41, стр. 27, II.5.)

2. За коју вредност параметра m у једначини

$$2x^2 - (2m+1)x + m^2 - 9m + 39 = 0$$

је једно решење веће од другог? (Тангента 34, стр. 49)

3. Наћи $\sphericalangle ACB$ оштроуглог $\triangle ABC$ ако је познато да дуж HN, која спаја подножја висина AH и BN, полови симетралу $\sphericalangle ACB$. (**M436**)

4. Доказати да за $m, n \in \mathbb{N}$ важи
$$n\sqrt{m-1} + m\sqrt{n-1} \leqslant mn.$$

5. Показати да постоји бесконачно много четворки целих позитивних бројева x, y, z, t за које важи:
$$x^3 + y^4 = z^5 + t^6.$$

Трећи разред – Б категорија

1. Решити систем једначина
$$\begin{aligned} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z &= 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x &= 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y &= 2. \end{aligned}$$

2. Једнакостранични троугао ABC, странице a, ротира око праве која садржи теме A и паралелна је висини кроз теме B. Израчунати површину и запремину добијеног ротационог тела.

(Тангента 37, стр. 37, III.2.)

3. Између страница троугла постоји релација $a - b = b - c \geqslant 0$. Доказати да други по величини угао не прелази $60°$. (**M470**)

4. Одредити скуп решења неједначине $\sin^4 x + \cos^4 x \leqslant \frac{3}{4}$.

(Тангента 40, стр. 56)

5. На школској табли су слике правилног 12-угла и правилног 15-угла. Оба полигона су уписана у кружнице једнаких полупречника. Ана је обим 12-угла помножила са површином 15-угла а Марија је обим 15-угла помножила са површином 12-угла. Која од њих две је добила већи број?

Четврти разред – Б категорија

1. Решити систем једначина
$$\begin{aligned} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z &= 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x &= 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y &= 2. \end{aligned}$$

2. Нека је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задата формулом $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$. Одредити максималну и минималну вредност ове функције.

3. Наћи вредности параметра p за које једначина $x^4 - (3p+2)x^2 + p^2 = 0$ има четири реална решења која образују аритметичку прогресију. (**M332**)

4. Наћи највећу вредност функције

$$f(x)=\frac{x}{x^2+9}+\frac{1}{x^2-6x+21}+\cos 2\pi x$$

на интервалу $(0,+\infty)$. **(M375)**

5. Претпоставимо да смо реалну функцију ψ увели на следећи начин

$$\psi(x)=\begin{cases} x, & x>2,\\ 2, & 1<x\leqslant 2,\\ 2x, & x\leqslant 1.\end{cases}$$

Решити следеће формуле по $x\in\mathbb{R}$:

(a) $\psi(x)<x$;

(b) $\psi(x)+\psi(1-x)+\psi(\psi(x))=2$. **(M359)**

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ, 18. 02. 2006.

Први разред – А категорија

1. Доказати да кружница која садржи два темена и ортоцентар троугла има исти полупречник као и кружница описана око тог троугла.

2. Наћи највећи природан број који је мањи од збира квадрата својих цифара.

3. Од Новог Сада до Београда постоје нови и стари пут који су повезани са 7 попречних путева. Колико има различитих начина путовања овим путевима од Новог Сада до Београда, таквих да у сваком начину путовања сваки део пута је пређен највише једанпут?

4. Шта је веће:

$$\frac{1,\overbrace{111\ldots1}^{2005\ \text{цифара}}}{1,\underbrace{111\ldots1}_{2006\ \text{цифара}}}\quad\text{или}\quad\frac{1,\overbrace{0101\ldots01}^{4010\ \text{цифара}}}{1,\underbrace{0101\ldots01}_{4012\ \text{цифара}}}?$$

5. У свако поље таблице 8×8 написан је број. Дозвољено је изабрати било који квадрат 3×3 (састављен од 9 поља) или квадрат 4×4 (састављен од 16 поља) и повећати за 1 сваки број на пољима изабраног квадрата. Да ли се свака полазна таблица применом таквих операција може трансформисати у таблицу у којој су сви бројеви парни? (Тангента 36, стр 4, зад. 4)

Други разред – А категорија

1. Наћи највећу вредност израза $4x^2 + 80x + y + 43$ под условом да важи $6x^2 + 32x + y + 283 \leqslant 0$ и $x^2 + 86x + y + 202 \geqslant 0$.

2. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$x^z = y^{\frac{8}{3}}, \quad y^z = x^{\frac{2}{3}}, \quad z = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{9y}. \qquad \textbf{(M354)}$$

3. Нека су α, β, γ углови троугла. Ако је $\frac{\sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\alpha}{\sin\beta \sin\gamma} = 1$ одредити α.

4. За које вредности реалног параметра α неједнакост $\sin^6 x + \cos^6 x + \alpha \sin x \cos x \geqslant 0$ важи за све вредности x?

5. Подскуп X скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ има својство да разлика никоја два броја из X није једнака 1 или 4. Колико највише елемената може имати скуп X?

Трећи разред – А категорија

1. Дат је полином са реалним коефицијентима $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 1$ који има три реална позитивна корена, не обавезно различита. Одредити минималну вредност збира $a + b$. **(M401)**

2. Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} 2\log_{1-x}(-xy - 2x + y + 2) + \log_{2+y}(x^2 - 2x + 1) &= 6 \\ \log_{1-x}(y + 5) - \log_{2+y}(x + 4) &= 1. \end{aligned}$$

3. Наћи све целе бројеве a, b, c, d за које важи $ab + cd = 5$ и $ac - bd = 4$.

4. Дато је n различитих тачака $A_1, A_2, \ldots, A_n$ у равни. Нека је $\mathcal{S}$ скуп свих средишта дужи $\overline{A_iA_j}$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

а) Доказати да скуп тачака $\mathcal{S}$ има бар $2n - 3$ елемента.

б) Наћи један распоред тачака $A_1, A_2, \ldots, A_n$ за који скуп $\mathcal{S}$ има тачно $2n - 3$ елемента.

5. (а) Како се мења запремина тетраедра $ABCD$ ако се повећава ивица AB а све остале ивице тетраедра остају неизмењене.
(б) Дужина ивице AB тетраедра $ABCD$ је већа или једнака 1, док су остале ивице дужине мање или једнаке 1. Доказати да је $V_{ABCD} \leqslant \frac{1}{8}$. **(M415)**

Четврти разред – А категорија

1. Доказати неједнакост
$$\cos^3 x \sin x \leqslant \tfrac{3\sqrt{3}}{16}.$$
Када важи једнакост?

2. Дато је n различитих тачака $A_1, A_2, \dots, A_n$ у равни. Нека је $\mathcal{S}$ скуп свих средишта дужи $\overline{A_iA_j}$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

а) Доказати да скуп тачака $\mathcal{S}$ има бар $2n-3$ елемента.

б) Наћи један распоред тачака $A_1, A_2, \dots, A_n$ за који скуп $\mathcal{S}$ има тачно $2n-3$ елемента.

3. Четвороугао $ABCD$ је основа пирамиде $SABCD$, а ивица SD њена висина. Израчунати запремину пирамиде, ако је $AB = BC = \sqrt{5}$, $AD = DC = \sqrt{2}$, $AC = 2$ и $SA + SB = 2 + \sqrt{5}$.

4. Нека је $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Наћи број различитих реалних корена једначине $f(f(x)) = 0$. **(M422)**

5. На колико различитих начина се могу расподелити 7 различитих куглица у 4 кутије које се не разликују?

Први разред – Б категорија

1. Наћи највећи природан број који је мањи од збира квадрата својих цифара.

2. Ради продаје, било је потребно неке од датих 555 парцела поделити на мање. Притом се свака појединачна парцела могла поделити или на 3 или на 4 дела. Са дељењем парцела се стало када је број парцела био 4 пута већи од броја извршених деоба. Колико је најмање деоба извршено?

3. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$. Тачке P и Q су средине страница AD и BC. Ако важи да је $PQ = \frac{1}{2}(AB + CD)$ доказати да је четвороугао $ABCD$ трапез.

4. Дат је тетиван четвороугао $ABCD$. Нека је $AD \cap BC = \{H\}$ и $CD \cap AB = \{E\}$. Симетрала угла $\sphericalangle DEA$ сече странице DA и CB у тачкама P и M, а симетрала угла $\sphericalangle DHC$ сече странице DC и BA у тачкама N и L. Доказати да је $LMNP$ ромб. **(M367)**

5. У свако поље таблице 8×8 написан је број. Дозвољено је изабрати било који квадрат 3×3 (састављен од 9 поља) или квадрат 4×4 (састављен од 16 поља) и повећати за 1 сваки број на пољима изабраног квадрата. Да ли се свака полазна таблица применом таквих операција може трансформисати у таблицу у којој су сви бројеви парни? (Тангента 36, стр 4, зад. 4)

Други разред – Б категорија

1. Ако су a, b, c реални бројеви такви да је $(b-1)^2 - 4ac < 0$, доказати да систем једначина

$$ax^2 + bx + c = y,$$
$$ay^2 + by + c = z,$$
$$az^2 + bz + c = x$$

нема реалних решења. **(M450)**

2. Свака дијагонала конвексног петоугла одсеца троугао јединичне површине. Израчунати површину тог петоугла. **(M361)**

3. Троугао ABC подељен је на једнакокраке троуглове. Зна се A, F и G колинеарне тачке и да су AF и BF краци троугла ABF, BF и BG краци троугла BFG, AF и EF краци троугла AEF, EF и EG краци троугла EFG и CE, GE краци троугла CEG. Доказати да су троуглови EFG и ABC слични и одредити коефицијент сличности.

4. Доказати да је сума реципрочних вредности свих делитеља савршеног броја N једнака 2. За број n се каже да је савршен уколико је збир свих његових делитеља (укључујући 1 и n) једнак $2n$.

5. Од Новог Сада до Београда постоје нови и стари пут који су повезани са 7 попречних путева. Колико има различитих начина путовања овим путевима од Новог Сада до Београда, таквих да у сваком начину путовања сваки део пута је пређен највише једанпут?

Трећи разред – Б категорија

1. Доказати да за $a, b > 0$ важи неједнакост $2(a^4 + b^4) + 17 > 16ab$.

2. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$x^z = y^{\frac{8}{3}}, \quad y^z = x^{\frac{2}{3}}, \quad z = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{9y}.$$ **(M354)**

3. Нека су α, β, γ углови троугла. Ако је $\frac{\sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} = 1$ одредити α.

4. (а) Како се мења запремина тетраедра $ABCD$ ако се повећава ивица AB а све остале ивице тетраедра остају неизмењене.
(б) Дужина ивице AB тетраедра $ABCD$ је већа или једнака 1, док су остале ивице дужине мање или једнаке 1. Доказати да је $V_{ABCD} \leqslant \dfrac{1}{8}$. **(M415)**

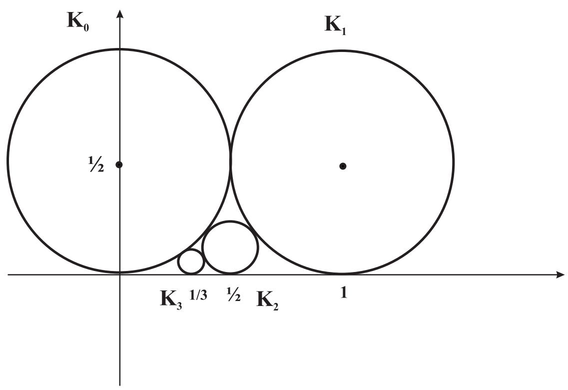
5. За два различита (неподударна) троугла кажемо да су пријатељски ако имају две једнаке странице. Скуп пријатељских троуглова називамо добрим ако сви троуглови из тог скупа имају исти пар једнаких страница. Одредити минималну вредност за $N, N > 2$, за коју је сваки скуп од N међусобно пријатељских троуглова добар скуп. **(M494)**

Четврти разред – Б категорија

1. Ако су x, y реални бројеви такви да је $1 \leqslant x \leqslant y$ онда из једнакости
$$x^y + y^x = x^x + y^y \quad \text{следи} \quad x = y.$$
Доказати.

2. У скупу реалних бројева решити систем једначина
$$x^z = y^{\frac{8}{3}}, \quad y^z = x^{\frac{2}{3}}, \quad z = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{9y}. \qquad \textbf{(M354)}$$

3. K_0 је кружница са центром у $C_0 = (0, 1/2)$ и полупречником $1/2$, K_1 кружница са центром у $C_1 = (1, 1/2)$ и полупречником $1/2$, K_2 (најмања) кружница која додирује кружнице K_0, K_1 и x-осу и K_3 кружница која на исти начин додирује кружнице K_0, K_2 и x-осу. Доказати да је за $n = 1, 2, 3$ полупречник кружнице K_n једнак $r_n = \frac{1}{2n^2}$ и да ова кружница додирује x-осу у тачки $x_n = \frac{1}{n}$.



4. Нека су α, β, γ углови троугла. Ако је $\frac{\sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} = 1$ одредити α.

5. (а) Како се мења запремина тетраедра $ABCD$ ако се повећава ивица AB а све остале ивице тетраедра остају неизмењене.
(б) Дужина ивице AB тетраедра $ABCD$ је већа или једнака 1, док су остале ивице дужине мање или једнаке 1. Доказати да је $V_{ABCD} \leqslant \dfrac{1}{8}$. **(M415)**

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ, 19. 03. 2005.

Први разред – А категорија

1. Ако су $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ непразни подскупови равни α, такви да је $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ и $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \alpha$, доказати да постоји једнакокраки правоугли троугао чија су сва три темена у једном од скупова $\mathcal{A}$ или $\mathcal{B}$.

2. Наћи сва целобројна решења једначине

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2x + 2y + 2z = 2004.$$

3. Петоугао $ABCDE$ уписан је у круг полупречника r. Ако је $AB = BC = DE = r$, доказати да је троугао BGF једнакостраничан, при чему су G и F средишта страница CD и EA петоугла.

4. Од свих троуглова једнаког обима највећу површину има једнакостраничан троугао. Доказати.

5. За неки природан број n, $n > 3$, нека је S збир цифара броја $1+2+...+n$. Ако у декадном запису броја S учествују све исте цифре, која цифра то може бити?

Други разред – А категорија

1. Доказати да је број $2^{n+2} \cdot 7^n + 1$ сложен за сваки природан број n.

2. Да ли постоје неподударни троуглови једнаких обима и површина?

3. Нека је k полукружница са центром O конструисана над пречником AB и нека су тачке S_1, S_2, S_3 на полукружници k такве да је $\sphericalangle AOS_1 = \sphericalangle S_1OS_2 = \frac{\pi}{9}$ и $\sphericalangle S_2OS_3 = \frac{2\pi}{9}$. Доказати да је $P_1P_2 = P_3O$, где су P_1, P_2, P_3 пројекције тачака S_1, S_2, S_3 на пречник AB.

4. У дневној соби се налази неки број људи, и познато је да сваки од њих познаје тачно пет присутних (познанство је узајамно). Доказати да је за неко $n > 5$ могуће одабрати n људи из дневне собе и сместити их за округли сто у трпезарији тако да свако седи између два познаника.

5. У скупу реалних бројева решити једначину $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}}$.

Трећи разред – А категорија

1. Одредити све вредности природног броја n, за који постоји његов делилац d, тако да $nd + 1$ дели $n^2 + d^2$.

2. Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

3. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да је

$$f(x) = \max_{y \in \mathbb{R}} (2xy - f(y)),$$

за свако $x \in \mathbb{R}$.

4. Доказати да од укупно 25 ученика није могуће формирати више од $2 \cdot 5^3$ кошаркашких тимова од по 5 играча, тако да број заједничких играча за свака два тима није већи од 2.

5. Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао код кога је $AB = BC$, $CD = DE$ и $EF = FA$. Доказати неједнакост

$$\frac{AB}{BE} + \frac{CD}{DA} + \frac{EF}{FC} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Четврти разред – А категорија

1. Колико постоји правоуглих троуглова чија су темена тачке целобројне решетке $3 \times n$ где је $n \geqslant 5$ (подразумева се да ова решетка има $3n$ тачака)?

2. Дат је оштроугли троугао ABC. Нека је I центар уписаног круга, O центар описаног круга и H ортоцентар троугла $\triangle ABC$. Права AI сече страницу BC у A', а права BI сече страницу AC у B'. Права OH сече страницу AC у P, а BC у Q. Ако је четвороугао $CA'IB'$ конвексан и тетиван, доказати да је $PQ = AP + BQ$.

3. Доказати да за сваки природан број n постоји природан број x такав да је $2^x - x$ дељиво са n.

4. Ако су x_i $(i = 1, 2, \ldots, 48)$ нуле полинома $P(x) = 18x^{48} + 3x + 2006$, израчунати $\displaystyle\sum_{i=1}^{48} \frac{x_i}{1 + x_i}$.

5. Одредити све функције $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такве да је $f(f(x) + y + 1) = x + f(y) + 1$ за свака два цела броја x и y.

Први разред – Б категорија

1. Доказати да $n^2 + 5n + 6$ ни за један природан број n није тачан квадрат.

2. Ако су $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ непразни подскупови равни α, такви да је $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ и $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \alpha$, доказати да постоји једнакокраки правоугли троугао чија су сва три темена у једном од скупова $\mathcal{A}$ или $\mathcal{B}$.

3. а) Доказати да број $n^2 + n + 1$ није дељив са 2006 ни за један природан број n.
б) Доказати да број $n^2 + n + 2$ није дељив са 2007 ни за један природан број n.

4. Дат је троугао ABC у коме важи $\sphericalangle C = 90^o + \frac{\sphericalangle B}{2}$. Нека је M средиште странице BC. Круг са центром у A и полупречником AM сече, опет, праву BC у D. Доказати да је $MD = AB$.

5. Кружница уписана у троугао ABC додирује његове странице AB, BC и CA у тачкама M, N и K редом. Права кроз тачку A, паралелна са NK, сече праву NM у тачки D. Права кроз тачку A, паралелна са NM, сече праву NK у тачки E. Доказати да права DE садржи средњу линију троугла ABC **(M395)**.

Други разред – Б категорија

1. Наћи сва целобројна решења једначине

$$\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x-1} = 1.$$

2. Постоје ли реални бројеви b и c такви да свака од једначина $x^2+bx+c=0$ и $2x^2+(b+1)x+c+1=0$ има по два целобројна корена? **(M389)**

3. Нека је функција $f : R \longrightarrow R$, дата са $f(x) = \frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5}$, за свако $x \in R$. Одредити максималну вредност (ако постоји) дате функције.

4. Дат је конвексан шестоугао $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ чије су све странице једнаке и $\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5 = \alpha_2+\alpha_4+\alpha_6$, при чему је α_i унутрашњи угао шестоугла код темена A_i. Доказати да је $\alpha_1 = \alpha_4$, $\alpha_2 = \alpha_5$ и $\alpha_3 = \alpha_6$.

5. У дневној соби се налази неки број људи, и познато је да сваки од њих познаје тачно пет присутних (познанство је узајамно). Доказати да је за неко $n > 5$ могуће одабрати n људи из дневне собе и сместити их за округли сто у трпезарији тако да свако седи између два познаника.

Трећи разред – Б категорија

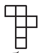
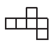
1. Нека су a, b катете и c хипотенуза правоуглог троугла ABC. Израчунати максималну вредност израза $\frac{t_a+t_b}{t_c}$, где су t_a, t_b и t_c дужине тежишних дужи које одговарају, редом, страницама a, b и c троугла ABC.

2. Доказати да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи неједнакост

$$\sin^{2005} x + \cos^{2005} x + \sin^{2006} x \leqslant 2.$$

Када важи једнакост?

3. Дијагонале AC и BD конвексног четвороугла $ABCD$ секу се у тачки E тако да су површине троуглова AED и BCE једнаке. Одредити меру угла ACD, ако су странице троугла ABE у односу $BE : EA : AB = 5 : 6 : 7$.

4. У мрежи коцке су два квадратића суседна уколико имају заједничку страницу (само једна тачка није довољна) и сви квадратићи су међусобно повезани преко суседних. Две мреже коцке су еквивалентне ако једну од друге можемо добити коришћењем ротације и/или симетрије: нпр. мреже  и  су међусобно еквивалентне, али нису еквивалентне са . Наћи број нееквивалентних мрежа коцке ивице 1 и нацртати све такве мреже.

5. Наћи све тројке (x, y, z) природних бројева таквих да је $x! + y! = 15 \cdot 2^{z!}$.
(M407)

Четврти разред – Б категорија

1. Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

2. Наћи ону вредност $a > 1$ за коју једначина $a^x = x$ има тачно једно решење.

3. Одредити углове троугла ако за његове углове и странице важи

$$a : \alpha = b : \beta = c : \gamma$$

(a, b и c су редом странице наспрам углова α, β и γ).

4. Дата је кружница k са својим центром O. Само помоћу шестара конструисати темена правилног дванаестоугла уписаног у дату кружницу.

5. За природан број кажемо да је палиндром ако је једнак броју записаном истим цифрама у обрнутом редоследу.

(a) Наћи највећи петоцифрен палиндром који је дељив са 101.

(b) Наћи највећи број узастопних петоцифрених бројева међу којима нема палиндрома. **(M406)**

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – А категорија

1. Први топ се на таблу може поставити на било које поље, дакле на $6 \cdot 2006$ начина. Следећи топ се може поставити на неко од поља која се не налазе у истој врсти или колони са претходно већ постављеним топом. Другим речима "прецртамо" забрањену колону и врсту и поставимо други топ на новодобијену шаховску таблу димензија 5×2005, то се може урадити на $5 \cdot 2005$ начина. Слично, последни топ се може поставити на $4 \cdot 2004$ начина. Поредак стављања топова није битан, дакле иста позиција се појављује $3! = 6$ пута. Коначан одговор је

$$(6 \cdot 2006 \cdot 5 \cdot 2005 \cdot 4 \cdot 2004) : 6 = 20 \cdot 2006 \cdot 2005 \cdot 2004.$$

Напомена: Решење се може формулисати на више начина. Нпр. могуће је изабрати 3 колоне и независно 3 врсте у којима ће се топови налазити, то се може извести на $\binom{2006}{3} \cdot \binom{6}{3}$ начина. У изабране колоне и врсте се топови могу поставити на $3! = 6$ начина итд.

2. НЗД заданих бројева је и делилац њихове разлике $2^{2006} - 2^{2004} = 2^{2004}(2^2 - 1) = 2^{2004} \cdot 3$. Пошто су задати бројеви непарни, остаје да се провери да ли је НЗД 1 или 3. Лако се доказује да је $2^{2n} - 1$ увек дељив са 3. Заиста, $2^{2n} - 1 = 4^n - 1$ па то следи нпр. из идентитета $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + \ldots + x + 1)$. Тачан одговор је НЗД $= 3$.

3. Нека је d највећи заједнички делилац тих 49 природних бројева. Тада важи

$$d \mid 999 = 3^3 \cdot 37$$

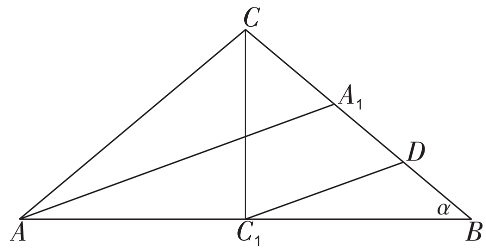
и како мора бити $d \leqslant \frac{999}{49} < 21$, следи $d \in \{1, 3, 9\}$. Вредност 9 се може постићи, нпр.

$$\underbrace{9 + 9 + \cdots + 9}_{48} + 567 = 999$$

и тада је $NZD(9, 9, \ldots, 9, 567) = 9$.

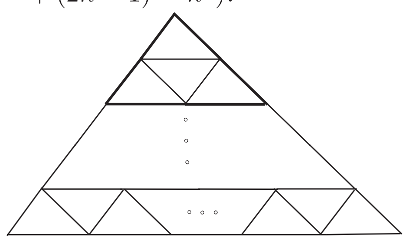
4. Нека је $\triangle ABC$ (слика 1) посматрани једнакокраки троугао, CC_1 његова висина која одговара основици AB, AA_1 симетрала угла A и α мера углова на основици.

Означимо са D средиште дужи BA_1. Тада је C_1D средња линија $\triangle ABA_1$, па је $C_1D = \frac{AA_1}{2}$ и $C_1D \parallel AA_1$, одакле је $\sphericalangle BC_1D = \sphericalangle BAA_1 = \frac{\alpha}{2}$. По услову задатка је $AA_1 = 2 \cdot CC_1$, па је на основу претходног $CC_1 = C_1D$. Према томе, $\triangle CC_1D$ је једнакокрак, па је $\sphericalangle DCC_1 = \sphericalangle CDC_1 = 90^0 - \alpha$, одакле је $\sphericalangle CC_1D = 2\alpha$. Како је $\sphericalangle CC_1D + \sphericalangle DC_1B = 2\alpha + \frac{\alpha}{2} = 90^0$, закључујемо да је $\alpha = 36^0$, тј. углови у $\triangle ABC$ су 36^0, 36^0 и 108^0.



Слика 1.

5. Произвољни троугао увек можемо поделити на n^2 подударних троуглова (слика 2) $(1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2)$.



Слика 2.

Одговарајућим спајањем по 4 или 9 таквих троуглова добијамо такође троугао сличан полазном, а укупан број троуглова се умањује за 3, односно 8. Како је $45^2 - 2 \cdot 8 - 1 \cdot 3 = 2025 - 19 = 2006$, закључујемо да је могуће произвољни троугао поделити на 2006 троуглова који су му слични.
(*Напомена:* Постоје и многа друга решења!)

Други разред – А категорија

1. *Решење 1:* Нека је a цео број такав да је $96 + a = x^3$ и $5 + a = y^3$, за неке целе бројеве x и y. Тада је $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 91$.

Нека је $x - y = m$, за неки цео број m (очигледно $m \in \{\pm1, \pm7, \pm13, \pm91\}$). Тада је $x = m + y$ и $x^2 + xy + y^2 = \dfrac{91}{m}$, па је

$$(m+y)^2 + (m+y)y + y^2 = \frac{91}{m}, \quad \text{тј.} \quad 3y^2 + 3my + \left(m^2 - \frac{91}{m}\right) = 0.$$

Дискриминанта последње једначине, $D = \dfrac{3}{m}\left(364 - m^3\right)$, мора бити потпун квадрат. За $m > 7$ имамо да је $\dfrac{3}{m} > 0$ и $364 - m^3 < 0$, па је $D < 0$. Такође, за $m < 0$ имамо $\dfrac{3}{m} < 0$ и $364 - m^3 > 0$, па је, поново, $D < 0$. Дакле,

$0 < m \leqslant 7$, па је $m = 1$ или $m = 7$. За $m = 1$, $D = 1089 = 33^2$, па $y \in \{-6, 5\}$, односно $a \in \{-221, 120\}$. За $m = 7$, $D = 9 = 3^2$, па $y \in \{-3, -4\}$, односно $a \in \{-32, -69\}$.

Дакле, $a \in \{-221, -69, -32, 120\}$.

Решење 2: Као и у првом решењу, задатак се своди на решавање (у целим бројевима) једначине $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 91$. Имајући у виду да је $x > y$ закључујемо да је $x - y$ један од позитивних делилаца броја 91. Постоје 4 могућности,

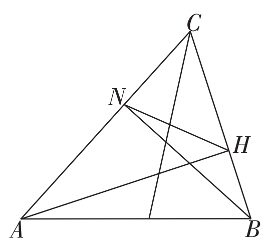
$$\begin{cases} x - y &= 1 \\ x^2 + xy + y^2 &= 91 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y &= 7 \\ x^2 + xy + y^2 &= 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y &= 13 \\ x^2 + xy + y^2 &= 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y &= 91 \\ x^2 + xy + y^2 &= 1 \end{cases}$$

Први систем има једно решење $x = 6, y = 5$ и друго $x = -5, y = -6$. Други систем има решења $x = 3, y = -4$ и $x = 4, y = -3$. Трећи и четврти немају решења у целим бројевима. Одавде се повратно добијају вредности за a и одговор као и у првом решењу.

2. Видети решење 5. задатка за први разред у А категорији.

3. Како је $\dfrac{HC}{AC} = \cos\gamma = \dfrac{NC}{BC}$ $(\gamma = \sphericalangle ACB)$, закључујемо да су троуглови HCN и ABC слични са коефицијентом сличности $k = \cos\gamma$ (слика 3). Симетрала угла γ троугла ABC истовремено је и симетрала угла у троуглу HCN. По услову задатка однос дужина симетрала у једном и другом троуглу је $\dfrac{1}{2}$. Како је однос одговарајућих дужинских елемената у сличним троугловима једнак коефицијенту сличности, то је $k = \cos\gamma = \dfrac{1}{2}$, одакле је $\gamma = 60^0$.



Слика 3.

4. Напишимо леву страну неједначине као квадратну функцију по a,

$$f(a) = -a^2 + a(4 - 2x^2 - x^3) + 2x^3 + x^2 - 6x + 5. \tag{1}$$

Приметимо да је $f(a)$ увек конкавна функција! Отуда закључујемо да се тражени x може наћи ако и само ако је испуњен бар један од услова

$$f(-1) < 0 \qquad \text{или} \qquad f(2) < 0.$$

Случај $f(-1) < 0$ је еквивалентан са $x(x^2 + x - 2) < 0$ што води ка решењу $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 1)$.

Случај $f(2) < 0$ је еквивалентан са $x^2 + 2x - 3 > 0$ што води ка решењу $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

Коначно решење је $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

5. *Решење 1:* Коефицијент a није нула, јер скицирани график није ни парабола ни хоризонтална права. Како је, због $y = x^4(a + b/x^2 + c/x^4)$, за јако велике x знак функције исти као знак коефицијента a, мора бити $a > 0$. Како је $c = f(0)$, према скици је $c < 0$. Докажимо да је $b < 0$. У супротном је $-b/\{2a\} \leq 0$, па је апсциса темена графика функције $f(x) = ax^2 + bx + c$ непозитивна. Због $a > 0$, функција $f(x)$ расте на $[0, \infty)$.

Одатле следи да и дата функција y расте на истом интервалу, што према скици није тачно. Дакле $b < 0$.

Решење 2: Лако се уочава да је $a > 0$ (за довољно велико x мора бити $f(x) > 0$). Са графика видимо да је $f(0) < 0$, и како је $c = f(0)$ закључујемо и да је $c < 0$. Такође са графика се види да постоји $x_0 > 0$ за које је $f(x_0) < c$. Из последње релације добијамо да је $ax_0^4 + bx_0^2 < 0$ што је могуће само у случају када је $b < 0$. Дакле мора бити $a > 0, b < 0, c < 0$.

Трећи разред – А категорија

1. Због дефинисаности логаритма имамо $x, y, z > 0$. Дати систем једначина је еквивалентан са системом

$$\begin{aligned} x\sqrt{yz} &= 4 \\ y\sqrt{zx} &= 9 \\ z\sqrt{xy} &= 16. \end{aligned}$$

Множењем све три једнакости добијамо $(xyz)^2 = 24^2$ тј. $xyz = 24$. Одавде и из претходних једначина лако се добија да је $x = 2/3, y = 27/8$ и $z = 32/3$.

