ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Материјали за младе математичаре, св. 44

Владимир Балтић Душан Ђукић

Ђорђе Кртинић Иван Матић

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА

СРЕДЊОШКОЛАЦА У СЦГ

2003. и 2004.

Збирка решених задатака

Б Е О Г Р А Д

2004

Аутори: *Владимир Балтић*, асистент Економског факултета у Београду
Душан Ђукић, асистент Универзитета у Торонту
Ђорђе Кртинић, асистент Математичког факултета у Београду
Иван Матић, асистент Универзитета Беркли

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА средњошколаца у СЦГ
2003. и 2004. година
Збирка решених задатака

Материјали за младе математичаре, свеска 44

Издавач: ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
Београд, Кнеза Михаила 35/IV
dms@matf.bg.ac.yu , http://www.matf.bg.ac.yu/dms/

Рецензенти: *др Раде Дорословачки*

Уредник: *др Зоран Каделбург*

За издавача: *др Раде Дорословачки*

Цртежи и слог: *аутори*

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

51-74:004(075.8)(076)

СТЕВАНОВИЋ, Драган
Diskretna matematika : osnovi kombinatorike i teorije grafova : zbirka rešenih zadataka / Dragan Stevanović, Marko Milošević, Vladimir Baltić ; [crteži autori]. – Beograd : Drushtvo matematichara Srbije, 2004. (Valjevo : Alexandria). – 195 str. : graf. prikazi ; 24 cm. – (Materijali za mlade matematichare ; sv. 43 / Drushtvo matematichara Srbije)

Tiraž 500. – Bibliografija: str. 195.

ISBN 86–81453–52–1
1. Милошевић, Марко
а) Дискретна математика - Задаци
COBISS.SR–ID 115360268

ISBN: 86–81453–52–1

Тираж: 500 примерака

Штампа: ALEXANDRIA, D.O.O, Ваљево

Садржај

Увод

Прво да се осврнемо на наслов који није у потпуности тачан – збирка садржи сва такмичења у школској 2002/3. и 2003/4. години под покровитељством Друштва математичара Србије, на којима су учествовали ученици из наше земље.

Ова збирка је настала са једним циљем – да се ученици што боље припреме за такмичења и да, као последица претходног, подигнемо ниво резултата наших такмичара на међународним математичким такмичењима (Међународна математичка олимпијада, енг. International Mathematical Olympiad, IMO; Балканијада, енг. Balkan Mathematical Olympiad, BMO). У склопу ове идеје се налазе и тематска издања Друштва математичара Србије (неједнакости, дискретна математика, комбинаторика, функционалне једначине, теорија бројева. . .), која су последњих година изашла из штампе. Да је у нашој земљи ситуација таква да се ови програми у потпуности могу испратити потпуним и добро организованим припремама наших међународних екипа, резултати би били свакако још сјајнији и ми се искрено надамо да ће до тога доћи у скоријој будућности.

Од осталих збирки овог типа, наша се разликује по две битне карактеристике:

1. сви задаци у збирци су потпуно решени, а за неке од њих је дато и више суштински различитих решења;

2. задаци су груписани по такмичењима, а не областима.

Сада ћемо "образложити" зашто смо се определили за ова два концепта. Збирка овог типа **мора** да има све задатке решене, да не би остале неке недоумице код ученика. Такође, концепт давања више решења истог задатка (који је присутан и на међународним такмичењима) је изузетно битан да би ученици видели да се један задатак може решити на неколико потпуно различитих начина, као и да је математика једна велика целина која је састављена од само наизглед неповезаних делова. Да бисмо ово илустровали искористићемо следећу метафору:

Замислите боксера који зна само један ударац, нпр. директ. Он је савршено увежбао тај ударац, али не зна ниједан други. Када изађе у ринг, искусан противник ће то веома брзо приметити и блокираће све његове ударце. Али да он зна и кроше и аперкат, сигурно би могао очекивати бољи резултат. Иста ситуација је и у математици. Ако знамо више различитих метода дати проблем можемо напасти са разних страна, те су нам стога веће шансе да га савладамо.

Још један разлог да задатке групишемо по такмичењима (уз податке када и где је организовано такмичење, као и колико времена је било предвиђено за израду) је да ученицима приближимо целокупни систем такмичења у нашој земљи, као и на међународним такмичењима (аутори мисле да већина наших ученика постиже слабије резултате од очекиваних у свом првом изласку на међународну сцену, због недовољне припремљености на услове такмичења на том степену). Такмичења из математике уобичајено се одржавају суботом, али где то није случај посебно смо нагласили (код међународних такмичења, као и неких такмичења за избор екипе).

Сви аутори су бивши такмичари, који су постигли запажене резултате на међународним такмичењима. Сви су учествовали у раду са младим талентованим ученицима из Математичке гимназије у Београду (коју су сви завршили, тако да су њој природно били највише окренути), али и са осталим ученицима широм Србије и Републике Српске, током разних припрема за савезна и међународна такмичења.

Овде морамо да поменемо све оне ентузијасте, поред аутора, који су претходне две године учествовали у раду Републичке комисије за такмичења средњошколаца из математике (Ђорђе Кртинић је био председник ове комисије школске 2002/3. године, а Владимир Балтић 2003/4.):

1. Анић мр Иван, Математички факултет, Београд
2. Гајић др Борислав, Математички институт САНУ
3. Долинка др Игор, ПМФ, Нови Сад
4. Дорословачки др Раде, ФТН, Нови Сад, председник ДМС
5. Драговић др Владимир, Математички институт САНУ, директор МГ у Београду
6. Дугошија др Ђорђе, Математички факултет, Београд, вођа олимпијске екипе
7. Живковић др Миодраг, Математички факултет, Београд
8. Икодиновић мр Небојша, ПМФ, Крагујевац
9. Каделбург др Зоран, Математички факултет, Београд, председник Савеза друштава математичара
10. Кнежевић Миљан, Математички факултет, Београд
11. Лазовић Небојша, Министарство просвете и спорта Републике Србије

12. Лаудановић мр Младен, Математички факултет, Београд
13. Маринковић Растко, Математичка гимназија, Београд
14. Марковић др Петар, ПМФ, Нови Сад
15. Милићевић Ђорђе, Принстон, САД
16. Милосављевић Милош, ПМФ, Ниш
17. Младеновић др Павле, Математички факултет, Београд, председник Савезне комисије за такмичења
18. Николић мр Небојша, Факултет организационих наука, Београд
19. Огњановић мр Срђан, Математичка гимназија, Београд
20. Павловић Иван, Гимназија Вук Караџић, Лозница
21. Петровић Никола, Институт за физику, Београд
22. Радновић др Милена, Математички институт САНУ
23. Станојевић Раде, ПМФ, Ниш
24. Тановић др Предраг, Математички институт САНУ
25. Томић Иванка, Гимназија, Ваљево
26. Тошић др Ратко, ПМФ, Нови Сад
27. Чукић др Љубомир, Грађевински факултет, Београд

Поред чланова Републичке комисије у избору задатака за савезно такмичење су учествовали и Видан Говедарица (Република Српска), Радивоје Ђурковић (Република Српска), Слободан Шћепановић (Црна Гора). Овом приликом се захваљујемо и домаћинима републичких и савезних такмичења у ове две године: Шапцу, Новом Саду, Нишу и поново Шапцу. Задатке за пробна такмичења у Математичкој гимназији у Београду (која су у исто време одржавана и у Крагујевцу, Нишу и Новом Саду), поред аутора, састављали су и прегледали: Лаудановић Младен, Лукић Миливоје (студент Математичког факултета у Београду), Маринковић Растко, Милићевић Ђорђе и Петровић Никола.

Посебно поглавље у овој збирци чине Сусрети гимназија централне Србије. Захваљујемо се Икодиновић Небојши који нам је послао ове задатке, као и свим учесницима овог сабора младих и старијих математичара из овог дела наше републике. Уврстили смо и Прве сусрете у нашу збирку, иако су они одржани школске 2001/2. године, јер ти задаци нису нашли место ни у једној другој математичкој публикацији (укључујући и часопис Тангенту, која даје преглед скоро свих дешавања у свету математике на овим просторима).

Последње поглавље ове збирке сачињавају резултати наших ученика уна међународним такмичењима у ове две године, са описом најважнијих дешавања током ових такмичења. Циљ овог дела књиге је да будућим учесницима приближи атмосферу на овим такмичењима. Извештај са ИМО 2003. преузет је из чланка Ђорђа Дугошије и Владимира Јанковића из Тангенте.

Овде морамо да се захвалимо и Предрагу Јаничићу, доценту Математичког факултета у Београду (такође бившем такмичару и олимпијцу), који је развио програмски језик WinGCLC уз помоћ кога су нацртане скоро све (једна није) слике у овој збирци. Мислимо да сви математичари, који се сусрећу са цртањем геометријских слика и решавањем геометријских проблема, морају да овладају овим пакетом (сви аутори су се уверили да је за ово потребно 10-так минута, јер је Help одлично урађен!), наравно поред LaTeX-а, који је већ постао стандард за куцање математичких књига и научних радова. WinGCLC можете наћи на следећој адреси:

http://www.matf.bg.ac.yu/˜janicic/gclc/index.html

Велику захвалност дугујемо и рецензентима који су пажљивим читањем рукописа и сугестијама допринели на квалитету ове збирке. Како ниједна књига није без грешака, молимо све читаоце да нам укажу на све које уоче. Заслуге за лепоту задатака су искључиво њихових предлагача, док су за све грешке у овој збирци искључиво одговорни аутори.

У Београду, фебруара 2005. Аутори

Такмичења у 2003. години

Званична такмичења

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ,
субота, 18. 01. 2003.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

Први разред – А категорија

1. Наћи највећи заједнички делилац бројева $\underbrace{11111111}_{8}$ и $\underbrace{111\ldots11}_{100}$.

2. Растојање између села A и B је 3 километра. У селу A има 100 ђака, а у селу B 50 ђака. На ком растојању од села A треба саградити школу, тако да укупан пут који сви ђаци прелазе у току једног дана буде најмањи?

3. Нека су a, b и c странице троугла и

$$p=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a},\qquad q=\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}.$$

Доказати да је $|p-q|<1$.

4. Дијагонала AC четвороугла $ABCD$ уписаног у круг је пречник тог круга. Доказати да су пројекције страница AB и CD на дијагоналу BD једнаке.

5. Студент је у току петогодишњих студија положио 31 испит. Сваке године је дао више испита него претходне, а на петој години је дао три пута више испита него на првој. Колико испита је студент положио на четвртој години?

Други разред – А категорија

6. Базен се пуни двема цевима за 6 сати. Прва цев би га напунила за 5 сати мање од друге. За које време би базен напунила друга цев?

7. У скупу целих бројева решити једначину

$$x^2 + y^2 = 3(u^2 + v^2).$$

8. Нека су a и b реални бројеви такви да је $(\forall x \in \mathbb{R})\ a\cos x + b\cos 3x \leqslant 1$. Доказати да је тада $|b| \leqslant 1$.

9. Нека је дат правоугли троугао $\triangle ABC$ са правим углом код темена C ($\sphericalangle BCA = 90^\circ$) и нека симетрала правог угла сече хипотенузу у тачки D. Нека су тачке K и E подножја нормала из тачке D на странице BC и AC, редом. Доказати да је

$$AD^2 + BD^2 = (AE + BK)^2.$$

10. На катетама једнакокрако–правоуглог троугла $\triangle ABC$ (прав угао је $\sphericalangle BCA = 90^\circ$), изабране су тачке $D \in AC$ и $E \in BC$, такве да је $CD = CE$. Нека су K и L тачке са дужи AB, такве да је $DK \perp AE$ и $CL \perp AE$. Доказати да је $KL = LB$.

Трећи разред – А категорија

11. Доказати да једначина $x^n + y^n = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, нема решења у скупу природних бројева, где је $z \leqslant n$.

12. Решити систем у зависности од реалног параметра a:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3\cdot 2^x & + & 2y & - & 3\arcsin z & = & 7 \\ 2^x & - & y & - & \arcsin z & = & -6 \\ 5\cdot 2^x & - & y & + & \arcsin z & = & 6a+2. \end{array}$$

13. На колико начина се број 2002 може представити у облику збира нерастућих природних бројева (више од једног сабирка) таквих да је и њихов производ једнак 2002?

14. Нека су $b = CA$ и $c = AB$ странице троугла $\triangle ABC$ и l_a дужина симетрале угла код темена A. Доказати да, ако важи $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{l_a}$, онда је $\sphericalangle BAC = 120^\circ$.

15. Многоугао који је описан око круга полупречника r, разложен је на коначно много троуглова. Доказати да је сума полупречника уписаних кругова у те троуглове већа од r.

Четврти разред – А категорија

16. Доказати да за позитивне реалне бројеве a, b и c важи неједнакост

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leqslant abc.$$

17. У скупу ненегативних целих бројева решити једначину

$$x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y.$$

18. Доказати да за реалне бројеве a и b важи

$$a \leqslant b \quad \Rightarrow \quad a^3 - 12a - 16 \leqslant b^3 - 12b + 16.$$

19. Нека су $a = BC$, $b = CA$ и $c = AB$ странице троугла $\triangle ABC$ у коме је $\sphericalangle BAC = 3 \cdot \sphericalangle ABC$. Доказати да је тада

$$bc^2 = (a-b)^2(a+b).$$

20. Многоугао који је описан око круга полупречника r разложен је на коначно много троуглова. Доказати да је сума полупречника уписаних кругова у те троуглове већа од r.

Први разред – Б категорија

21. Испитати када израз $(n-2)^3 + n^3 + (n+2)^3$, $n \in \mathbb{N}$, није дељив са 18.

22. Растојање између села A и B је 3 километра. У селу A има 100 ђака, а у селу B 50 ђака. На ком растојању од села A треба саградити школу, тако да укупан пут који сви ђаци прелазе у току једног дана буде најмањи?

23. Бува се налази у координатној равни. Из тачке (m, n) бува може да скочи у једну од тачака (n, m), $(m-n, n)$ или $(m+n, n)$. Да ли бува

може да дође у тачку $(12, 32)$ ако се на почетку налази у тачки:
а) $(7, 12)$; **б)** $(8, 12)$?

24. Познато је да су сви Плинкови Планкови и да су неки од Плонкова Плинкови. Који искази морају бити тачни:
а) "Неки Планкови су Плонкови."
б) "Неки Плинкови нису Плонкови."
в) "Ниједан Плонк није Планк."

25. Студент је у току петогодишњих студија положио 31 испит. Сваке године је дао више испита него претходне, а на петој години је дао три пута више испита него на првој. Колико испита је студент положио на четвртој години?

Други разред – Б категорија

26. Базен се пуни двема цевима за 6 сати. Прва цев би га напунила за 5 сати мање од друге. За које време би базен напунила друга цев?

27. Решити једначину: $(x-3)^4+(x-4)^4 = (2x-7)^4$, у скупу комплексних бројева.

28. Нека су a, b, c позитивни бројеви, такви да важи $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Доказати да је $a(b + c) \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

29. Нека је дат правоугли троугао $\triangle ABC$ са правим углом код темена C ($\sphericalangle BCA = 90^\circ$) и нека симетрала правог угла сече хипотенузу у тачки D. Нека су тачке K и E подножја нормала из тачке D на странице BC и AC, редом. Доказати да је

$$AD^2 + BD^2 = (AE + BK)^2.$$

30. Наћи све природне бројеве n, такве да је број $z = \left(\dfrac{3+i}{2-i}\right)^n$ реалан.

Трећи разред – Б категорија

31. У паралелограму са странама a, b и оштрим углом α конструисане су симетрале унутрашњих углова. Одредити површину четвороугла одређеног тим симетралама.

32. Решити једначину $4^{\log_{10} x} - 32 + x^{\log_{10} 4} = 0$.

33. На равном столу налазе се три лопте, полупречника r_1, r_2, r_3. Оне додирују сто у тачкама A_1, A_2 и A_3, редом, и сваке две се међусобно додирују. Ако је $A_1A_2 = 4$, $A_2A_3 = 6$, $A_1A_3 = 8$, наћи r_1, r_2 и r_3.

34. У тространој пирамиди $SABC$ сви ивични углови код темена S су прави. Нека је O подножје висине пирамиде из темена S. Ако је површина троугла $\triangle AOB$ четири пута већа од површине троугла $\triangle BOC$, наћи однос површина троуглова $\triangle ASB$ и $\triangle BSC$.

35. Казаљке на сату су преклопљене тачно у поноћ. Када ће се следећи пут преклопити?

Четврти разред – Б категорија

36. Доказати да сви комплексни бројеви z, за које важи $|z-1| = 2|z+1|$, припадају једном кругу. Наћи центар и полупречник тог круга.

37. Наћи све просте бројеве p за које је број $7p+1$ квадрат природног броја.

38. Наћи реална решења система једначина:

$$x^2y^2 - 2x + y^2 = 0, \qquad 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0\,.$$

39. Нека је $a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ аритметички низ. Доказати да важи:

$${a_1}^3 + {a_2}^3 + \ldots + {a_n}^3 = \frac{(a_n a_{n+1})^2 - (a_1 a_0)^2}{4d}\,,$$

где је d разлика низа.

40. Казаљке на сату су преклопљене тачно у поноћ. Када ће се следећи пут преклопити?

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ, субота, 01. 03. 2003.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

Први разред – А категорија

41. Нека је k природан број. Доказати да број $2^{2k-1}+2^k+1$ није дељив са 7.

42. У скупу целих бројева решити једначину

$$2m^2 + n^2 = 2mn + 3n\,.$$

43. Доказати да за свако $n \geqslant 2$ постоји n различитих природних бројева, таквих да је збир њихових квадрата квадрат природног броја.

44. Нека су t_a и t_b тежишне дужи, које одговарају страницама BC и CA троугла $\triangle ABC$, а P његова површина. Доказати да важи

$$t_a \cdot t_b \geqslant \frac{3}{2}P\,.$$

Када важи једнакост?

45. У равни су дате две тачке и права. Конструисати троугао $\triangle ABC$, код кога су те две тачке средишта страница BC и CA, а висина из темена A припада датој правој.

Други разред – А категорија

46. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sqrt{x^2+x+1} + 2\sqrt{x+3} = \sqrt{6x^2-2x-18}\,.$$

47. На колико начина таблица $m \times n$ може да се попуни бројевима 1 и -1, тако да производ бројева у свакој врсти буде једнак 1, а производ бројева у свакој колони буде -1?

48. Дат је круг полупречника 1. У његовој унутрашњости или на граници, изабрано је 8 тачака. Доказати да међу њима постоје две, чије је растојање мање од 1. Да ли тврђење важи за 7 тачака ?

49. Тачке A, B и C припадају једној правој. Над AB, BC и AC, као пречницима, са исте стране те праве, конструисане су три полукружнице. Центар кружнице k, која додирује сваку од три дате полукружнице, налази се на растојању d од праве AC. Наћи полупречник кружнице k.

50. Троугао састављен од тежишних дужи троугла $\triangle ABC$ сличан је троуглу $\triangle ABC$. Наћи коефицијент сличности.

Трећи разред – А категорија

51. Дата је једначина $x^3 - px + q = 0$, $q \neq 0$, која има три реална решења.
а) Доказати да је $p > 0$.
б) Ако је и $q > 0$, доказати да за најмањи по апсолутној вредности корен ове једначине, α, важи $|\alpha| \leqslant \min\left(\sqrt{\dfrac{p}{3}}, \sqrt[3]{\dfrac{q}{2}}\right)$.

52. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \ldots + \sqrt{1+x_{100}} = 100\sqrt{1+\frac{1}{100}}$$

$$\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \ldots + \sqrt{1-x_{100}} = 100\sqrt{1-\frac{1}{100}}.$$

53. Доказати да се у координатној равни не може нацртати конвексни четвороугао, коме је једна дијагонала два пута дужа од друге, угао између дијагонала му је $45°$, а координате свих темена су цели бројеви.

54. Дата је тачка P унутар круга k. Кроз тачку P постављене су две међусобно нормалне тетиве. У ком положају је збир дужина тих тетива најмањи, а у ком највећи и колике су те екстремне вредности, ако је полупречник кружнице R, а растојање тачке P од центра те кружнице d $(0 < d < R)$?

55. Нека је $a = \sqrt[2003]{2003}$. Шта је веће $\left.a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}\right\}2003 \text{ пута}$ или 2003?

Четврти разред – А категорија

56. У скупу комплексних бројева решити систем :

$$x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = 5$$

$$x^3y + xy^3 = 1.$$

57. Доказати да за сваки природан број n важи

$$(2n+1)^n \geqslant (2n)^n + (2n-1)^n.$$

58. Нека је $a_1 = a_2 = 1$ и $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Доказати да су за свако $k, n \in \mathbb{N}$ бројеви $ka_{n+2} + a_n$ и $ka_{n+3} + a_{n+1}$ узајамно прости.

59. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и нека је P полином са целобројним коефицијентима, такав да је $0 < |P(i)| < n$ за $i = 1, \ldots, n$. Доказати да полином P нема целобројну нулу.

60. Наћи највећу могућу запремину правилне четворостране пирамиде, бочне ивице 1.

Први разред – Б категорија

61. Нека је n природан број. Доказати да је број $8n^3 - 12n^2 + 6n + 63$ сложен.

62. Нека је четвороугао $ABCD$ и тетивни и тангентни. Ако је разлика страница AD и BC једнака разлици страница AB и CD, доказати да је AC пречник круга описаног око четвороугла $ABCD$.

63. Нека су m и n узајамно прости природни бројеви. Познато је да се разломак $\dfrac{3n-m}{5n+2m}$ може скратити неким природним бројем. Наћи број којим се овај разломак може скратити.

64. Доказати да функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, за коју важи $f(x^2) - (f(x))^2 \geqslant \dfrac{1}{4}$ за свако $x \in \mathbb{R}$, није инјективна $\Big($тј. постоје $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$, такви да $f(x_1) = f(x_2)\Big)$.

65. У равни су дата два скупа паралелних правих $a_1, a_2, \ldots, a_{13}$ и b_1, $b_2, \ldots, b_7$. Праве првог скупа секу праве другог скупа. Колико је паралелограма одређено овим правама?

Други разред – Б категорија

66. Доказати да за свако природно n, $n \geqslant 2$ важи неједнакост:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n^2} > 1.$$

67. Одредити све комплексне бројеве z за које важи: $|z| = \dfrac{1}{|z|} = |z-1|$.

68. Нека једначина $(a-1)x^2 - (a+1)x + 2a - 1 = 0$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$ има решења x_1 и x_2. Одредити вредност параметра b, тако да производ $(x_1 - b)(x_2 - b)$ не зависи од a.

69. У скупу реалних бројева решити једначину:

$$\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}.$$

70. У правоуглом троуглу $\triangle ABC$ тачка D је подножје висине из темена A на хипотенузу BC, E је средиште дужи AD, а F је пресек правих BE и AC. Ако је $BD = 4$, $CD = 9$, наћи дужину дужи BF.

Трећи разред – Б категорија

71. Основице правоуглог трапеза у кога се може уписати круг су a и b. Израчунати површину овог трапеза.

72. У лопту је уписана пирамида, чија је основа правоугаоник дијагонале d. Бочне ивице пирамиде нагнуте су према равни основе под углом β. Наћи полупречник лопте.

73. Наћи све целе бројеве x, такве да је $\log_2(x^2 - 4x - 1)$ цео број.

74. Доказати да важи: $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

75. Доказати да за $p \geqslant 0$ важи неједнакост:

$$(2003^p)^{1-2003^p} + (2003^{2p})^{1-2003^{2p}} + \ldots + (2003^{2003p})^{1-2003^{2003p}} \leqslant 2003.$$

Четврти разред – Б категорија

76. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^4}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^8}\right)\ldots\left(1+\dfrac{1}{2^{2^n}}\right)$.

77. Доказати да функција $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-4}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$, не узима вредности између $\dfrac{1}{4}$ и 1.

78. Наћи све аритметичке прогресије код којих је однос збира првих n чланова и збира следећих $2n$ чланова ($n \in \mathbb{N}$) константа независна од n.

79. Доказати да једначина $ax^3 + bx^2 - 1 = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ има тачно једно позитивно решење.

80. Одредити висину ваљка максималне запремине уписаног у лопту полупречника $\sqrt{3}$.

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ, Шабац, 29. 03. 2003.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

Први разред – А категорија

81. Нека су x и y ненегативни реални бројеви такви да је $x + y = 2$. Доказати да важи

$$x^2y^2(x^2 + y^2) \leqslant 2.$$

Када важи једнакост?

82. Дат је број 2^k, $k > 3$. Доказати да се пермутацијама цифара овог броја не може добити број 2^n, где је $n > k$.

83. Свако од 20 људи шаље некој десеторици од осталих по једно писмо. Доказати да постоје две особе које су једна другој послале писмо.

84. Кружница која је уписана у троугао $\triangle ABC$ додирује странице AB и AC редом у тачкама M и N. Нека је P тачка пресека симетрале угла $\sphericalangle ABC$ и праве MN. Доказати да је површина троугла $\triangle ABC$ два пута већа од површине троугла $\triangle ABP$.

85. На страницама BC, CA и AB троугла $\triangle ABC$ уочене су тачке A_1,B_1 и C_1, редом. Нека је T тежиште троугла $\triangle ABC$, а T_1 тежиште троугла $\triangle A_1B_1C_1$. Доказати да је $T \equiv T_1$ ако и само ако је

$$AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A.$$

Други разред – А категорија

86. Доказати да квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$ и $bx^2 + cx + a = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, имају заједничко решење ако и само ако важи $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

87. Нека је S подскуп скупа реалних бројева који је затворен у односу на множење (то значи кад год су $a, b \in S$, онда је и $a \cdot b \in S$). Нека су T и U дисјунктни подскупови скупа S, чија је унија цео скуп S. Познато је да производ ма која три елемента скупа T(не обавезно различита) припада скупу T и да призвод ма која три елемента из U припада скупу

U. Доказати да је бар један од подскупова T и U затворен у односу на множење.

88. Нека су a, b, c реални бројеви, такви да је $0 < a \leqslant b \leqslant c$. Доказати да важи
$$(a+3b)(b+4c)(c+2a) \geqslant 60abc.$$
Када важи једнакост?

89. Да ли је могуће једнакостранични троугао странице 3 разрезати на 2003 дисјунктна троугла, тако да сваки од њих има све странице веће од 1?

90. Круг k у тачкама P и Q додирује краке угла $\sphericalangle pOq$. На полуправој Oq је дата тачка X, тако да пресечна тачка Z круга k и праве PX различита од P полови дуж PX. Ако је Y пресечна тачка круга k и праве OZ различита од Z, доказати да је $PX \parallel QY$.

Трећи разред – А категорија

91. **а)** Да ли постоји неконстантан низ природних бројева $a_1, a_2, \ldots$ такав да за свако $k \geqslant 2$ важи
$$a_k = \frac{2a_{k-1}a_{k+1}}{a_{k-1}+a_{k+1}}?$$

б) Да ли постоји неконстантан низ природних бројева $a_1, a_2, \ldots, a_{2003}$ такав да за свако $2 \leqslant k \leqslant 2002$ важи
$$a_k = \frac{2a_{k-1}a_{k+1}}{a_{k-1}+a_{k+1}}?$$

92. Нека је $p > 2$ прост број. Доказати да је сваки делилац броја $2^p - 1$ облика $2kp+1$ за неко природно k.