2. Ако уведемо ознаку $z = a + bi$ једначина прелази у облик $z^{2006} = \bar{z}$. Узимајући модул леве и десне стране добијамо $|z|^{2006} = |z|$. Сада имамо две могућности. Или је $|z| = 0$, у ком случају долазимо до решења $z_0 = 0 + 0i$, или је $|z|^{2005} = 1 \Rightarrow |z| = 1$. У другом случају помножимо обе стране једначине $z^{2006} = \bar{z}$ са z чиме наведена једначина прелази у једначину $z^{2007} = \bar{z}z$, односно једначину $z^{2007} = 1$. Одавде добијамо решења $z_k = \cos\frac{2k\pi}{2007} + i\sin\frac{2k\pi}{2007}$ за $k = 1, 2, \ldots, 2007$. Дакле тражени парови су елементи скупа

$$\{(0,0)\} \cup \{(\cos\frac{2k\pi}{2007}, \sin\frac{2k\pi}{2007}) \mid k = 1, \ldots, 2007\}.$$

3. Пошто је $a \geqslant b \geqslant c$, други по величини угао је β. Према косинусној теореми важи:

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{a^2+c^2-\left(\dfrac{a+c}{2}\right)^2}{2ac} = \frac{3}{8}\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)-\frac{1}{4}.$$

Из познате неједнакости $\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a} \geqslant 2$, добијамо да је $\cos\beta \geqslant \dfrac{3}{8}\cdot 2-\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$, одакле следи да је $\beta \leqslant 60^\circ$.

4. Из Косинусне теореме следи $a^2+b^2+c^2 = 2ab\cos\gamma+2bc\cos\alpha+2ca\cos\beta < 2(ab+bc+ca)$ што заједно са релацијом $2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2) = 1-(a^2+b^2+c^2)$ даје неједнакост $a^2+b^2+c^2 \leqslant 1-(a^2+b^2+c^2)$ еквивалетну траженој неједнакости.

5. Потражимо решење у облику $x = 2^p, y = 2^q$ и $z = 2^r$ уз додатни услов $3p = 4q$. Последњи услов нам омогућује да тражену једначину сведемо на једначину облика $2^{3p}+2^{4q} = 2^{5r}$ тј. на једначину $2^{3p+1} = 2^{5r}$.

Дакле довољно је наћи решења система једначина $3p = 4q$ и $3p+1 = 5r$. Прва једначина има бесконачно много решења $p = 4t, q = 3t$ где је t природан број. Друга једначина је задовољена ако је $12t+1 = 5r$ тј. ако је нпр. $t = 5k+2$ за неки природан број k. Одавде добијамо за сваки природан број k решење

$$x = 2^{20k+8} \quad y = 2^{15k+6} \quad z = 2^{12k+5}.$$

Четврти разред – А категорија

1. *Решење 1:* Уочимо да је

$$f(x) = 5(\frac{3}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x) = 5\sin(x+\alpha)$$

где је α угао одређен условом $\cos\alpha = 3/5, \sin\alpha = 4/5, 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$. Одавде се одмах добија да су максимум (минимум) ове функције 5 (односно -5).

Решење 2: Први извод функције f је $f'(x) = 3\cos x - 4\sin x$. Нуле извода су нуле једначине $\operatorname{tg} x = 3/4$ и у неким од ових тачака функција достиже максималну а у неким минималну вредност (овде се ослањамо на периодичност функције). Ако је $\operatorname{tg} x = 3/4$ онда се показује да су одговарајуће вредности синуса и косинуса $\sin x = 3/5, \cos x = 4/5$ или $\sin x = -3/5, \cos x = -4/5$. Одавде зе закључује да су максимум и минимум функције f редом 5 и -5.
Напомена: Може се анализирати и други извод функције али се опет закључак да је један од локалних максимума (минимума) и глобални максимум (минимум) изводи из периодичности функције.

2. Посматрајмо прво све сабирке појединачно. Како је

$$\frac{x}{x^2+9} = \frac{1}{x+\frac{9}{x}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{x\frac{9}{x}}} = \frac{1}{6},$$

закључујемо да је највећа вредност првог сабирка $\frac{1}{6}$ и она се постиже за $x = 3$, док из

$$\frac{1}{x^2-6x+21} = \frac{1}{(x-3)^2+12} \leqslant \frac{1}{12},$$

закључујемо да је највећа вредност другог сабирка $\frac{1}{12}$ и да се она постиже за $x = 3$. Највећа вредност трећег сабирка је 1 и она се постиже за свако целобројно x, па и за $x = 3$. Дакле, највећа вредност функције

$$f(x) = \frac{x}{x^2+9} + \frac{1}{x^2-6x+21} + \cos 2\pi x$$

на интервалу $(0, +\infty)$ је $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + 1 = \frac{5}{4}$ и постиже се за $x = 3$.

3. (а) Очигледно, скуп решења неједначине је подскуп интервала $(-\infty, 1]$, па решавамо неједначину $2x < x$. Дакле, $x \in (-\infty, 0)$.

(б) Одредимо прво функције $\psi(1-x)$ и $\psi(\psi(x))$. На основу дате дефиниције функције ψ добијамо

$$\psi(1-x) = \begin{cases} 1-x, & x < -1 \\ 2, & -1 \leqslant x < 0 \\ 2-2x, & x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \psi(\psi(x)) = \begin{cases} 4x, & x \leqslant \frac{1}{2} \\ 2, & \frac{1}{2} < x \leqslant 2 \\ x, & x > 2 \end{cases}$$

Сада, једноставним рачуном долазимо до решења $x \in [2, +\infty) \cup \{0\}$.

4. Нека је $x = y$, тада, по услову задатка, важи једнакост

$$f(0) = f(x) + f(x) - 2x^2,$$

односно $f(x) = x^2 + \frac{a}{2}$, где је $a = f(0)$. Ако је $x = y = 0$, добијамо да је $a = 2a$, тј. $a = 0$. Дакле, $f(x) = x^2$ је једини кандидат за такву функцију. Непосредна провера показује да ова функција заиста и задовољава наведени услов.

5. Потражимо решење у облику $x = 2^p, y = 2^q$ и $z = 2^r$ уз додатни услов $3p = 4q$. Последњи услов нам омогућује да тражену једначину сведемо на једначину облика $2^{3p} + 2^{4q} = 2^{5r}$ тј. на једначину $2^{3p+1} = 2^{5r}$.

Дакле довољно је наћи решења система једначина $3p = 4q$ и $3p+1 = 5r$. Прва једначина има бесконачно много решења $p = 4t, q = 3t$ где је t природан број. Друга једначина је задовољена ако је $12t + 1 = 5r$ тј. ако је нпр. $t = 5k+2$ за неки природан број k. Одавде добијамо за сваки природан број k решење

$$x = 2^{20k+8} \quad y = 2^{15k+6} \quad z = 2^{12k+5}.$$

Први разред – Б категорија

1. Уочимо да је $225 = 25 \cdot 9$. Из дељивости са 25 закључујемо да су последње две цифре траженог броја $00, 25, 50$ или 75. Случај 00 није могућ јер све цифре морају бити различите, као (из истих разлога) ни случај 75 јер је цифра стотина 7. Тражени број је дељив са 9 и свих девет цифара су му различите. Пошто је $0 + 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$, избацивањем једног од ових бројева се добија број дељив са 9 само ако је избачени број или 0 или 9. Ако је избачена цифра 0, последње три цифре морају бити 725 а преостале цифре се могу изабрати на 6! начина. Ако је избачена цифра 9 онда су могућа оба случаја 25 и 50. У другом случају су решења сви деветоцифрени бројеви који не користе цифру 9 а завршавају са са 750 (има их 6!), а у првом случају је слично уз искључење оних који почињу са 0 (има их $6! - 5!$). Коначан одговор је $2 \cdot 6! + 5 \cdot 5!$.

2. Видети решење 1. задатка за први разред у А категорији.

3. *Решење 1:* Услов задатака каже да ако је $f(x) = y$ за неке елементе x и y да онда важи и $f(y) = x$. Функција "идентитет" тј. функција која задовољава услов да је $f(x) = x$ за сваки x је једно решење. За свако друго решење се могу наћи $x \neq y$ такви да је $f(x) = y$ и $f(y) = x$. Ако је нпр. $\{x, y\} = \{a, b\}$ онда је $f(c) = c$. Слично, ако је $\{x, y\} = \{b, c\}$ онда је $f(a) = a$ и ако је $\{x, y\} = \{c, a\}$ онда је $f(b) = b$. Одавде следи да има укупно 4 такве функције.

Решење 2: Докажимо најпре да је функција f бијекција. Ако је $f(x) = f(y)$ за неке $x, y \in S$, онда је $x = f(f(x)) = f(f(y)) = y$. Овим смо доказали да је функција "1–1". Функција f је и "на" пошто се за сваки $x \in S$ добија као слика од $f(x)$ (зато што важи $f(f(x)) = x$. Постоји $3! = 6$ бијекција скупа S и то су

$$f_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} \quad f_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$$
$$f_4 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \quad f_5 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} \quad f_6 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

Од наведених само функције f_1, f_2, f_3 и f_6 задовољавају задати услов. Тражених функција дакле има 4.

4. Из датог система следи да је $|x+y-4| = |x-3+y-1| = |x-3|+|y-1|$, а ово је тачно само ако су $x-3$ и $y-1$ истог знака. Дакле, решења треба тражити у областима $D_1 = \{(x, y) \mid x \geqslant 3,\ y \geqslant 1\}$ и $D_2 = \{(x, y) \mid x \leqslant 3,\ y \leqslant 1\}$.
У области D_1 систем је еквивалентан једначини $x + y - 4 = 5$, па је скуп решења у тој области $R_1 = \{(x, y) \mid y = 9 - x,\ 3 \leqslant x \leqslant 8\}$.
У области D_2 систем је еквивалентан једначини $x+y = -1$, па је скуп решења у овој области $R_2 = \{(x, y) \mid y = -1 - x,\ -2 \leqslant x \leqslant 3\}$. Дакле, скуп решења полазног система је $R = R_1 \cup R_2$.

5. Видети решење 3. задатка за први разред у А категорији.

Други разред – Б категорија

1. Из првог услова се добија $|(x-2)+iy| = |x+(y+2)i|$ одакле се добија $(x-2)^2+y^2 = x^2+(y+2)^2$ тј. $x+y=0$. Други услов је еквивалентан са $|(x+2)+iy| = |x+(y-2)i|$ одакле се добија $(x+2)^2+y^2 = x^2+(y-2)^2$ што је опет еквивалентно са $x+y=0$. Закључак је да тражена својства имају сви комплексни бројеви облика $z = x-ix$, где је x реалан број.

2. Услов је еквивалентан услову да је $D > 0$ где је D дискриминанта једначине. Ова нејднaчина се после сређивања своди на неједначину $m^2-19m+78<0$. Одговараајуће нуле су 6 и 13 одакле следи да је скуп решења интервал $(6,13)$.

3. Видети решење 3. задатка за други разред у А категорији.

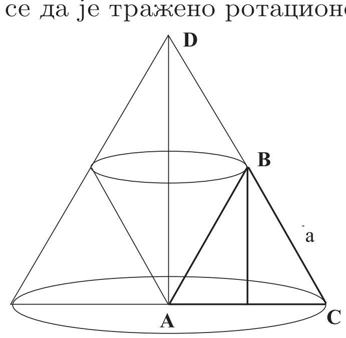
4. За $n \geqslant 1$ је $\frac{\sqrt{n-1}}{n} \leqslant \frac{1}{2}$. Заиста, сменом $n-1=t^2$, где је према услову $t \geqslant 0$, наведена неједнакост је еквивалентна са $\frac{t}{t^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$ што је еквивалентно са $2t \leqslant t^2+1$ односно $0 \leqslant (t-1)^2$. Без увођења смене ово се може доказати и овако $\frac{\sqrt{n-1}}{n} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{n-1}-n+1-1}{2n} = \frac{-(\sqrt{n-1}-1)^2}{2n} \leqslant 0$. Слично важи и $\frac{\sqrt{m-1}}{m} \leqslant \frac{1}{2}$ па се сабирањем ових неједнакости добија $\frac{\sqrt{n-1}}{n} + \frac{\sqrt{m-1}}{m} \leqslant 1$ одакле следи тражена неједнакост.

5. Довољно је наћи бесконачно много решења једначина $x^3=z^5$ и $y^4=t^6$. У првом случају се решење може потражити у облику $x=a^p$ и $z=a^q$ где је a позитиван цео број. Једначина $x^3=z^5$ је задовољена ако је $3p=5q$ што је испуњено ако је $p=5u$ а $q=3u$ за неки природан број u. Дакле прву једначину задовољава бесконачно много парова $x=a^{5u}$ и $z=a^{3u}$. Слично, другу једначину задовољавају сви парови $y=b^{3v}$ и $t=b^{2v}$ за неке природне бројеве b и v.

Трећи разред – Б категорија

1. Видети решење 1. задатка за трећи разред у А категорији.

2. Анализом слике види се да је тражено ротационо тело добијено тако што



се из једнакостраничне купе полупречника основе a исече двострука купа полупречника основе $a/2$. Формуле за површину и запремину једнакостраничне купе са полупречником основе r су

$$P_r = 3r^2\pi \qquad V_r = \frac{\sqrt{3}}{3}r^3\pi.$$

Одавде се добија резултат

$$P = 3a^2\pi \qquad V = \frac{\sqrt{3}}{3}a^3\pi - 2\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3\pi = \frac{\sqrt{3}}{4}a^3\pi.$$

3. Видети решење 3. задатка за трећи разред у А категорији.

4. Из једнакости $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2x)$ следи да је наведена неједнакост еквивалентна са $1 - \frac{1}{2}\sin^2(2x) \leqslant \frac{3}{4}$. После сређивања добијамо неједначину $\frac{1}{2} \leqslant \sin^2(2x)$ односно еквивалентну неједначину $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant |\sin(2x)|$. Одавде се добија еквивалетна релација $\frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant 2x \leqslant \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ одакле се добија и коначно решење

$$\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

5. Означимо са P_{12} површину 12-угла а са P_{15} површину 15-угла. Слично, нека је O_{12} обим 12-угла а O_{15} обим 15-угла. Анин број је $O_{12} \cdot P_{15}$ а Маријин број је $O_{15} \cdot P_{12}$. Задатак је да се упореде ови бројеви, тј. да се упореде бројеви

$$A = \frac{P_{15}}{O_{15}} \quad \text{i} \quad M = \frac{P_{12}}{O_{12}}.$$

Разбијањем полигона на једнакокраке троуглове лако се налази да је $A = h_{15}/2$ и $M = h_{12}/2$ где су $h_{15} = r\cos\frac{\pi}{15}$ и $h_{12} = r\cos\frac{\pi}{12}$ висине одговарајућих троуглова. Пошто су краци ових једнакокраких троуглова једнаки, закључујемо да је $A > M$.

Четврти разред – Б категорија

1. Видети решење 1. задатка за трећи разред у А категорији.

2. Видети решење 1. задатка за четврти разред у А категорији.