93. Нека је O центар описане кружнице, а T тежиште троугла $\triangle ABC$, који није једнакостраничан. Доказати да је OT нормална на тежишну дуж CC_1 ако и само ако за странице троугла важи $BC^2 + CA^2 = 2AB^2$.

94. Нека је $n \geqslant 3$, а $a_1, a_2, \ldots, a_n$ реални бројеви такви да је $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 0$. Доказати да важи
$$a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 + \ldots + a_{n-2}a_{n-1}a_n \leqslant \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{3}\right)^3.$$
Када важи једнакост?

95. Колико се највише фигура подударних са  може поставити у таблу 2003×2003 без преклапања тако да свака фигура покрива тачно 4 јединична поља?

Четврти разред – А категорија

96. Наћи скуп свих могућих позитивних реалних бројева V таквих да постоји правоугли паралелепипед са следећим особинама: његова запремина је V, површина 18, а сума растојања од центра до страна је 6.

97. Нека је $p > 2$ прост број. Доказати да је сваки делилац броја $2^p - 1$ облика $2kp + 1$ за неко природно k.

98. Нека је O центар описане кружнице, а T тежиште троугла $\triangle ABC$, који није једнакостраничан. Доказати да је OT нормална на тежишну дуж CC_1 ако и само ако за странице троугла важи $BC^2 + CA^2 = 2AB^2$.

99. Нека је $n \geqslant 3$, а $a_1, a_2, \ldots, a_n$ реални бројеви такви да је $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 0$. Доказати да важи

$$a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 + \ldots + a_{n-2}a_{n-1}a_n \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{3}\right)^3.$$

Када важи једнакост?

100. На кружници је дато n тачака. Никоје три дужи које се добијају спајањем ових тачака се не секу у једној тачки унутар круга. На колико области ове дужи деле круг?

Први разред – Б категорија

101. Доказати да за све реалне x и y важи

$$x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 4 \geqslant 1.$$

Када важи једнакост?

102. Наћи најмањи природан број који је четири пута мањи од броја написаног истим цифрама, али у обрнутом поретку.

103. Свако од 20 људи шаље некој десеторици од осталих по једно писмо. Доказати да постоје две особе које су једна другој послале писмо.

104. Ако су x, y, z, u природни бројеви већи од 1, такви да важи $xy = zu$, доказати да је број

$$\frac{(x+z)(x+u)(y+z)(y+u)}{(x+y+z+u)^2}$$

сложен природан број.

105. Дат је полукруг над пречником AB и на њему тачке C и D тако да је $\sphericalangle CSD$ прав, где је S средиште дужи AB. Нека је E пресек правих AC и BD, а F пресек правих AD и BC. Доказати да је $EF \perp AB$ и $EF = AB$.

Други разред – Б категорија

106. У скупу реалних бројева решити једначину

$$(x-1)\sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}} + (3-x)\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}} = 2.$$

107. Нека је S подскуп скупа реалних бројева који је затворен у односу на множење (то значи кад год су $a, b \in S$, онда је и $a \cdot b \in S$). Нека су T и U дисјунктни подскупови скупа S, чија је унија цео скуп S. Познато је да производ ма која три елемента скупа T(не обавезно различита) припада скупу T и да призвод ма која три елемента из U припада скупу U. Доказати да је бар један од подскупова T и U затворен у односу на множење.

108. Дата је квадратна једначина $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Ако су оба решења једначине реална и припадају интервалу $(0, 1)$, доказати да је $a(2c + b) < 0$.

109. У кружни одсечак коме одговара централни угао од $120°$ уписан је квадрат. Одредити дужину странице квадрата, ако је полупречник круга $2 + \sqrt{19}$.

110. Доказати да је број $\left(\sqrt[6]{8\sqrt{5}+16} + \sqrt{\sqrt{5}+1}\right) \cdot \sqrt{\sqrt{5}-1}$ цео и израчунати га.

Трећи разред – Б категорија

111. Израчунати дужину полупречника лопте уписане у тространу пирамиду $SABC$, ако су ивице SA, SB и SC међусобно нормалне и $AB = BC = a$, $BS = b$.

112. Решити систем у зависности од реалног параметра a:

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & 6y & + & z & = & 1 \\ x & + & 6ay & + & z & = & 6 \\ x & + & 6y & + & az & = & 1. \end{array}$$

113. Нека су a, b, c, d странице, а P површина конвесног четвороугла. Доказати да важи $P \leqslant \dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$. Када важи једнакост?

114. Нека је E средиште странице AB квадрата $ABCD$, а F и G тачке на страницама BC и CD, редом, такве да је $EF \parallel AG$. Доказати да је FG тангента на круг уписан у квадрат $ABCD$.

115. Ако за оштре углове α, β и γ важи $\cos\alpha = \mathrm{tg}\beta$, $\cos\beta = \mathrm{tg}\gamma$ и $\cos\gamma = \mathrm{tg}\alpha$, доказати да је $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Четврти разред – Б категорија

116. Наћи скуп свих могућих позитивних реалних бројева V таквих да постоји правоугли паралелепипед са следећим особинама: његова запремина је V, површина 18, а сума растојања од центра до страна је 6.

117. Наћи $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x(x^{2003}-1)-2003(x-1)}{(x-1)^2}$.

118. Решити систем

$$x-y+z=6, \quad x^2+y^2+z^2=14, \quad x^3-y^3+z^3=36.$$

119. Одредити тачку на елипси $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{18}=1$ у првом квадранту, такву да тангента на елипсу у тој тачки гради са координатним осама троугао најмање површине.

120. Дат је низ тачака $T_i(x_i, y_i)$ у xOy равни, тако да је

$$x_0 = 1,\ y_0 = 0 \text{ и } x_{n+1} = \sqrt{3}x_n - y_n,\ y_{n+1} = x_n + \sqrt{3}y_n \text{ за } n \geqslant 0.$$

У ком квадранту се налази тачка T_{2003}?

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ,
Нови Сад, 19. април 2003.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.

Први разред

121. Одредити број решења једначине

$$x_1{}^4 + x_2{}^4 + \ldots + x_{10}{}^4 = 2011$$

у скупу природних бројева.

122. У координатној равни је дата дуж AB дужине 2003. Колики је највећи број јединичних квадрата чија темена имају целобројне координате и које дата дуж сече?

Дуж сече јединични квадрат ако садржи бар једну његову унутрашњу тачку, тј. тачку која није на контури квадрата.

123. Нека су a, b, c странице троугла чији су одговарајући углови $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 80^\circ$. Доказати да је

$$a(a + b + c) = b(b + c).$$

124. У равни је дат оштар угао са теменом O и крацима Op_1 и Op_2. Нека је k_1 кружница чији центар припада краку Op_1 и која додирује крак Op_2. Кружница k_2 додирује краке угла и кружницу k_1 споља. Одредити геометријско место тачака додира кружница k_1 и k_2, када центар кружнице k_1 пролази полуправу Op_1.

Други разред

125. Дат је троугао $\triangle ABC$ са страницама a, b, c и површином S.
а) Доказати да постоји троугао $\triangle A_1B_1C_1$ са страницама $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$.
б) Ако је S_1 површина троугла $\triangle A_1B_1C_1$, доказати да је $S_1{}^2 \geqslant \dfrac{S\sqrt{3}}{4}$.

126. Нека је $ABCD$ квадрат уписан у кружницу k и P произвољна тачка те кружнице. Доказати да је бар један од бројева PA, PB, PC, PD ирационалан.

127. Нека је $ABCD$ правоугаоник. У појасу између паралелних правих AB и CD одредити скуп тачака из којих се дужи AB и CD виде под истим углом.

128. Нека је S подскуп скупа природних бројева, $S \subseteq \mathbb{N}$, који има следећа својства:

а) међу сваких 2003 узастопних природних бројева постоји један који је садржан у S;
б) ако $n \in S$ и $n > 1$, онда и $\left[\dfrac{n}{2}\right] \in S$.
Доказати да је $S = \mathbb{N}$.

Трећи и четврти разред

129. Доказати да је за сваки природан број n број $[(5+\sqrt{35})^{2n-1}]$ дељив са 10^n.

130. Дата је функција $f\,[0,1] \to \mathbb{R}$ која има следећа својства:
а) $f(x) \geqslant 0$ за све $x \in [0,1]$,
б) $f(1) = 1$,
в) ако $x_1, x_2 \in [0,1]$ и $x_1 + x_2 \leqslant 1$, онда је $f(x_1) + f(x_2) \leqslant f(x_1 + x_2)$.
Доказати да за свако $x \in [0,1]$ важи $f(x) \leqslant 2x$.

131. Дата је кружница k и тачка P ван ње. Променљива права s која садржи тачку P сече кружницу k у тачкама A и B. Нека су M и N средишта лукова одређених тачкама A и B и тачка C на дужи AB, таква да је $PC^2 = PA \cdot PB$.
Доказати да угао $\sphericalangle MCN$ не зависи од праве s.

132. Нека је n паран број и S скуп свих низова дужине n чији су чланови нуле и јединице, а бар један члан сваког низа једнак је 1. Доказати да се S може поделити на дисјунктне трочлане подскупове тако да важи: за свака три низа $(a_i)_{i=1}^n$, $(b_i)_{i=1}^n$, $(c_i)_{i=1}^n$ који припадају истом подскупу и свако $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ број $a_i + b_i + c_i$ дељив је са 2.

ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИЗБОР ЕКИПЕ ЗА ИМО
(Мала олимпијада)

недеља, 20. април 2003.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.

133. Ако је $p(x)$ полином, обележимо са $p^n(x)$ полином

$$\underbrace{p(p(\cdots p}_{n}(x)\cdots)).$$

Доказати да је полином $p^{2003}(x) - 2p^{2002}(x) + p^{2001}(x)$ дељив полиномом $p(x) - x$.

134. Свака страница и свака дијагонала конвексног n-тоугла, где је $n \geqslant 3$, обојена је плаво или црвено. Доказати да се темена n-тоугла

могу означити са $A_1, A_2, \ldots, A_n$, тако да важи један од следећа два услова:
а) све дужи $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ обојене су истом бојом;
б) постоји број k, $1 < k < n$, тако да су дужи $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{k-1}A_k$ плаве, а дужи $A_kA_{k+1}, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ црвене.

135. Нека су M и N различите тачке у равни троугла $\triangle ABC$ такве да је
$$AM : BM : CM = AN : BN : CN\,.$$
Доказати да права MN садржи центар описане кружнице троугла $\triangle ABC$.

20. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА, Албанија – Тирана, 2.–7. мај 2003. недеља, 4. мај 2003.

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.

136. Да ли постоји скуп B, који се састоји од 4004 природна броја, такав да за сваки његов подскуп A, који има 2003 елемента, важи да збир елемената скупа A није дељив са 2003?

Бивша југословенска република Македонија

137. Нека је $\triangle ABC$ троугао, такав да важи $|AB| \neq |AC|$. Нека је D тачка пресека тангенте на описану кружницу троугла ABC у тачки A и праве BC. Нека су E и F тачке на симетралама дужи AB и AC редом, такве да су BE и CF нормалне на BC. Доказати да су тачке D, E и F колинеарне.

Румунија

138. Наћи све функције $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ које задовољавају следеће услове:
(1) $f(x+y) - yf(x) - xf(y) = f(x)f(y) - x - y + xy$, за свако $x, y \in \mathbb{Q}$;
(2) $f(x) = 2f(x+1) + 2 + x$, за свако $x \in \mathbb{Q}$;
(3) $f(1) + 1 > 0$.

Кипар

139. Нека су m и n узајамно прости непарни природни бројеви. Правоугаоник $ABCD$, такав да је $|AB| = m$ и $|AD| = n$, подељен је на mn јединичних квадрата. Означимо са $A_1, A_2, \ldots, A_k$ узастопне пресечне тачке дијагонале AC са страницама јединичних квадрата ($A_1 = A, A_k = C$). Доказати да важи:

$$\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} |A_j A_{j+1}| = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{mn} \ .$$

Бугарска

44. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА, Јапан – Токио, 11.–19. јул 2003.

Време за рад 2×270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

Први дан
недеља, 13. јул 2003.

140. Нека је A подскуп скупа $S = \{1, 2, \ldots, 1\,000\,000\}$, који садржи тачно 101 елемент. Доказати да постоје бројеви $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ из S такви да су скупови

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\} \quad \text{за} \quad j = 1, 2, \ldots, 100$$

по паровима дисјунктни.

Бразил

141. Одредити све парове (a, b) природних бројева такве да је

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

природан број.

Бугарска

142. Дат је конвексан шестоугао код кога за сваке две наспрамне странице важи: растојање између њихових средишта једнако је производу броја $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и збира њихових дужина. Доказати да су сви углови тог шестоугла једнаки. (Конвексан шестоугао $ABCDEF$ има три пара наспрамних страница: AB и DE, BC и EF, CD и FA.)

Пољска

Други дан
понедељак, 14. јул 2003.

143. Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао. Нека су P, Q и R подножја нормала из тачке D на праве BC, CA и AB редом. Доказати да је $PQ = QR$ ако и само ако се симетрале углова $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle ADC$ секу на правој AC.

Финска

144. Нека је n природан број и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ реални бројеви такви да је $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$.
а) Доказати да је

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|\right)^2 \leqslant \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2 .$$

б) Доказати да једнакост вреди ако и само ако је $x_1, x_2, \ldots, x_n$ аритметичка прогресија.

Ирска

145. Нека је p прост број. Доказати да постоји прост број q такав да, за сваки цео број n, број $n^p - p$ није дељив са q.

Француска

Пробна такмичења

ПРВО ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ
недеља, 22. децембар 2002.

Време за рад 240 *минута.*
Задаци вреде 8,9,6 + 7,12 *поена.*

146. Наћи све парове (a, b) природних бројева таквих да је

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{a}{b+1}$$

цео број.

147. Нека су H_1 и H_2 подножја нормала из ортоцентра H троугла $\triangle ABC$ на симетрале унутрашњег и спољашњег угла код темена C, а C_1 средиште странице AB. Доказати да су тачке H_1, H_2 и C_1 колинеарне.

148. Да ли је могуће разложити троугао на коначан број конвексних **а)** петоуглова; **б)** шестоуглова?

149. Низ (a_n) задат је условима $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 24$ и за $n \geqslant 4$

$$a_n = \frac{6a_{n-1}^2 a_{n-3} - 8a_{n-1}a_{n-2}^2}{a_{n-2}a_{n-3}}\,.$$

Доказати да је a_n дељиво са $n!$ за све $n \in \mathbb{N}$.

ДРУГО ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ
уторак, 29. април 2003.

Време за рад 240 минута.
Задаци вреде 8,10,12,12 поена.

150. Нека је l тангента у тачки M круга k са пречником MN. На дужи MN је дата тачка A. Произвољан круг са центром на l сече l у тачкама C и D. Нека праве NC и ND секу круг k редом у тачкама P и Q. Доказати да права PQ пролази кроз фиксну тачку.

151. Дато је $n+1$ различитих трочланих подскупова скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$. Доказати да међу њима постоје два чији је пресек једночлан.

152. Нека је S_0 коначан скуп природних бројева. Дефинишимо скупове $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ на следећи начин: природни број a припада скупу S_{n+1} ако и само ако тачно један од бројева a и $a-1$ припада скупу S_n. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева N са својством да је

$$S_N = S_0 \cup \{a + N \mid a \in S_0\}.$$

153. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ позитивни реални бројеви такви да је $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Доказати да је

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geqslant \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \ldots + \sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}.$$

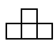
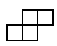
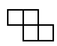
ТРЕЋЕ ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ
четвртак, 22. мај 2003.

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.

154. Нека су $a, b, c, d \in [0, 1]$. Доказати неједнакост

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} - \frac{1}{4} \leqslant \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2.$$

155. Нека је q прост број и $\mathcal{M}$ скуп свих $n \times n$ матрица са елементима из скупа $\{0, 1, 2, \ldots, q-1\}$. Колико матрица из $\mathcal{M}$ има детерминанту која није дељива са q?

156. Да ли је могуће таблу 8×8 попунити бројевима $1, 2, \ldots, 64$ (сваки број се појављује једном) тако да је збир бројева у свакој фигури F дељив са 4.
а) фигура F је  ;
б) фигура F је једна од  ,  .
(Фигуре F се могу ротирати!)

157. Нека функција $f : \mathbb{Q} \to [0, +\infty)$ задовољава следеће услове:
1° $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ $(\forall x, y \in \mathbb{Q})$;
2° $f(x) \leqslant 1 \Rightarrow f(x+1) \leqslant 1$ $(\forall x \in \mathbb{Q})$;

3° $f(\frac{2003}{2002}) = 2$.
Наћи све могуће вредности за $f(\frac{2004}{2003})$.

ЧЕТВРТО ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ

Време за рад 2×270 *минута.*
Сваки задатак вреди 7 поена.

Први дан
петак, 13. јун 2003.

158. Нека је n природан број. Подскуп A скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ зовемо *генеришућим* ако је

$$\{|x - y| \,:\, x, y \in A\} = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}.$$

а) Доказати да постоји генеришући подскуп са највише $[2\sqrt{n}] + 1$ елемената.
б) Да ли за свако n постоји генеришући подскуп са највише $[\sqrt{2n}]+2003$ елемената?

159. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао такав да AB није паралелно са CD. Круг k_1 пролази кроз A и B и додирује праву CD у P, а круг k_2 пролази кроз C и D и додирује AB у Q. Доказати да заједничка тетива кругова k_1 и k_2 полови PQ ако и само ако је AD паралелно са BC.

160. Претпоставимо да природни бројеви m и n задовољавају

$$\varphi(5^m - 1) = 5^n - 1,$$

где $\varphi(x)$ означава број природних бројева мањих од x и узајамно простих са x. Доказати да је тада НЗД$(m, n) > 1$.

Други дан
субота, 14. јун 2003.

161. Претпоставимо да су $A_1, A_2, \dots, A_n$ тачке у равни и да је свакој од њих придружен реалан број λ_i тако да је за свако i, j, $i \neq j$,

$$\overline{A_iA_j} = \sqrt{\lambda_i + \lambda_j}.$$

Доказати да је $n \leqslant 4$, и да, ако је $n = 4$, важи

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_4} = 0.$$

162. Нека су $P(x)$ и $Q(x)$ полиноми са реалним коефицијентима, при чему сваки од њих има бар по једну реалну нулу. Ако ови полиноми задовољавају

$$P(1 + x + Q(x)^2) = Q(1 + x + P(x)^2)$$

за све x, доказати да је $P \equiv Q$.

163. Наћи све природне бројеве n, за које се таблица $n \times n$ може попунити бројевима $-1, 0, 1$ тако да су свих $2n$ збирова по врстама и колонама таблице различити.

Такмичења у 2004. години

Званична такмичења

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ,
субота, 17. јануар 2004.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

Први разред – А категорија

164. На дијагонали AC ромба $ABCD$ изабрана је произвољна тачка E различита од A и C. Нека су N и M тачке правих AB и BC, редом, такве да је $AE = NE$ и $CE = ME$, а K пресечна тачка правих AM и CN. Доказати да тачке K, E и D припадају једној правој.

165. Природни бројеви a, b и c су такви да су бројеви

$$p = b^c + a, \qquad q = a^b + c \quad \text{и} \quad r = c^a + b$$

прости. Доказати да су два од бројева p, q, r међусобно једнаки.

166. Доказати да за непаран цео број q једначина $x^3 + 3x + q = 0$ нема целобројних решења.

167. На колико начина можемо распоредити m различитих птица у n различитих кавеза тако да сваки кавез садржи бар једну, али највише две птице?

168. Комарац се налази у доњем левом углу правоугаоне таблице формата 2003×2004. Комарац лети изнад ове таблице на следећи начин:

када полети из неког поља и прелети 99 поља, он слети на 100-то да се одмори (линија којом се комарац креће не мора да буде права линија, може бити и изломљена и сме да сече саму себе, али сваки "корак" комарца мора бити паралелан ивицама таблице). Затим комарац поново полеће са тог поља, прелеће преко 99 поља и слеће на 100-то... Да ли комарац може слетети у горњи десни угао?

Други разред – А категорија

169. На дијагонали AC ромба $ABCD$ изабрана је произвољна тачка E различита од A и C. Нека су N и M тачке правих AB и BC, редом, такве да је $AE = NE$ и $CE = ME$, а K пресечна тачка правих AM и CN. Доказати да тачке K, E и D припадају једној правој.

170. Наћи све бројеве $b \in \mathbb{N}$ за које постоји $a \in \mathbb{N}$ тако да

$$b \mid a^2 + 1 \quad \text{и} \quad b \mid a^3 - 1.$$

171. Нека су x, y и z ненегативни реални бројеви који задовољавају $x + y + z = 1$. Наћи најмању могућу вредност израза $x + y^2 + z^2$.

172. Решити једначину: $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{17 - x} = 3$.

173. Комарац се налази у доњем левом углу правоугаоне таблице формата 2003×2004. Комарац лети изнад ове таблице на следећи начин: када полети из неког поља и прелети 99 поља, он слети на 100-то да се одмори (линија којом се комарац креће не мора да буде права линија, може бити и изломљена и сме да сече саму себе, али сваки "корак" комарца мора бити паралелан ивицама таблице). Затим комарац поново полеће са тог поља, прелеће преко 99 поља и слеће на 100-то... Да ли комарац може слетети у горњи десни угао?

Трећи разред – А категорија

174. Јединични квадрат је подељен на правоугле троуглове. (Троуглови немају заједничких унутрашњих тачака.) Нека је S збир хипотенуза свих тих троуглова. Доказати да је $S \geqslant 2\sqrt{2}$. Када важи једнакост?

175. **а)** Ако је $x \equiv y \pmod{p}$ онда је и $x^p \equiv y^p \pmod{p^2}$. Доказати.
б) Решити једначину $x^5 + y^5 + z^5 = 2004$ у $\mathbb{N}$.

176. Једначина

$$x^3 + px + q = 0$$

има комплексан корен $a+bi$, где су $a, b, p, q \in \mathbb{R}$ и $q, b \neq 0$. Показати да је $aq > 0$.

177. Доказати да је број

$$n^{2003} + n + 1$$

сложен за сваки природан број n, $n > 1$.

178. Доказати да не постоји троугао коме за углове важи:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma.$$

Четврти разред – А категорија

179. Нека је $\triangle ABC$ троугао такав да је $\sphericalangle ACB \geqslant 120°$. Нека је R полупречник описаног круга тог троугла. Доказати:

$$3R \geqslant AC + BC + \frac{AB}{\sqrt{3}}\,.$$

У ком случају важи једнакост?

180. Решити једначину $x^5 + y^5 + z^5 = 2004$ у $\mathbb{N}$.

181. На свечаној смотри поводом дана Војске СЦГ изабрано је из сваког од 4 различита рода (пешадија, артиљерија, ваздухопловство и морнарица) по 4 војника различитих чинова (по један десетар, водник, поручник и капетан). Помозите мајору, задуженом за прославу, који је добио наређење да тих 16 војника размести у строј облика квадрата, тако да у сваком реду и свакој колони буду смештена 4 војника из различитих родова и са различитим чиновима.

182. Доказати да је број

$$n^{17} + n^1 + n^{2004} + n^8 + 1$$

сложен за сваки природан број n, $n > 1$.

183. Доказати да не постоји троугао коме за углове важи:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma.$$

Први разред – Б категорија

184. Цифре a и b су различите и такве да важи

$$\overline{aa} \cdot \overline{ba} \cdot \overline{aba} = \overline{abaaba}.$$

Дешифровати ову једнакост.

185. У троуглу $\triangle ABC$ $(BC > CA)$ је $\sphericalangle CAB - \sphericalangle ABC = 45^\circ$. Ако је D тачка странице BC таква да је $CD = CA$, израчунати величину угла $\sphericalangle BAD$.

186. Доказати да за непаран цео број q једначина $x^3 + 3x + q = 0$ нема целобројних решења.

187. Колико има једнакокраких троуглова, чије су странице целобројне, а обим једнак $30cm$?

188. Доказати да је број $2^{12} + 5^9$ сложен.

Други разред – Б категорија

189. У правоуглом троуглу $\triangle ABC$ $(\sphericalangle ACB = 90^\circ)$ конструисана је висина CD. Симетрала угла $\sphericalangle CAB$ сече праву CD у тачки P, а симетрала угла $\sphericalangle BCD$ сече праву BD у тачки Q. Доказати да је $PQ \parallel BC$.

190. Испитати да ли квадратна једначина

$$(a^2 + b^2 + c^2)x^2 + 2(a + b + c)x + 3 = 0,$$

где су $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2+b^2+c^2 \neq 0$, може имати реалне и различите корене.

191. Решити једначину: $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} - |3x - 2| - 3x = 1.$

192. Дата је једначина $(a-1)x^2 - (a+1)x + 2a - 1 = 0$, при чему је $a \neq 1$. Наћи све вредности параметра b за које израз

$$(x_1 - b)(x_2 - b)$$

не зависи од a, при чему су x_1 и x_2 корени дате једначине.

193. Доказати да је број $2^{12} + 5^9$ сложен.

Трећи разред – Б категорија

194. Израчунати вредност израза

$$\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ$$

без примене калкулатора и таблица.

195. Доказати неједнакост: $(\log_{2003} 2004)^{-1} + (\log_{2005} 2004)^{-1} < 2.$

196. Равни α и β секу се по правој c. Нека је φ угао диедра кога чине те две равни, а ψ угао између неке праве p равни α и праве c. Ако је γ угао између праве p и равни β, доказати да важи

$$\sin\gamma = \sin\varphi \sin\psi.$$

197. Израчунати вредност детерминанте: $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}.$

198. Решити систем једначина у скупу реалних бројева: $\begin{aligned} x^3y^3z^4 &= 1 \\ x^2y^4z^4 &= 2 \\ x^2y^3z^5 &= 3\ . \end{aligned}$

Четврти разред – Б категорија

199. Скуп природних бројева разбијен је у групе на следећи начин:

$$\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9, 10\}, \ldots$$

Наћи збир чланова n-те групе.

200. Нека су x_1, x_2, x_3 корени полинома $x^3 + mx + n$, $(n \in \mathbb{Z})$. Доказати да је ${x_1}^3 + {x_2}^3 + {x_3}^3$ цео број дељив са 3.

201. У правоуглом троуглу у коме је хипотенуза $c = 8$ и оштар угао $\alpha = 60°$ уписан је правоугаоник максималне површине, тако да му једна страница припада хипотенузи троугла. Одредити дужине страница тог правоугаоника.

202. Наћи реална решења система једначина:

$$\frac{1}{1 + (x - y)^2} = z + 4, \quad \sqrt{z + 3} + 2x = 8.$$

203. Решити систем једначина у скупу реалних бројева: $\begin{aligned} x^3y^3z^4 &= 1 \\ x^2y^4z^4 &= 2 \\ x^2y^3z^5 &= 3\ . \end{aligned}$

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ, 28. фебруар 2004.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

Први разред – А категорија

204. У троуглу $\triangle ABC$, дужине страница су три узастопна природна броја. Ако је тежишна линија повучена из A нормална на симетралу угла $\sphericalangle ABC$, пронаћи дужине страница троугла.

205. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла $\triangle ABC$. Нека су A_1, B_1 и C_1, редом, центри описаних кругова троуглова $\triangle BHC$, $\triangle CHA$ и $\triangle AHB$. Доказати да су троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ подударни.

206. Посматрајмо коначан низ од 2003 броја, при чему је $a_n = \left[\dfrac{n^2}{2004}\right]$, $n = 1, 2, \ldots, 2003$. Колико различитих чланова садржи тај низ?

207. Да ли постоји полином са целобројним коефицијентима такав да важи: **а)** $P(7) = 8$ и $P(15) = 12$; **б)** $P(8) = 7$ и $P(12) = 15$?

208. Трговац преко реке мора да превезе: сир, миша, пацова, мачку, пса, вука и медведа. У чамцу има места за само k од тих 7 објеката. Ако остави миша са сиром, миш ће га појести. Ако остави пацова са мишем или сиром пацов ће их појести. Ако остави мачку са пацовом или мишем она ће их појести. Ако остави пса са пацовом или мачком он ће их убити. Ако остави вука са псом или мачком он ће их убити. Ако остави медведа са псом или вуком он ће их убити. Претпоставља се да трговац све ове догађаје спречава да се десе кад је присутан. Које минимално k гарантује да он може све артикле безбедно да пребаци на другу страну реке?

Други разред – А категорија

209. Нека су m и n природни бројеви не мањи од 2. Доказати да постоји природан број k тако да важи:

$$\left(\frac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}\right)^m = \frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}.$$

210. Дат је троугао $\triangle ABC$. Тангента t у тачки B на описану кружницу око тог троугла сече праву AC у тачки M. Наћи $\dfrac{AM}{MC}$, ако је $\dfrac{AB}{BC} = k$.

211. Ако је $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$, доказати да је $x+y=0$.

212. Ако су тежишне линије ΔABC из темена B и C међусобно нормалне онда је: $\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma\geqslant\frac{2}{3}$. Доказати.
У ком случају важи једнакост?

213. Дата је бела табла 2002×2003 и доста црвене и беле боје.
а) Дозвољено је у једном кораку променити боју ма која четири поља која чине квадрат 2×2. Да ли се после неколико корака може добити исти број белих и црвених поља?
б) Дозвољено је у једном кораку променити боју ма којих девет поља која чине квадрат 3×3. Да ли се после неколико корака може добити исти број белих и црвених поља?

Трећи разред – А категорија

214. У правоугаонику $ABCD$ је $AB=1$, $BC=2$. Дата је тачка P унутар њега таква да је $\sphericalangle PAB=\sphericalangle PBA=15^\circ$. Израчунати $\sphericalangle CPD$.

215. Ако су m, n и p одсечци које троугао $\triangle ABC$ одређује на правама које садрже средиште уписаног круга а паралелне су, респективно, са страницама $BC=a$, $CA=b$ и $AB=c$, доказати да је

$$\frac{m}{a}+\frac{n}{b}+\frac{p}{c}=2.$$

216. Нека су $a_1,a_2,\ldots,a_{2004}$, $b_1,b_2,\ldots,b_{2004}$ међусобно различити реални бројеви. Ако је за свако $i\in\{1,2,\ldots,2004\}$

$$(a_i+b_1)(a_i+b_2)\ldots(a_i+b_{2004})=\alpha,$$

доказати да, за свако $i\in\{1,2,\ldots,2004\}$ важи

$$(b_i+a_1)(b_i+a_2)\ldots(b_i+a_{2004})=-\alpha.$$

217. Наћи све просте бројеве p и q, такве да је број

$$\sqrt{p^2+14pq+q^2}+\sqrt{p^2+7pq+q^2}$$

природан.

218. Наћи све функције $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ које за све $x,y\in\mathbb{N}$ задовољавају

$$f\left(\frac{x+y}{3}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2},\qquad \text{кад је}\quad \frac{x+y}{3}\in\mathbb{N}.$$

Четврти разред – А категорија

219. Нека је $ABCD$ правоугаоник. Нека је E подножје висине из A на BD. Нека је F произвољна тачка на дијагонали BD између D и E. Нека је G пресек праве CF и нормале из B на AF. Нека је H пресек праве BC и нормале из G на BD. Доказати да је $\sphericalangle EGB = \sphericalangle EHB$.

220. Дата је $n\times n$ квадратна таблица $[a_{ij}]$, где је $a_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$. Одаберимо n бројева из таблице, тако да нису одабрана два броја из исте врсте или два броја из исте колоне. Доказати да збир тих n бројева не може бити мањи од 1.

221. Одредити услов који треба да задовоље реални бројеви a и b тако да систем

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & a \\ x^2 & + & y^2 & + & z^2 & = & b^2 \end{array}$$

има јединствено реално решење.
У којим случајевима систем нема решења?

222. Дате су две шаховске табле 2×4 и у доњем левом углу прве налази се краљ, а у доњем левом углу друге топ. Означимо са k_n број различитих n-потеза краљем, а са t_n број различитих n-потеза топом. За које n важи $k_n < t_n$?

223. Дат је правоугли троугао T. Да ли је могуће извршити разбијање троугла T на 2004 троуглића који испуњавају следеће услове:
1° сваки од тих троуглића је сличан троуглу T;
2° не постоје два троуглића који су подударни?

Први разред – Б категорија

224. Доказати да је $n^n - n$ дељиво са 24 за све непарне природне бројеве n.

225. Нека је S пресек, међусобно управних, дијагонала AC и BD конвексног и тетивног четвороугла $ABCD$. Доказати да нормала из тачке S на праву BC полови дуж AD.

226. У троуглу $\triangle ABC$ за унутрашње углове важи $\alpha - \beta = 2\gamma$.
а) Доказати да је угао α туп.
б) На правој AB, иза тачке A у односу на тачку B, је дата тачка E таква да је $EC = AC$. Доказати да је CA симетрала угла $\sphericalangle ECB$.

227. Нека је дато пресликавање $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, тако да за све $x \in \mathbb{R}$ важи $f(x) + 2f(1-x) = x$. Одредити $f(x)$.

228. У једној групи људи се налазе три Италијана, четири Француза и пет Шпанаца. На колико различитих начина се сви ови људи могу поређати у низ тако да сви Французи буду један поред другог, сви Шпанци један поред другог и никоја два Италијана не буду један до другог?

Други разред – Б категорија

229. Дијагонале тетивног четвороугла $ABCD$ секу се у тачки O. Ако је $BC = CD = 12cm$ и $OC = 4cm$, наћи дужину дијагонале AC.

230. Доказати да разлика решења једначине

$$5x^2 - 2(5a+3)x + 5a^2 + 6a + 1 = 0, \quad a \in \mathbb{R}$$

не зависи од a.

231. Доказати да за свако $x \geqslant 0$ важи неједнакост:

$$\sqrt{x}(x+1) + x(x-4) + 1 \geqslant 0.$$

232. Наћи реални и имагинарни део комплексног броја

$$z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2004} + \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2004}.$$

233. За које вредности реалних бројева x и y израз

$$E = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y + 2$$

има најмању вредност?

Трећи разред – Б категорија

234. Наћи све реалне бројеве x, y, z, t такве да је

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = x(y+z+t).$$

235. Наћи сва решења неједначине

$$\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1.$$

236. Тачка A припада кругу k полупречника r. Ap и Aq су полуправе такве да је $\sphericalangle pAq = 60^\circ$. Ако су B и C пресечне тачке тих полуправих и круга k, наћи дужину тетиве BC.

237. Систем једначина

$$\begin{array}{ccccc} bx & + & ay & = & c, \\ cx & + & az & = & b, \\ cy & + & bz & = & a \end{array}$$

има јединствено решење.
Доказати да је тада $abc \neq 0$ и наћи то решење.

238. Израчунати запремину пирамиде, чија је основа једнакостранични троугао странице a, ако су бочне стране нагнуте према равни основе под угловима α, β и γ.

Четврти разред – Б категорија

239. Наћи висину купе максималне површине омотача уписане у лопту полупречника R.

240. Дат је комплексан број $z = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \varphi \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$. Одредити модул и аргумент комплексног броја $\dfrac{z+1}{z-1}$.

241. Наћи област вредности функције $\quad y = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

242. Доказати да се ни за један природан број n збир $1+2+\ldots+n$ не може завршавати неком од цифара 2,4,7,9.

243. Колико највише оштрих углова може имати конвексан многоугао?

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
Ниш, 27. 03. 2004.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

Први разред – А категорија

244. Нека је $ABCD$ трапез код кога је $AB \parallel CD$ и P тачка на продужетку дијагонале AC тако да је C између A и P. Ако су X и Y средишта основица AB и CD, а M и N пресечне тачке правих PX и PY са дужима BC и DA, редом, доказати да је права MN паралелна основицама трапеза.

245. У једнакостраничном троуглу $\triangle ABC$ је $|AB| = 2$. Нека су M и N унутрашње тачке странице AB такве да је $|MN| = 1$. Доказати да је $\sphericalangle MCN > 30^\circ$.

246. Колико има тројки природних бројева (a, b, c) таквих да је $2a + 1$ дељиво са b, $2b + 1$ дељиво са c, и $2c + 1$ дељиво са a.

247. Шаховска табла димензија 2004×2004 је поплочана доминама димензија 1×4. Може ли број хоризонталних домина да буде једнак броју вертикалних домина?

248. Колико има природних бројева n, $10 \leqslant n < 100000$, дељивих са 4 у чијем се декадном запису не појављује цифра 0 и никоје две суседне цифре нису једнаке?

Други разред – А категорија

249. Дат је троугао $\triangle ABC$. Права симетрична тежишној дужи из A у односу на симетралу угла $\sphericalangle BAC$ сече описани круг троугла $\triangle ABC$ у K. Нека је L средиште дужи AK. Доказати:

$$\sphericalangle BLC = 2\sphericalangle BAC.$$

250. Наћи максималну вредност израза

$$I = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$$

ако су $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant e \geqslant 0$ реални бројеви за које важи $a + b \leqslant 5$ и $c + d + e \leqslant 5$. Када се постиже та вредност?

251. Нека је a природан број већи од 1. Доказати да је број

$$n(2n + 1)(3n + 1) \ldots (an + 1)$$

дељив свим простим бројевима мањим од a, за сваки природан број n.

252. Разлика корена квадратне једначине $x^2 + px + q = 0$ $(p, q \in \mathbb{R})$ једнака је 4. Наћи те корене тако да збир $p + q$ буде најмањи могући.

253. Постоји ли бесконачан подскуп скупа природних бројева такав да ниједан његов члан, нити збир неколико његових елемената није степен природног броја (тј. није број облика a^k, $a, k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$)?

Трећи разред – А категорија

254. Дат је круг k и његов пречник AB. Нека је P произвољна тачка тог круга различита од A и B. Пројекција тачке P на AB је Q. Круг са центром P и полупречником PQ сече круг k у C и D. Пресек правих CD и PQ је тачка E. Нека је F средиште AQ, а G подножје нормале из F на CD. Доказати да је $EP = EQ = EG$ и да су тачке A, G и P колинеарне.

255. У скупу реалних бројева наћи сва решења система једначина

$$x = 1 + \sqrt{y}, \quad y = 1 + \sqrt{z}, \quad z = 1 + \sqrt{x}.$$

256. Ако је $n \in \mathbb{N}$ такав да

$$n \mid \left(1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n\right) + 1,$$

доказати да n није дељив ниједним квадратом већим од 1.

257. Функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ је таква да је

$$x + f(x) = f(f(x))$$

за свако $x \in \mathbb{R}$. Наћи сва решења једначине $f(f(x)) = 0$.

258. Дејан је пре x година имао x пута мање година него онда кад је y година раније имао y пута мање године него што има сада, при чему су x, y и број Дејанових година природни бројеви. Колико све година може да има Дејан?

Четврти разред – А категорија

259. Дат је конвексан петоугао $ABCDE$ код кога је $DC = DE$ и $\sphericalangle DCB = \sphericalangle DEA = 90°$. Нека је F унутрашња тачка сегмента AB одређена условом $AF : BF = AE : BC$. Доказати да је $\sphericalangle FCE = \sphericalangle ADE$ и $\sphericalangle FEC = \sphericalangle BDC$.

260. Дат је оштроугли троугао ABC. Нека су M, N и P средишта страница AB, AC и BC, A_0 подножје нормале из тачке N на страницу BC, и нека је A_1 средиште дужи MA_0. Конструишимо аналогно B_1 и C_1. Доказати да се праве AA_1, BB_1 и CC_1 секу ако и само ако је троугао ABC једнакокрак.

261. Означимо са $d(n)$ број делилаца природног броја n. Одредити све природне бројеве n такве да међу бројевима

$$n,\ d(n),\ d(d(n)),\ d(d(d(n))),\ \ldots$$

нема ниједног потпуног квадрата.

262. Наћи све 1-1 функције $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ које задовољавају услове:

$$1^\circ\ f(f(m)+f(n)) = f(f(m)) + f(n), \qquad 2^\circ\ f(1) = 2, \quad f(2) = 4.$$

263. Нека је A скуп од 6 елемената. Доказати да у свакој фамилији $\{A_1, A_2, \ldots, A_{11}\}$ различитих троелементних подскупова од A, постоје три различита скупа A_i, A_j и A_k који су сви подскупови истог четвороелементног скупа.

Први разред – Б категорија

264. Нека су a, b и c три различите цифре, од којих ниједна није једнака нули, за које важи

$$\overline{abc} : c = \overline{bc}.$$

Одредити те цифре.

265. У правоуглом троуглу $\triangle ABC$ над катетом AC као над пречником конструисан је круг k који сече хипотенузу AB у тачки E. У тачки E конструисана је тангента t круга k која сече катету BC у тачки D. Доказати да је троугао $\triangle BDE$ једнакокраки.

266. Дат је паралелограм $ABCD$. На правама AB, BC, CD и DA изабране су, редом, тачке A_1, B_1, C_1 и D_1 тако да је B средиште дужи AA_1, C средиште дужи BB_1, D средиште дужи CC_1 и A средиште дужи DD_1.
а) Доказати да је четвороугао $A_1B_1C_1D_1$ такође паралелограм.
б) Израчунати површину четвороугла $A_1B_1C_1D_1$, ако је површина четвороугла $ABCD$ једнака $2004cm^2$.

267. Одредити коефицијенте $a, b \in \mathbb{R}$ полинома $P(x) = x^3 + ax^2 - 2x + b$ ако се зна да је $x = -2$ нула полинома и да $P(x)$ при дељењу са $x+3$ даје остатак -12, а затим факторисати полином $P(x)$.

268. Колико има природних бројева n, $10 \leqslant n < 100000$, дељивих са 4 у чијем се декадном запису не појављује цифра 0 и никоје две суседне цифре нису једнаке?

Други разред – Б категорија

269. Наћи сва реална решења једначине:

$$(x^3 - 9x^2 - x + 9)^2 + (x^3 + 3x^2 - x - 3)^4 = 0.$$

270. Нека је AB пречник круга k и тетиве AD и BC тог круга се секу у тачки E. Доказати да

$$AE \cdot AD + BE \cdot BC$$

не зависи од избора тачака C и D.

271. Наћи све природне бројеве x и y тако да важи:

$$x + y^2 + \sqrt{x - y^2 - 1} \leqslant 1.$$

272. Разлика корена квадратне једначине $x^2 + px + q = 0$ $(p, q \in \mathbb{R})$ једнака је 4. Наћи те корене тако да збир $p + q$ буде најмањи могући.

273. Наћи све целе бројеве m такве да важи $(1+i)^m = (1-i)^m$.

Трећи разред – Б категорија

274. Који је од бројева $2^{\sqrt{\log_2 2004}}$ и $2004^{\sqrt{\log_{2004} 2}}$ већи?

275. Наћи висину правилне четворостране пирамиде ако је запремина лопте описане око пирамиде једнака V, а нормала, конструисана из центра те лопте на бочну страну, образује са висином пирамиде угао α.

276. Нека је O средиште описаног круга једнакокраког тоугла $\triangle ABC$. Ако је $AB = AC = b$ и $\sphericalangle BAC = \alpha$ $(\alpha \neq 120^\circ)$. Наћи дужину дужи BD, при чему је D пресечна тачка правих BO и AC.

277. Доказати да за све α и $\beta \neq k\dfrac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ важи неједнакост

$$\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\beta} + \frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta} \geqslant 1.$$

Када важи једнакост?

278. У зависности од реалног параметра a решити систем једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & az & = & 3 \\ x & + & ay & + & 3z & = & 2 \end{array} .$$

Четврти разред – Б категорија

279. Наћи све просте бројеве p и q такве да једначина $x^4 - px^3 + q = 0$ има цео корен.

280. Наћи све природне бројеве n такве да функција

$$f(x) = \cos nx \cdot \sin \frac{5}{n} x$$

има период 3π.

281. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Решити систем једначина:

$$\begin{array}{rcl} x_1(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) & = & 1 \\ x_2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) & = & 3 \\ x_3(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) & = & 5 \\ \vdots & & \\ x_n(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) & = & 2n - 1 \ . \end{array}$$

282. Наћи све реалне вредности параметра a такве да функција

$$f(x) = \frac{1}{3}\, 2^{3x} + a \cdot 2^{2x-1} + (1-a)2^x$$

буде растућа за све вредности $x \in \mathbb{R}$.

283. Доказати да за све природне бројеве n важи

$$\log(n+1) > \frac{\log 1 + \log 2 + \ldots + \log n}{n} \ .$$

ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИЗБОР ЕКИПЕ ЗА САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
(Мало савезно)
Београд, недеља, 4. април 2004.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.

Први разред

284. Дат је једнакокраки троугао $\triangle ABC$, код кога је $AB = BC$. Нека је тачка D пресек симетрале угла $\sphericalangle BAC$ са краком BC. Нормала на

AD у тачки D сече продужетак странице AC у тачки E. Тачке M и N су, редом, подножја нормала из тачака B и D на основицу AC. Ако је $AE = a$, израчунати MN.

285. Нека су A, B, C и D тачке круга k, такве да важи $AB = BC = CD$. Нека је E тачка дијаметрално супротна тачки B. Ако је $BE \cap AD = \{F\}$ доказати да је $AB = AF$ и да CE полови FD.

286. За дате различите реалне бројеве a, b, c и d израчунати вредност израза:

$$S = \frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{1}{(d-a)(d-b)(d-c)}.$$

287. Ако су m и n природни бројеви и број $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ рационалан, показати да је онда тај број и природан.

288. Посматрајмо природне бројеве n, $n < 10000$. Да ли међу њима има више оних чији је збир цифара једнак 18 или оних код којих је збир цифара јединица и десетица једнак збиру цифара стотина и хиљада? (уколико нека од тих цифара недостаје, сматра се да је она једнака 0: нпр. 936 задовољава оба услова јер је $9+3+6 = 18$ и $0+9 = 3+6$)

Други разред

289. Дужина странице квадрата $ABCD$ једнака је 1. Тачке P и Q припадају, редом, страницама AB и AD, тако да је обим троугла $\triangle APQ$ једнак 2. Израчунати величину угла $\sphericalangle PCQ$.

290. Нека су AB и CD две међу собом нормалне тетиве круга k полупречника r, које се секу у тачки M унутар круга k. Доказати:
а) $AB^2 + CD^2 > (2r)^2$;
б) $AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2 = (2r)^2$.

291. Решити једначину: $2^{x+7} + 4^{x^2+3x+5} + 8^{1-x} = 192$.

292. Наћи све вредности реалног параметра a тако да једначина

$$|x^2 + x - 2| = x + a$$

има тачно три различита реална решења.

293. Посматрајмо природне бројеве n, $n < 10000$. Да ли међу њима има више оних чији је збир цифара једнак 18 или оних код којих је збир цифара јединица и десетица једнак збиру цифара стотина и хиљада? (уколико нека од тих цифара недостаје, сматра се да је она једнака 0: нпр. 936 задовољава оба услова јер је $9+3+6 = 18$ и $0+9 = 3+6$)

45. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ, Шабац, 17. април 2004.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.

Први разред

294. Наћи све парове природних бројева (a, b) за које важи:

$$5a^b - b = 2004.$$

295. Дат је троугао $\triangle ABC$ и тачке D и E редом на полуправама CB и CA, тако да важи $CD = CE = \dfrac{AC + BC}{2}$. Нека је H ортоцентар троугла ABC и P средиште лука AB кружнице описане око троугла ABC, који не садржи тачку C. Доказати да права DE полови дуж HP.

296. Ако су a, b, c позитивни бројеви, такви да је $abc = 1$, доказати да је

$$\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}} \geqslant \sqrt{2}.$$

297. У простору је дат скуп S који садржи 100 тачака, тако да никоје 4 од њих не припадају једној равни. Доказати да не постоји више од $4 \cdot 101^2$ тетраедара са теменима из скупа S, таквих да свака два од тих тетраедара имају највише два заједничка темена.

Други разред

298. Ако су a, b, c природни бројеви такви да је и $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}$ природан број, доказати да је abc потпун куб.

299. Дат је оштроугли троугао са полупречником уписане кружнице r. Доказати да збир растојања ортоцентра од страница троугла није већи од $3r$.

300. Нека су M, N, P произвољне тачке редом на страницама BC, CA, AB оштроуглог троугла ABC. Доказати да је тачна бар једна од неједнакости:

$$NP \geqslant \frac{1}{2}BC, \quad PM \geqslant \frac{1}{2}CA, \quad MN \geqslant \frac{1}{2}AB.$$

301. Разговарали су барон Минхаузен и математичар. Барон Минхаузен је рекао да се у његовој земљи из сваког града може путем стићи у било који други град. При томе, ако се из произвољног града путује по земљи произвољним путем до повратка у тај град, онда се прође кроз непаран број успутних градова. Математичар је питао колико пута се броји град, ако се више пута прође кроз њега. Барон је одговорио да се такав град броји онолико пута колико пута се прође кроз њега. Осим тога, барон Минхаузен је додао да из сваког града у његовој земљи полази једнак број путева, осим из његовог родног града из кога полази мањи број путева. На то је математичар рекао да барон Минхаузен лаже. Како је то закључио?

Трећи и четврти разред

302. У троуглу $\triangle ABC$ површине S тачка H је ортоцентар, D, E и F су подножја висина из A, B и C, а P, Q и R тачке симетричне тачкама A, B и C у односу на праве BC, CA и AB, редом. Познато је да троуглови DEF и PQR имају једнаку површину T и да је $T > \dfrac{3}{5}S$. Доказати да је $T = S$.

303. Низ (a_n) одређен је условима $a_1 = 0$ и

$$(n+1)^3 a_{n+1} = 2n^2(2n+1)a_n + 2(3n+1) \quad \text{за} \quad n \geqslant 1.$$

Доказати да бесконачно много чланова низа припада скупу природних бројева.

304. Нека је $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$. Колико има подскупова B скупа A, таквих да за свако $n \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ важи: ако $n \in B$ и $n+2 \in B$, онда бар један од бројева $n+1$ и $n+3$ такође припада скупу B?

305. Нека је (a_n) низ одређен условима $a_1 = x \in \mathbb{R}$ и $3a_{n+1} = a_n + 1$ за $n \geqslant 1$. Нека је

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n - \frac{1}{6} \right], \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n + \frac{1}{6} \right].$$

Израчунати збир $A + B$ у зависности од x.

ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИЗБОР ЕКИПЕ ЗА ИМО
(Мала олимпијада)

недеља, 18. април 2004.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.

306. Дат је квадрат $ABCD$ и кружница γ са пречником AB. Нека је P произвољна тачка странице CD, M и N редом пресеци дужи AP и BP са γ који су различити од A и B, а Q тачка пресека правих DM и CN. Доказати да је $Q \in \gamma$ и да важи једнакост $AQ : QB = DP : PC$.

307. Нека су a, b, c реални бројеви, такви да је $abc = 1$. Доказати да су највише два од бројева

$$2a - \frac{1}{b}, \quad 2b - \frac{1}{c}, \quad 2c - \frac{1}{a}$$

већа од 1.

308. Нека је $P(x)$ полином n-тог степена са коренима $i-1$, $i-2$, $\dots$, $i-n$ и нека су $R(x)$ и $S(x)$ полиноми са реалним коефицијентима такви да је

$$P(x) = R(x) + iS(x).$$

Доказати да полином R има n реалних нула. (i је имагинарна јединица)

21. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА,
Бугарска – Плевен, 5.–10. мај 2004.
петак, 7. мај 2004.

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.

309. Низ реалних бројева $a_0, a_1, a_2, \ldots$ задовољава релацију:

$$a_{m+n} + a_{m-n} - m + n - 1 = \frac{a_{2m} + a_{2n}}{2}$$

за све $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \geqslant n$. Ако је $a_1 = 3$ наћи a_{2004}.

Кипар

310. Решити у скупу простих бројева једначину:

$$x^y - y^x = x \cdot y^2 - 19.$$

Албанија

311. Нека је O унутрашња тачка оштроуглог троугла $\triangle ABC$. Кругови са центрима у средиштима страница троугла $\triangle ABC$, који пролазе тачку O, међусобно се секу у тачкама K, L и M, различитим од O. Доказати да је O центар уписаног круга троугла $\triangle KLM$ ако и само ако је O центар описаног круга око троугла $\triangle ABC$.

Румунија

312. Раван је подељена на области коначним бројем правих, од којих никоје три не пролазе кроз исту тачку. Две области називамо "суседним" уколико је њихова заједничка граница: дуж, полуправа или права. Потребно је у свакој области уписати цео број такав да важе следећа два услова:

1° производ бројева из суседних области је мањи од њиховог збира;

2° збир свих бројева са сваке стране произвољне праве једнак је нули.

Доказати да је то могуће ако и само ако све праве нису паралелне.

Србија и Црна Гора

45. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА, Грчка – Атина, 9.–19. јул 2004.

Време за рад 2×270 *минута.*
Сваки задатак вреди 7 поена.

Први дан
понедељак, 12. јул 2004.

313. Дат је оштроугли троугао $\triangle ABC$ такав да је $AB \neq AC$. Кружница чији је пречник BC сече странице AB и AC у тачкама M и N редом. Означимо са O средиште странице BC. Симетрале углова $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle MON$ секу се у тачки R. Доказати да се кружнице описане око троуглова $\triangle BMR$ и $\triangle CNR$ секу у тачки која припада страници BC.

Румунија

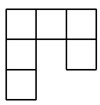
314. Одредити све полиноме $P(x)$ са реалним коефицијентима који задовољавају једнакост

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$$

за све реалне бројеве a, b, c за које је $ab+bc+ca=0$.

Јужна Кореја

315. Нека је *кука* фигура састављена од шест јединичних квадрата као на слици



или ма која фигура добијена од ове фигуре применом ротација и осних симетрија. Одредити све $m \times n$ правоугаонике који се могу покрити кукама тако да

- правоугаоник буде покривен без празнина и без преклапања;
- ни један део куке не буде изван правоугаоника.

Естонија

Други дан
уторак, 13. јул 2004.

316. Нека је $n \geqslant 3$ природан број. Нека су $t_1, t_2, \ldots, t_n$ позитивни реални бројеви такви да је

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \ldots + t_n) \cdot \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \ldots + \frac{1}{t_n} \right).$$

Доказати да су t_i, t_j, t_k дужине страница троугла, за све i, j, k за које је $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$.