3. Дата једначина је биквадратна, па су њена решења симетрична у односу на координантни почетак, а како и образују аритметичку прогресију, она су облика

$$-\frac{3}{2}\,d,\ -\frac{1}{2}\,d,\ \frac{1}{2}\,d,\ \frac{3}{2}\,d.$$

Ако уведемо смену $t = x^2$ полазна једначина постаје $t^2 - (3p+2)t + p^2 = 0$, и решења ове једначине су $t_1 = \frac{1}{4}d^2$ и $t_2 = \frac{9}{4}d^2$. Сада, помоћу Виетових формула за квадратне једначине добијамо

$$\frac{1}{4}d^2 + \frac{9}{4}d^2 = 3p+2, \quad \frac{1}{4}d^2 \cdot \frac{9}{4}d^2 = p^2, \text{ односно } \frac{5}{2}d^2 = 3p+2, \quad \frac{9}{16}d^4 = p^2.$$

Из последње две једначине добијамо $9p + 6 = 10|p|$, па су тражене вредности за параметар p бројеви 6 и $-\frac{6}{19}$.

4. Видети решење 2. задатка за четврти разред у А категорији.

5. Видети решење 3. задатка за четврти разред у А категорији.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – А категорија

1. У датом троуглу $\triangle ABC$ означимо са A_1 и B_1 подножја висина из темена A и B, а са H ортоцентар. Како су углови $\sphericalangle CA_1H$ и $\sphericalangle CB_1H$ прави, добијамо $\sphericalangle AHB = \sphericalangle B_1HA_1 = 180^\circ - \sphericalangle ACB$.

Дакле, кружница која садржи тачке A, B и H има тетиву AB, којој одговара периферни угао $180^\circ - \sphericalangle ACB$. С друге стране, кружница описана око троугла $\triangle ABC$ такође има дуж AB за тетиву, а њен одговарајући периферни угао је $\sphericalangle ACB$. Према томе, две наведене кружнице су подударне и самим тим имају исти пречник.

2. Нека је неки број $N = \overline{a_n ... a_1 a_0}$ мањи од суме квадрата својих цифара:

$$a_n \cdot 10^n + ... + a_1 \cdot 10 + a_0 < a_n^2 + ... + a_1^2 + a_0^2.$$

Тада је

$$a_n(10^n - a_n) + ... + a_1(10 - a_1) + a_0(1 - a_0) < 0.$$

Сви сабирци, осим последњег, на левој страни претходне неједнакости су позитивни, а последњи је већи или једнак од $9(1-9) = -72$. Уколико је бар једна цифра a_k за $k \geqslant 2$ различита од нуле, тада је

$$a_k(10^k - a_k) > 10^k - 9 > 90$$

па је и цела сума позитивна. Дакле неједнакост је могућа само за бројеве мање од 100. Како за број 99 важи да је мањи од збира квадрата својих цифара он је и решење задатка. Дакле одговор је 99.

3. Путовање сваким делом новог пута између две суседне раскрснице са попречним путевима означимо са симболом $+$, док путовање сваким делом старог пута између две суседне раскрснице са попречним путевима означимо са симболом $-$. Сада је очевидно да је сваки пут једнозначно одређен низом од симбола $+$ и $-$ у којима је укупан број симбола $+$ и $-$ тачно 8. Како за прво место у низу постоје 2 могућности, за друго такође 2 могућности, итд. за осмо место две могућности, а свака мугућност може да иде са сваком могућношћу, то по принципу множења следи да је укупан број тражених путева $2^8 = 256$.

4. Нека је $F(x) = \dfrac{1+x+x^2+\ldots+x^{2005}}{1+x+x^2+\ldots+x^{2006}}$. Ако је $a > b > 0$, тада је:

$$\frac{1}{F(a)} = 1 + \frac{a^{2006}}{1+a+a^2+\ldots+a^{2005}} = 1 + \frac{1}{\dfrac{1}{a^{2006}} + \dfrac{1}{a^{2005}} + \ldots + \dfrac{1}{a}}$$

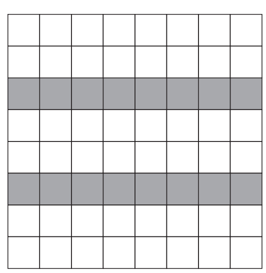
и

$$\frac{1}{F(b)} = 1 + \frac{1}{\dfrac{1}{b^{2006}} + \dfrac{1}{b^{2005}} + \ldots + \dfrac{1}{b}},$$

па је $\dfrac{1}{F(a)} > \dfrac{1}{F(b)}$, односно $F(a) < F(b)$. Дакле,

$$\frac{1,\overbrace{111\ldots1}^{2005\,\text{цифара}}}{1,\underbrace{111\ldots1}_{2006\,\text{цифара}}} = F(0,1) < F(0,01) = \frac{1,\overbrace{0101\ldots01}^{4010\,\text{цифара}}}{1,\underbrace{0101\ldots01}_{4012\,\text{цифара}}}.$$

5. Не. Обојимо поља треће и шесте врсте. Уочимо да сваки квадрат 3×3 садржи 6 необојених поља, а сваки квадрат 4×4 или 8 или 12 необојених поља. Сваким дозвољеним потезом се збир бројева на необојеним пољима повећава за паран број, тј. парност збира се не мења. Према томе, ако је у полазној таблици збир бројева на необојеним пољима непаран, онда ће и после било ког броја корака тај збир остати непаран, тј. међу бројевима на необојеним пољима биће бар један непаран.



Други разред – А категорија

1. Означимо $z = 4x^2 + 80x + y + 43$. Треба наћи максималну вредност за z при условима: $z = 4x^2 + 80x + y + 43, 6x^2 + 32x + y + 283 \leqslant 0, x^2 + 86x + y + 202 \geqslant 0$. Заменом y из једначине у неједначине добијамо $3x^2 - 6x - 159 \leqslant z \leqslant -2x^2 + 48x - 240$. У равни (x, z) ово представља фигуру између двеју парабола. Апсцисе пресечних тачака су $x_1 = \frac{9}{5}$ и $x_2 = 9$, а највећа вредност за z се достиже за $x = 9$ и једнака је 30.

2. Лако се види да мора бити $x, y, z > 0$. Сада, користећи прве две једначине добијамо

$$y^{\frac{8}{3}} = x^z = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}z} = (y^z)^{\frac{3}{2}z},$$

односно,

$$y^{\frac{8}{3}} = y^{\frac{3}{2}z^2}.$$

Последња једнакост је тачна ако је $y = 1$ или ако је $\dfrac{8}{3} = \dfrac{3}{2}z^2$. Дакле, $y = 1$ или $z = \dfrac{4}{3}$, па су решења датог система $(1, 1, 1 + \sqrt{3})$ и $\left(\dfrac{1}{81}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{4}{3}\right)$.

3. Будући да је $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\gamma$, из задате једнакости добијамо $b^2 + c^2 - a^2 = bc \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\frac{1}{2}$. Из последње једнакости добијамо да је $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ односно $\alpha = 60^\circ$.

4. Средимо леву страну неједнакости: $(\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 + \alpha \sin x \cos x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) + \alpha \sin x \cos x = [(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x] + \alpha \sin x \cos x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x + \frac{\alpha}{2}\sin 2x$. Уведимо смену $t = \sin 2x$ (за t важи $-1 \leqslant t \leqslant 1$) и лева страна постаје $-\frac{3}{4}t^2 + \frac{\alpha}{2}t + 1$. Како је коефицијент уз t^2 негативан минимум квадратног тринома на сегменту $[-1, 1]$ се достиже у једном од крајева сегмента. Стога је неједнакост $-\frac{3}{4}t^2 + \frac{\alpha}{2}t + 1 > 0$ задовољена на целом сегменту $[-1, 1]$ ако и само ако је квадратни трином ненегативан на крајевима сегмента, тј. уколико важи

$$-\frac{3}{4}(-1)^2 + \frac{\alpha}{2}(-1) + 1 \geqslant 0 \quad \text{и} \quad -\frac{3}{4} \cdot 1^2 + \frac{\alpha}{2} \cdot 1 + 1 \geqslant 0.$$

Прва од ових неједнакости је задовољена за $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$, а друга за $\alpha \geqslant \frac{-1}{2}$. Тиме смо дошли до коначног одговора: дата неједнакост важи за све вредности x када је $\frac{-1}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}$.

5. Нека је q количник и r остатак при дељењу n са 5. За свако $k = 1, 2, \ldots, n-4$, највише два елемента скупа $\{k, k+1, \ldots, k+4\}$ могу упасти у X. То значи да X садржи највише $2q$ елемената скупа $A = \{1, 2, \ldots, 5q\}$ и највише $[\frac{r+1}{2}]$ елемената скупа $B = \{5q+1, \ldots, n\}$, што нам даје $|X| \leqslant 2q + [\frac{r+1}{2}]$, или што је еквивалентно, $|X| \leqslant \left[\frac{2n+4}{5}\right]$.

Једнакост се може достићи: довољно је узети $X \cap A = \{5i+1, 5i+3 \mid i = 0, \ldots, q-1\}$ и $X \cap B = \{5q + 2i - 1 \mid i \leqslant [\frac{r+1}{2}]\}$.

Трећи разред – А категорија

1. *Решење 1:* Нека су r, s и t корени полинома $f(x)$. Тада је

$$f(x) = (x-r)(x-s)(x-t) \quad \text{и} \quad rst = 1.$$

На основу неједнакости $(1+\alpha \geqslant 2\sqrt{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}^+)$ важи

$$(1+r)(1+s)(1+t) \geqslant 8\sqrt{rst} = 8.$$

Зато је

$$f(-1) = (-1-r)(-1-s)(-1-t) = -(1+r)(1+s)(1+t) \leqslant -8.$$

С друге стране је

$$f(-1) = (-1)^3 - a(-1)^2 + b(-1) - 1 = -(a+b) - 2.$$

Дакле, $-(a+b)-2 \leqslant -8$, одакле је $a+b \geqslant 6$. Како је за

$$f(x) = (x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1,$$

$a+b=6$, тражена минимална вредност 6.
Решење 2: Ако су r, s и t корени полинома, онда је (Виетове формуле): $a = r+s+t$, $b = rs+st+rt$ и $rst=1$, па је

$$a+b = r+s+t+rs+st+rt = r+s+t+\frac{1}{t}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s} \geqslant 6\sqrt[6]{rst\frac{1}{t}\frac{1}{r}\frac{1}{s}} = 6,$$

при чему се једнакост достиже акко је $r=s=t=1$.

2. Услови за x, y се своде на $x \in (-4,0)\cup(0,1)$, $\quad y \in (-2,-1)\cup(-1,+\infty)$. Систем је еквивалентан систему:

$$\begin{aligned} 2\log_{1-x}(1-x)(y+2) + \log_{2+y}(x-1)^2 &= 6 \\ \log_{1-x}(y+5) - \log_{2+y}(x+4) &= 1. \end{aligned}$$

Прва од последње две једначине је, узимајући у обзир услове за x, y, еквивалентна са $z + \frac{1}{z} = 2$, где је $z = \log_{1-x}(y+2)$. Одатле добијамо $\log_{1-x}(y+2) = 1$, односно $y = -x-1$. Заменом у другу једначину система имамо $\log_{1-x}(4-x) - \log_{1-x}(x+4) = 1$, односно $4-x = (1-x)(x+4)$. Од два решења ове једначине $x_1 = -2, x_2 = 0$, услове задовољава само прво. Добијамо резултат, јединствено решење $(-2,1)$.

3. Имамо $(a^2+d^2)(b^2+c^2) = (ab+cd)^2+(ac-bd)^2 = 41$. Према томе, $a^2+d^2 = 41$ и $b^2+c^2 = 1$, или $a^2+d^2 = 1$ и $b^2+c^2 = 41$. Сада је лако испитати све случајеве јер се 1 и 41 једнозначно растављају на збир два квадрата. Решења су $(5,1,0,-4)$, $(-5,-1,0,4)$, $(4,0,1,5)$, $(-4,0,-1,-5)$, $(0,-4,5,1)$, $(1,5,4,0)$, $(0,4,-5,-1)$, $(-1,-5,-4,0)$.

Алтернативно, квадрирањем и сабирањем датих једнакости, добија се $(ab)^2 + (cd)^2 + (ac)^2 + (bd)^2 = 41$ па ће и ученик који се не сети да овај израз факторише, до решења доћи анализом свих начина на које се број 41 може приказати као збир 4 квадрата.

4. а) Најпре приметимо да за сваке три различите тачке A, B, C у равни важи да се средишта дужи $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ не поклапају.

Међу тачкама $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ посматрамо тачке P и Q чије растојање r је веће или једнако од растојања било које друге две тачке тог скупа. Све остале тачке из скупа $\mathcal{A} \setminus \{P, Q\}$ морају се налазити и у кругу $K(P, r)$, и у кругу $K(Q, r)$. Самим тим, средишта дужи $\overline{AP}$, за све тачке $A \in \mathcal{A} \setminus \{P, Q\}$, су различите тачке у кругу $K(P, r/2)$. Аналогно, средишта дужи $\overline{AQ}$, за све тачке $A \in \mathcal{A} \setminus \{P, Q\}$, су различите тачке у кругу $K(Q, r/2)$. Приметимо да се ниједно од наведених средишта не поклапа са средиштем R дужи $\overline{PQ}$. Како је $K(P, r/2) \cap K(Q, r/2) = \{R\}$, добијамо укупно $(n-2) + (n-2) + 1 = 2n - 3$ различитих тачака које припадају скупу $\mathcal{S}$.

б) У правуглом координатном систему у равни дефинишимо $A_i = (2i, 0)$, за све $i = 1, 2, \dots, n$. Средиште дужи $\overline{A_i A_j}$ је тачка $(i+j, 0)$. С обзиром да $3 \leqslant i + j \leqslant 2n - 1$, и $i + j \in \mathbb{N}$, јасно је да скуп $\mathcal{S}$ садржи $2n - 3$ тачака.

5. (а) Ако је угао (диедар) између троуглова ACD и BCD оштар, запремина расте са повећавањем овог угла све док раван троугла ACD не постане ортогонална на раван троугла BCD. Након тога запремина опада.
(б) Нека је a дужина ивице CD (која је наспрамна ивици AB дужине $\geqslant 1$).

Висина $AP = h_a$, троугла ACD, дели ивицу CD на два дела CP и PD, па је бар једна од дужи CP и PD дужине $\geqslant \dfrac{a}{2}$. С друге стране, пошто је $AC \leqslant 1$ и $AD \leqslant 1$, имамо да је

$$h_a = \sqrt{AC^2 - CP^2} = \sqrt{AD^2 - DP^2} \leqslant \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}},$$

одакле следи да је

$$P_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} a \cdot h_a \leqslant \frac{1}{2} a \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}.$$

Слично се доказује да за висину $BQ = h_b$ троугла BCD важи $h_b \leqslant \sqrt{1 - \dfrac{a^2}{4}}$. Пошто је $H_B \leqslant h_b$, где је H_B висина тетраедра $ABCD$ из темена B, имамо да је $H_B \leqslant \sqrt{1 - \dfrac{a^2}{4}}$. Дакле,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} P_{\triangle ACD} \cdot H_B \leqslant \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} \\ &= \frac{1}{6} a \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{1}{24} a (4 - a^2). \end{aligned}$$

Ако је $a = 1$, тада је $\dfrac{1}{24}a(4-a^2) = \dfrac{1}{8}$. Није тешко показати, да ако је $a < 1$, тада је $\dfrac{1}{24}a(4-a^2) < \dfrac{1}{8}$. Заиста, ако је $0 < a < 1$, имамо да је

$$\frac{1}{24}a(4-a^2) - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}(1-a)(a^2+a-3) < 0,$$

јер је $1-a > 0$ и $a^2+a-3 < 0$. Дакле, у сваком случају је $V \leqslant \dfrac{1}{24}a(4-a^2) \leqslant \dfrac{1}{8}$.

Напомена. Запремина оваквог тетраедра је једнака $\dfrac{1}{8}$ у случају да су ACD и BCD једнакостранични троуглови са страницама 1 $\left(P_{\triangle ACD} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ и } h_b = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и угао међу странама ACD и BCD једнак 90° $\left(H_B = h_b = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Није тешко доказати да је у оваквом тетраедру $AB = \sqrt{h_a^2 + h_b^2} = \sqrt{2 \cdot \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}} > 1$.

Четврти разред – А категорија

1. Како је:

$$\cos^6 x \sin^2 x = 27\frac{\cos^2 x}{3} \cdot \frac{\cos^2 x}{3} \cdot \frac{\cos^2 x}{3} \cdot \sin^2 x \leqslant 27\left(\frac{3\sin^2 x + 3\cos^2 x}{12}\right)^4 = \frac{27}{4^4},$$

при чему смо користили неједнакост између аритметичке и геометријске средине, добијамо да је $\cos^3 x \sin x \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{16}$. Једнакост важи за $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, тј. за $x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

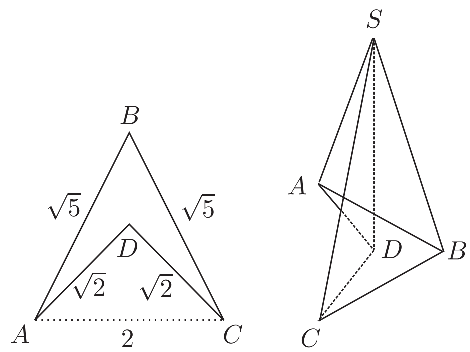
2. а) Најпре приметимо да за сваке три различите тачке A, B, C у равни важи да се средишта дужи $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ не поклапају.

Међу тачкама $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ посматрамо тачке P и Q чије растојање r је веће или једнако од растојања било које друге две тачке тог скупа. Све остале тачке из скупа $\mathcal{A} \setminus \{P, Q\}$ морају се налазити и у кругу $K(P, r)$, и у кругу $K(Q, r)$. Самим тим, средишта дужи $\overline{AP}$, за све тачке $A \in \mathcal{A} \setminus \{P, Q\}$, су различите тачке у кругу $K(P, r/2)$. Аналогно, средишта дужи $\overline{AQ}$, за све тачке $A \in \mathcal{A} \setminus \{P, Q\}$, су различите тачке у кругу $K(Q, r/2)$. Приметимо да се ниједно од наведених средишта не поклапа са средиштем R дужи $\overline{PQ}$. Како је $K(P, r/2) \cap K(Q, r/2) = \{R\}$, добијамо укупно $(n-2) + (n-2) + 1 = 2n - 3$ различитих тачака које припадају скупу $\mathcal{S}$.

б) У правоуглом координатном систему у равни дефинишимо $A_i = (2i, 0)$, за све $i = 1, 2, \ldots, n$. Средиште дужи $\overline{A_iA_j}$ је тачка $(i+j, 0)$. С обзиром да $3 \leqslant i + j \leqslant 2n - 1$, и $i + j \in \mathbb{N}$, јасно је да скуп $\mathcal{S}$ садржи $2n - 3$ тачака.

3. Најпре треба приметити да је четвороугао $ABCD$ неконвексан. Уколико би $ABCD$ био конвексан ($DB = 3$) имали бисмо да је $SA > AD = \sqrt{2}$ и $SB > DB = 3$, што је немогуће јер је $SA + SB = 2 + \sqrt{5} < 4{,}3 < 3 + \sqrt{2}$.

Лако се рачуна да је $P_{ABCD} = 1$. Применом Питагорине теореме на $\triangle SDA$ и $\triangle SDB$ добијамо: $SA^2 = SD^2 + DA^2$ и $SB^2 = SD^2 + DB^2$.



Тада је $SA^2 - SB^2 = DA^2 - DB^2 = 2 - 1 = 1$, па је

$$SA - SB = \frac{1}{2+\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2.$$

Последња једнакост, заједно са $SA + SB = 2 + \sqrt{5}$, даје $SA = \sqrt{5}$ (и $SB = 2$). Дакле, $SD = \sqrt{SA^2 - DA^2} = \sqrt{3}$, па је $V = \dfrac{P_{ABCD} \cdot SD}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

4. Пошто је $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$, следи да је функција f строго растућа на интервалима $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$, а строго опадајућа на интервалу $(-1, 1)$. Даље,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty, \quad f(-1) = 3, \quad f(1) = -1, \quad f(3) = 19 > 0.$$

Дакле, једначина $f(x) = 0$ има три различита корена x_1, x_2, x_3 таква да је $x_1 < -1 < x_2 < 1 < x_3 < 3$. Једначина, $f(x) = x_1$ има само један реалан корен (мањи од -1), док једначине $f(x) = x_2$ и $f(x) = x_3$ имају по три различита реалана корена–по један у сваком од интеравала $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$. Пошто су корени једначине $f(f(x)) = 0$ корени једне од поменуте три једначине, следи да дата једначина има седам различитих реалних корена.

5. Резултат је једнак збиру бројева свих партиција скупа од 7 елемената на 4 подскупа, на 3 подскупа, на 2 подскупа и на 1 подскуп, а типови партиције у односу на кардиналност подскупова су 1114 има их $\binom{7}{4}$, 1123 има их $\binom{7}{3}\binom{4}{2}$, 1222 има их $\binom{7}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{2}\frac{1}{3!}$, 115 има их $\binom{7}{5}$, 124 има их $\binom{7}{4}\binom{3}{2}$, 133 има их $\binom{7}{3}\binom{4}{3}\frac{1}{2!}$, 223 има их $\binom{7}{3}\binom{4}{2}\frac{1}{2!}$, 16 има их $\binom{7}{6}$, 25 има их $\binom{7}{5}$, 34 има их $\binom{7}{4}$ и сви у једном подскупу има их $\binom{7}{7}$ па је тражени број
$\left(\binom{7}{4} + \binom{7}{3}\binom{4}{2} + \binom{7}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{2}\frac{1}{3!}\right) + \left(\binom{7}{5} + \binom{7}{4}\binom{3}{2} + \binom{7}{3}\binom{4}{3}\frac{1}{2!} + \binom{7}{3}\binom{4}{2}\frac{1}{2!}\right) + \left(\binom{7}{6} + \binom{7}{5} + \binom{7}{4}\right) + \binom{7}{7} = 350 + 301 + 63 + 1 = 715.$

Први разред – Б категорија

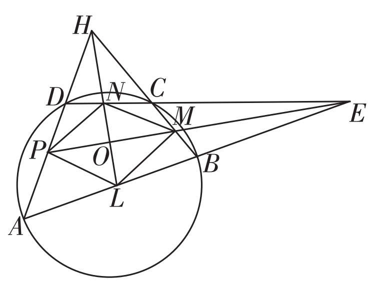
1. Видети решење 2. задатка за први разред у А категорији.

2. Дељењем парцеле на 3 дела укупан број парцела се повећава за 2, а при деоби на 4 дела број парцела се повећава за 3. Ако са m означимо број извршених деоба на 3 дела, а са n означимо број извршених деоба на 4 дела, проблем се своди на решавање Диофантове једначине $555+2m+3n = 4(m+n)$, односно $2m+n = 555$. Из последње једначине закључујемо да је n непаран, односно $n \in \{1, 3, ..., 555\}$, што значи да дата једначина има више решења. Нама је потребно наћи минимални збир $m+n$, и он се добија за минимално n, јер када се n повећа за 2, m се смањи за 1, па се збир повећава. Дакле, морало је бити учињено бар $1 + 277 = 278$ деоба.

3. Продужимо DQ и конструшимо тачку R тако да важи $DQ = QR$. Тада су троуглови DQC и RQB подударни ($DQ = QR, CQ = QB, \sphericalangle DQC = \sphericalangle RQB$) Одавде следи да су дужи DC и BR једнаке и паралелне (трансверзални углови). У троуглу DAR дуж PQ је средња линија троугла па следи да је $PQ = \frac{1}{2}AR$. Одавде следи да је $AR = 2(\frac{1}{2}(AB + CD)) = AB + CD \Rightarrow AR = AB + BR$. Ако последњу једнакост применимо на троугао ABR због неједнакости троугла следило би да су тачке A, B и R колинеарне. Како је BR паралелно са DC онда је и AB паралелно са DC па је четвороугао $ABCD$ трапез.

4. Нека је $\sphericalangle BAD = \alpha$ и $\sphericalangle ABC = \beta$ (слика 1). Тада је $\sphericalangle ADC = 180^0 - \beta$ и $\sphericalangle BCD = 180^0 - \alpha$ (јер је четвороугао $ABCD$ тетиван), па је

$$\begin{aligned}
\sphericalangle EBC &= 180^0 - \sphericalangle ABC = 180^0 - \beta,\\
\sphericalangle BCE &= 180^0 - \sphericalangle BCD = 180^0 - (180^0 - \alpha) = \alpha,\\
\sphericalangle HCD &= 180^0 - \sphericalangle BCD = \alpha,\\
\sphericalangle CDH &= 180^0 - (180^0 - \beta) = \beta.
\end{aligned}$$



Слика 1.

Према томе

$$\sphericalangle BEC = 180^0 - (\sphericalangle EBC + \sphericalangle ECB) = 180^0 - (180^0 - \beta + \alpha) = \beta - \alpha,$$

па је $\sphericalangle LEO = \sphericalangle NEO = \frac{\beta-\alpha}{2}$. Слично,

$$\sphericalangle CHD = 180^0 - (\sphericalangle CDH + \sphericalangle DCH) = 180^0 - (\alpha+\beta),$$

па је $\sphericalangle PHO = \sphericalangle MHO = 90^0 - \frac{\alpha+\beta}{2}$. За троугао MEC угао $\sphericalangle OMC$ је спољашњи, па је $\sphericalangle OMC = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{\beta+\alpha}{2}$. Сада, из троугла OMH закључујемо да

$$\sphericalangle MON = 180^0 - (\sphericalangle OHM + \sphericalangle OMH) = 180^0 - (90^0 - \frac{\beta+\alpha}{2} + \frac{\beta+\alpha}{2}) = 90^0.$$

Дакле у четвороуглу $LMNP$ дијагонале су нормалне. Из троугла PMH закључујемо

$$\begin{aligned}\sphericalangle MPH &= 180^0 - (\sphericalangle PHM + \sphericalangle PMH) = 180^0 - \left(180^0 - (\beta+\alpha) + \frac{\beta+\alpha}{2}\right)\\ &= \frac{\beta+\alpha}{2} = \sphericalangle PMH,\end{aligned}$$

па је троугао PHM једнакокрак. Тада је висина HO троугла PHM и тежишна дуж, па је $PO = OM$. Слично се показује да је и троугао LEN једнакокрак, па је $LO = ON$. Дакле, у четвороуглу $PLMN$ дијагонале су нормалне и полове се, што нас доводи до закључка де је четвороугао $PLMN$ ромб.

5. Видети решење 5. задатка за први разред у А категорији.

Други разред – Б категорија

1. Дати систем је еквивалентан са системом

$$\begin{aligned}ax^2 + (b-1)x + c &= y - x,\\ ay^2 + (b-1)y + c &= z - y,\\ az^2 + (b-1)z + c &= x - z.\end{aligned}$$

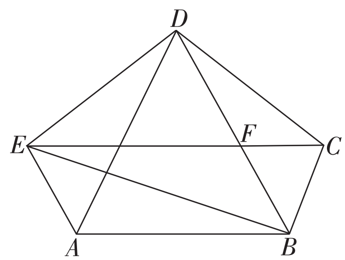
Ако саберемо одговарајуће леве и десне стране добијамо

$$[ax^2 + (b-1)x + c] + [ay^2 + (b-1)y + c] + [az^2 + (b-1)z + c] = 0. \tag{2}$$

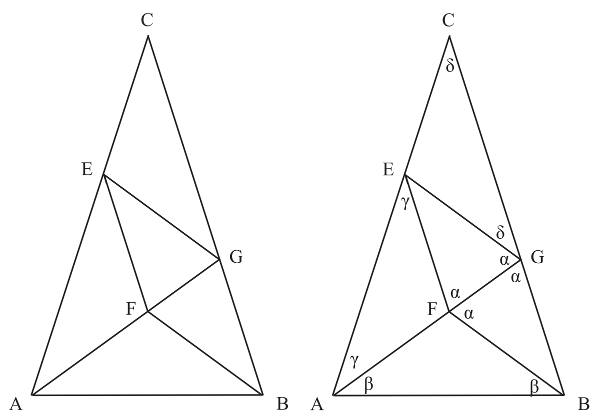
Како је због $(b-1)^2 - 4ac < 0$ сваки од три квадратна тринома за свако x, односно, y, z, различит од нуле једнакост (2) не може бити тачна. Дакле, дати систем нема реалних решења.

2. Како је $P_{\triangle AED} = P_{\triangle ABE} = 1$ и троуглови $\triangle AED$ и $\triangle AEB$ имају заједничку основицу AE, то су висине из темена B и D на страницу AE једнаке, па су B и D на једнаком растојању од AE, тј. $BD \parallel AE$. Слично долазимо до закључка да је $CE \parallel AB$. Нека је $CE \cap BD = \{F\}$. На основу претходног, четвороугао $ABFE$ је паралелограм и важи $P_{\triangle BFE} = P_{\triangle ABE} = 1$. Приметимо да је $P_{\triangle CDF} + P_{\triangle BFC} = P_{\triangle BDC} = 1 = P_{\triangle CDE} = P_{\triangle CDF} + P_{\triangle DFE}$, па је $P_{\triangle BFC} = P_{\triangle FDE} = P$. Тада је $P_{\triangle CDF} = 1 - P$. Троуглови $\triangle BFE$ и $\triangle FDE$ имају заједничку висину (из E на BD), па им се површине односе као одговарајуће странице, тј. $P : 1 = DF : BF$. Слично, $(1-P) : P = DF : BF$. Стога важи $P : 1 = (1-P) : P$. Решења ове квадратне једначине су $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, и како је $P > 0$, закључујемо да је $P = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Дакле,

$$P_{ABCDE} = P_{ABFE} + P_{BCD} + P_{DEF} = 2 + 1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$



3. Из услова задатка следи да су краци свих поменутих једнакокраких троуглова међусобно једнаки.



(a) (b)

Непосредна последица је подударност троуглова $GFB \cong GFE$. Нека је $\alpha = \sphericalangle EFG$ и β, γ, δ базни углови осталих једнакокраких троуглова, Слика (b). Лако се види да је $\beta = \alpha/2 = \gamma$, $\delta = 180^\circ - 2\alpha$ као и $\sphericalangle FBG = 180^\circ - 2\alpha$. Збир углова у троуглу ABC је 180 степени, тј.

$$180^\circ = \alpha + [\alpha/2 + (180^\circ - 2\alpha)] + (180^\circ - 2\alpha)$$

одакле следи да је $\alpha = 72^\circ$ па су троуглови EFG и ABC слични јер имају једнаке одговарајуће углове. Из сличности троуглова BGF и ABG налази се да је дуж AG подељена тачком F по "златном пресеку" одакле се добија да је коефицient сличности ових троуглова $(\sqrt{5}-1)/2$. Из истих разлога је коефицient сличности троуглова ABG и ABC $(\sqrt{5}-1)/2$.

Закључак: Коефицient сличности троуглова EFG и ABC је $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

4. Нека су $d_1, d_2, ..., d_k$ сви делитељи броја N. Важи $1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = N$ и за свако $l = 1, 2, ..., k$ важи $d_l \cdot d_{k+1-l} = N$. Такође важи $d_1 + d_2 + ... + d_{k-1} = N$ (број је савршен). Посматрајмо суму

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + ... + \frac{1}{d_k} = \frac{d_k}{d_1 \cdot d_k} + \frac{d_{k-1}}{d_2 \cdot d_{k-1}} + ... \frac{d_1}{d_4 \cdot d_1} = \frac{d_k}{N} + \frac{d_{k-1}}{N} + ... + \frac{d_1}{N}$$

Па се добија да је овај збир $\frac{d_k + (d_{k-1} + ... d_1)}{N} = \frac{N+N}{N} = 2$.