Јужна Кореја

317. У конвексном четвороуглу $ABCD$ дијагонала BD није симетрала нити угла $\sphericalangle ABC$ нити угла $\sphericalangle CDA$. Тачка P која се налази унутар четвороугла $ABCD$ је таква да је

$$\sphericalangle PBC = \sphericalangle DBA \quad \text{и} \quad \sphericalangle PDC = \sphericalangle BDA.$$

Доказати да је $ABCD$ тетивни четвороугао ако и само ако је $AP = CP$.

Пољска

318. Природан број називамо *алтернирајући* ако су сваке две суседне цифре у његовом децималном запису различите парности.

Одредити све природне бројеве n, за које постоји алтернирајући број дељив са n.

Иран

Пробна такмичења

ПРВО ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ

Време за рад 180 *минута.*
Сваки задатак вреди 20 *поена.*

Први разред
недеља, 7. децембар 2003.

319. Да ли постоје цели бројеви a, b, c, d такви да је

$$\begin{aligned} abcd - a &= 1235 \\ abcd - b &= 235 \\ abcd - c &= 35 \\ abcd - d &= 5 \quad ? \end{aligned}$$

320. Одредити $f(x)$ ако је

$$f\left(\frac{x-1}{x+3}\right) + 2f\left(\frac{x+3}{x-1}\right) = x, \qquad \text{за } x \neq 1,\ x \neq -3.$$

321. У троуглу $\triangle ABC$ повучена је симетрала AM угла $\alpha = \sphericalangle CAB$ $(M \in BC)$. У сваки од троуглова $\triangle ABM$ и $\triangle AMC$ уписани су кругови полупречника r_1 и r_2, респективно. Показати да је $r_1 = r_2$ ако и само ако је $\triangle ABC$ једнакокрак са крацима $AB = AC$.

322. Нека су K и L тачке ивице AD, односно дијагонале AC паралелограма $ABCD$, такве да је $\overrightarrow{AK} : \overrightarrow{KD} = 1 : 3$ и $\overrightarrow{AL} : \overrightarrow{LC} = 1 : 4$. Доказати да су тачке K, L и B колинеарне.

323. На кружници је распоређено 40 фигура, што белих, што црвених. Два играча играју следећу игру: први узима све црвене фигуре које имају белог суседа, након тога други узима све беле фигуре које имају црвеног суседа, онда опет први узима све црвене фигуре које имају белог суседа итд. Игра се завршава када на кружници остану само фигуре исте боје.
а) Да ли је могуће да на крају остане само једна црвена фигура?
б) Да ли је могуће да на крају остану две беле фигуре?

Други разред
понедељак, 1. децембар 2003.

324. Дат је троугао $\triangle ABC$. На полуправој AC изабрана је тачка K и на полуправој BC изабрана је тачка L тако да важи $AB = AK = BL$. На полуправој AB изабрана је тачка M и на полуправој CB изабрана је тачка N тако да важи $AC = AM = CN$. На полуправој BA изабрана је тачка P и на полуправој CA изабрана је тачка Q тако да важи $BC = BP = CQ$. Показати да су праве KL, MN и PQ паралелне.

325. На дужи AC изабрана је произвољна тачка B и на дужима AB, BC и AC као пречницима, конструисани су кругови k_1, k_2 и k. Кроз тачку B је конструисана произвољна права, која сече k у тачкама P и Q, а кругове k_1 и k_2 поред тачке B у тачкама R и S, редом. Доказати да је $PR = QS$.

326. Нека је дат природан број n. Посматрајмо уређене парове (u, v) природних бројева, таквих да им је НЗС једнак n (значи за $u \neq v$ пар (u, v) сматрамо различитим од (v, u)). Доказати да је број таквих парова једнак броју позитивних делилаца броја n^2.

327. Наћи најмањи природан број m за који је

$$\overbrace{100^{100^{100^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{100}}}}}}}^{m} > \overbrace{3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}}^{100}.$$

328. Бубамара шета ивицама полиедра, полазећи из врха A. Она је прошла свим ивицама полиедра тачно двапут. Доказати да тачка у којој је бубамара завршила пут не зависи од пута.

Трећи разред
понедељак, 1. децембар 2003.

329. Нека су AK, BL и CM висине троугла $\triangle ABC$, а P било која тачка у тој равни која не припада правама које садрже те висине. Доказати да кругови описани око $\triangle AKP$, $\triangle BLP$ и $\triangle CMP$, осим P имају још једну заједничку тачку.

330. Круг l додирује изнутра круг k, и пречник PQ круга k у тачки C. Нека је A тачка на k, а B тачка на дужи CQ таква да је AB тангента круга l која је нормална на PQ. Доказати да AC полови угао $\sphericalangle PAB$.

331. Постоји ли природан број n такав да важи:
1° број n није потпун степен природног броја;

2° бројеви $n+1, n+2, \ldots, n+2003$ су дељиви квадратом (већим од 1);
3° број $n+2004$ није потпун степен природног броја?

332. Свака тачка равни је обојена у плаво или црвено. Доказати да постоје две плаве тачке на растојању 1, или четири колинеарне црвене тачке A_1, A_2, A_3, A_4 такве да је $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = 1$.

333. Нека су m и n различити природни бројеви, a природан број и $p < a-1$ прост. Доказати да је полином

$$P(x) = x^m(x-a)^n + p$$

нерастављив над $\mathbb{Z}$.

Четврти разред
понедељак, 1. децембар 2003.

334. Дат је троугао $\triangle ABC$ и око њега је описан круг k. Нека је AD симетрала угла $\sphericalangle BAC$ ($D \in BC$) и нека је l круг који изнутра додирује круг k и дужи AD и BD. Означимо са E тачку додира круга l и симетрале AD. Доказати да је E центар уписаног круга у троугао $\triangle ABC$.

335. Доказати да постоји бесконачно много сложених природних бројева n са својством:

$$n \mid 3^{n-1} - 2^{n-1}\ .$$

336. Постоји ли природан број n такав да важи:
1° број n није дељив квадратом природног броја (већим од 1);
2° бројеви $n+1, n+2, \ldots, n+2003$ су дељиви квадратом (већим од 1);
3° број $n+2004$ није потпун степен природног броја?

337. Нека је $n \geqslant 4$ и нека су x_1,x_2,...,x_n позитивни реални бројеви.
а) Доказати неједнакост:

$$\frac{x_1}{x_n + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-2} + x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1} + x_1} \geqslant 2$$

при чему је једнакост могуће постићи само у случају $n = 4$.
б) Показати да је за свако $n > 4$ ово најбоља процена (тј. ни за које n број 2 са десне стране неједнакости не можемо заменити неким већим).

338. Нека је S конвексан скуп тачака који садржи бар три неколинеарне тачке. Нека су тачке скупа S обојене са p различитих боја (свака тачка је обојена тачно једном од p боја). Доказати да за свако $n \geqslant 3$ постоји бесконачно много подударних n-тоуглова таквих да су сва темена тих n-тоуглова обојена истом бојом.

ДРУГО ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ
петак, 30. јануар 2004.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.

339. Око округлог стола седи 2005 витезова, а један од њих држи код себе $z \leqslant 2005$ златника, са задатком да их подели тако да ником не припадне више од једног. Његова замисао је да, у сваком кораку, један од витезова који држе више од једног златника (ако таквих још има) да по један сваком од своја два суседа.
а) Доказати да се оваква расподела мора завршити ако је $z < 2005$;
б) Да ли се расподела може завршити ако је $z = 2005$?

340. Нека је ABC троугао и P тачка у његовој унутрашњости. Означимо са D, E, F подножја нормала из P на праве BC, CA и AB, редом. Претпоставимо да је при том

$$AP^2 + PD^2 = BP^2 + PE^2 = CP^2 + PF^2.$$

Доказати да је тада P центар круга описаног око $\triangle S_aS_bS_c$, где су S_a, S_b, S_c центри приписаних кругова троугла ABC.

341. За дати природан број n, нека је S скуп свих непарних природних бројева мањих од n и узајамно простих са n. За $x \in S$ дефинишемо $f(x)$ као највећи непаран делилац броја $n - x$. Доказати:
а) за свако $x \in S$ постоји $m \leqslant [\frac{n+1}{4}]$ такво да је $f(f(\dots f(x)\dots)) = x$;
б) ако је n прост и не дели $2^k - 1$ ни за које $k = 1, 2, \dots, n-2$, онда је најмање m из дела под а) управо једнако $[\frac{n+1}{4}]$.

342. Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функција таква да је, за свако x, $|f(x)| \leqslant 1$ и

$$f(x + 15/56) + f(x) = f(x + 1/7) + f(x + 1/8).$$

Доказати да је f периодична.

ТРЕЋЕ ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.

Први и други разред
недеља, 21. март 2004

343. Нека су BD и CE симетрале унутрашњих углова троугла $\triangle ABC$, при чему су $D \in AC$ и $E \in AB$. Ако је познато да је $\sphericalangle BDE = 24^\circ$ и $\sphericalangle CED = 18^\circ$, одредити углове троугла ABC.

344. Дат је једнакокрак троугао $\triangle ABC$. На основици BC је одабрана произвољна тачка P. Кроз P су конструисане две праве паралелне крацима троугла. Означимо са Q и R пресечне тачке ових правих са крацима троугла. Нека је S тачка симетрична тачки P у односу на праву QR. Доказати да тачка S лежи на описаном кругу око троугла ABC.

345. Доказати да број
$$(n+2)^4 - n^4$$
ни за један природан број n није потпун куб природног броја.

346. Ако је $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, одредити најмању вредност израза
$$S = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}.$$

347. Да ли постоји конвексан многоугао који се може исећи на неконвексне четвороуглове?

Трећи и четврти разред
понедељак, 22. март 2004.

348. Претпоставимо да су збирови углова у теменима A и B тетраедра $ABCD$ једнаки по 180°. Доказати да је $AB \leqslant CD$.

349. Нека су $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ природни бројеви такви да не постоје два од којих се један састоји од почетних цифара другог у истом редоследу (нпр. бројеви 13 и 13809 не могу бити истовремено укључени). Доказати да је
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{9}.$$

350. Дат је полином $P(x)$ са целобројним коефицијентима. За сваки природан број n број $P(n)$ је већи од n. Посматрајмо низ

$$x_1 = 1,\ x_2 = P(x_2),\ \dots\ , x_n = P(x_{n-1}),\ \dots$$

Познато је да за сваки природан број N постоји члан низа који је дељив са N. Доказати да важи $P(x) = x + 1$.

351. Посада од n пирата се домогла ковчега са благом у коме се налази одређен број златника. У тој посади пирати су распоређени по снази од најјачег до најслабијег и сви су упознати са тим редоследом. По пирацким правилима најјачи предлаже поделу плена која се прихвата ако за њу гласа барем половина свих пирата. Ако се подела не прихвати пират који је дао предлог бива елиминисан (ходањем на дасци) и дужност поделе плена припада следећем по снази и тако редом све док се не усвоји неки предлог. У гласању и предлагању подела плена пирати се понашају рационално и знају да се и други пирати понашају рационално. Сваком пирату је листа приоритета иста:

- Пирату је пре свега највише стало да сачува живу главу.
- Ако је први услов задовољен пират ће гласати и предлагати тако да освоји што већу количину златника
- Ако је пирату по обе претходне тачке све једно, он ће гласати против поделе у циљу елиминисања својих ривала.

Који ће бити први пират по снази који ће сачувати живу главу и како ће гласити коначна подела плена ако у ковчегу има 100 златника а број пирата износи: **а)** $n = 100$; **б)** $n = 2004$.

ЧЕТВРТО ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

Први дан
субота, 26. јун 2004.

352. Нека су $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n$ произвољни природни бројеви. Доказати да важи

$$\frac{1}{[a_1, a_2]} + \frac{1}{[a_2, a_3]} + \cdots + \frac{1}{[a_{n-1}, a_n]} < 1,$$

при чему $[x, y]$ означава НЗС(x, y).

353. Кругови γ_1 и γ_2 се секу у тачкама A и B, а круг γ_3 их додирује споља у тачкама C и D редом. Тачка K је средиште CD. Права AB сече круг γ_3 у тачкама P и Q. Доказати да је $\sphericalangle PKC = \sphericalangle QKC$.

354. Нека су $A_1, A_2, \ldots, A_n$ скупови од по n дужи на датој правој. Доказати да се пресек $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ састоји од не више од $n^2 - n + 1$ дисјунктних дужи.

Други дан
понедељак, 28. јун 2004.

355. Претпоставимо да низ природних бројева (a_n) задовољава $(a_i, a_j) = (i, j)$ за свака два различита природна броја i, j. Доказати да је $a_n = n$ за свако n.

356. Дат је троугао ABC. Тангента у темену A на круг описан око $\triangle ABC$ сече средњу линију троугла паралелну са BC у тачки A_1. Аналогно дефинишемо тачке B_1 и C_1. Доказати да тачке A_1, B_1, C_1 леже на правој и да је та права нормална на Ојлерову праву троугла ABC.

357. У поља бесконачне квадратне таблице уписани су природни бројеви тако да важи следеће својство: ако је у неко поље таблице уписан неки број a, тада је збир бројева у пољу испод и у пољу десно од посматраног поља једнак $2a + 1$. Доказати да су на свакој дијагонали паралелној правој $x = y$ сви бројеви различити.

ПЕТО ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

Први дан
среда, 30. јун 2003.

358. Нека је (a_n) низ различитих природних бројева такав да постоји константа $a > 0$ таква да је $a_n < an$ за све $n \in \mathbb{N}$. Доказати да:
а) ако је $a < 5$, низ садржи бесконачно много бројева којима збир цифара (у декадном систему) није дељив са 5;
б) претходни резултат није тачан за $a = 5$.

359. *Дијамант* реда n је вертикално симетричан скуп јединичних квадрата који у врстама има $1, 3, \ldots, 2n-3, 2n-1, 2n-3, \ldots, 3, 1$ квадрата редом (видети слику). Нека је $A(n,k)$ број начина на које може да се постави k дисјунктних 2×2 квадрата у $(2n-1) \times (2n-1)$ квадратну мрежу, а $B(n,k)$ број начина на које може да се постави k дисјунктних домина на дијамант реда n. Симетрична постављања се сматрају различитим. Доказати да је $A(n,k) < B(n,k)$ за $2 \leqslant k \leqslant (n-1)^2$.

360. Нека су a, b, c, d позитивни реални бројеви такви да је

$$3(a+b+c+d) + 4(abc+bcd+cda+dab) = 8.$$

Доказати неједнакост

$$ab+ac+bc+ad+bd+cd \leqslant 2.$$

Други дан
понедељак, 5. јул 2004.

361. У датом троуглу $\triangle ABC$ конструисати тачку M чији је збир квадрата растојања до правих AB, BC и CA минималан.

362. Чукунунук барона Минхаузена тврди да у његовој земљи постоји $n \geqslant 3$ већих градова, од којих су свака два повезани авионском линијом у једном смеру, као и да се из сваког града у било који други може доћи са највише једним преседањем. За које је све вредности природног броја $n \geqslant 3$ могуће да чукунунук барона Минхаузена говори истину?

363. За број $A = x^2 - 1002000y^2$, где су $x, y \in \mathbb{Z}$, важи $A > 0$ и A није потпун квадрат. Наћи најмању могућу вредност броја A.

Сусрети гимназија централне Србије

Први сусрети гимназија централне Србије

Врњачка Бања, 7. децембар 2001.

Време за рад 180 *минута.*
Сваки задатак вреди 20 поена.

Први разред

364. У квадрату $ABCD$ задата је тачка M за коју важи $AM = 7$, $BM = 13$, $CM = 17$. Израчунати површину квадрата $ABCD$.

365. Одредити све тројке (x, y, z) природних бројева који задовољавају једначину
$$xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1 = 2001.$$

366. У жестокој борби 70 од 100 гусара изгубило је једно око, 75 једно ухо, 80 једну руку, 85 једну ногу. Колико је најмање гусара изгубило и око и ухо и руку и ногу истовремено?

367. Нека је M произвољна тачка која лежи унутар правилног $n-$тоугла. Доказати да постоје два темена A и B тог $n-$тоугла, тако да важи
$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) 180^\circ \leqslant \sphericalangle AMB \leqslant 180^\circ.$$

Други разред

368. Рационалисати разломак $\dfrac{1}{1 + 3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[4]{4}}$.

369. Решити једначину

$$\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\frac{3x}{x^2-8x+15}$$

у скупу комплексних бројева.

370. На кружници је задата 2001 тачка од којих је једна означена. Посматрајмо све конвексне многоуглове чија су темена задате тачке. Којих има више: оних који садрже означену тачку или оних који је не садрже?

371. Ако је $2x+4y=1$, доказати да је $x^2+y^2 \geqslant \dfrac{1}{20}$.

Трећи и четврти разред

372. Ако је $\log 196 = a$ и $\log 56 = b$, наћи $\log 0,175$ (у функцији од a и b).

373. Наћи дужине страница једнакокраког троугла чији је полупречник уписане кружнице $r = 3$ cm и описане кружнице $R = 8$ cm.

374. Око лопте је описана зарубљена купа. Доказати да важи

$$V_L : V_K = P_L : P_K.$$

375. Ако је $x = \operatorname{tg} 5^\circ$, $y = \operatorname{tg} 20^\circ$ и $z = \operatorname{tg} 65^\circ$, доказати да је

$$xy + yz + zx = 1.$$

Други сусрети гимназија централне Србије

Крушевац, 14. децембар 2002.

Време за рад 180 *минута.*
Сваки задатак вреди 20 поена.

Први разред

376. Решити по $x \in R$ једначину:

$$x + |x - |1 - x|| = 2.$$

377. У декадном запису деветоцифреног броја, који се завршава цифром 5, појављују се све цифре осим нуле. Доказати да тај број не може бити потпун квадрат.

378. Један конвексан четвороугао подељен је дијагоналама на четири троугла чије су површине природни бројеви. Доказати да је производ та четири броја потпун квадрат.

379. Израчунати:

$$\frac{(2^4+2^2+1)(4^4+4^2+1)(6^4+6^2+1)(8^4+8^2+1)(10^4+10^2+1)}{(1^4+1^2+1)(3^4+3^2+1)(5^4+5^2+1)(7^4+7^2+1)(9^4+9^2+1)}.$$

Други разред

380. Одредити a тако да решења x_1 и x_2 једначине $x^2-x+a-2=0$ задовољавју услов $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{1}{2}x_1x_2+4=0$.

381. Дат је полукруг над пречником AB. Кроз средину C лука $\widehat{AB}$ конструисане су четири праве које дати полукруг деле на пет делова једнаких површина. Одредити однос ду

382. ина одсечака које конструисане праве граде на пречнику AB.

383. Дат је правоугаоник $ABCD$, такав да је $AB=3BC$. Ако су E и F тачке странице AB такве да је $AE=EF=FB$, доказати да је права DE тангента круга описаног око троугла FBD.

384. Решити једначину:

$$(\sqrt[3]{3}-\sqrt[6]{3}\,\sqrt[10]{5}+\sqrt[5]{5})(x^4+x^2+1)=(\sqrt[3]{3}+\sqrt[6]{3}\,\sqrt[10]{5}+\sqrt[5]{5})(x^4-x^2+1).$$

Трећи и четврти разред

385. Решити једначину $\sin^4 x+\cos^4 x=1$.

386. Ако је 2^n+1 прост број, тада постоји природан број k да је $n=2^k$, $n\in N$. Доказати.

387. Нека је n природан број. Доказати

$$(\underbrace{33\ldots3}_{n})^2+(\underbrace{55\ldots5}_{n-1}\underbrace{44\ldots4}_{n})^2=(\underbrace{55\ldots5}_{n-1}\underbrace{44\ldots4}_{n-1}5)^2$$

388. Да ли постоје природни бројеви m и n тако да је $(5+3\sqrt{2})^m = (3+5\sqrt{2})^n$?

Трећи сусрети гимназија централне Србије

Крагујевац, 14. децембар 2003.

Време за рад 180 *минута.*
Сваки задатак вреди 20 поена.

Први разред

389. У правилном $n-$тоуглу $A_1A_2\dots A_{n-1}A_n$ је $\sphericalangle A_3A_1A_4 = 6^\circ$. Колико дијагонала има тај многоугао?

390. Ако су x, y, z реални бројеви такви да су xy, yz и zx рационални бројеви различити од нуле. Доказати:
а) број $x^2+y^2+z^2$ је рационалан;
б) ако је $x^3+y^3+z^3$ рационалан број различит од нуле, тада су и бројеви x, y, z рационални.

391. Одредити све просте бројеве p, q и r за које је испуњена једнакост $3(p+q+r) = pqr$.

Други разред

392. Колико има природних бројева n таквих да је

$$100 < \sqrt[3]{n} < 101\,?$$

393. Наћи вредност израза $x^6+x^3y^3+y^6$, ако реални бројеви x и y задовољавају једнакости

$$x^2+xy+y^2=4 \quad \text{и} \quad x^4+x^2y^2+y^4=8.$$

394. За сваки природан број n, нека је $S(n)$ збир цифара броја n (записаног у декадном систему). Доказати да важи $9 \mid S(n^3)-(S(n))^3$.

Трећи и четврти разред

395. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Ако је површина пирамиде $ABCDA_1$ једнака 1, израчунати површину дате коцке.

396. У скупу реалних бројева решити систем једначина:

$$x^z = y^{\frac{8}{3}}, \;\; y^z = x^{\frac{2}{3}}, \;\; z = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{9y}.$$

397. За које вредности реалног параметра a једначина

$$1 + \sin^2 ax = \cos x$$

има јединствено решење?

Решења задатака

Решења званичних такмичења у 2003.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – А категорија

1. Нека је $b = \underbrace{11111111}_{8}$ и $a = \underbrace{111\ldots11}_{100}$. Када поделимо ове бројеве, добија се $1111 = a - qb$, где је q цео број – количник. Сваки заједнички делилац a и b дели и 1111, па је тражени број највећи заједнички делилац за b и 1111, а како је b дељиво са 1111, то је НЗД$(a, b) = 1111$.

2. Школу треба изградити на путу између села A и B, иначе можемо смањити оба растојања. Нека је школа на растојању x од села A. Тада је она на растојању $3-x$ од села B, па је укупан пут који прелазе сви ђаци до школе (два пута мањи од укупног дневног пута)

$$100x + 50(3-x) = 50x + 150,$$

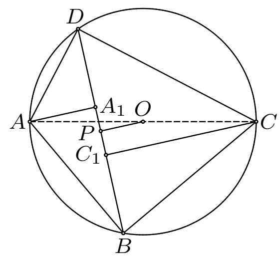
што је за $x \in [0, 3]$ најмање за $x = 0$. Дакле, школу треба изградити у месту A.

3. Како је, по неједнакости троугла, $|a-b| < c$, $|b-c| < a$ и $|c-a| < b$, следи

$$|p-q| = \left|\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}\right| = \frac{|a-b||b-c||c-a|}{abc} < \frac{cab}{abc} = 1.$$

4. Нека је P подножје нормале из центра описаног круга O на дијагоналу BD, и нека су A_1, C_1 подножја нормала из A, C на BD, редом.

Тада је $BP = DP$ (нормала из центра на тетиву је уједно и њена симетрала), а због $AO = CO$ добијамо да су и њихове пројекције једнаке, тј. $A_1P = PC_1$, па је $BA_1 = BP - A_1P = DP - PC_1 = C_1D$, што је и требало доказати.



5. Нека су a, b, c, d, e редом бројеви положених испита од прве до пете године. Тада је

$$a < b < c < d < e, \quad a + b + c + d + e = 31, \quad e = 3a.$$

Ако би било $a \geqslant 4$, тада би било и $b \geqslant 5$, $c \geqslant 6$, $d \geqslant 7$, $e \geqslant 12$, па је $a + b + c + d + e \geqslant 34 > 31$, што је немогуће.
Ако је $a = 1$, тада $e = 3$, па $1 < b < c < d < 3$, што је немогуће.
Ако је $a = 2$, тада $e = 6$, па је $2 < b < c < d < 6$, тј. мора бити $b = 3$, $c = 4$, $d = 5$, односно $a + b + c + d + e = 20 \neq 31$.
Дакле, $a = 3$ и $e = 9$. За $d \leqslant 7$, би имали да је $c \leqslant 6$ и $b \leqslant 5$, али онда је $a + b + c + d + e \leqslant 3 + 5 + 6 + 7 + 9 = 30 < 31$. Значи, мора бити $d = 8$. Последња ситуација је могућа, нпр. за $a = 3$, $b = 4$, $c = 7$, $d = 8$, $e = 9$ или $a = 3$, $b = 5$, $c = 6$, $d = 8$, $e = 9$ (и ово су једина решења).

Други разред – А категорија

6. Нека су a и b времена за која би се базен напунио првом, односно другом цеви, посебно. Из услова задатка је

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6} \quad \text{и} \quad b = a + 5.$$

Решавањем овог система добијамо $b = 2$ или $b = 15$, а како мора бити испуњено $b = a + 5 > 5$, налазимо да је $b = 15$.

7. Четворка $(0, 0, 0, 0)$ је решење овог система. Ако би постојало још једно решење, тада би постојало и решење за које је $x^2 + y^2$ најмање. Како квадрати целих бројева при дељењу са 3 дају остатке 0 и 1, $x^2 + y^2$ може бити дељиво са 3 само ако су x и y дељиви са 3, па је $x = 3x_1$, $y = 3y_1$, тј. $u^2 + v^2 = 3(x_1^2 + y_1^2)$, па како је

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{3}(x^2 + y^2) < (x^2 + y^2),$$

добијамо "мање" решење (u, v, x_1, y_1).
Дакле, једино решење дате једначине је $(0, 0, 0, 0)$.

8. За $x = 0$ добијамо $a + b \leqslant 1$, а за $x = \dfrac{2\pi}{3}$ је $-\dfrac{a}{2} + b \leqslant 1$, што нам даје:

$$(a + b) + 2(-\frac{a}{2} + b) \leqslant 1 + 2 \cdot 1, \quad \text{односно} \quad b \leqslant 1.$$

За $x = \pi$ добијамо $-a - b \leqslant 1$, а за $x = \dfrac{\pi}{3}$ је $\dfrac{a}{2} - b \leqslant 1$, што нам даје:

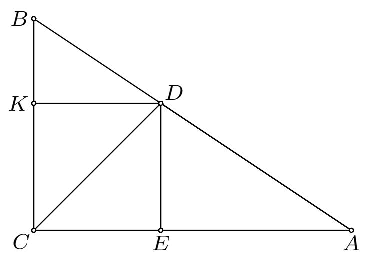
$$(-a - b) + 2(\frac{a}{2} - b) \leqslant 1 + 2 \cdot 1, \quad \text{односно} \quad b \geqslant -1,$$

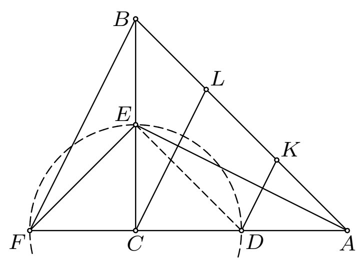
те добијамо $-1 \leqslant b \leqslant 1$, тј. $|b| \leqslant 1$, што је и требало доказати.