5. Видети решење 3. задатка за први разред у А категорији.

Трећи разред – Б категорија

1. Користећи неједнакост између аритметичке и геометријске средине добијамо:

$$2(a^4 + b^4) + 17 \geqslant 4a^2b^2 + 17 > 4a^2b^2 + 16 = 4(a^2b^2 + 4) \geqslant 8\sqrt{4a^2b^2} = 16ab.$$

2. Видети решење 2. задатка за други разред у А категорији.

3. Видети решење 3. задатка за други разред у А категорији.

4. Видети решење 5. задатка за трећи разред у А категорији.

5. Претпоставимо да постоји $N, N \geqslant 5$ међусобно пријатељских троуглова $T_1, T_2, ..., T_N$. Нека троугао T_1 има странице a, b, c. Од ових страница могу се оформити само три пара:

$$(a, b), (b, c), (c, a), \tag{3}$$

а сваки од троуглова $T_2, T_3, ..., T_N$ мора имати пар страница који се подудара са једним од парова (3). Стога, постоје бар два троугла међу троугловима $T_2, T_3, ..., T_N$ чији се један пар страница подудара са истим паром из (3). Без губитка општости узмимо да троуглови T_2 и $T3$ имају пар (a, b). Дакле, сваки од троуглова T_1, T_2, T_3 има странице a, b, и нека су x, y, z треће странице ових троуглова респективно (x, y, z су међусобно различите, јер у супротном има подударних троуглова међу T_1, T_2 и T_3). Како је троугао T_4 пријатељски са троуглом T_1, једна од његових страница једнака је a или b, и узмимо да је једнака a. Ако троугао T_4 нема страницу једнаку b, тада две његове преостале странице морају узети три различите вредности x, y, z (троугао T_4 има по две једнаке странице са сваким од троуглова T_1, T_2 и T_3), што је немогуће. Према томе, троугао T_4 има странице a и b. Исти закључак можемо извести за сваки троугао $T_i, i = 5, ..., N$. Дакле, сваки од троуглова $T_1, T_2, ..., T_N$ има странице a и b, тј. овај скуп троуглова је добар. Према томе, $N \geqslant 5$. С друге стране постоје четири међусобно пријатељска троугла $(a, b, c), (a, b, d), (b, c, d), (c, d, a)$ таква да њихов скуп није добар. Дакле, $N = 5$.

Четврти разред – Б категорија

1. Услов $x^y + y^x = x^x + y^y$ је еквивалентан са $x^x(x^{y-x} - 1) = y^x(y^{y-x} - 1)$. Пошто је $x^x \leqslant y^x$ и $x^{y-x} - 1 \leqslant y^{y-x} - 1$, видимо да је тај услов задовољен ако и само ако је $x = y$.

2. Видети решење 2. задатка за трећи разред у А категорији.

3. Две кружнице полупречника R и r, са центрима у тачкама $A = (a_1, a_2)$ и $B = (b_1, b_2)$ се додирују споља ако и само ако је испуњен услов

$$[(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2] = (R + r)^2.$$

Нека је r_n полупречник кружнице K_n а x_n њена тачка додира са x-осом. Одавде следи да је $C_n = (x_n, r_n)$ центар од K_n. Очевидно је $x_2 = 1/2$. Применом Питагорине теореме се лако налази да је $r_2 = 1/8$. Из услова додира кружница K_0, K_3 и K_2, K_3 (или директном применом Питагорине теореме) добијамо систем једначина

$$x_3^2 + \left(\frac{1}{2} - r_3\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + r_3\right)^2 \qquad \left(\frac{1}{2} - x_3\right)^2 + \left(\frac{1}{8} - r_3\right)^2 = \left(\frac{1}{8} + r_3\right)^2.$$

Из прве једначине се добија услов $x_3^2 = 2r_3$ а из друге $1 - 4x_3 + 4x_3^2 = 2r_3$. Решавањем овог система се добија $x_3 = \frac{1}{3}$ и $r_3 = \frac{1}{2 \cdot 3^2}$.

4. Видети решење 3. задатка за други разред у А категорији.

5. Видети решење 5. задатка за трећи разред у А категорији.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА РЕПУБЛИЧКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

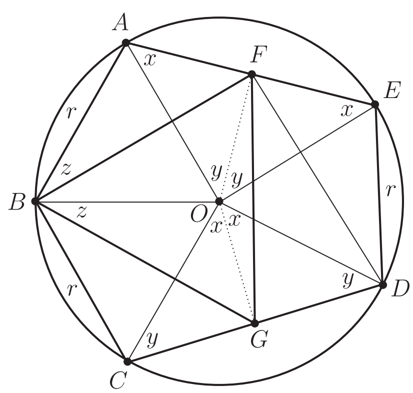
Први разред – А категорија

1. Бар један од скупова $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ садржи бар две тачке. Нека је то скуп $\mathcal{A}$ и нека су то тачке P и Q. Уочимо квадрат $PQRS$ ($PQ \parallel RS$). Ако је нека од тачака R, S у скупу $\mathcal{A}$, доказ је готов. Зато, нека су $R, S \in \mathcal{B}$. Нека је O центар квадрата $PQRS$. Ако је $O \in \mathcal{A}$, онда троугао PQO испуњава услове задатка, а ако је $O \in \mathcal{B}$, онда троугао ROS испуњава услове задатка.

2. Једначина из задатка је еквивалентна са $(3x+1)^2 + (3y+1)^2 + (3z+1)^2 = 3 \cdot 2004 + 3$. Како је $3 \cdot 2004 + 3 \equiv 3 \cdot 4 + 3 \equiv 7 \pmod 8$ и како квадрати целих бројева при дељењу са 8 могу дати остатке $0, 1$ или 4, следи да једначина нема решења.

3. Нека је O центар кружнице. Тада је $OG \perp CD$ и OG је симетрала угла COD. Нека је $x = \sphericalangle COG = \sphericalangle DOG$. Слично, нека је $y = \sphericalangle EOF = \sphericalangle AOF$. Како су $\triangle DOE$, $\triangle BOA$ и $\triangle BOC$ једнакостранични имамо да је $\sphericalangle DOE = \sphericalangle BOA = \sphericalangle BOC = 60^\circ$, па је

$$360^\circ = 3 \cdot 60^\circ + 2x + 2y, \text{ тј. } x + y = 90^\circ.$$



Лако закључујемо и да је

$$x = \sphericalangle OAE = \sphericalangle OEA \text{ и } y = \sphericalangle OCD = \sphericalangle ODC.$$

Из подударности троуглова AOF и OCG следи да је $AF = OG$ и $OF = CG$. Такође, како је $\sphericalangle BAF = 60^\circ + x = \sphericalangle BOG$, имамо да су и троуглови BAF и BOG подударни, па је $BF = BG$. Дакле, $\triangle GBF$ је једнакокраки са врхом B. Из $\triangle BAF \cong \triangle BOG$, следи и да је $\sphericalangle ABF = \sphericalangle OBG = z$, па је $60^\circ = \sphericalangle ABO = z + \sphericalangle OBF = \sphericalangle FBG$, па је $\triangle GBF$ једнакостраничан троугао.

4. Површина једнакостраничног троугла је $P_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, али можемо ставити да је $a = \frac{2s}{3}$ па добијамо да је $P_1 = \left(\frac{2s}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$. Површину произвољног троугла можемо израчунати Хероновим обрасцем па неједнакост коју треба да докажемо постаје:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leqslant \left(\frac{2s}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Квадрирањем неједнакости и сређивањем добијамо

$$(s-a)(s-b)(s-c) \leqslant \left(\frac{s}{3}\right)^3.$$

Ова неједнакост је тачна, јер када на леву страну применимо неједнакост између аритметичке и геометријске средине добићемо

$$(s-a)(s-b)(s-c) \leqslant \left(\frac{s-a+s-b+s-c}{3}\right)^3,$$
$$(s-a)(s-b)(s-c) \leqslant (\frac{3s-2s}{3})^3,$$
$$(s-a)(s-b)(s-c) \leqslant (\frac{s}{3})^3.$$

Једнакост важи када је $s-a = s-b = s-c$, тј. када је $a = b = c$.

5. Нека је тражена цифра једнака a. Како је $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$, тада би важило да је $\frac{n(n+1)}{2} = a \cdot \underbrace{11...1}_{k}$, $k > 1$, односно

$$(2n+1)^2 = 8 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 1 = 8 \cdot a \cdot \underbrace{11...1}_{k} + 1.$$

Ако је $a \in \{2, 4, 7, 9\}$ број на десној страни предходне једнакости завршава се са 3 или 7, а то није могуће пошто је он потпун квадрат. Ако је пак $a \in \{3, 8\}$ онда је двоцифрени завршетак броја $8 \cdot a \cdot \underbrace{11...1}_{k} + 1$ једнак 65 или 05. Међутим ово није могуће јер би се тада број $2n+1$ завршавао цифром 5, а његов квадрат са 25 (због $(10l+5)^2 = 100(l^2+l)+25$). Дакле, остају нам могућности $a = 1$, $a = 5$ и $a = 6$. Докажимо да није могуће $a = 1$. Претпоставимо да је $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{10^k-1}{9}$ за неко $k > 1$. Отуда је

$$2 \cdot 10^k = 9n^2 + 9n + 2 = (3n+1)(3n+2).$$

Како су бројеви $3n+1$ и $3n+2$ узајамно прости, то један од њих мора бити степен двојке, а други степен петице. Међутим, како је

$$5^k - 2^{k+1} > 2^{2k} - 2^{k+1} \geqslant 2^{k+2} - 2^{k+1} = 2^{k+1} \geqslant 8,$$

бројеви 5^k и 2^{k+1} не могу бити узастопни, па тражена цифра није једнака 1.

Очигледно, могуће је $a = 5$, јер је $\frac{10 \cdot 11}{2} = 55$, као и $a = 6$, пошто је $\frac{11 \cdot 12}{2} = 66$. Из свега наведеног закључујемо да је тражена цифра 5 или 6.

Други разред – А категорија

1. *Решење 1:* Рачунајући првих неколико чланова низа $a_n = 2^{n+2} \cdot 7^n + 1$ наслућујемо да су бројеви a_{2k-1} дељиви са 3, а бројеви a_{2k} са 5, што и доказујемо индукцијом. Број $a_1 = 57$ је дељив са 3. Нека је a_{2k-1} дељив са 3. Тада је и број $a_{2k+1} = 196a_{2k-1} - 3 \cdot 65$ дељив са 3. Број $a_2 = 785$ је дељив са 5. Нека је a_{2k} дељив са 5. Тада је и број $a_{2k+2} = 196a_{2k} - 5 \cdot 39$ дељив са 5. Како су сви a_n већи од 5, то су они сложени.

Решење 2: Како су сви $a_n = 2^{n+2} \cdot 7^n + 1$ већи од 5 и како је

$$a_{2k-1} = 2^{2k+1} \cdot 7^{2k-1} + 1 \equiv (-1)^{2k-1} \cdot 1 + 1 = 0 \pmod 3,$$

$$a_{2k} = 2^{2k+2} \cdot 7^{2k} + 1 \equiv 2^{2k+2} \cdot 2^{2k} + 1 = 4^{2k+1} + 1 \equiv (-1)^{2k-1} + 1 = 0 \pmod 5,$$

то су сви a_n сложени бројеви.

2. *Решење 1:* Покушајмо да одредимо када постоји троугао коме су унапред задани реални позитивни бројеви P и O редом површина и обим. Пођимо од Херонове формуле за површину троугла коме су дужине ивица a, b, c

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Обим истог троугла је $O = 2s = a + b + c$. Задатак је да се реши (по a, b и c) систем једначина

$$P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \qquad O = a + b + c,$$

уз услов да ти бројеви задовољавају неједнакост троугла. Увођењем смене $s - a = x, s - b = y, s - c = z$ добијамо еквивалентан проблем

$$2P^2/O = xyz \qquad O/2 = x + y + z,$$

уз услов да су x, y, z позитивни. Сада је сасвим јасно да се један степен слободе више може искористити да се нађу два решења која припадају неподударним троугловима. Пример су нпр. тројке $(x, y, z) = (2, 4, 6)$ и $(x, y, z) = (3, t_1, t_2)$ где су t_1 и t_2 решења једначине $t^2 - 9t + 16 = 0$.

Решење 2: Поставимо питање када позитивни реални бројеви a, O, P могу бити редом дужина једне стране, обим и површина неког троугла. Потребан услов је да важи $2a < O$ (неједнакост троугла). Ако је неједнакост $2a < O$ испуњена, онда је природно покушати конструкцију траженог троугла на следећи начин. Изаберимо тачцке B и C такве да је $\overline{BC} = a$ и нека је $p = p(A, B)$ права која пролази кроз њих. Нека је q права паралелна са $p = p(B, C)$ на удаљености h од те праве где је $(1/2)a \cdot h = P$. Другим речима ако изаберемо треће теме троугла A на правој q, његова површина биће P. Остаје да се види да ли се и на колико начина A може изабрати да обим тог троугла буде унапред задана вредност O. Приметимо да када се A налази на правој q, обим има најмању вредност када је троугао ABC једнакокраки, тј. када је $A = A_0$ где је A_0 врх једнакокраког троугла A_0BC. Такође уочимо да обим расте (и може постати по вољи велики) када се тачка A из положаја A_0 креће било стално на лево или стално на десно од A_0. (Ови закључци се лако изводе (уобичајним триком!) тако што се једна од тачака B или C симетрично преслика у односу на праву q итд.)

Претпоставимо да је P довољно мали број, тачније да важи неједнакост

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 < \left(\frac{O-a}{2}\right)^2$$

која гарантује да је обим једнакокраког троугла A_0BC мањи од O. У том случају из наведене анализе следи да постоје тачно два положаја тачке A, означимо их са A_1 и A_2, један лево а један десно од A_0, такви да су обими троуглова A_1BC и A_2BC једнаки O. Уочимо такође да су ови троуглови подударни, дакле тражени троугао је и једиствен у случајевима када постоји.

Сада је јасно да се пажљивим избором стране a могу добити два троугла који нису подударни. Заиста, нека је ABC јединствени троугао који реализују тројку (a, O, P). Нека су a, b, c дужине страна тог троугла. Ако се изабере a_1 тако да задовољава услове

$$2a_1 < O \qquad a < a_1 \qquad a_1 \notin \{a, b, c\}$$

онда су сви услови задовољени, дакле постоји троугао коме су a_1, O, P страна, обим и површина. Овај троугао има исти обим и површину као и претходни али са њим није подударан.

3. Доказ је последица следећег низа еквиваленција

$$\begin{aligned}
&P_1P_2 = P_3O \;\Leftrightarrow\; OP_1 = OP_2 + OP_3 \;\Leftrightarrow\\
&\frac{OP_1}{OA} = \frac{OP_2}{OA} + \frac{OP_3}{OA} \;\Leftrightarrow\\
&\cos\frac{\pi}{9} = \cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} \;\Leftrightarrow\\
&\cos\frac{\pi}{9} = 2\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{9} \;\Leftrightarrow\\
&\cos\frac{\pi}{9} = \cos\frac{\pi}{9}.
\end{aligned}$$

4. Од (не неопходно свих) људи из дневне собе најпре формирамо врсту максималне дужине за коју важи да се свака два суседна човека у врсти познају. Другим речима, није могуће формирати дужу врсту од ове, такву да се свака два суседна човека познају.