9. Четвороугао $CEDK$ је квадрат, па је $DK = DE$. Како су троуглови $\triangle EAD$ и $\triangle KDB$ правоугли, из Питагорине теореме добијамо:

$$AD^2 + BD^2 = AE^2 + DE^2 + BK^2 + KD^2 = AE^2 + BK^2 + 2DE \cdot DK.$$

Са друге стране, $(AE + BK)^2 = AE^2 + BK^2 + 2AE \cdot BK$, па је довољно доказати да је $\dfrac{DE}{AE} = \dfrac{BK}{DK}$, што следи из сличности троуглова $\triangle EAD$ и $\triangle KDB$.





10. Нека је F тачка за коју важи $D - C - F$ и $DC = CF$. Како је $DC = CF = CE$, то је $\sphericalangle DEF = 90^\circ$ (C је центар круга описаног око $\triangle DEF$), па је $FE \perp DE$, односно $FE \perp AB$ (троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle DEC$ су једнакокрако-правоугли и из те сличности следи $AB \parallel DE$). Како је и $BE \perp AF$, то је E ортоцентар троугла AFB, па је $AE \perp FB$, тј. $DK \parallel CL \parallel FB$. Зато је (по Талесовој теореми): $\dfrac{KL}{LB} = \dfrac{DC}{CF} = 1$, што је и требало доказати.

Трећи разред – А категорија

11. Нека је $x \leqslant y$. Тада важи $z > y$, $z > x$ и

$$x^n = z^n - y^n = (z - y)(z^{n-1} + z^{n-2}y + \ldots + y^{n-1}) > (z - y)nx^{n-1} \geqslant nx^{n-1},$$

тј. $x \leqslant n$, па је $z > n$, што је супротно услову задатка.

12. Уведимо смену $X = 2^x$, $Y = y$, $Z = \arcsin z$. Овај систем постаје линеаран по X, Y, Z:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3X & + & 2Y & - & 3Z & = & 7 \\ X & - & Y & - & Z & = & -6 \\ 5X & - & Y & + & Z & = & 6a+2. \end{array}$$

и његово решење је

$$X = a+1, \quad Y = 5, \quad Z = a+2,$$

па је полазни систем еквивалентан са

$$2^x = a+1, \quad y = 5, \quad \arcsin z = a+2.$$

Следи, ако је $a \in (-\infty, -1] \cup (\frac{\pi}{2} - 2, +\infty)$, систем нема решења, а ако је $a \in (-1, \frac{\pi}{2} - 2]$, постоји јединствено решење

$$x = \log_2(a+1), \quad y = 5, \quad z = \sin(a+2).$$

13. Како је $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ број 2002 се као производ природних бројева већих од 1 може приказати на следеће начине:

$2 \cdot 1001,\ 7 \cdot 286,\ 11 \cdot 182,\ 13 \cdot 154$ $\quad (4 = \binom{4}{1}$ начина),
$14 \cdot 143,\ 22 \cdot 91,\ 26 \cdot 77,$ $\quad (3 = \binom{4}{2}/2$ начина),
$14 \cdot 11 \cdot 13,\ 22 \cdot 7 \cdot 13,\ 26 \cdot 7 \cdot 11,\ 77 \cdot 2 \cdot 13,\ 91 \cdot 2 \cdot 11,\ 143 \cdot 2 \cdot 7$ $\quad (6 = \binom{4}{2}$ начина),
$2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ $\quad$ (1 начин).

Свако од ових растављања одговара једном траженом престављању (када се допуни потребним бројем јединица). Дакле, тражених представљања има $4 + 3 + 6 + 1 = 14$.

14. Нека је D пресечна тачка симетрале унутрашњег угла код темена A и странице BC. Тада је $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{c}{b}$ (особина симетрале угла). Из косинусне теореме примењене на троуглове $\triangle ABD$ и $\triangle ADC$ добијамо:

$$b^2 + l_a^2 - 2bl_a \cos\frac{\alpha}{2} = DC^2 \quad \text{и} \quad c^2 + l_a^2 - 2cl_a \cos\frac{\alpha}{2} = BD^2,$$

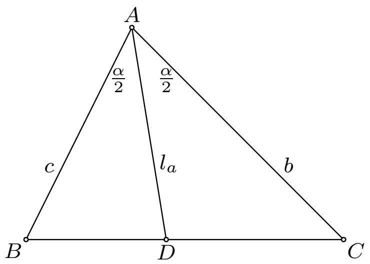
па ако прву једначину помножимо са c^2, а другу са b^2 и одузмемо их добијамо:

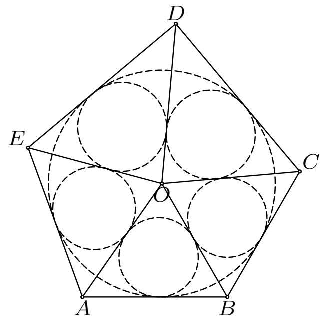
$$l_a^2(c^2 - b^2) = 2bcl_a \cos\frac{\alpha}{2}(c - b).$$

Ако је $c \neq b$, добијамо

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{l_a},$$

па по условима задатка следи $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, а пошто је α угао троугла, следи $\alpha = 120^\circ$.
Ако је $b = c$, из почетног услова добијамо $b = c = 2l_a$, па је $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, те је $\frac{\alpha}{2} = 60^\circ$, односно $\alpha = 120^\circ$ и у овом случају.





15. За сваки тангентни многоугао обима O, површине P и полупречника уписаног круга r важи $2P = r \cdot O$. Нека су P, O, r и P_i, O_i, r_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, површине, обими и полупречници уписаних кругова полазног многоугла, односно датих троуглова. Тада важи $O_i < O$, па је :

$$r_1 + \ldots + r_n = \frac{2P_1}{O_1} + \ldots + \frac{2P_n}{O_n} > \frac{2P_1}{O} + \ldots + \frac{2P_n}{O} = 2\frac{P_1 + \ldots + P_n}{O} = \frac{2P}{O} = r.$$

Четврти разред – А категорија

16. Без умањења општости можемо претпоставити да је $a \geqslant b \geqslant c$. У том случају је $a+b-c > 0$ и $a+c-b > 0$. Ако је $b+c-a \leqslant 0$, важи строга неједнакост. Иначе, дати изрази су позитивни, па је (по неједнакости између аритметичке и геометријске средине) :

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) =$$
$$\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)} \cdot \sqrt{(c+a-b)(a+b-c)} \cdot \sqrt{(c+a-b)(b+c-a)} \leqslant$$
$$\frac{a+b-c+b+c-a}{2} \cdot \frac{c+a-b+a+b-c}{2} \cdot \frac{c+a-b+b+c-a}{2} = abc,$$

што је требало доказати.

17. _Решење 1_: Полазна једначина је еквивалентна са једначином

$$x(x+1) = (y^2+1)(y^2+y).$$

За $y = 0$ добијамо $x = 0$.
За $y = 1$, једначина $x(x+1) = 4$ нема целе корене.
За $y = 2$, једначина $x(x+1) = 5 \cdot 6$ има позитиван корен $x = 5$.
За $y \geqslant 3$ важе неједнакости:

$$(y^2 + \frac{y}{2} - \frac{1}{2})(y^2 + \frac{y}{2} + \frac{1}{2}) < (y^2+1)(y^2+y) < (y^2 + \frac{y}{2})(y^2 + \frac{y}{2} + 1),$$

па из $(y^2+\frac{y}{2}-\frac{1}{2})(y^2+\frac{y}{2}+\frac{1}{2}) < x(x+1) < (y^2+\frac{y}{2})(y^2+\frac{y}{2}+1)$, следи

$$y^2+\frac{y}{2}-\frac{1}{2} < x < y^2+\frac{y}{2}.$$

Како је, од бројева $y^2+\frac{y}{2}-\frac{1}{2}$ и $y^2+\frac{y}{2}$, један природан, а други облика (природан$-\frac{1}{2}$), последња једначина нема решења у скупу ненегативних целих бројева. Дакле, једина решења су $(0,0)$ и $(5,2)$.

<u>*Решење 2*:</u> Решићемо општији проблем: наћи ћемо решења једначине $x^2+x=y^4+y^3+y^2+y$ у $\mathbb{Z}$.
Помножимо дату једначину са 4 и додајмо 1. Добијамо $4x^2+4x+1=4y^4+4y^3+4y^2+4y+1$.
Приметимо да је

$$(2y^2+y)^2+3y^2+4y+1=4y^4+4y^3+4y^2+4y+1.$$

Како је $3y^2+4y+1=(3y+1)(y+1)>0$ за $y<-1$ и за $y>\frac{-1}{3}$, добијамо да важи

$$(2y^2+y)^2 < 4y^4+4y^3+4y^2+4y+1$$

за све целе $y \neq -1$. Такође је

$$(2y^2+y+1)^2+2y-y^2=4y^4+4y^3+4y^2+4y+1.$$

Како је $2y-y^2=(2-y)y<0$ за $y<0$ и за $y>2$, добијамо да важи

$$(2y^2+y+1)^2 > 4y^4+4y^3+4y^2+4y+1$$

за све целе $y<0$ и за $y>2$. Добили смо да за целе $y<-1$ и за целе $y>2$ важи

$$(2y^2+y)^2 < 4y^4+4y^3+4y^2+4y+1=(2x+1)^2 < (2y^2+y+1)^2.$$

Како између два узастопна квадрата не може бити још неки квадрат то значи да полазна једначина нема решења за целе $y<-1$ и за целе $y>2$. Дакле, остаје да проверимо да ли једначина има целобројних решења за $y \in \{-1,0,1,2\}$.
За $y=-1$ и за $y=0$ добијамо $(2x+1)^2=1$, тј. $2x+1=\pm 1$, односно $x=-1$ и $x=0$.
За $y=1$ добијамо $(2x+1)^2=17$, тј. $x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$, што нису целобројна решења.
За $y=2$ добијамо $(2x+1)^2=121$, што даје $x=-6$ и $x=5$.
Нашли смо свих 6 решења:

$$(x,y) \in \{(-6,2),(-1,-1),(-1,0),(0,-1),(0,0),(5,2)\}.$$

Једина ненегативна решења су: $\quad (x,y) \in \{(0,0),(5,2)\}$.

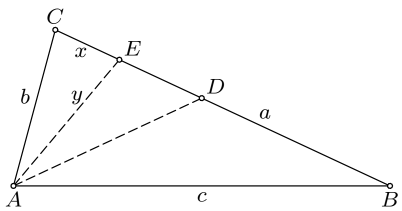
18. Функција $f(x) = x^3 - 12x$ расте на интервалима $(-\infty, -2)$ и $(2, +\infty)$, опада на интервалу $(-2, 2)$, има локални максимум за $x = -2, f(-2) = 16$ и локални минимум за $x = 2, f(2) = -16$.
Ако је $a \leqslant b \leqslant -2$, тада је $f(a) - f(b) \leqslant 0$.
Ако је $2 \leqslant a \leqslant b$, тада је $f(a) - f(b) \leqslant 0$.
Ако је, $a \leqslant 2$ и $b \geqslant -2$, тада је $f(a) \leqslant f(-2)$ и $f(b) \geqslant f(2)$.
Дакле, највећа разлика $f(a) - f(b)$, за $a \leqslant b$ се постиже за $a = -2$ и $b = 2$ (и тада важи знак једнакости у десној неједнакости). Следи $f(a) - f(b) \leqslant f(-2) - f(2) = 16 - (-16) = 32$, одакле добијамо тврђење задатка: $f(a) + f(2) \leqslant f(b) + f(2)$, тј.

$$a^3 - 12a - 16 \leqslant b^3 - 12b + 16.$$

19. <u>*Решење 1*:</u> Нека су D и E тачке на страници BC, такве да је $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAE = \sphericalangle EAC$. Нека је $EC = x$ и $AE = y$. Из сличности троуглова $\triangle AEC$ и $\triangle BAC$, добијамо: $\dfrac{c}{y} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{x}$, односно

$$x = \frac{b^2}{a}, \quad y = \frac{bc}{a}.$$

Троуглови $\triangle ADC$ и $\triangle ADB$ су једнакокраки, па је $DB = a - b$ и $AD = DB$, односно $AD = a - b$, $DE = b - x$. Из сличности троуглова $\triangle BAE$ и $\triangle ADE$, добијамо $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{EB}{AE}$, односно $\dfrac{c}{a-b} = \dfrac{a-x}{y}$, одакле, убацивањем вредности за x и y, и сређивањем, добијамо тражени идентитет:



$$bc^2 = (a-b)^2(a+b).$$

<u>*Решење 2*:</u> Означимо са α, β, γ углове троугла код темена A, B, C. Из услова задатка имамо да је $\alpha = 3\beta$ и $\gamma = \pi - 4\beta$. Синусна теорема у троуглу $\triangle ABC$ нам даје

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin 3\beta} = \frac{a}{\sin b(4\cos^2\beta - 1)},$$

одакле је

$$a = b(4\cos^2\beta - 1).$$

За рачунање траженог израза још треба да искористимо косинусну теорему,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma,$$

као и формулу за косинус четвороструког угла,

$$\cos 4\beta = 8\cos^4\beta - 8\cos^2\beta + 1 :$$

$$\begin{aligned}
bc^2 &= a^2b + b^3 - 2ab^2\cos(\pi - 4\gamma) = b^3 + ab[a + 2b\cdot\cos(4\beta)] \\
&= b^3 + ab[b(4\cos^2\beta - 1) + 2b(8\cos^4\beta - 8\cos^2\beta + 1)] \\
&= b^3 + ab^2(16\cos^4\beta - 12\cos^2\beta + 1) \\
&= b^3 + ab^2[-1 - (4\cos^2\beta - 1) + (4\cos^2\beta - 1)^2] \\
&= b^3 - ab^2 - a^2b + a^3 = (a-b)^2(a+b).
\end{aligned}$$

20. Видети решење 15. задатка (5. за трећи разред А категорије).

Први разред – Б категорија

21. Како је
$$(n-2)^3 + n^3 + (n+2)^3 = 3n(n^2+8),$$
закључујемо да је дати израз паран акко је n парно, а дељив са 9 увек (ако n није дељив са 3, тада n^2 даје остатак 1 при дељењу са 3, па је n^2+8 дељив са 3). Следи, дати израз није дељив са 18 акко је n непаран број.

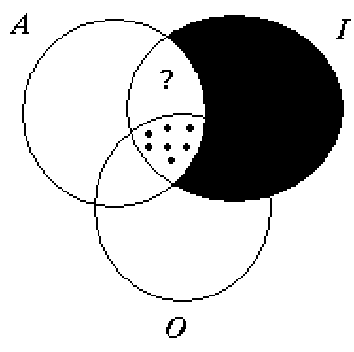
22. Видети решење 2. задатка (2. за први разред А категорије).

23. а) Применом све три операције (скока) чува се највећи заједнички делилац, тј. НЗД(m,n) = НЗД(n,m) = НЗД$(m-n,n)$ = НЗД$(m+n,n)$. Из тачке $(7,12)$ не можемо доћи у $(12,32)$, јер је

$$\text{НЗД}(7,12) = 1 \neq 4 = \text{НЗД}(12,32).$$

б) Из тачке $(8,12)$ ако два пута применимо други корак, долазимо у тачку $(20,12)$, а затим и у тачку $(32,12)$ и онда примењујући први корак долазимо у тачку $(12,32)$.

24. Означимо са A скуп Планкова, са O скуп Плонкова, а са I скуп Плинкова. Први исказ говори да је $I \subseteq A$, односно да су скупови $I\setminus(A\cup O)$ и $(O\cap I)\setminus A$ празни, па у том случају други исказ значи да је скуп $A\cap O\cap I$ непразан. Значи, прво тврђење је тачно, треће није тачно, а друго може бити и тачно и нетачно, у зависности од тога да ли је скуп $(A\cap I)\setminus O$ непразан ($\top$) или празан ($\perp$).



25. Видети решење 5. задатка (5. за први разред А категорије).

Други разред – Б категорија

26. Видети решење 6. задатка (1. за други разред А категорије).

27. Ако уведемо смену $y = x - \frac{7}{2}$, добијамо једначину $112y^4 - 24y^2 - 1 = 0$, одакле је $y^2 = \frac{1}{4}$ или $y^2 = -\frac{1}{28}$, односно $y \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, i\sqrt{\frac{1}{28}}, -i\sqrt{\frac{1}{28}}\}$, тј. $x \in \{3, 4, \frac{7}{2} + i\sqrt{\frac{1}{28}}, \frac{7}{2} - i\sqrt{\frac{1}{28}}\}$.

<u>*Напомена*</u>: Задатак је могуће решити и помоћу смене $y = x - 4$.

28. <u>*Решење 1*:</u> Како је $1 = a^2 + b^2 + c^2 = (\frac{1}{2}a^2 + b^2) + (\frac{1}{2}a^2 + c^2)$, на основу неједнакости аритметичке и геометријске средине, добијамо :

$$1 \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{2}a^2b^2} + 2\sqrt{\frac{1}{2}a^2c^2} = \sqrt{2}ab + \sqrt{2}ac,$$

($\sqrt{a^2} = a$ за $a \geqslant 0$), одакле је $a(b+c) \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Једнакост важи акко $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, b = c = \dfrac{1}{2}$.

<u>*Решење 2*:</u> Како су бројеви $a, b, c \in (0, 1]$ можемо увести смену:

$$a = \sin\varphi, \quad b = \cos\varphi\sin\theta, \quad b = \cos\varphi\cos\theta, \qquad \varphi, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] .$$

Тада тражени израз постаје $a(b+c) = \sin\varphi\cos\varphi(\sin\theta + \cos\theta)$, што након свођења на синус збира даје $a(b+c) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\varphi(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin\theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos\theta)$, односно

$$a(b+c) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin 2\varphi \cdot \sin(\theta + \frac{\pi}{4}).$$

Максимум овог израза се добија када су оба синуса једнаки 1, тј. за $\varphi = \theta = \dfrac{\pi}{4}$, односно за $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и $b = c = \dfrac{1}{2}$ и тада је $a(b+c) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Тиме смо показали да је $a(b+c) \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

29. Видети решење 9. задатка (4. за други разред А категорије).

30. Како је

$$z = \left(\frac{3+i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i}\right)^n = (1+i)^n,$$

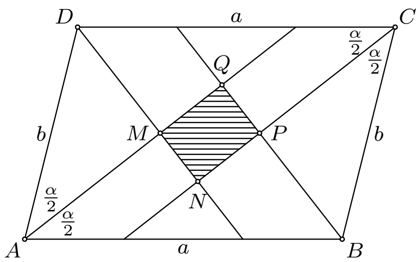
то је $z^2 = (2i)^n$, па је број z реалан акко је z^2 реалан и $z^2 \geqslant 0$, а то је тачно акко је број n дељив са 4.

Напомена: Задатак је могуће решити и помоћу тригонометријског облика комплексног броја (који се ради касније): аргумент од $1+i$ је $\frac{\pi}{4}$, па је аргумент од z једнак $n\frac{\pi}{4}$, одакле следи да је z реалан акко је број n дељив са 4.

Трећи разред – Б категорија

31. Ако је $a = b$, дати паралелограм је ромб, па је тражена површина једнака 0, јер тада симетрале углова $\sphericalangle DAB$ и $\sphericalangle BCD$ садрже дијагоналу AC, а остале две симетрале садрже дијагоналу BD, па се све четири симетрале секу у једној тачки.
Претпоставимо да је $a > b$ и нека је $\alpha = \sphericalangle BAD$. Нека је M пресечна тачка симетрала из A и D, N пресечна тачка симетрала из D и C, P пресечна тачка симетрала из B и C, а Q пресечна тачка симетрала из A и B. Четвороугао $MNPQ$ је правоугаоник, јер је збир углова који належу на једну страницу паралелограма 180°, па се њихове симетрале секу под углом од 90°. Дакле, тражена површина је:

$$\begin{aligned} S &= MN \cdot MQ = (DN - DM)(AQ - AM) \\ S &= (a \sin\frac{\alpha}{2} - b\sin\frac{\alpha}{2})(a\cos\frac{\alpha}{2} - b\cos\frac{\alpha}{2}) = (a-b)^2 \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$



32. Дата једначина је дефинисана за $x > 0$. Тада је

$$4^{\log_{10} x} = 4^{\log_4 x \cdot \log_{10} 4} = x^{\log_{10} 4},$$

па је $4^{\log_{10} x} = 16 = 4^2$, односно $\log_{10} x = 2$, тј. $x = 100$.

33. Нека су O_1, O_2 и O_3 центри датих лопти. Четвороугао $O_1O_2A_1A_2$ је правоугли трапез са висином $A_1A_2 = 4$, дужим краком $O_1O_2 = r_1 + r_2$ и основицама r_1 и r_2, па из Питагорине теореме добијамо

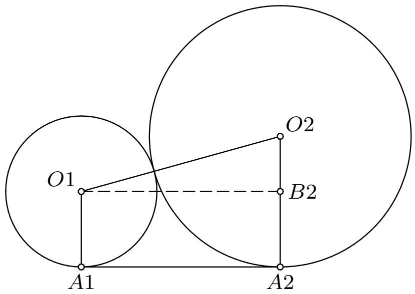
$$(r_1 + r_2)^2 = (A_1A_2)^2 + (r_2 - r_1)^2,$$

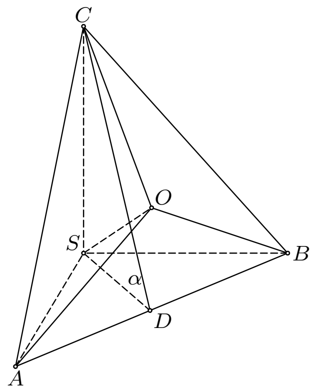
одакле је $r_1r_2 = 4$. Слично добијамо да је

$$r_1r_3 = 9 \quad \text{и} \quad r_2r_3 = 16.$$

Множењем ове три једнакости, а затим кореновањем, добијамо да је $r_1 r_2 r_3 = 24$, одакле је

$$r_1 = \frac{3}{2}, \quad r_2 = \frac{8}{3} \quad \text{и} \quad r_3 = 6.$$





34. Нека су α и β диедарски углови ивица AB и BC пирамиде. Како је $CS \perp ASB$ и $AS \perp BSC$, то за површине имамо следеће односе:

$$P_{\triangle ASB} = P_{\triangle ABC} \cos\alpha \qquad \text{и} \qquad P_{\triangle BSC} = P_{\triangle ABC} \cos\beta\,.$$

Докажимо прву од ове две једнакости (друга се доказује аналогно). Означимо са D подножје нормале из C на AB. Како је $CS \perp ASB$ имамо да је D подножје нормале и из S на AB. За висине CD и SD троуглова $\triangle ABC$ и $\triangle ABS$ имамо везу $SD = CD \cdot \cos\alpha$ (из правоуглог троугла $\triangle CSD$) и онда је

$$P_{\triangle ASB} = \frac{1}{2} AB \cdot SD = \frac{1}{2} AB \cdot CD \cdot \cos\alpha = P_{\triangle ABC} \cos\alpha.$$

Вратимо се сад на тражење односа површина троуглова $\triangle ASB$ и $\triangle BSC$: $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \dfrac{P_{\triangle ASB}}{P_{\triangle BSC}} = \dfrac{P_{\triangle AOB}\cos\beta}{P_{\triangle BOC}\cos\alpha} = 4\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$, одакле је $\left(\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)^2 = 4$, тј. $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta} = 2$ (овај однос не може бити -2, јер су диедарски углови α и β мањи од $90°$, па су њихови косинуси позитивни), односно $\dfrac{P_{\triangle ASB}}{P_{\triangle BSC}} = 2$.

35. Ако је мала казаљка прешла угао α, велика је за исто време прешла угао $360° + \alpha$. Како се велика казаљка креће 12 пута брже, биће

$$360° + \alpha = 12\alpha, \quad \text{тј.} \quad \alpha = \frac{360°}{11} = 30° + \frac{30°}{11}.$$

Мала казаљка за један сат пређе $30°$, те ће до преклапања казаљки проћи $\frac{12}{11}$ сата, тј. преклопиће се за један сат и $5\frac{5}{11}$ минута.

Четврти разред – Б категорија

36. Како је $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, где је $z = x+iy$, из дате једначине добијамо $\sqrt{(x-1)^2+y^2} = 2\sqrt{(x+1)^2+y^2}$, односно, после сређивања,

$$\left(x+\frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2.$$

Дакле, то је круг са центром у тачки $(-\frac{5}{3}, 0)$ и полупречником $\frac{4}{3}$.

37. Нека је $7p+1 = n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Тада је $7p = (n-1)(n+1)$, па како су сви природни делиоци броја $7p$ бројеви 1, 7, p и $7p$, то је $n-1=1$ или $n-1=7$ или $n+1=1$ или $n+1=7$. Следи $n \in \{2,8,6,0\}$, па провером добијамо да је једино решење $n=6$, односно $p=5$.

38. Ако прву једначину помножимо са -2 и саберемо са другом добијамо:

$$(y+1)(2x^2(1-y)+y^2-3y+3) = 0\,. \tag{$*$}$$

За $y=-1$ добијамо $x=1$ (из прве или друге једначине система).
За $y \leqslant 1$, израз у другој загради је строго већи од 0, па је цео израз $(*)$ једнак 0 само за $y=-1$.
За $y \geqslant 1$, прва једначина датог система, $x^2y^2-2x+y^2=0$ нема решења (дискриминанта је $D = 4-4y^2 < 0$).
Дакле, једино решење датог система је $(1,-1)$.

39. Докажимо дато тврђење математичком индукцијом.
База индукције: тврђење је тачно за $n=1$,

$$\frac{(a_1a_2)^2-(a_1a_0)^2}{4d} = a_1^2\frac{(a_2-a_0)(a_2+a_0)}{4d} = a_1^2\frac{2d\cdot 2a_1}{4d} = a_1^3\,.$$

Индукцијска претпоставка: претпоставимо да је тврђење тачно за $n = k$: $a_1{}^3+a_2{}^3+\ldots+a_k{}^3 = \frac{(a_ka_{k+1})^2-(a_1a_0)^2}{4d}$.
Индукцијски корак: за $n=k+1$ је $a_1^3+\ldots+a_{k+1}^3 = \dfrac{(a_ka_{k+1})^2-(a_1a_0)^2}{4d} + a_{k+1}^3 = \dfrac{(a_ka_{k+1})^2-(a_1a_0)^2+4da_{k+1}^3}{4d} = \dfrac{a_{k+1}^2(a_k^2+4d(a_k+d))-(a_1a_0)^2}{4d} = \dfrac{a_{k+1}^2(a_k+2d)^2-(a_1a_0)^2}{4d} = \dfrac{(a_{k+1}a_{k+2})^2-(a_1a_0)^2}{4d}$, што је тражено тврђење за $k+1$.
Стога по принципу математичке индукције тврђење задатка важи за сваки природан број n.

40. Видети решење 35. задатка (5. за трећи разред Б категорије).

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – А категорија

41. Како је $2^3 \equiv 1 \pmod 7$ имамо следеће могућности:
за $k \equiv 0 \pmod 3$ је $2k-1 \equiv_3 2$, па $2^{2k-1}+2^k+1 \equiv 2^2+2^0+1 \equiv 6 \pmod 7$;
за $k \equiv 1 \pmod 3$ је $2k-1 \equiv_3 1$, па $2^{2k-1}+2^k+1 \equiv 2^1+2^1+1 \equiv 5 \pmod 7$;
за $k \equiv 2 \pmod 3$ је $2k-1 \equiv_3 0$, па $2^{2k-1}+2^k+1 \equiv 2^0+2^2+1 \equiv 6 \pmod 7$.
Одавде следи тврђење задатка.