Први човек у овој врсти има пет познаника који сви такође морају бити у врсти, јер врста у супротном не би била максимална. Ако сада одаберемо редом људе из врсте, од првог човека до последњег његовог познаника у врсти, и сместимо их за округли сто у том редоследу, јасно је да ће свако седети између својих познаника. Број људи за столом је већи од пет, јер за њим седи први човек из врсте и свих пет његових познаника.

5. Једначина је дефинисана за $x \in [-2,2]$, јер мора бити $2+x \geqslant 0$ и $\sqrt{2+x} \leqslant 2$. Нека је $x = 2\cos t$, $t \in [0,\pi]$. Тада је $\cos\frac{t}{2} \geqslant 0$ и $\sqrt{2+x} = \sqrt{2(1+\cos t)} = \sqrt{4\cos^2\frac{t}{2}} = 2\cos\frac{t}{2}$. Даље је, $\sqrt{2-2\cos\frac{t}{2}} = \sqrt{2(1-\cos\frac{t}{2})} = \sqrt{4\sin^2\frac{t}{4}} = 2\sin\frac{t}{4}$, јер је $\sin\frac{t}{4} \geqslant 0$. Такође, $\sqrt{2+2\sin\frac{t}{4}} = \sqrt{2(1+\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{4}))} = \sqrt{4\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{8})} = 2\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{8})$, јер је $\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{8}) \geqslant 0$. Коначно, једначина постаје $\cos t = \cos(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{8})$, $t \in [0,\pi]$, тј. $t = \frac{2\pi}{9}$, односно, $x = 2\cos\frac{2\pi}{9}$.

Трећи разред – А категорија

1. Напишимо n у облику $n = kd$. Из дељивости $nd+1 \mid n^2+d^2$ добијамо:

$$d^2k+1 \mid d^2(k^2+1).$$

Како су d^2k+1 и d^2 узајамно прости, налазимо да је $d^2k+1 \mid k^2+1$. Отуда је $k \geqslant d^2$. Из особине дељивости добијамо:

$$d^2k+1 \mid k^2+1-(d^2k+1) = k(k-d^2).$$

Како су k и d^2k+1 узајамно прости, имамо да $d^2k+1 \mid k-d^2$. Уколико је $k \neq d^2$, имамо очигледну неједнакост

$$d^2k+1 > k-d^2 \quad \Leftrightarrow \quad d^2(k+1)+1 > k.$$

Ово је контрадикција. Зато је $k = d^2$ и $n = d^3$.

2. Означимо са $L(n)$ израз на левој страни и покажимо математичком индукцијом да је увек мањи од $2-\frac{2}{\sqrt{n+1}}$, тј.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2-\frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

1° *База индукције.* За $n=1$ имамо $\frac{1}{2} < 2-\frac{2}{\sqrt{2}}$, што се своди на $\frac{3}{4} > \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{9}{16} > \frac{1}{2}$.
2° *Индукцијска претпоставка.* Претпоставимо да тврђење важи за $n = k$:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < 2-\frac{2}{\sqrt{k+1}}.$$

3° *Индукцијски корак*. Испитајмо да ли важи за $n = k+1$:

$$\begin{aligned}
L(k+1) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} + \frac{1}{(k+2)\sqrt{k+1}} \\
&< 2 - \frac{2}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{(k+2)\sqrt{k+1}} \\
&= 2 - \frac{2k+3}{(k+2)\sqrt{k+1}} \\
&= 2 - \frac{2}{\sqrt{k+2}} \cdot \frac{\frac{(k+1)+(k+2)}{2}}{\sqrt{(k+1)\cdot(k+2)}} \leqslant 2 - \frac{2}{\sqrt{k+2}}.
\end{aligned}$$

(овде смо прву неједнакост добили на основу индуктивне претпоставке, а другу из неједнакости аритметичке и геометријске средине за бројеве $k+1$ и $k+2$, тј. из $\frac{A}{G} \geqslant 1$).

На основу принципа математичке идукције смо добили да важи $\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}}$ за сваки природан број n, што је и тврђење задатка.

3. Нека функција f задовољава услов задатка. Онда је $f(x) \geq 2xy - f(y)$ за све $x, y \in \mathbb{R}$, па за $y = x$ добијамо да је $f(x) \geq x^2$ (за све $x \in \mathbb{R}$). Даље, из услова следи да за свако x постоји $y = y(x)$ такво да је $f(x) = 2xy(x) - f(y(x))$. Из овога и из претходне неједнакости добијамо:

$$x^2 \leq f(x) = 2xy(x) - f(y(x)) \leq 2xy(x) - y^2(x),$$

па је $(x - y(x))^2 \leq 0$, тј. $y(x) = x$. Из $f(x) = 2xy(x) - f(y(x))$ онда следи да је $f(x) = x^2$. Ова функција је решење задатка:

$$\max_{y \in \mathbb{R}} (2xy - f(y)) = \max_{y \in \mathbb{R}} (x^2 - (x-y)^2) = x^2 = f(x).$$

4. Ако има x тимова са том особином, тада због услова задатка важи $x \cdot \binom{5}{3} \leqslant \binom{25}{3}$ тј. $x \leqslant \frac{\binom{25}{3}}{\binom{5}{3}} = 230 < 250 = 2 \cdot 5^3$.

5. Означимо са a, b и c, редом, дужине дијагонала AC, CE и EA шестоугла. Применом Птоломејеве неједнакости на четвороугао $ABCE$, налазимо да је $bAB + cBC = (b+c)AB \geqslant aBE$, тј. $\frac{AB}{BE} \geqslant \frac{a}{b+c}$. Аналогно, применом Птоломејеве неједнакости, редом, на четвороуглове $CDEA$ и $EFAC$, важи $\frac{CD}{DA} \geqslant \frac{b}{a+c}$ и $\frac{EF}{FC} \geqslant \frac{c}{a+b}$. Сада је, на основу неједнакости између аритметичке и хармонијске средине, испуњено

$$\begin{aligned}
\frac{AB}{BE} + \frac{CD}{DA} + \frac{EF}{FC} &\geqslant \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \\
&= \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} - 3
\end{aligned}$$

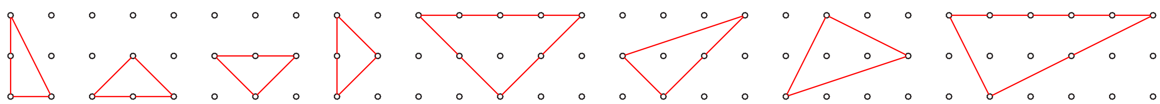
$$= (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3$$

$$\geqslant \frac{9(a+b+c)}{(b+c)+(c+a)+(a+b)} - 3 = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}.$$

Четврти разред – А категорија

1. Означимо са x праву која садржи 2. врсту мреже, са y праву нормалну на x која је такође оса симетрије дате мреже, затим у правоуглим троугловима теме правог угла са C.

Имамо следеће случајеве:



1° 2°а) 2°б) 2°б) 2°в) 2°г) 3°а) 3°б)

1° Троуглова са катетама паралелним координатним осама има

$$\binom{3n}{1} \cdot 2 \cdot (n-1) = 6n^2 - 6n,$$

јер теме C одређујемо на $\binom{3n}{1}$, 2 избора за теме по вертикали (у друге 2 врсте) и $n-1$ по хоризонтали (у преосталих $n-1$ колона).

2° Правоуглих троуглова чије катете заклапају углове од 45° са координатним осама има 4 врсте:

а) једнакокраки катета дужине $\sqrt{2}$, код којих је теме C у 1. или 3. врсти и има их

$$2 \cdot (n-2) = 2n - 4 \qquad \text{за} \quad n \geqslant 2;$$

б) једнакокраки катета дужине $\sqrt{2}$, код којих је теме C у 2. врсти и има их

$$2 \cdot (n-2) + 2 \cdot (n-1) = 4n - 6 \qquad \text{за} \quad n \geqslant 2;$$

в) једнакокраки катета дужине $2\sqrt{2}$ и има их

$$2 \cdot (n-4) = 2n - 8 \qquad \text{за} \quad n \geqslant 4;$$

г) разнокраки катета дужина $\sqrt{2}$ и $2\sqrt{2}$ и има их

$$4 \cdot (n-3) = 4n - 12 \qquad \text{за} \quad n \geqslant 3.$$

3° Правоуглих троуглова чија је једна катета дужине $\sqrt{5}$ има 2 врсте:

а) једнакокраки катета дужине $\sqrt{5}$ и има их

$$4 \cdot (n-3) = 4n - 12 \qquad \text{за} \quad n \geqslant 3;$$

б) разнокраки катета дужина $\sqrt{5}$ и $2\sqrt{5}$ и има их

$$4 \cdot (n-5) = 4n - 20 \qquad \text{за} \quad n \geqslant 5.$$

Када имамо множење се 2 то значи да теме C можемо изабрати и у 1. и у 3. врсти, тј. имамо симетрију у односу на праву x, а колону за теме C можемо изабрати на $(n-a)$ начина, сем у 2°б) где не бирамо теме C него средиште хипотенузе и први сабирак множимо са 2 због симетрије у односу на x, а други због симетрије у односу на y. Када имамо множење са 4, тада имамо симетрије и у односу на x и на y.

Коначно, добијамо да има $6n^2 + 14n - 62$ правоуглих троуглова.

2. Без губљења општости можемо претпоставити да је распоред тачака $P-O-H-Q$. Из тетивности $CA'IB'$ закључујемо да је $180^o = \gamma + \sphericalangle B'IA' = \gamma + \sphericalangle AIB = \gamma + 180^o - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$, одакле добијамо да је $\gamma = 60^o$. Четвороугао $ABOH$ је тетиван, јер је $\sphericalangle AOB = 2\gamma = 120^o$ (као централни угао) и $\sphericalangle AHB = 180^o - \sphericalangle BAH - \sphericalangle ABH = \alpha + \beta = 120^o$. Зато је $\sphericalangle PHA = 180^o - \sphericalangle AHO = \sphericalangle OBA$. У једнакокраком троуглу AOB је $\sphericalangle OBA = 90^o - \gamma$, а како је $AH \perp BC$, онда је и $\sphericalangle PAH = 90^o - \gamma$. Следи да је троугао APH једнакокрак и $AP = PH$. Аналогно показујемо да је $QB = QH$ и најзад је $PQ = PH + HQ = AP + BQ$.

3. Доказујемо индукцијом по n да оваквих x-ова има бесконачно много. За $n = 1$ тврђење важи; претпоставимо да важи за све $n < n_0$, где је $n_0 \geqslant 2$ неки природан број. Ставимо $x = 2^y$. Тада је по Ојлеровој теореми $2^x - x = 2^{2^y} - 2^y$ дељиво са n_0 ако је $2^y - y$ дељиво са $\varphi(n_0)$ и y је довољно велико (на пример, $y \geqslant n_0$). Такви природни бројеви y постоје према индукцијској претпоставци, одакле следи постојање бесконачно много тражених бројева x.

4. Приметимо да $x_i \notin \{-1, 0\}$ и да је $\dfrac{x_i}{1+x_i} = \dfrac{1}{1+x_i^{-1}}$. Користићемо следеће две очигледне чињенице:

(а) Ако су $y_i \neq 0$ нуле полинома $A(x)$ n-тог степена, онда су y_i^{-1} нуле полинома $x^n A(x^{-1})$.

(б) Ако су y_i нуле полинома $A(x)$, онда су y_i+1 нуле полинома $A(x-1)$. Из (а) следи да су x_i^{-1} нуле полинома $Q(x) = x^{48}P(x^{-1})$, из (б) – да су $1+x_i^{-1}$ нуле полинома $R(x) = Q(x-1)$. Коначно, из (а) следи да су $\dfrac{1}{1+x_i^{-1}}$ нуле полинома

$$\begin{aligned} x^{48}R(x^{-1}) &= x^{48}Q(x^{-1}-1) = x^{48}(x^{-1}-1)^{48}P((x^{-1}-1)^{-1}) \\ &= 18x^{48} + 3x(1-x)^{47} + 2006(1-x)^{48} \\ &= 2021x^{48} - 96147x^{47} + \cdots + 2006. \end{aligned}$$

Из Виетових формула за овај полином, добијамо да је тражени збир једнак $\dfrac{96147}{2021}$.

5. Заменом $x = 0$ добијамо $f(f(0)+y+1) = f(y)+1$. Сада имамо $x+f(y)+1 = f(f(x)+y+1) = f[(f(x)+1)+y] = f[f(f(0)+x+1)+(y-1)+1] = f(y-1) + (f(0)+x+1)+1$ одакле закључујемо да је

$$f(y) = f(y-1) + f(0) + 1. \tag{1}$$

Индукцијом добијамо да је $f(n) = f(0) + n(f(0)+1)$ за све целе бројеве n. Ако ставимо $y = 0$ у (1) добијамо да је $f(-1) = -1$ и заменом $y = -1$ у полазну једначину добијамо $f(f(x)) = x$. Ако применимо функцију f и на леву и на десну страну једнакости $f(n) = f(0) + n(f(0)+1)$ добијамо да је $n = f(0) + [f(0) + n(f(0)+1)](f(0)+1)$ што је еквивалентно са $n = f(0)(f(0)+2) + n(f(0)+1)^2$ а то може бити задовољено за све целе бројеве n само ако је $f(0) = 0$ или $f(0) = -2$. У првом случају добијамо да је $f(n) = n$ а у другом $f(n) = -n-2$. Једноставно се проверава да обе функције задовољавају услов задатка.

Први разред – Б категорија

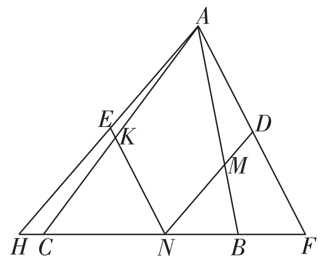
1. Он је увек између суседних квадрата $(n+2)^2$ и $(n+3)^2$.

2. Видети решење 1. задатка за први разред у А категорији.

3. а) Број $n^2+n+1 = n(n+1)+1$ је непаран, па не може бити дељив парним бројем 2006.
б) Број n^2+n+2 није дељив са 3 па не може бити дељив бројем 2007.

4. Нека је E друга пресечна тачка круга са центром у A и полупречником AC са правом BC. Како су троуглови ACE и ADM једнакокраки, закључујемо да је $\sphericalangle AED = \sphericalangle ACM$ и $\sphericalangle ADM = \sphericalangle AMD$. Следи да су троуглови AMC и ADE подударни и $DE = CM$. Тачка M је средиште странице BC, па је $DM = EB$. Из једнакости $\sphericalangle AEC = \sphericalangle ACE = 90^o - \frac{\sphericalangle B}{2}$, следи $\sphericalangle BAE = 180^o - \sphericalangle AEB - \sphericalangle B = 90^o - \frac{\sphericalangle B}{2}$. Сада је $AB = BE$ и наравно $AB = MD$.

5. Нека праве AD и AE секу праву BC у тачкама F и H, редом (видети слику). Довољно је доказати да је DE средња линија троугла AFH. Троугао MBN је једнакокрак ($BM = BN$) и $MN \parallel AH$, па је $AMNH$ једнакокраки трапез, тј. $NH = AM$. Аналогно се показује да је $FN = AK$. Како је $AK = AM$, то из добијених једнакости следи да је $FN = NH$, тј. N је средиште дужи FH. Тада је D средиште AF, а E средиште AH. Дакле, права DE садржи средњу линију троугла ABC.