42. Сређивањем добијамо $(2m-n)^2+(n-3)^2=9$, одакле добијамо $(2m-n, n-3) \in \{(0,-3),(0,3),\ (3,0),(-3,0)\}$ што даје решења

$$(m,n) \in \{(0,0),(0,3),(3,3),(3,6)\}\,.$$

43. <u>*Решење 1*</u>: Нека је $n \geqslant 2$ произвољан природан број, $a_1 \geqslant 3$ произвољан непаран број, а $a_2, a_3, ..., a_{n-1}$ произвољни различити парни бројеви, такви да $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1}$. Тада је $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{n-1}^2 = 2k+1$, за неки природан број k. Ако изаберемо $a_n = k$, збир квадрата свих n бројева је $k^2+2k+1=(k+1)^2$. Поред тога, $(a_{n-1}-1)^2 \geqslant (3-1)^2 > 2$, па је и $\sum\limits_{i=1}^{n-2} a_i^2 + (a_{n-1}-1)^2 > 2$. Ова неједнакост је еквивалентна са $a_n = k = \frac{1}{2}\left(\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i^2 - 1\right) > a_{n-1}$, па су сви бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$ међусобно различити.

<u>*Решење 2*</u>: Задатак решавамо применом математичке индукције.
База индукције: за $n=2$ је $3^2+4^2=5^2$.
Индукцијска претпоставка: претпоставимо да тврђење важи за $n=k$, тј. да постоје $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$, такви да је $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2 = b^2$.
Индукцијски корак: тада је $(5b)^2 = (5a_1)^2+(5a_2)^2+\ldots+(5a_k)^2 = (3a_1)^2+(4a_1)^2+(5a_2)^2+(5a_3)^2+\ldots+(5a_k)^2$ и за ових $k+1$ бројева важи $3a_1 < 4a_1 < 5a_2 < \ldots < 5a_k$.
Стога по принципу математичке индукције тврђење задатка важи за сваки природан број n.

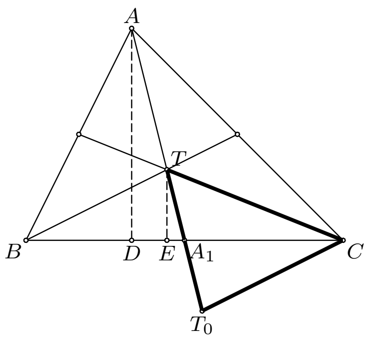
44. Нека је A_1 средиште странице BC, а T_0 тачка симетрична тежишту T троугла $\triangle ABC$ у односу на тачку A_1. Означимо са D и E подножја висина из A, односно T на страницу BC (из Талесове теореме примењене на троуглове $\triangle ADA_1 \sim \triangle TEA_1$ добијамо да је $TE = \dfrac{AD}{3}$).
Из подударности троуглова $\triangle BTA_1 \cong \triangle CT_0A_1$ добијамо да су дужине страница троугла $\triangle TT_0C$ једнаке $\frac{2}{3}t_a$, $\frac{2}{3}t_b$ и $\frac{2}{3}t_c$. Његова површина је $P_{\triangle TT_0C} = P_{\triangle TA_1C} + P_{\triangle A_1T_0C} = P_{\triangle TA_1C} + P_{\triangle TA_1B} = P_{\triangle TBC}$, односно

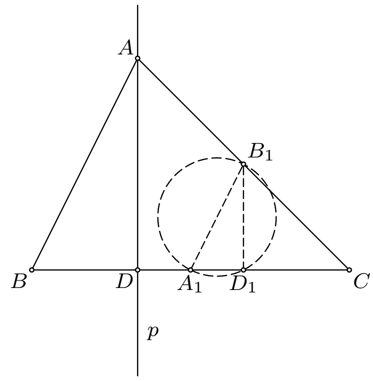
$$P_{\triangle TT_0C} = P_{\triangle TBC} = \frac{BC \cdot TE}{2} = \frac{BC \cdot \frac{1}{3}AD}{2} = \frac{P}{3}.$$

Површина троугла мања је или једнака од полупроизвода призвољне две његове странице, те из троугла $\triangle TT_0C$ добијамо $\frac{P}{3} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}t_a \cdot \frac{2}{3}t_b$, односно

$$P \leqslant \frac{2}{3}t_a \cdot t_b,$$

што је тврђење задатка.
Једнакост важи акко су у датом троуглу тежишне дужи које одговарају страницама BC и CA нормалне, односно акко за странице датог троугла важи $a^2 + b^2 = 5c^2$.





45. *Анализа:* нека су A_1 и B_1 средишта страница BC и CA, редом. Означимо дату праву са p. Нека је D подножје нормале из A на BC, а D_1 подножје нормале из B_1 на BC. Важи $p \parallel B_1D_1$, $\sphericalangle A_1D_1B_1 = \frac{\pi}{2}$ и B_1D_1 је средња линија троугла $\triangle CDA$ (и D_1 је средиште дужи DC).
Конструкција: у пресеку кружнице са пречником A_1B_1 и праве паралелном са p која садржи B_1 добијамо тачку D_1. У пресеку правих p и A_1D_1 добијамо тачку D. Тачка C је тачка на правој A_1D_1 за коју важи $D_1C = D_1D$ различита од тачке C. Тачку A добијамо у пресеку правих CB_1 и p. Тачка B је тачка на правој A_1D_1 за коју важи $A_1C = A_1B$ различита од тачке C.
Доказ: из конструкције следи да висина AD лежи на правој p и да је A_1 средиште дужи BC. По конструкцији, троуглови $\triangle CDA$ и $\triangle CA_1B_1$ су слични, са коефицијентом сличности 2, па је B_1 средиште дужи CA.
Дискусија: нема решења ако је $p \perp A_1B_1$ (иначе би права p била нормална и на BC и на AB) и ако права p садржи тачке A_1 и B_1 (иначе је $AB \perp BC$, па p садржи A_1, B_1, A и B). У осталим случајевима све конструкције су могуће и једнозначне, па постоји једно решење.

Напомена: Конструкција је могла да иде и на следећи начин: праву BC добијамо као праву нормалну на P која пролази кроз A_1, а тачку D_1 налазимо као подножје нормале из B_1 на BC, а даље конструкција иде исто као у претходном начину (D, C, A, B).

Други разред – А категорија

46. Величине под кореном морају бити ненегативне, па је $x \in [-3, \frac{1-\sqrt{109}}{6}] \cup [\frac{1+\sqrt{109}}{6}, +\infty)$. Нека је $u = \sqrt{x^2+x+1}, v = \sqrt{x+3}$, $w = \sqrt{6x^2-2x-18}$. Из полазне једначине добијамо систем

$$u + 2v = w, \qquad 6u^2 - 8v^2 = w^2\,,$$

тј. после елиминације w, $5u^2 - 4uv - 12v^2 = 0$. Како $x = -3$ није решење, следи $v \neq 0$, па добијамо $5\left(\frac{u}{v}\right)^2 - 4\left(\frac{u}{v}\right) - 12 = 0$, односно $\frac{u}{v} = 2$ или $\frac{u}{v} = -\frac{6}{5}$. Друга могућност отпада, јер су $u, v \geqslant 0$, па је $\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x+3}} = 2$, односно $x^2 - 3x - 11 = 0$, тј. $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{53}}{2}$ и $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{53}}{2}$, што су и решења, јер припадају области дефинисаности корена.

47. Нека је $x_{ij} \in \{-1, 1\}$ број који се налази у пресеку i-те врсте и j-те колоне таблице. Да би производ бројева у свакој од првих $m-1$ врста био једнак 1 потребно је и довољно да буде $x_{in} = \prod_{j=1}^{n-1} x_{ij}$ (за $i = 1, 2, \ldots, m-1$). Да би производ бројева у свакој од првих $n-1$ колона био једнак -1 потребно је и довољно да буде $x_{mj} = -\prod_{i=1}^{m-1} x_{ij}$ (за $j = 1, 2, \ldots, n-1$). Да би производ бројева у m-тој врсти био једнак 1 потребно је и довољно да буде $x_{mn} = \prod_{j=1}^{n-1} x_{mj} = \prod_{j=1}^{n-1}\left(-\prod_{i=1}^{m-1} x_{ij}\right) = (-1)^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}\prod_{i=1}^{m-1} x_{ij}$. Да би производ бројева у n-тој колони био једнак -1 потребно је и довољно да буде $x_{mn} = -\prod_{i=1}^{m-1} x_{in} = -\prod_{i=1}^{m-1}\left(\prod_{j=1}^{n-1} x_{ij}\right) = -\prod_{i=1}^{m-1}\prod_{j=1}^{n-1} x_{ij}$. То је могуће само ако је $(-1)^{n-1} = -1$, тј. ако је n парно. У том случају се задовољавајуће попуњавање добија тако што се прво попуне поља која леже на пресецима првих $m-1$ врста и првих $n-1$ колона на произвољан начин, а затим се поља која леже у последњој врсти и последњој колони на једнозначан начин попуњавају коришћењем претходних формула. Зато се таблица може попунити на 0 начина уколико је n непарно, а на $2^{(m-1)(n-1)}$ начина уколико је n парно.

48. Кружни исечак чији је угао 60° има дијаметар 1. Дужина 1 се достиже за најудаљеније тачке на луку и за центар исечка и произвољну тачку на луку. Круг можемо потпуно прекрити са 6 оваквих исечака. Највише једна тачка лежи у центру круга, па од преосталих 7 можемо изабрати две које леже у истом исечку, а да нису најудаљеније тачке на луку. Њихово растојање је мање од 1.

Видимо да тврђење не мора важити за 7 тачака, ако једну поставимо у центар круга, а остале у темена правилног шестоугла уписаног у ову кружницу.

49. Нека је $A-B-C$ распоред тачака и нека је $AB=2r$, $AC=2R$, O_1 средиште AB, O_2 средиште BC, O_3 средиште AC, O центар кружнице k дате у задатку и x њен полупречник. Тада је $AO_3=O_3C=r+R$, $O_1O_3=AO_3-AO_1=R$, $O_2O_3=CO_3-CO_2=r$, $O_1O=r+x$, $O_2O=R+x$, $O_3O=R+r-x$. Из површине троугла O_1OO_3 изражене преко Хероновог обрасца, односно преко полупроизвода странице и одговарајуће висине добијамо $\sqrt{(R+r)r(R-x)x}=\dfrac{1}{2}Rd$. Слично, из релација за површину троугла O_1OO_2 добијамо $\sqrt{(R+r+x)Rrx}=\dfrac{1}{2}(R+r)d$. Након квадрирања и одузимања ове две релације, добијамо $rx^2(2R+r)=\frac{1}{4}rd^2(2R+r)$, односно $x=\frac{d}{2}$.

50. Нека су t_a,t_b,t_c тежишне дужи које одговарају страницама a,b,c троугла ABC, редом. Тада је

$$4t_a^2=2c^2+2b^2-a^2,\quad 4t_b^2=2c^2+2a^2-b^2,\quad 4t_c^2=2a^2+2b^2-c^2\,,$$

па већој страници одговара мања тежишна дуж. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $a\leqslant b\leqslant c$. Тада је $\frac{t_a}{c}=\frac{t_b}{b}=\frac{t_c}{a}=k$, па коришћењем горњих једнакости имамо

$$4k^2(a^2+b^2+c^2)=4(t_a^2+t_b^2+t_c^2)=3(a^2+b^2+c^2)\,,$$

па како је $a^2+b^2+c^2>0$, следи $4k^2=3$, односно $k=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Трећи разред – А категорија

51. **а)** <u>*Решење 1*</u>: Ако је $p\leqslant 0$ функција $f(x)=x^3-px+q$ је строго растућа, па дата једначина не може имати три реална решења.

<u>*Решење 2*</u>: Ово смо могли добити и из Виетових правила:

$$x_1+x_2+x_3=0,\quad x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-p,\quad x_1x_2x_3=-q\,,$$

где су x_1,x_2,x_3 корени дате једначине, па је

$$0<x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=2p\,,$$

па је $p>0$ (због $q\neq 0$ ниједан од x_1,x_2,x_3 није 0).
б) Ако је $q>0$ имамо $x_1x_2x_3=-q<0$, а како је $x_1+x_2+x_3=0$ међу бројевима x_1,x_2,x_3 су два позитивна и један негативан. Нека је $x_1=r>0$, $x_2=s>0$, $r\leqslant s$. Тада је $x_3=-(r+s)$, па је

$$p=-rs+r(r+s)+s(r+s)=r^2+rs+s^2\geqslant 3r^2\,,$$

тј. $r \leqslant \sqrt{\dfrac{p}{3}}$. Такође $q = -rs \cdot (-(r+s)) = rs(r+s) \geqslant 2r^3$, тј. $r \leqslant \sqrt[3]{\dfrac{q}{2}}$. Следи $r \leqslant \min\left(\sqrt{\dfrac{p}{3}}, \sqrt[3]{\dfrac{q}{2}}\right)$, одакле следи и тврђење задатка.

52. Због дефинисаности корена мора бити $x_i \in [-1,1]$ за $i = 1, \ldots, 100$. Нека је

$$\overrightarrow{a_i} = (\sqrt{1+x_i}, \sqrt{1-x_i}), \quad \overrightarrow{b} = \left(100\sqrt{1+\frac{1}{100}}, 100\sqrt{1-\frac{1}{100}}\right).$$

Систем се своди на

$$\sum_{i=1}^{100} \overrightarrow{a_i} = \overrightarrow{b}.$$

Како је $|\overrightarrow{b}| = \sqrt{\left(100\sqrt{1+\frac{1}{100}}\right)^2 + \left(100\sqrt{1-\frac{1}{100}}\right)^2} = 100\sqrt{2}$ и како је $|\overrightarrow{a_i}| = \sqrt{(\sqrt{1+x_i})^2 + (\sqrt{1-x_i})^2} = \sqrt{2}$, за $i = 1, \ldots, 100$, добијамо

$$|\sum_{i=1}^{100} \overrightarrow{a_i}| = \sum_{i=1}^{100} |\overrightarrow{a_i}|,$$

па важи једнакост у неједнакости троугла за векторе $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_{100}}$, тј. они су истосмерни (истог смера као и вектор $\overrightarrow{b}$). Ако је $k(\sqrt{1+x}, \sqrt{1-x}) = (\sqrt{1+y}, \sqrt{1-y})$, $k \geqslant 0$, добијамо $k^2(1+x) = 1+y, k^2(1-x) = 1-y$, односно $k = 1$, па су ови вектори истосмерни акко су једнаки (вектору $\frac{1}{100}\overrightarrow{b}$). Следи, једнакост важи акко је $\overrightarrow{a_1} = \ldots = \overrightarrow{a_{100}}$, односно акко је $x_1 = \ldots = x_{100} = \frac{1}{100}$, па је ово једино решење система из задатка.

53. Претпоставимо да четвороугао $ABCD$ задовољава тражене услове и да је $AC = 2BD$. Тада је $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = AC \cdot BD \cos 45^\circ = BD^2 \cdot \sqrt{2}$. Међутим, ова једнакост је немогућа, јер су

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= (x_c - x_a, y_c - y_a) \cdot (x_d - x_b, y_d - y_b) \\
&= (x_c - x_a)(x_d - x_b) + (y_c - y_a)(y_d - y_b)
\end{aligned}$$

и $BD^2 = (x_d - x_b)^2 + (y_d - y_b)^2$ цели бројеви, $BD^2 \neq 0$, па би добили да је $\sqrt{2}$ рационалан број.

54. Нека је O центар датог круга, $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ угао између OP и тетиве дужине $t_1(\alpha)$, дужина друге тетиве $t_2(\alpha)$, S_1 и S_2 средишта ових тетива, а са $S(\alpha)$ означимо тражени збир тетива, $S(\alpha) = t_1(\alpha) + t_2(\alpha)$. Како је

$$\frac{t_1(\alpha)}{2} = \sqrt{R^2 - OS_1^2}, \ \frac{t_2(\alpha)}{2} = \sqrt{R^2 - OS_2^2}, \ OS_1 = d\sin\alpha, \ OS_2 = d\cos\alpha,$$

добијамо $S(\alpha) = 2\left(\sqrt{R^2 - d^2\cos^2\alpha} + \sqrt{R^2 - d^2\sin^2\alpha}\right)$, тј.

$$(S(\alpha))^2 = 4\left(2R^2 - d^2 + 2\sqrt{R^4 - R^2d^2 + \frac{d^4}{4}\sin^2 2\alpha}\right).$$

Овај израз је најмањи кад је $\sin 2\alpha = 0$, тј. кад је $\alpha \in \{0, \frac{\pi}{2}\}$, односно кад једна од тетива пролази кроз центар круга и тада збир тетива износи $S(\alpha) = 2(\sqrt{R^2 - d^2} + R)$.
Овај израз је највећи кад је $\sin 2\alpha = 1$, тј. кад је $\alpha = \frac{\pi}{4}$, односно кад тетиве граде угао $\frac{\pi}{4}$ са OP и тада збир тетива износи $S(\alpha) = 4\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{2}}$.

55. Докажимо математичком индукцијом да је $\left.a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}\right\}n \text{ пута} < 2003$.
База индукције: за $n = 1$ ово је тачно, јер је $a = \sqrt[2003]{2003} < 2003$.
Индукцијска претпоставка: претпоставимо да је тврђење тачно за неко $n = k$, тј. нека је $\left.b = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}\right\}k \text{ пута} < 2003$.
Индукцијски корак: тада је $b < 2003$, па је $\left.a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}\right\}k+1 \text{ пута} = a^b < a^{2003} = 2003$.
За $n = 2003$ добијамо да је $\left.a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}\right\}2003 \text{ пута} < 2003$.

Четврти разред – А категорија

56. Систем је еквивалентан систему у коме је друга једначина помножена са 4, тј.

$$x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = 5, \qquad 4x^3y + 4xy^3 = 4$$

па и систему који се састоји од збира ове две једначине и разлике ове две једначине, тј.

$$(x+y)^4 = 9, \qquad (x-y)^4 = 1\,.$$

Из ових једначина добијамо $x = \dfrac{\alpha \cdot \sqrt{3} + \beta}{2}$, $y = \dfrac{\alpha \cdot \sqrt{3} - \beta}{2}$, где су $\alpha, \beta \in \{1, -1, i, -i\}$, тј. 16 решења. Потребно је још видети да су ово различита решења. Међутим, ако би било $\dfrac{\alpha_1 \cdot \sqrt{3} + \beta_1}{2} = \dfrac{\alpha_2 \cdot \sqrt{3} + \beta_2}{2}$ имали би $(\alpha_1 - \alpha_2)\sqrt{3} = (\beta_2 - \beta_1)$, па ако је $\alpha_1 = \alpha_2$ имамо $\beta_1 = \beta_2$, тј. исто решење, а иначе $\sqrt{3}$ можемо претставити у облику $r + is$, где су $r, s \in \mathbb{Q}$, што је немогуће, јер је $\sqrt{3}$ реалан и ирационалан број.

57. $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n - 1 = \left(1 + n \cdot \frac{1}{2n} + \binom{n}{2}\frac{1}{(2n)^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{(2n)^3} + \dots\right) - \left(1 - n \cdot \frac{1}{2n} + \binom{n}{2}\frac{1}{(2n)^2} - \binom{n}{3}\frac{1}{(2n)^3} + \dots\right) - 1 = 2\left(\binom{n}{3}\frac{1}{(2n)^3} + \binom{n}{5}\frac{1}{(2n)^5} + \dots\right) \geqslant$

0. Множењем са $(2n)^n$ добија се $(2n+1)^n-(2n-1)^n-(2n)^n \geqslant 0$, а одатле и тражена неједнакост:

$$(2n+1)^n \geqslant (2n)^n+(2n-1)^n .$$

Једнакост важи акко $n=1$ или $n=2$.

58. Нека је $b_n = ka_{n+2}-a_n$ за $n \in \mathbb{N}$ и нека је $(b_n, b_{n+1}) = d$. Тада је $b_{n+1}-b_n = b_{n-1}$ дељиво са d, па је и $b_n - b_{n-1} = b_{n-2}$ дељиво са d. Настављањем овог поступка, добијамо да су $b_2 = 3k+1$ и $b_1 = 2k+1$ дељиви са d. Како је $3b_1-2b_2 = 1$, то је $(b_1, b_2) = 1$, па је $d = 1$, што је и требало доказати.

59. За целе бројеве m и n и полином са целобројним коефицијентима P важи $(m-n) \mid (P(m)-P(n))$. Нека је $l \in \mathbb{Z}$ целобројна нула полинома P. Тада постоје $k, r \in \mathbb{Z}$, такви да је $l = kn+r$ и $1 \leqslant r \leqslant n$, па:

$$n \mid kn \mid (r-l) \mid (P(r)-P(l)) = P(r)\,,$$

што је немогуће, јер је $0 < |P(r)| < n$.

60. Нека је S врх пирамиде, $ABCD$ његова основа и E подножје нормале из S на $ABCD$. Троугао $\triangle SEA$ је правоугли, а хипотенуза му је $AS = 1$. Нека је $\sphericalangle SAE = \alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Тада је $SE = \sin\alpha$ висина пирамиде, а $2AE = 2\cos\alpha$ дијагонала квадрата у основи, па је запремина пирамиде

$$V(\alpha) = \frac{1}{3}\frac{(2AE)^2}{2}SE = \frac{2}{3}\sin\alpha\cos^2\alpha\,.$$

Тада је $V'(\alpha) = \dfrac{2}{3}\cos\alpha(\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha) = \dfrac{2}{3}\cos\alpha(1-3\sin^2\alpha)$, па имамо да је $V'(\alpha) > 0$, за $0 < \sin\alpha < \frac{1}{\sqrt{3}}$, а $V'(\alpha) < 0$ за $\frac{1}{\sqrt{3}} < \sin\alpha < 1$ (α је оштар угао), тј. максимум се достиже за $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и износи $V = \frac{4}{27}\sqrt{3}$.

Први разред – Б категорија

61. Сређивањем добијамо $8n^3-12n^2+6n+63 = (8n^3-12n^2+6n-1)+(63+1) = (2n-1)^3+4^3 = (2n+3)((2n-1)^2-4(2n-1)+16) = (2n+3)((2n-1)^2-4(2n-1)+4+12) = (2n+3)((2n-3)^2+12)$, па је дати број производ два природна броја већа од 1, тј. сложен је.

62. Из $AB-CD = AD-BC$ и $AB+CD = AD+BC$ (четвороугао $ABCD$ је тангентни), добија се $AB = AD$ и $BC = CD$, па су троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ подударни (подударне су им све три странице). Тада је $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = \frac{1}{2}(\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC) = 90^\circ$ (јер је четвороугао $ABCD$ тетивни), па је AC пречник круга.

63. Нека је $3n - m = k \cdot p$, $5n + 2m = k \cdot s$, $(p, s) = 1$, $k > 1$ за $p \in \mathbb{Z}$ и $s, k \in \mathbb{N}$. Одавде се добија $n = \dfrac{k(2p+s)}{11}$ и $m = \dfrac{k(3s-5p)}{11}$. Како су m и n узајамно прости, то је $k = 11$.

64. Како дато тврђење важи за свако $x \in \mathbb{R}$, важи и за $x = 0$ и $x = 1$. За $x = 0$ добијамо $f(0) - (f(0))^2 \geqslant \dfrac{1}{4}$, односно $\left(f(0) - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0$, одакле је $f(0) = \frac{1}{2}$. За $x = 1$ добијамо $f(1) - (f(1))^2 \geqslant \dfrac{1}{4}$, односно $\left(f(1) - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0$, одакле је $f(1) = \frac{1}{2}$. Следи $f(0) = f(1)$, тј. дата функција није инјективна.

65. Сваки пар правих првог скупа и сваки пар правих другог скупа одређују тачно један паралелограм и обрнуто. Пар правих из првог скупа можемо изабрати на $\dbinom{13}{2}$ начина, а из другог на $\dbinom{7}{2}$ начина, па тражених паралелограма има $\dbinom{13}{2} \cdot \dbinom{7}{2} = 1638$.

Други разред – Б категорија

66. Како за $n+1 \leqslant k \leqslant n^2 - 1$, $k \in \mathbb{N}$ важи $\dfrac{1}{k} > \dfrac{1}{n^2}$, добија се

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n^2} > \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{n^2 - n}{n^2} = 1\,,$$

што је требало доказати.

67. Дати изрази су дефинисани за $z \neq 0$. Из $|z| = \dfrac{1}{|z|}$ следи $|z| = 1$, а из $|z| = |z-1|$ следи $|z-1| = 1$. Ако је $z = x + iy$, из ових услова добијамо $x^2 + y^2 = 1$ и $(x-1)^2 + y^2 = 1$, односно $x^2 = (x-1)^2$, па је $x = \dfrac{1}{2}$, а $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ или $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Дакле, решења су $\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

68. Како је $a \neq 1$, једначина је квадратна, па из Виетових правила добијамо да је дати израз $I = (x_1 - b)(x_2 - b)$:

$$I = x_1 x_2 - b(x_1 + x_2) + b^2 = \frac{2a-1}{a-1} - b\frac{a+1}{a-1} + b^2 = b^2 - b + 2 + \frac{1-2b}{a-1}\,,$$

па дати израз не зависи од a акко је $b = \dfrac{1}{2}$ (и тад је $I = \dfrac{7}{4}$).

69. Дата једначина је дефинисана за $x \geqslant 1$. Нека је

$$u = \sqrt[3]{2-x}, \qquad v = \sqrt{x-1}\,.$$

Из $v = 1 - u$ и $u^3 + v^2 = 1$, добија се

$$u(u-1)(u+2) = 0\,,$$

одакле је $u \in \{0, 1, -2\}$, тј. $x \in \{2, 1, 10\}$, па како су сви добијени бројеви не мањи од 1, усвајамо сва три решења.

70. Из једнакости $AD^2 = BD \cdot CD$ добијамо да је $AD = 6$ и $DE = 3$, а из правоуглог троугла $\triangle BED$ добијамо $BE = 5$. Нека је G тачка на страници AC таква да је $DG \parallel BF$. Пошто је EF средња линија троугла $\triangle ADG$, из $EF = x$ следи $DG = 2x$. Из сличности троуглова $\triangle BFC$ и $\triangle DGC$ следи једнакост $\dfrac{5+x}{2x} = \dfrac{13}{9}$, одакле је $x = \dfrac{45}{17}$, односно $BF = \dfrac{130}{17}$.

Трећи разред – Б категорија

71. Нека је $AB = a$, $CD = b$, $BC = x$, $AD = h$, $AD \perp AB$. Како је $x + h = a + b$ (трапез $ABCD$ је тангентан) и из $x^2 - h^2 = (a-b)^2$ добија се $(x-h)(a+b) = (a-b)^2$, тј. $x = \dfrac{(a-b)^2}{a+b} + h$, одакле је

$$h = a + b - x = \frac{1}{2}\left(a + b - \frac{(a-b)^2}{a+b}\right) = \frac{2ab}{a+b}\,,$$

па је $P = \dfrac{a+b}{2} \cdot h = ab$.

72. Нека је O центар лопте описане око пирамиде $SABCD$, R њен полупречник, E средиште правоугаоника $ABCD$ и M средиште ивице CS. Троугао $\triangle SCE$ је правоугли са оштрим углом $\beta = \sphericalangle SCE$, а тачка O је једнако удаљена од тачака C и S, па је $OM \perp CS$ и

$$R = OS = \frac{SM}{\sin\beta} = \frac{1}{2}\frac{CE}{\cos\beta\sin\beta} = \frac{d}{2\sin 2\beta}\,,$$

јер је $\sphericalangle SOM = \sphericalangle SCE = \beta$ (углови са нормалним крацима).

73. Због дефинисаности логаритма мора бити

$$x \in (-\infty, 2 - \sqrt{5}) \cup (2 + \sqrt{5}, +\infty)\,.$$

Из $\log_2(x^2 - 4x - 1) = n$, $n \in \mathbb{Z}$, следи $x = 2 \pm \sqrt{5 + 2^n}$. Пошто је $x \in \mathbb{Z}$, добијамо $5 + 2^n = k^2$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ако је $n<0$, важи $2^{-n}(k^2-5)=1$, што је немогуће, јер је $2^{-n}(k^2-5)=1$ паран број.
Ако је $n=0$, добијамо $k^2=6$, што је немогуће $(k\in\mathbb{Z})$.
Ако је $n>0$, број $5+2^n$ је непаран, па је $k=2m-1$, за неко $m\in\mathbb{Z}$, одакле сређивањем добијамо $m(m-1)=2^{n-2}+1$. За $n=1$ број $2^{n-2}+1$ није цео, за $n>2$ број $2^{n-2}+1$ је непаран, а број $m(m-1)$ је паран цео број, па су и ове ситуације немогуће.
За $n=2$ добијамо $x^2-4x-5=0$, тј. $x\in\{-1,5\}$, што су једина решења (припадају области дефинисаности логаритма).

74. Тригонометријским трансформацијама добијамо:
$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{1}{2}(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ)\sin 80^\circ = \frac{1}{2}(\cos 20^\circ\cdot\sin 80^\circ - \cos 60^\circ\cdot \sin 80^\circ) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\sin 100^\circ + \sin 60^\circ) - \frac{1}{2}\sin 80^\circ) = \frac{1}{4}((\sin 100^\circ - \sin 80^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{8}$, што је требало доказати.

75. Како је $p\geqslant 0$, за $k>0$ важи $kp\geqslant 0$, те имамо да је $2003^{kp}\geqslant 1$, односно $1-2003^{kp}\leqslant 0$, одакле је $(2003^{kp})^{1-2003^{kp}}\leqslant 1$. Сабирањем ових неједнакости за $k=1,\ldots,2003$, добијамо

$$(2003^p)^{1-2003^p}+(2003^{2p})^{1-2003^{2p}}+\ldots+(2003^{2003p})^{1-2003^{2003p}}\leqslant 2003\,,$$

што је и требало доказати.
Једнакост важи акко $p=0$.

Четврти разред – Б категорија

76. Нека је $a_n=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^4}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^8}\right)\ldots\left(1+\dfrac{1}{2^{2^n}}\right)$. Тада је $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)a_n=1-\dfrac{1}{2^{2^{n+1}}}$, одакле је $a_n=2\left(1-\dfrac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)$, односно $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$.

77. Нека је $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$. Тада је $yx^2-4y=x^2-1$, одакле налазимо

$$x=\pm\sqrt{\frac{4y-1}{y-1}}\,,$$

тј. мора бити $\dfrac{4y-1}{y-1}\geqslant 0$, односно $y\in\left(-\infty,\frac{1}{4}\right]\cup(1,+\infty)$, што је и требало доказати.

78. Израз

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{a_{n+1}+\ldots+a_{3n}}=\frac{2a_1+(n-1)d}{2(2a_1+2nd+(2n-1)d)}$$

не зависи од n акко је $2a_1 + (n-1)d = c(2a_1 + 2nd + (2n-1)d)$, тј.

$$(1-4c)dn = (2a_1 - d)(c-1)\,.$$

Последња једнакост је испуњена за све n акко је $d(1-4c) = 0$ и $(2a_1 - d)(c-1) = 0$.
Ако је $d = 0$, мора бити $a_1 \neq 0$ (да не би имали дељење нулом) и $c = 1$, тј. то је низ $a_n = a \neq 0$ за свако n (за овакав низ немамо дељење нулом).
Ако је $c = \frac{1}{4}$, биће $d = 2a_1$, па добијамо решења $a_n = (2n-1)a$, $a \neq 0$ за свако n (опет да не би имали дељење нулом).
Дакле, сва решења задатка су низови: $a_n = a$ и $a_n = (2n-1)a$, $a \neq 0$.

79. Ако су сва три решења реална, по Виетовим правилима имамо $x_1x_2x_3 = \frac{1}{a} > 0$, па је само једно позитивно, јер по Виетовим правилима имамо и $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0$, тј. не могу бити сва три позитивна.
Ако је само једно решење реално (нпр. x_1), тада за друга два важи $x_2 = \overline{x_3}$, па је $x_1x_2x_3 = x_1|x_2|^2 = \frac{1}{a} > 0$, тј. опет је $x_1 > 0$.

80. Нека је r полупречник основе, а H висина ваљка. У пресеку ваљка и равни која садржи његову осу добијамо правоугаоник страница H и $2r$, а дијагонале $2\sqrt{3}$. Тада је $V(H) = r^2\pi H = \big((\sqrt{3})^2 - (\frac{H}{2})^2\big)\pi H$, тј.

$$V(H) = \left(3 - \frac{H^2}{4}\right)\pi H\,,$$

$0 < H < 2\sqrt{3}$, па је $V'(H) = 3\pi(1 - \frac{H^2}{4})$. Следи: $V'(H) > 0$, за $0 < H < 2$ и $V'(H) < 0$, за $2 < H < 2\sqrt{3}$, тј. максималну запремину добијамо ако упишемо ваљак висине $H = 2$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА РЕПУБЛИЧКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – А категорија

81. _Решење 1_: Стављањем $y = 2 - x$ у тражени израз добијамо

$$I = x^2y^2(x^2 + y^2) = x^2(2-x)^2(2x^2 - 4x + 4)\,.$$

Из неједнакости аритметичке и геометријске средине је $ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, што нам даје $x(2-x) \leqslant 1$, тј. $x^2(2-x)^2 \leqslant 1$. Последњи фактор у I можемо представити као $2x^2 - 4x + 4 = 2\big((x-1)^2 + 1\big) \leqslant 2$. Коначно добијамо $I \leqslant 2$.
Једнакост у првој неједнакости важи када је $x = 2 - x$, тј. за $x = 1$, а у другој када је $x - 1 = 0$, што опет даје $x = 1$. Дакле једнакост важи,

само када је $x = y = 1$.

<u>*Решење 2*:</u> Нека је $x = 1+t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тада је $y = 1-t$, а $x^2y^2(x^2+y^2) = (1+t)^2(1-t)^2((1+t)^2+(1-t)^2) = (1-t^2)^2(2+2t^2) = 2(1-t^4)(1-t^2) \leqslant 2$, јер је $0 \leqslant 1-t^2 \leqslant 1$ и $0 \leqslant 1-t^4 \leqslant 1$.
Једнакост важи акко $1-t^2 = 1-t^4 = 1$, тј. за $t = 0$, тј. акко $x = y = 1$.

82. Претпоставимо да се пермутацијама цифара броја $K = 2^k$ добио број $N = 2^n, n > k$. Тада је $N > K$, па пошто N има највише онолико цифара колико има и K, N и K имају исти број цифара, па је $N < 10K$. Даље, $N-K$ је дељив са 9, пошто оба броја дају исти остатак при дељењу са 9 као и збир њихових цифара. Следи $9 \mid N-K = 2^k(2^{n-k}-1)$, односно $9 \mid 2^{n-k}-1 < 2^{n-k} = \frac{N}{K} < 10$. То значи $2^{n-k}-1 = 9$, што је немогуће.

83. У датом скупу постоји особа која је примила макар 10 писама (иначе би број примљених писама био мањи од $9 \cdot 20 = 180$, а тај број мора бити једнак броју послатих писама, који је $10 \cdot 20 = 200$). Та особа је послала 10 писама неким од преосталих 19 особа, а примила макар 10 писама од истих 19 особа. Ако не би дошло до преклапања, поред уочене особе било би још $10+10 = 20 > 19$ особа. Следи да је та особа примила писмо од особе која јој је и послала писмо, што је и требало доказати.

84. Нека је S центар уписане кружнице, A_1 средиште странице BC, а α, β и γ углови код темена A, B и C троугла ABC. Како је $AM = AN$ то је $\sphericalangle AMN = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Тачке B, S и P су колинеарне, па добијамо $\sphericalangle NPS = 180^\circ - \sphericalangle PBM - \sphericalangle PMB = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - (90^\circ + \frac{\alpha}{2}) = \frac{\gamma}{2} = \sphericalangle NCS$. Следи да тачке S, C, P и N припадају једној кружници, па је $\sphericalangle CPB = \sphericalangle CPS = \sphericalangle CNS = 90^\circ$. Дакле PA_1 је тежишна линија правоуглог троугла BCP, па је $\sphericalangle A_1PB = \sphericalangle A_1BP = \sphericalangle ABP$, тј. $AB \parallel A_1P$, што значи да P припада средњој линији троугла ABC. Троугао ABP има заједничку страницу са троуглом ABC, а одговарајућа висина му је, по претходно доказаном, два пута мања, одакле следи тврђење задатка.

85. Нека је $AC_1 : C_1B = k, BA_1 : A_1C = l$ и $CB_1 : B_1A = m$. Тада је $3\overrightarrow{TT_1} = \overrightarrow{TA_1} + \overrightarrow{TB_1} + \overrightarrow{TC_1} = (\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AA_1}) + (\overrightarrow{TB} + \overrightarrow{BB_1}) + (\overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CC_1}) = (\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC}) + (\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}) = \overrightarrow{0} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{l}{l+1}\overrightarrow{BC} + \frac{m}{m+1}\overrightarrow{CA} = \left(\frac{k}{k+1} - \frac{m}{m+1}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{l}{l+1} - \frac{m}{m+1}\right)\overrightarrow{BC}$. Ако је $T \equiv T_1$, из линеарне независности вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ следи $\frac{k}{k+1} - \frac{m}{m+1} = \frac{l}{l+1} - \frac{m}{m+1} = 0$, односно $k = l = m$. Обрнуто, ако је $k = l = m$, следи $\overrightarrow{TT_1} = \overrightarrow{0}$ тј. $T \equiv T_1$.

Други разред – А категорија

86. $\Rightarrow$: Нека је α заједничко решење датих квадратних једначина. Следи $0 = \alpha(a\alpha^2 + b\alpha + c) - (b\alpha^2 + c\alpha + a) = a(\alpha^3 - 1)$, па пошто је $a \neq 0$, добијамо да је $\alpha^3 = 1$. Ако је $\alpha = 1$, добијамо $a + b + c = 0$, па из идентитета

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)$$

следи да је $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.
Ако је α комплексан корен једначине $\alpha^3 = 1$, онда је и $\overline{\alpha}$ заједничко решење датих квадратних једначина, па су ове једначине еквивалентне. Одавде је $a : b = b : c = c : a$, па је $a = b = c$, одакле и $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.
$\Leftarrow$: Обрнуто, ако је $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ на основу горњег идентитета добијамо да је $a = b = c$ или $a + b + c = 0$. У првом случају дате једначине су идентичне, а у другом заједничко решење им је 1. Овим је доказано тврђење задатка.

87. Претпоставимо супротно, тј. да постоје $t_1, t_2 \in T$ са $t_1t_2 = u \in U$ и $u_1, u_2 \in U$ са $u_1u_2 = t \in T$. Тада је $t_1t_2u_1u_2 = uu_1u_2 \in U$ и $t_1t_2u_1u_2 = t_1t_2t \in T$ што је контрадикција.

88. По неједнакости између аритметичке и геометријске средине, имамо: $(a+3b)(b+4c)(c+2a) = (a+b+b+b)(b+c+c+c+c)(c+a+a) \geqslant 4 \cdot (ab^3)^{\frac{1}{4}} \cdot 5 \cdot (bc^4)^{\frac{1}{5}} \cdot (ca^2)^{\frac{1}{3}} = 60 \cdot a^{\frac{11}{12}} \cdot b^{\frac{19}{20}} \cdot c^{\frac{17}{15}}$. Како је $a \leqslant b \leqslant c$, даље је $60 \cdot a^{\frac{11}{12}} \cdot b^{\frac{19}{20}} \cdot c^{\frac{17}{15}} \geqslant 60 \cdot a^{\frac{11}{12}} \cdot b^{\frac{13}{12}} \cdot c \geqslant 60abc$. У првој неједнакости једнакост важи акко $a = b = c$, у другој акко $b = c$, а у трећој акко $a = b$. Дакле, једнакост важи акко $a = b = c$.

89. Могуће је. Нека су темена датог троугла A, B и C_0, K и L тачке на AB, такве да је $AK = KL = LB = 1$, k и l праве које садрже K и L редом, нормалне на AB, а C_1 пресек праве l и BC_0. Нека је C_n низ тачака дефинисан са $\{C_{2n}\} = k \cap AC_{2n-1}, \{C_{2n+1}\} = l \cap BC_{2n}$, за $n \geqslant 1$. Троуглови $AC_{2n}C_{2n+1}$ за $0 \leqslant n \leqslant 1000$, $BC_{2n-1}C_{2n}$ за $1 \leqslant n \leqslant 1001$ и ABC_{2002} дају тражено разбијање(за $i > 0$ $C_iC_{i+1} > KL = 1$, $AC_{2i} > AK = 1, BC_{2i+1} > BL = 1, AC_{2i+1} > AL = 2, BC_{2i} > BK = 2$).

90. Како је Z средиште дужи PX, из правила паралелограма закључујемо да је $4XZ^2 + 4OZ^2 = 2OX^2 + 2OP^2$. При условима задатка, важи $OX = OQ + QX$, $QX^2 = XZ \cdot XP = 2XZ^2$ и $OP = OQ$. Добијамо: $2XZ^2 + 2OZ^2 = OQ^2 + 2OQ \cdot QX + QX^2 + OP^2 = 2OQ^2 + 2OQ \cdot QX + 2XZ^2 \Rightarrow OZ^2 = OQ \cdot (OQ + QX) = OQ \cdot OX \Rightarrow \Delta OQZ \sim \Delta OZX \Rightarrow \sphericalangle OZQ \cong \sphericalangle OXZ$, међутим, и $\sphericalangle OZQ \cong \sphericalangle OQY$ (угао између тангенте и тетиве круга) $\Rightarrow \sphericalangle OQY \cong \sphericalangle OXZ \Rightarrow YQ \parallel PX$.

Трећи разред – А категорија

91. Претпоставимо да постоји низ $a_n, n \geqslant 1$ са датим својством. Тада је низ $b_n = \frac{1}{a_n}$, на основу услова задатка, аритметичка прогресија, па за

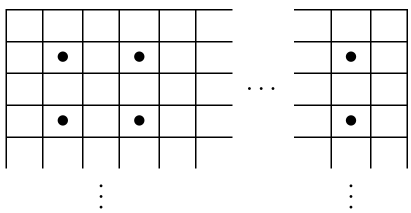
неко $d \neq 0$ важи $b_n = b_1 + (n-1)d$, за свако природно n, па је за довољно велико n, b_n или већи од 1 или мањи од 0. Са друге стране, како су бројеви a_n природни, мора бити $0 < b_n \leqslant 1$, што је контрадикција.
Коначан низ оваквих бројева постоји. У случају 2003 броја можемо узети нпр. $a_n = \frac{2003!}{n}$, за $1 \leqslant n \leqslant 2003$. Лако се проверава да овај низ задовољава услове задатка.

92. Нека је q прост делилац броја $2^p - 1$ (тј. $2^p \equiv 1(\mod q)$) и нека је d најмањи природан број, такав да је $2^d \equiv 1(\mod q)$. Тада $d \mid p$, па је $d = 1$ или $d = p$. Због $2^d \equiv 1(\mod q)$, мора бити $d = p$. Из $2^{q-1} \equiv 1(\mod q)$ следи $p = d \mid q-1$. Како је q непаран, $q-1$ је дељиво и са 2. Следи да је $q = 2kp+1$, за неко природно k. Како је производ неколико бројева облика $2kp+1, k \in \mathbb{N}$ број истог облика, а сваки делилац природног броја производ његових простих делилаца, добијамо тврђење задатка.

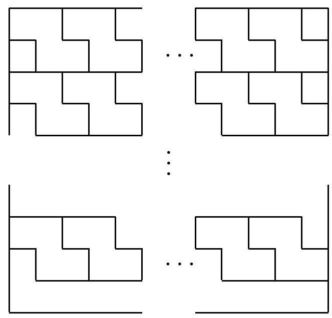
93. Нека је γ угао троугла код темена C, R полупречник описане кружнице, а a, b и c странице BC, CA и AB, редом, троугла ABC. Тада је $CC_1^2 = \frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}, OC_1 = R\cos\gamma$ и $c = 2R\sin\gamma$. Ако је OT нормално на CC_1, пошто T дели CC_1 у односу $2:1$, добијамо $R^2 = OT^2 + \frac{4CC_1^2}{9}$ и $R^2\cos^2\gamma = OT^2 + \frac{CC_1^2}{9}$, одакле одузимањем $R^2\sin^2\gamma = \frac{CC_1^2}{3}$, односно $\frac{c^2}{4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$, тј. $2c^2 = a^2+b^2$. Обрнуто, нека је X пројекција тачке O на CC_1 и $C_1X : CC_1 = k$. Тада је $R^2 = OX^2 + (1-k)^2CC_1^2, R^2\cos^2\gamma = OX^2 + k^2CC_1^2$, одакле одузимањем $\frac{c^2}{4} = R^2\sin^2\gamma = (1-2k)\frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4} = (1-2k)\frac{3c^2}{4}$, тј. $k = \frac{1}{3}$, односно $X \equiv T$.

94. За $n = 3$ тврђење је уствари неједнакост између аритметичке и геометријске средине. За $n > 3$, због датог поретка, важи $a_1a_2 \geqslant a_ka_{k+1}$, за $1 \leqslant k \leqslant n-2$, па је $a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 + \ldots + a_{n-2}a_{n-1}a_n \leqslant a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + \ldots + a_1a_2a_n = a_1a_2(a_3 + a_4 + \ldots + a_n) \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{3}\right)^3$.
Једнакост на првом месту важи акко $a_1 = a_2 = a_k = a_{k+1}$ или $a_{k+2} = 0$, а на другом акко $a_1 = a_2 = a_3 + \ldots + a_n$, тј. акко $a_1 = a_2 = a_3$ и $a_4 = \ldots = a_n = 0$.

95. Означимо поља која имају обе координате парне. Уочимо означена поља на следећој слици.



Свака фигура заузима тачно једно означено поље. Како је број означених поља једнак $\left[\frac{2003}{2}\right] \cdot \left[\frac{2003}{2}\right] = 1002001$, на таблу се може поставити највише 1002001 фигуре. На таблу је могуће поставити 1002001 фигура, на пример, као на следећој слици.



Четврти разред – А категорија

96. Означимо димензије паралелепипеда са a, b и c. Тада је $abc = V, 2(ab + bc + ca) = 18, a + b + c = 6$. Задатак се своди на: за које $V > 0$ овај систем једначина има решења која задовољавају $a > 0, b > 0, c > 0$. Према Виетовим формулама, a, b и c, су решења једначине $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - V = 0$. Треба одредити када овај полином има 3 (не обавезно различита) позитивна реална корена. Посматрајући облик кубне криве, закључујемо да је то еквивалентно следећим условима: $f(0) < 0$, локални екстремуми се достижу у позитивним тачкама, локални максимум је ненегативан и локални минимум је непозитиван. Како је $V > 0$, имамо $f(0) = -V < 0$. Локални екстремуми се достижу у коренима извода $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ или $x = 3$. Видимо да је локални максимум достигнут за $x = 1$ и има вредност $f(1) = 4-V$, а локални минимум је достигнут у $x = 3$ и има вредност $f(3) = -V$. Због тога су сви услови испуњени када је $0 < V \leqslant 4$. Једноставно се проверава да постоје три различита корена за $V < 4$ и два различита корена за $V = 4$.

97. Видети решење 92. задатка (2. за трећи разред А категорије).

98. Видети решење 93. задатка (3. за трећи разред А категорије).

99. Видети решење 94. задатка (4. за трећи разред А категорије).

100. Означимо са a_n број области на колико је круг подељен уколико је дато n тачака. Лако се види да је $a_2 = 2$. Додавањем нове дужи(када се дода нова тачка) добија се $m+1$ нова област, где је m број дужи које се секу унутар круга са придодатом дужи, који је иначе једнак pq, где p и q представљају број тачака на кружници које се налазе са једне стране придодате дужи. Дакле, за број нових области важи $a_{n+1} =$

$a_n + \sum_{k=1}^{n}((k-1)(n-k)+1)$, одакле (користећи $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$) добијамо $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{6}n(n^2-3n+8)$, односно $a_n = \frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)$.

Први разред – Б категорија

101. Како је $x^2+2xy+3y^2+2x+6y+4 = x^2+2x(y+1)+(y+1)^2-(y+1)^2+3y^2+6y+4 = (x+y+1)^2+2y^2+4y+3 = (x+y+1)^2+2(y+1)^2+1 \geqslant 0+0+1 = 1$, добијамо тврђење задатка. Једнакост важи акко $x+y+1 = y+1 = 0$, односно акко $x = 0, y = -1$.

102. Из $\overline{x_1x_2\ldots x_n} \cdot 4 = \overline{x_nx_{n-1}\ldots x_1}$ закључујемо $x_1 \leqslant 2$, па због дељивости са 4, мора бити $x_1 = 2$. Из $\overline{2x_2\ldots x_n} \cdot 4 = \overline{x_nx_{n-1}\ldots 2}$, следи $x_n \geqslant 8$, па мора да буде $x_n = 8$. Како је $4 \cdot 23 > 90$, мора бити $x_2 \in \{0,1,2\}$, па због дељивости са 4 мора бити $x_2 = 1$. За троцифрени број 218 не важи $218 \cdot 4 = 812$, па најмањи такав број потражимо међу четвороцифреним бројевима. Из једнакости $\overline{21x_38} \cdot 4 = \overline{8x_312}$, добијамо $x_3 = 7$. Дакле, тражени број је 2178.

103. Видети решење 83. задатка (3. за први разред А категорије).

104. После сређивања добијамо: $\frac{(x+z)(x+u)(y+z)(y+u)}{(x+y+z+u)^2} =$
$= \frac{(xy+xz+zy+z^2)(xy+xu+yu+u^2)}{(x+y+z+u)^2} =$
$= \frac{(zu+xz+zy+z^2)(zu+xu+yu+u^2)}{(x+y+z+u)^2} =$
$= \frac{z(x+y+z+u)\cdot u(x+y+z+u)}{(x+y+z+u)^2} = z \cdot u$, па како је $z, u > 1$, следи тврђење задатка.

105. При условима задатка је F ортоцентар троугла ABE(или је E ортоцентар троугла ABF-претпоставимо да је прва ситуација), па је $EF \perp AB$. Из $\sphericalangle CSD = 90^\circ$, следи $\sphericalangle CAD = 45^\circ$, па је троугао ACF једнакокрако-правоугли и $AC = CF$. Како важи $\sphericalangle ECF = \sphericalangle BCA = 90^\circ$ и $\sphericalangle EFC = \sphericalangle BAC$(углови са нормалним крацима), па су троуглови ECF и BCA подударни, одакле је $EF = AB$.

Други разред – Б категорија

106. Дата једначина има смисла за $x \neq 1$ и $x \neq 3$. Нека је $t = \sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}$. Тада је $(3-x)t^2 - 2t + (x-1) = 0$, одакле је $t = 1$ или $t = \frac{x-1}{3-x}$. У првој ситуацији добијамо $x = 2$, а у другој $\left(\frac{3-x}{x-1}\right)^4 = 1$, односно или $\frac{3-x}{x-1} = 1$, тј. $x = 2$ или $\frac{3-x}{x-1} = -1$, што нема решења. Дакле, једино решење једначине је $x = 2$.

107. Видети решење 87. задатка (2. за други разред А категорије).

108. Ако је $x_1, x_2 \in (0,1)$, биће $\frac{2c+b}{a} = 2 \cdot \frac{c}{a} + \frac{b}{a} = 2x_1x_2 - x_1 - x_2 = x_1x_2 - x_1 + x_1x_2 - x_2 = x_1(x_2-1) + x_2(x_1-1) < 0$, па је и $a(2c+b) < 0$.

109. Нека је дати квадрат $ABCD$ такав да су тачке C и D на кружници, а тачке E и F пресек нормале из центра круга са CD и AB редом. Нека је R полупречник кружнице, O центар кружнице, а $2x$ страница квадрата. Тада је $OE^2 = R^2 - x^2, OF = \frac{R}{2}$(јер је угао одсечка $120°$), $2x = EF = OE - OF = \sqrt{R^2 - x^2} - \frac{R}{2}$, одакле добијамо $x = \dfrac{R(-2+\sqrt{19})}{10}$(друго решење квадратне једначине отпада, јер је негативно), па је $x = \frac{3}{2}$, одакле је страница квадрата 3.

110. Како је $\sqrt[6]{8\sqrt{5}+16} = \sqrt[6]{(\sqrt{5}+1)^3} = \sqrt{\sqrt{5}+1}$, то је тражени број $2 \cdot \sqrt{\sqrt{5}+1} \cdot \sqrt{\sqrt{5}-1} = 4$.

Трећи разред – Б категорија

111. Из правоуглих троуглова ASB и SBC, добијамо $AS = CS = \sqrt{a^2-b^2}$, па је $V = V(SABC) = \frac{1}{3}BS \cdot P(ASC) = \frac{b}{6}(a^2-b^2)$. Нека је D подножје висине из B на основицу AC једнакокраког троугла ABC. Тада је
$AC = \sqrt{a^2-b^2} \cdot \sqrt{2}, BD^2 = a^2 - (\sqrt{a^2-b^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+b^2}$, па је површина пирамиде $P = 2 \cdot \frac{b \cdot \sqrt{a^2-b^2}}{2} + \frac{\sqrt{a^2-b^2} \cdot \sqrt{a^2-b^2}}{2} + \frac{\sqrt{a^4-b^4}}{2}$, па је тражени полупречник $r = \dfrac{3V}{P} = \dfrac{b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2} + 2b + \sqrt{a^2-b^2}}$.

112. Како је $D = \begin{vmatrix} a & 6 & 1 \\ 1 & 6a & 1 \\ 1 & 6 & a \end{vmatrix} = 6(a-1)^2(a+2), D_x = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 6 & 6a & 1 \\ 1 & 6 & a \end{vmatrix} = 6(a-1)(a-6), D_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 2(a-1)(3a+2), D_z = \begin{vmatrix} a & 6 & 1 \\ 1 & 6a & 6 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 6(a-1)(a-6)$, то за $a \neq 1, a \neq -2$ систем има јединствено решење $(x,y,z) = (\frac{a-6}{(a-1)(a+2)}, \frac{(3a+2)}{3(a-1)(a+2)}, \frac{a-6}{(a-1)(a+2)})$, за $a = -2, D = 0, D_x \neq 0$, па систем нема решења, а за $a = 1$, одузимањем прве две једначине добијамо $0 = 5$, па ни у овом случају систем нема решења.