Други разред – Б категорија

1. Ако обе стране дате једначине степенујемо на трећи, добијамо једначину еквивалентну полазној

$$x^2 - 3\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x-1}(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x-1}) - x + 1 = 1.$$

Како је $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x-1} = 1$, то из последње једначине следи

$$x^2 - 3\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x-1} - x = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x}) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x}(x-1) - 3\sqrt[3]{x-1}) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x-1}(\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(x-1)^2} - 3) = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\sqrt[3]{x^2} = 0 \vee \sqrt[3]{x-1} = 0 \vee \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(x-1)^2} = 3 \Longleftrightarrow$$

$$x = 0 \vee x = 1 \vee x(x-1)^2 = 27.$$

Ако је $x \in Z$ решење једначине $x(x-1)^2 = 27$, онда x дели 27 и $x > 0$. Зато провером за $x = 1$, $x = 3$, $x = 9$ и $x = 27$ видимо да та једначина нема целобројно решење. Дакле, једини цели бројеви који могу бити решења полазне једначине су $x = 0$ и $x = 1$. Провером добијамо да ово заиста јесу решења (провера мора да се изврши, пошто трансформацијама нисмо увек добијали еквивалентне једначине почетној).

2. Неку су целобројни корени прве једначине k и l, а друге m и n. Тада би на основу Виетових правила важило

$$k + l = -b \tag{1}$$
$$k \cdot l = c \tag{2}$$
$$2(m+n) = -b-1, \tag{3}$$
$$2m \cdot n = c+1. \tag{4}$$

Из једнакости (4) следи да је број c непаран. Сада, на основу једнакости (2) закључујемо да су бројеви k и l непарни, из чега, даље, на основу (1), закључујемо да је b паран број. Међутим, на основу (3) следи да је b непаран број. Стога, бројеви b и c са траженим својством не постоје.

3. *Решење 1:* Треба видети да ли постоји реалан број a, такав да је

$$\frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5} \leqslant a$$

за свако $x \in R$, и ако постоји пронаћи његову најмању вредност. Неједначина $\frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5} \leqslant a$ еквивалентна је са неједначином

$$0 \leqslant a(x^2+4x+5) - (2x^2+6x+6),$$

(пошто је $x^2+4x+5 = (x+2)^2+1 > 0$ за свако $x \in R$), односно са неједначином

$$0 \leqslant (a-2)x^2 + (4a-6)x + 5a - 6.$$

Нека је $g(x) = (a-2)x^2+(4a-6)x+5a-6$. За $a = 2$ функција $g(x)$ је линеарна и очигледно је за неке реалне бројеве њена вредност негативна (када је $x < -2$). Ако је $a \neq 2$, тада је $g(x)$ квадратна функција, која треба да буде ненегативна за свако $x \in R$. То је остварено акко је $a - 2 > 0$ и $0 \geqslant D = (4a-6)^2 - 4(a-2)(5a-6) = -4a^2+16a-12$, односно ако је $a > 2$ и $a \in (-\infty, 1] \bigcup [3, \infty)$, дакле за $a \geqslant 3$. На овај начин смо доказали да је $f(x) \leqslant 3$, за свако $x \in R$, а једнакост се достиже само за $x = -3$. Из свега наведеног закључујемо да дата функција има максимум и да је он једнак 3.

Решење 2: Како је

$$\frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5} = \frac{2x^2+8x+10-2x-4}{x^2+4x+5}$$
$$= 2 - \frac{2x+4}{x^2+4x+5} = 2 - \frac{2(x+2)}{(x+2)^2+1},$$

на основу неједнакости

$$-1 \leqslant \frac{2t}{t^2+1} \leqslant 1$$

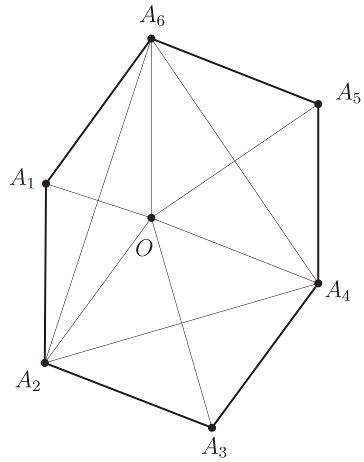
следи да је

$$2 - \frac{2(x+2)}{(x+2)^2+1} \leqslant 2 - (-1) = 3.$$

Максимум се добија за

$$x+2=-1 \Rightarrow x=-3.$$

4. Како је збир унутрашњих углова у конвексном шестоуглу 720°, следи да је $\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5=\alpha_2+\alpha_4+\alpha_6=360^\circ$, па се темена A_1, A_3, A_5 осном симетријом редом у односу на праве A_6A_2, A_2A_4, A_4A_6 пресликавају у исту тачку O.



(Пресликајмо A_1 у односу на A_6A_2 у тачку O. Нека је Op полуправа која неконвексан угао A_6OA_2 дели на два угла величине α_3 и α_5: $\sphericalangle A_2Op=\alpha_3$ и $\sphericalangle A_6Op=\alpha_5$. На полуправој Op уочимо тачку A да је OA једнако страници шестоугла. Из $\triangle A_2A_3A_4 \cong \triangle A_2OA$ и $\triangle A_4A_5A_6 \cong \triangle A_6OA$ следи да је $A_2A_4=A_2A$ и $A_4A_6=A_6A$, па се тачке A_4 и A поклапају.)

Наспрамни углови ромба су једнаки, па је $\alpha_1=\sphericalangle A_6OA_2$, $\alpha_3=\sphericalangle A_2OA_4$, $\alpha_5=\sphericalangle A_4OA_6$. Пошто су краци углова A_6OA_2 и $A_5A_4A_3$ паралелни и једнако усмерени следи да су једнаки па је $\alpha_1=\alpha_4$. Слично се закључује да је $\alpha_2=\alpha_5$ и $\alpha_3=\alpha_6$.

5. Видети решење 4. задатка за други разред у А категорији.

Трећи разред – Б категорија

1. Применом Питагорине теореме једноставно добијамо $t_a^2=b^2+(\frac{a}{2})^2$ и $t_b^2=a^2+(\frac{b}{2})^2$. Како је $t_c=\frac{c}{2}$, то је прво, на основу неједнакости између аритметичке и квадратне средине, $\frac{t_a+t_b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{t_a^2+t_b^2}{2}}=\sqrt{\frac{5}{8}(a^2+b^2)}=\frac{c}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$, а затим и $\frac{t_a+t_b}{t_c} \leqslant \frac{c\sqrt{\frac{5}{2}}}{\frac{c}{2}}=\sqrt{10}$. Дакле, максимална вредност израза $\frac{t_a+t_b}{t_c}$ је $\sqrt{10}$ и иста се достиже уколико је троугао једнакокрако правоугли, тј. за $a=b$.

2. Користећи процену да је $\sin^2 x \geqslant \sin^{2005} x$, $\sin^2 x \geqslant \sin^{2006} x$ и $\cos^2 x \geqslant \cos^{2006} x$, добијамо

$$\sin^{2005} x + \cos^{2005} x + \sin^{2006} x \leqslant \sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x \leqslant 1 + \sin^2 x \leqslant 2.$$

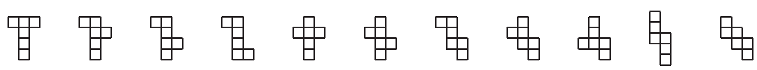
Да би вредела једнакост свуда морају бити једнакости. Због последње једнакости мора бити $\sin^2 x = 1$, односно $\sin x = 1 \vee \sin x = -1$. Провером се добија да може важити само $\sin x = 1$. Решавањем се добија да је $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, за $k \in \mathbb{Z}$.

3. Из једнакости површина добијамо $DE \cdot AE \cdot \sin \sphericalangle DEA = CE \cdot BE \cdot \sin \sphericalangle BEC$, одакле је $DE : EB = EC : AE$ и троуглови DEC и BEA су слични, па је $\alpha = \sphericalangle ACD = \sphericalangle CAB$. Применом косинусне теореме за троугао ABE добија се

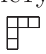
$$25t^2 = 36t^2 + 49t^2 - 84t^2 \cos \alpha$$

$(BE = 5t, EA = 6t, AB = 7t)$, одакле је $\cos \alpha = \frac{5}{7}$.

4. Постоји 11 нееквивалентих мрежа коцке.



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Покажимо да не постоји још нека нееквивалентна мрежа коцке. Приметимо прво да у мрежи коцке не могу бити 5 или 6 квадратића у реду (тада би 1. и 5. покривали исту страну коцке). Такође мрежа не може садржати ни квадрат 2×2, , ни  јер би опет нека 2 квадратића покривала исту страну коцке. Првих 6 мрежа са горње слике имају 4 квадратића у реду, следеће 4 имају највише 3 квадратића у реду и последња има само по 2 квадратића у реду.

5. Ако је $x \geqslant 6$ и $y \geqslant 6$ тада је $x! + y!$ дељиво са 9, док $15 \cdot 2^{z!}$ није. Дакле, можемо претпоставити да је $y \leqslant x$ и $y \leqslant 5$. Тада је

$$\frac{x!}{y!} + 1 = \frac{15 \cdot 2^{z!}}{y!}.$$

Цео број $\dfrac{15 \cdot 2^{z!}}{y!}$ је непаран само ако је $z = 1$ и у том случају је $x = 4$ и $y = 3$. Ако је $z \geqslant 2$, тада је цео број $\dfrac{x!}{y!}$ непаран, одакле следи или да је $x = y$ или $x = y + 1$ и x непаран. У првом случају 15 дели $y!$, па је $y = 5$ и $z = 4!$, што је немогуће. У другом случају добијамо или да је $y = 2, x = 3$ или $y = 4, x = 5$, што је такође немогуће. Према томе, тражене тројке су $(4, 3, 1)$ и $(3, 4, 1)$.

Четврти разред – Б категорија

1. Видети решење 2. задатка за трећи разред у А категорији.

2. То ће се десити кад график функције $y = a^x$ додирне праву $y = x$. Тада мора бити $(a^x)' = 1$, тј. $a^x \ln a = 1$. Дакле, a налазимо из система:

$$a^x \ln a = 1, \;\; a^x = x.$$

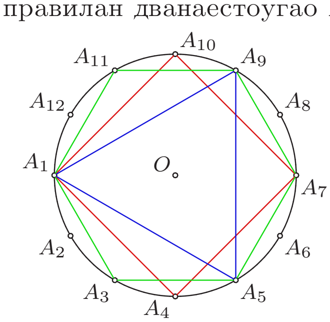
Одатле добијамо да је $x = \frac{1}{\ln a}$, па заменом у другу једначину коначно добијамо да је $a = e^{1/e}$.

3. Из синусне теореме имамо да је $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$. Одавде, користећи дати однос углова и страница, имамо

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{\sin\beta}{\beta} = \frac{\sin\gamma}{\gamma}.$$

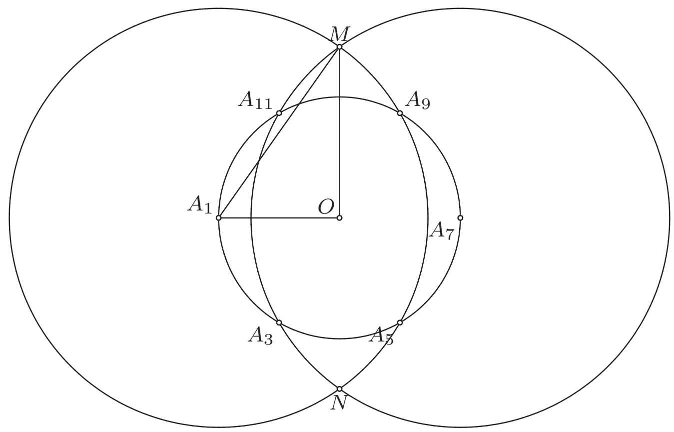
Посматрајмо функцију $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ на интервалу $(0, \pi)$. Доказаћемо да је она опадајућа. Налазимо да је $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$. Нека је $g(x) = x\cos x - \sin x$. Како је $g'(x) = -x\sin x < 0$ на интервалу $(0, \pi)$, то је функција $g(x)$ опадајућа на њему и како је $g(0) = 0$ имамо да је $g(x) < 0$ за свако $x \in (0, \pi)$ (овде смо искористили и непрекидност функције $g(x)$ на $[0, 2\pi)$). Зато је $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} < 0$ на $(0, \pi)$, те је функција $f(x)$ опадајућа на овом интервалу, што смо и хтели да покажемо. Отуда, користећи чињеницу да је $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma)$ и $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$, закључујемо да је $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$. Дакле, једини троугао за чије углове и странице важи дати однос је једнакостранични троугао.

4. Анализа: Упишемо правилан дванаестоугао $A_1A_2...A_{12}$ у кружницу k.



У теменима дванаестоугла могу се конструисати једнакостраничан троугао $A_1A_5A_9$, квадрат $A_1A_4A_7A_{10}$ и правилан шестоугао $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}$. Ако је полупречник кружнице r, онда је $a_3 = A_1A_5 = r\sqrt{3}$, $a_4 = A_1A_4 = r\sqrt{2}$ и $a_6 = A_1A_3 = r$. На основу једнакости $(r\sqrt{3})^2 = (r\sqrt{2})^2 + r^2$ следи да су a_3,a_4 и a_6 странице правоуглог троугла.

Конструкција: Конструишемо правилан шестоугао $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}$. Конструишемо кружницу са центром A_1 и полупречником $A_1A_9 = r\sqrt{3}$ и кружницу са центром A_7 и полупречником $A_7A_{11} = r\sqrt{3}$ У пресеку ове две кружнице добијамо тачке M и N. Троугао MOA_1 је правоугли где су странице $OA_1 = r$ и $A_1M = r\sqrt{3}$ одатле следи да је $MO = r\sqrt{2}$. Сада је довољно да се из темена шестоугла описују кружнице са полупречником MO и добиће се још 6 темена правилног дванаестоугла.



Доказ: Доказ следи директно из анализе и конструкције.
Дискусија: Решење је јединствено и увек је могуће.

5. (а) Било који петоцифрени палиндром $\overline{abcba}$ може се приказати у облику
$$\overline{abcba} = 10\,001a + 1\,010b + 100c = 101(99a + 10b + c) + 2a - c.$$
То значи да је тај палиндром дељив са 101 ако и само ако је $2a - c = 0$ (јер је за било које цифре a и c испуњено $|2a - c| < 101$). Једначина $2a = c$ имплицира да је $a \leqslant 4$. Пошто тражимо највећи број, узећемо да је $a = 4$. Тада је $c = 8$. Како за цифру b немамо никакве услове, то ћемо узети $b = 9$ да бисмо добили највећи могући број. Дакле, тражени број је 49 894.
(б) Међу следећих 109 узастопних петоцифрених бројева
$$10\,902,\ 10\,903,\ \ldots,\ 10\,999,\ 11\,000,\ \ldots,\ 11\,009,\ 11\,010$$
нема палиндрома. Најмањи и највећи петоцифрени палиндроми су редом 10 001 и 99 999. Пре броја 10 001 је само један петоцифрен број, а иза броја 99 999 нема више петоцифрених бројева. Показаћемо да после било ког петоцифреног палиндрома x, $x \neq 99\,999$, постоји други петоцифрен палиндром облика $x+100$ или $x+110$ или $x+11$. Означимо $x = \overline{abcba}$. Ако је $c \neq 9$, тада је број
$$x + 100 = \overline{ab(c+1)ba}$$
палиндром. Ако је $c = 9 \neq b$, број
$$x + 110 = \overline{a(b+1)0(b+1)a}$$
је палиндром, и коначно ако је $c = b = 9$ (наравно, $a \neq 9$) број
$$x + 11 = \overline{(a+1)000(a+1)}$$
је палиндром.

Према томе, највећи могући број узастопних петоцифрених бројева међу којима нема палиндрома је 109.

САДРЖАЈ