113. Нека су α и β углови између страница $a = AB$ и $b = BC$, односно $c = CD$ и $d = DA$, редом. Тада је $P(ABCD) = P(ABC) + P(ACD) = \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{2}cd\sin\beta \leqslant \frac{1}{2}(ab+cd) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{c^2+d^2}{2}\right) = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$. Једнакост у првој неједнакости важи акко $\alpha = \beta = 90^\circ$, а у другој акко $a = b$ и $c = d$. Дакле, једнакост важи акко је дати четвороугао квадрат.

114. Поставимо координатни систем тако да је координатни почетак у центру квадрата, тачка A има координате $A(-a,-a)$, а тачка $B(a,-a)$, $a > 0$. Нека је $k > 0$ коефицијент правца праве AG. Тада је једначина те праве $y = k(x+a)-a$, па како тачка G лежи и на правој $y = a$, добијамо да су њене координате $G(\frac{2a}{k}-a, a)$. Слично добијамо: $E(0,-a)$, $EF : y = kx-a$, $F(a, ka-a)$, па је једначина праве $GF : y = \frac{k(k-2)}{2(1-k)}\cdot(x-a)+a(k-1)$. Растојање од тачке $(0,0)$, до праве GF износи: $\dfrac{|a[\frac{k(k-2)}{2(1-k)} - (k-1)]|}{\sqrt{1+\frac{k^2(k-2)^2}{4(k-1)^2}}} = a$, одакле следи тврђење задатка.

115. Из датих једнакости добијамо $\cos^2\alpha = \dfrac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} = \dfrac{1}{\cos^2\beta} - 1 = \dfrac{\cos^2\gamma}{\sin^2\gamma} - 1 = \dfrac{1}{\frac{1}{\cos^2\gamma}-1} - 1 = \dfrac{1}{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-1} - 1 = \dfrac{1-\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha - 1} - 1$. Одавде је $\cos^4\alpha + \cos^2\alpha - 1 = 0$, тј. $\cos^2\alpha = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, па због $\cos^2\alpha \geqslant 0$ следи $\cos^2\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Одавде је $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$, па како је α оштар угао, следи $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Аналогно се добија $\sin\beta = \sin\gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Четврти разред – Б категорија

116. Видети решење 96. задатка (1. за четврти разред А категорије).

117. Сређивањем добијамо: $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x(x^{2003}-1)-2003(x-1)}{(x-1)^2} =$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x^{2003}-1)+(x^{2002}-1)+\ldots+(x-1)}{x-1} =$$
$$= \lim_{x\to 1}\left[(x^{2002}+x^{2001}+\ldots+1)+(x^{2001}+x^{2000}+\ldots+1)+\ldots+(x+1)+1\right] =$$
$$= 2003+2002+\ldots+1 = \frac{2003\cdot 2004}{2} = 2007006.$$

118. Нека је $t = x-y, u = xy$. Систем постаје: $t+z = 6, t^2+2u+z^2 = 14, t(t^2+u)+z^3 = 36$. Из прве једначине је $t = 6-z$, а из друге $u = 6z-z^2-11$, па заменом у трећу и сређивањем добијамо $z^3-6z^2+11z-6 = 0$, одакле је $z \in \{1,2,3\}$. Следи да је $(t,u) \in \{(5,-6),(4,-3),(3,-2)\}$, одакле

добијамо сва решења полазног система:
$(x,y,z)\in\{(2,-3,1),(3,-2,1),(1,-3,2),(3,-1,2),(1.-2,3),(2,-1,3)\}$.

119. Једначина тангенте у тачки $M(a,b)$, $a,b>0$ је $\frac{xa}{8}+\frac{yb}{18}=1$. Њени пресеци са координатним осама су тачке $A(\frac{8}{a},0), B(0,\frac{18}{b})$. Из $\frac{a^2}{8}+\frac{b^2}{18}=1$ налазимо $b=\frac{3}{2}\sqrt{8-a^2}$, па је $P(ABO)=\frac{72}{ab}=\frac{48}{a\sqrt{8-a^2}}$. Како је $P'(a)=\frac{96(a^2-4)}{a^2(8-a^2)^{\frac{3}{2}}}$, важи $P'(a)<0$ за $0<a<2$, $P'(a)>0$, за $2<a<2\sqrt{2}$, тј. минимум се достиже за $a=2$. Дакле, тражена тачка је $M(2,3)$.

120. Означимо са $z_k=x_k+iy_k$, за $k\geqslant 0$. Тада је $z_{n+1}=\sqrt{3}x_n+i^2y_n+i(x_n+\sqrt{3}y_n)=(\sqrt{3}+i)(x_n+iy_n)=2\frac{\sqrt{3}+i}{2}z_n=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})z_n$, за $n\geqslant 0$. Како је $z_0=1$, то је $z_{2003}=2^{2003}\cdot(\cos(\dfrac{2003\pi}{6})+i\sin(\dfrac{2003\pi}{6}))=2^{2003}\cdot(\cos(\dfrac{11\pi}{6})+i\sin(\dfrac{11\pi}{6}))$, па z_{2003} припада четвртом квадранту.

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ,
Нови Сад, субота, 19. април 2003.

Први разред

121. Ако је неки x_i паран број, $x_i=2k$, онда је ${x_i}^4=16k^4\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 16)$. Ако је x_i непаран број, онда је

$${x_i}^4-1=(x_i-1)(x_i+1)({x_i}^2+1)\equiv 0 \pmod{16})$$

(прва два чиниоца су два узастопна парна броја, а и трећи чинилац је паран број), па је ${x_i}^4\equiv 1\pmod{16}$. То значи да је

$${x_1}^4+{x_2}^4+\ldots+{x_{10}}^4\equiv k \pmod{16}, \qquad k\leqslant 10.$$

С друге стране, $2011\equiv 11\pmod{16}$, што значи да једначина нема решења.

122. Уведимо следеће ознаке:

k – број јединичних квадрата са целобројним координатама које дата дуж сече;

x и y – дужине нормалних пројекција дате дужи на координатне осе;

m и n – бројеви целобројних тачака у тим нормалним пројекцијама, редом.

Тада важи:

$$\begin{aligned} k &= m+n+1 < x+1+y+1+1 = x+y+3 \\ &= \sqrt{2(x^2+y^2)-(x-y)^2}+3 \leqslant \sqrt{2\cdot 2003^2}+3 = 2835{,}6697\ldots \end{aligned}$$

Према томе, важи неједнакост $k \leqslant 2835$.

Означимо са K_1 јединични квадрат са "десним горњим" теменом у координатном почетку, $O(0,0)$, а са K_2 јединични квадрат са "левим доњим" теменом $X(1416,1416)$. Како је $OX = 1416\sqrt{2} \approx 2002.5264$, то дату дуж AB можемо поставити тако да важи $A \in K_1$, $B \in K_2$, $AB \parallel OX$ и $d(AB,OX) < \sqrt{2}/2$. За такав положај дужи AB важи $k = 2\cdot 1417+1 = 2835$.

123. Нека је $D-A-C-E$, $DA = c$, $CE = a$ и F тачка са оне стране праве AC са које није B таква да је $\triangle DEF$ једнакостраничан. Како је $\sphericalangle ADB = 20^\circ = \sphericalangle ABD$ и $\sphericalangle CBE = \sphericalangle CEB = 40^\circ$, биће $\sphericalangle DBE = 120^\circ$ и $\sphericalangle BDF = 80^\circ$. Како је $\sphericalangle DFE = 60^\circ$, биће због $\sphericalangle F + \sphericalangle B = 180^\circ$ четвороугао $DBEF$ тетиван, па је $\sphericalangle DFB = \sphericalangle DEB = 40^\circ$. Зато је $\triangle FBD \sim \triangle ABC$, па је $\dfrac{FD}{BD} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{b}{a}$. Како је $FD = DE = a+b+c$ и $DB = DC = b+c$ (јер је $\sphericalangle CBD = 80^\circ = \sphericalangle DCB$), биће

$$\frac{a+b+c}{b+c} = \frac{b}{a},$$

што је и требало доказати.

124. Нека су R_1 и R_2 полупречници, а O_1 и O_2 центри кружница k_1 и k_2, T тачка додира, O_1'', T'', O_2'' подножја нормала из O_1, T, O_2 на p_2 и T', O_2' подножја нормала из T, O_2 на p_1. Из троугла $O_1O_2O_2'$ имамо $TT' = \dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$, а из трапеза $O_1O_2O_2''O_1''$ да је $TT'' = \dfrac{2R_1R_2}{R_1+R_2} = 2\,TT'$. Дакле, T се налази на полуправој која дели дати угао на углове α и β такве да $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{1}{2}$.

Обратно, ако је T тачка те праве, нека кружница k_2 пролази кроз T и додирује p_1 и p_2. Нека је O_1 пресек O_2T са p_1 и тачке T', O_2', O_1'', T'', O_2'' као горе. Опет је $TT' = \dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$. Ако обележимо $x = O_1O_1''$, имамо $TT'' = \dfrac{xR_2+R_1R_2}{R_1+R_2}$, па $x = R_1$, односно k_1 додирује и p_2.

Други разред

125. **а)** Тврђење непосредно следи из наредних очигледних неједнакости:

$$\sqrt{a} < \sqrt{b+c} < \sqrt{b+2\sqrt{bc}+c} = \sqrt{b}+\sqrt{c},$$

и слично $\sqrt{b} < \sqrt{c} + \sqrt{a}$, $\sqrt{c} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
б) Применом Хероновог обрасца лако се добија да је

$$S_1{}^2 = \frac{1}{16}(2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2),$$

па је зато дата неједнакост еквивалентна неједнакости

$$2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2 \geqslant 4S\sqrt{3}. \tag{1}$$

Да докажемо ову неједнакост, уведимо стандардне смене

$$p = \frac{b+c-a}{2}, \quad q = \frac{c+a-b}{2}, \quad r = \frac{a+b-c}{2}, \quad p, q, r > 0.$$

Тада је $p + q + r = \dfrac{(a+b+c)}{2}$, па је $a = q + r$, $b = r + p$, $c = p + q$, а $S = \sqrt{pqr(p+q+r)}$. Сада је неједнакост (1) еквивалентна неједнакости

$$(pq + qr + rp)^2 \geqslant 3pqr(p + q + r),$$

односно са $p^2q^2 + q^2r^2 + r^2p^2 \geqslant pqr(p + q + r)$. Последња неједнакост непосредно следи из неједнакости

$$\frac{p^2q^2 + q^2r^2}{2} \geqslant pq^2r, \quad \frac{q^2r^2 + r^2p^2}{2} \geqslant pqr^2, \quad \frac{r^2p^2 + p^2q^2}{2} \geqslant p^2qr.$$

126. Претпоставимо, супротно тврђењу, да су бројеви PA, PB, PC, PD рационални. Нека је кружница полупречника d и тачка P припада мањем луку BC. Ако је $\sphericalangle CAP = \alpha$, из $\triangle APC$ је $PC = 2d\sin\alpha$ и $PA = 2d\cos\alpha$. Даље,

$$\begin{aligned} PD &= 2d\sin\sphericalangle PBD = 2d\sin(45^\circ + \alpha) = d\sqrt{2}(\sin\alpha + \cos\alpha) \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{PC}{2} + \frac{PA}{2}\right). \end{aligned}$$

Како је $\dfrac{PC}{2} + \dfrac{PA}{2}$ рационалан број, то је PD ирационалан број. Контрадикција.

127. Из тачака симетрале s дужи BC очигледно се виде AB и CD под истим углом. Претпоставимо да се из неке тачке M ван те симетрале дужи AB и CD виде под истим углом. Исто важи и за тачку N која је симетрична тачки M у односу на s, због симетрије. Из тачака M и N виде се дужи AB (CD) под истим углом, те тачке A, B, M, N (односно C, D, M, N) припадају истој кружници која је описана око правоугаоника $ABCD$. Дакле, M припада луку те кружнице садржаном у посматраном појасу.

Обратно, из сваке тачке M тог лука виде се AB и CD под истим углом, јер и њој симетрична тачка N у односу на s има исто својство.

Зато је тражени скуп тачака унија симетрале s и пресека кружнице описане око правоугаоника $ABCD$ и посматраног појаса између правих AB и CD.

128. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $f(m) = [m/2]$. Функцијом f се n може добити из бројева $2n$ и $2n+1$, они из бројева $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, итд. Закључујемо да се са 11 примена функције f број n може добити из бројева $2^{11}n$, $2^{11}n+1$, $\dots$, $2^{11}n+(2^{11}-1)$. То су $2^{11} > 2003$ узастопних природних бројева, те је бар један од њих у скупу S. Следи да је и n у скупу S.

Трећи и четврти разред

129. Посматрајмо бројеве $a_m = (5+\sqrt{35})^m + (5-\sqrt{35})^m$. Они задовољавају рекурентну формулу $a_{m+2} = 10a_{m+1} + 10a_m$ (што закључујемо конструисањем карактеристичне једначине $x^2 - 10x - 10 = 0$ чија решења су $5 \pm \sqrt{35}$). Како је $a_0 = 2$, $a_1 = 10$, индукцијом се лако добија да су за све $m \in \mathbb{N}$ бројеви a_{2m-1} и a_{2m} дељиви са 10^m. Пошто је $-1 < 5-\sqrt{35} < 0$, за непарно m је $-1 < (5-\sqrt{35})^m < 0$, па је $[(5+\sqrt{35})^m] = a_m$.

130. Приметимо најпре да за $x_1 = x_2 = 0$ из неједнакости (в) следи да је $2f(0) \leqslant f(0)$, тј. $f(0) \leqslant 0$. Одатле и из (а) следи да је $f(0) = 0$, па неједнакост $f(x) \leqslant 2x$ за $x = 0$ важи.

Ако у (в) ставимо $x_1 = x$, $x_2 = 1-x$, добијамо

$$f(x) \leqslant f(x) + f(1-x) \leqslant f(x+1-x) = f(1) = 1,$$

што доказује да је $f(x) \leqslant 1$ за свако $x \in [0,1]$.

Нека је сада $x \in (0, 1/2]$. Тада је $2x \in (0,1]$, па из (в) за $x_1 = x_2 = x$ следи да је $2f(x) \leqslant f(2x)$, тј.

$$\frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{f(2x)}{2x} \tag{1}$$

за свако $x \in (0, 1/2]$.

Да докажемо неједнакост $f(x) \leqslant 2x$ за $x \in (0,1]$, приметимо да сваки број $x \in (0,1]$ припада неком полуотвореном интервалу облика $(2^{-n-1}, 2^{-n}]$, где је $n = 0, 1, 2, \dots$. Ако је $x \in (1/2, 1]$, тј. ако је $n = 0$, тада је $\dfrac{f(x)}{x} \leqslant \dfrac{1}{x} < 2$, јер је $f(x) \leqslant 1$ и $x > 1/2$. Стога дата неједнакост важи.

Нека је сада $x \in (0, 1/2]$, тј. нека је $n \geqslant 1$. Тада је

$$x < 2x < 2^2x < \ldots < 2^{n-1}x \leqslant \frac{1}{2} < 2^n x \qquad \text{за неко} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Но онда је према (1)

$$\frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{f(2x)}{2x} \leqslant \ldots \leqslant \frac{f(2^{n-1}x)}{2^{n-1}x} \leqslant \frac{f(2^n x)}{2^n x} < 2,$$

при чему последња неједнакост у претходном низу важи јер је у њој $2^n x > 1/2$, а у том случају смо већ доказали да важи дата неједнакост. Тиме је тврђење задатка доказано.

131. Нека су PP_1 и PP_2 тангенте на кружницу k, где су P_1 и P_2 тачке које припадају луковима који садрже тачке M и N, редом. Доказаћемо да су P_1, C и N колинеарне. $\triangle PP_1C$ је једнакокрак ($PC^2 = PA \cdot PB = PP_1^2$ – потенција из P у односу на k) и $\triangle PP_1A \sim \triangle PBP_1$, па је

$$\begin{aligned}
\sphericalangle PP_1C &= \frac{\pi - \sphericalangle P_1PB}{2} \\
&= \frac{\sphericalangle PBP_1 + \sphericalangle PP_1B}{2} \qquad \text{збир углова у } \triangle PP_1B \text{ је } \pi \\
&= \frac{\sphericalangle PP_1A + \sphericalangle PP_1B}{2} \qquad \sphericalangle PBP_1 = \sphericalangle PP_1A \text{ – тетивни и тангентни} \\
&= \sphericalangle PP_1N \qquad \text{јер је } N \text{ средиште лука } AB \text{ на коме није } P_1,
\end{aligned}$$

одакле следи тражена колинеарност.

Аналогно доказујемо да су P_2, C и M колинеарне. Одавде је

$$\sphericalangle MCN = \sphericalangle P_1CP_2 = \pi - \frac{1}{2}\sphericalangle P_1PP_2$$

(јер P_1, C и P_2 припадају кругу са центром P), одакле следи тврђење задатка.

132. Тврђење доказујемо индукцијом по n. За $n = 2$ то је очигледно (скуп S већ и сам има 3 елемента, $S = \{01, 10, 11\}$). Нека је, зато, $n \geqslant 4$. Означимо са S_n скуп свих не-нула низова дужине n састављених од нула и јединица. Дефинишимо следеће скупове:

T_0 – скуп свих низова којима су првих $n-2$ чланова једнаки 0 (T_0 има само три елемента; то су $\underbrace{00\ldots0}_{n-2}01$, $\underbrace{00\ldots0}_{n-2}10$, $\underbrace{00\ldots0}_{n-2}11$);

T_{00} – скуп свих низова којима су последња два члана једнака 0 (то су сви низови из S_{n-2} којима је на крају дописано 00);

T_{01} – скуп свих низова из S_{n-2} којима је на крају дописано 01;

T_{10} – скуп свих низова из S_{n-2} којима је на крају дописано 10;

T_{11} – скуп свих низова из S_{n-2} којима је на крају дописано 11.

Јасно је да је $S_n = T_0 \cup T_{00} \cup T_{01} \cup T_{10} \cup T_{11}$ (дисјунктна унија). Поделимо скуп S_{n-2} на троелементне подскупове који задовољавају постављени услов, и на исти начин ("заборављајући" последње две цифре) поделимо скуп T_{00}. Троелементни скуп T_0 и скупови настали поделом скупа T_{00} задовољавају постављени услов.

Остатак троелементних скупова правимо на следећи начин: за сваки скуп $G = \{a, b, c\}$ из поделе скупа S_{n-2} дефинишимо низ:

$$a^{01} = \left(a_i^{01}\right)_{i=1}^{n}, \qquad a_i^{01} = \begin{cases} a_i, & 1 \leqslant i \leqslant n-2, \\ 0, & i = n-1, \\ 1, & i = n \end{cases}$$

и, аналогно, низове a^{10}, a^{11}, b^{01}, b^{10}, b^{11}, c^{01}, c^{10}, c^{11}. Јасно је да $a^{01}, b^{01}, c^{01} \in T_{01}$; $a^{10}, b^{10}, c^{10} \in T_{10}$ и $a^{11}, b^{11}, c^{11} \in T_{11}$. Скупови $G_1 = \{a^{01}, b^{10}, c^{11}\}$, $G_2 = \{a^{10}, b^{11}, c^{01}\}$, $G_3 = \{a^{11}, b^{01}, c^{10}\}$ имају тражено својство. На овај начин смо сваком елементу из поделе скупа S_{n-2} придружили три троелементна подскупа скупа $T_{01} \cup T_{10} \cup T_{11}$ са траженом особином. Није тешко проверити да ови подскупови заједно са T_0 и T_{00} у унији дају S_n.

МАЛА ОЛИМПИЈАДА

133. Лема 1. Ако су p, q, r полиноми, тада $q - r$ дели $p\,(q) - p\,(r)$.
Доказ: Нека је $p\,(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$.
Тада је $p\,(q(x)) - p\,(r(x)) = (a_n(q(x))^n + \ldots + a_1 q(x) + a_0) - (a_n(r(x))^n + \dots + a_1 r(x) + a_0) = \sum_{k=1}^{n} a_k((q(x))^k - (r(x))^k) = (q(x) - r(x)) \sum_{k=1}^{n} a_k((q(x))^{k-1} + (q(x))^{k-2} r(x) + \dots + (r(x))^{k-1})$, одакле следи тврђење леме.

Лема 2. За свако $n \in \mathbb{N}_0$ $p\,(x) - x$ дели $p^{n+1}(x) - p^n(x)$.
Доказ: Јасно је да се може узети $p^0(x) = x$. База индукције постаје тривијална. Претпоставимо да $p\,(x) - x$ дели $p^{n+1}(x) - p^n(x)$. Како је $p^{n+2}(x) - p^{n+1}(x) = p\,(p^{n+1}(x)) - p\,(p^n(x))$, то $p^{n+1}(x) - p^n(x)$ дели $p^{n+2}(x) - p^{n+1}(x)$ по леми 1 (замени се $q(x) = p^{n+1}(x), r(x) = p^n(x)$), па и $p\,(x) - x$ дели $p^{n+2}(x) - p^{n+1}(x)$, што је и требало доказати.

Сада тврђење задатка следи напосредно из леме 2, пошто је $p^{2003}(x) - 2p^{2002}(x) + p^{2001}(x) = (\,p^{2003}(x) - p^{2002}(x)) - (\,p^{2002}(x) - p^{2001}(x))$.

134. Доказ ћемо извести индукцијом по n.

За $n = 3$ тврђење очигледно важи. Претпоставимо да је доказано тврђење за $n - 1$, где је $n \geqslant 4$.
Нека је $A_1 A_2 \dots A_{n-1}$ тражено означавање типа (a) у $n-1$−тоуглу $A_1 A_2 \dots A_{n-1}$. Нека су све дужи
$A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_1$ нпр. плаве. Задржимо исто означавање увек, сем у случају да је дуж $A_{n-1}A_n$ црвена, а дуж A_nA_1 плава. Тада ћемо их означити у редоследу $A_n, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$.
Нека је $A_1 A_2 \dots A_{n-1}$ тражено означавање типа (b) у $n-1$−углу $A_1 A_2 \dots A_{n-1}$ и нека су дужи $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{k-1}A_k$ плаве, а дужи

$A_kA_{k+1}, \ldots, A_{n-1}A_1$ црвене. Ако је дуж A_nA_k плава, тражено означавање темена $n-$тоугла је $A_1A_2 \ldots A_kA_nA_{k+1} \ldots A_{n-1}$, а ако је црвена $A_1A_2 \ldots A_{k-1}A_nA_k \ldots A_{n-1}$.

135. Нека је $AM : BM : CM = p : q : r, p, q, r > 0$. Посматрајмо функцију $f(X) = (q^2 - r^2)AX^2 + (r^2 - p^2)BX^2 + (p^2 - q^2)CX^2$. Једначина $f(X) = 0$ претставља криву чији је степен највише 1 (јер је коефицијент уз x^2 (наравно и уз y^2) једнак $(q^2 - r^2) + (r^2 - p^2) + (p^2 - q^2) = 0$). Ако је $p = q = r$, тада се тачка X, која је решење једначине $f(X) = 0$ налази на пресеку симетрала дужи AB, BC, CA, тј. центар је описаног круга, па немамо различите тачке (M и N) са датим својством. Нека је нпр. $p \neq q$. Посматрајмо тачку Y, која се налази на симетрали дужи AB. Како је $AY = BY$, имамо $f(Y) = (q^2 - p^2)(AY^2 - CY^2)$, па мора бити и $AY = CY$, тј. доказали смо да центар описане кружнице припада скупу $f(X) = 0$ и да тај скуп није празан и не претставља раван, односно права је. Сада тврђење задатка тривијално следи, јер скуп $f(X) = 0$ садржи тачке M и N (из $AM = pd, BM = qd, CM = rd$ следи $f(M) = 0$ и слично за N).

20. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

136. Постоји. Нека је C скуп који се састоји од 2002 различита природна броја дељива са 2003, нпр. $\{2003k \mid 1 \leqslant k \leqslant 2002\}$, а D скуп који се састоји од 2002 различита природна броја, који при дељењу са 2003 дају остатак 1, нпр. $\{2003k + 1 \mid 1 \leqslant k \leqslant 2002\}$. Нека је $B = C \cup D$, а A произвољан његов подскуп од 2003 елемента. Нека $A \cap D$ има k елемената (важи $1 \leqslant k \leqslant 2002$, јер скупови C и D имају 2002 елемената). Тада $A \cap C$ има $2003 - k$ елемената, те збир бројева у A при дељењу са 2003 даје остатак $(2003 - k) \cdot 0 + k \cdot 1 = k$, па није дељив са 2003, јер је $1 \leqslant k \leqslant 2002$.

137. Означимо са B_1 средиште странице AC, са C_1 средиште странице AB, са O центар описаног круга, са α, β, γ углове код темена A, B, C и са a, b, c дужине страница BC, CA, AB. Из правоуглог троугла $\triangle BC_1E$ добијамо да је

$$BE = \frac{BC_1}{\cos(\sphericalangle C_1BE)} = \frac{c/2}{\sin(\sphericalangle C_1EB)} = \frac{c}{2\sin\beta}$$

($\sphericalangle C_1EB = \sphericalangle ABC = \beta$: углови са нормалним крацима). Аналогно из $\triangle CB_1F$ добијамо $CF = \dfrac{b}{2\sin\gamma}$ (само овде је $\sphericalangle B_1FC = \pi - \sphericalangle ACB$, али је опет $\sin(\sphericalangle B_1FC) = \sin\gamma$).

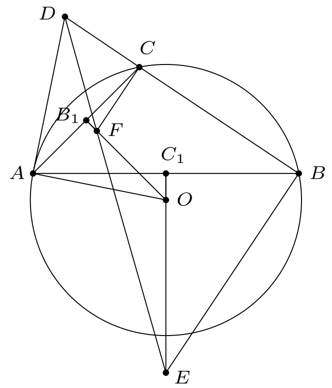
У троуглу $\triangle ADC$ су углови $\sphericalangle DAC = \beta$ и $\sphericalangle ADC = \gamma - \beta$. Синусна теорема даје:

$$\frac{DC}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin(\gamma-\beta)} \quad \Rightarrow \quad DC = \frac{b\cdot\sin\beta}{\sin(\gamma-\beta)}.$$

У $\triangle ADB$ су углови $\sphericalangle DAB = \alpha + \beta = \pi - \gamma$ и $\sphericalangle ADB = \gamma - \beta$. Синусна теорема даје:

$$\frac{DB}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{AB}{\sin(\gamma-\beta)} \quad \Rightarrow DB = \frac{c\cdot\sin(\pi-\gamma)}{\sin(\gamma-\beta)} = \frac{c\cdot\sin\gamma}{\sin(\gamma-\beta)}.$$

Како важи $DB : DC = BE : CF$ добијамо да су правоугли троуглови $\triangle BDE$ и $\triangle CDF$ слични, $\triangle BDE \sim \triangle CDF$. Из те сличности добијамо $\sphericalangle BDE = \sphericalangle CDF$, што повлачи да су тачке D, E и F колинеарне.



За неки другачији положај тачака него на слици (нпр. кад је $AB < AC$, тј. $\gamma < \beta$ или кад је угао γ оштар), доказ би ишао потпуно аналогно.

138. Након сређивања, услов (1) постаје: $f(x+y) + (x+y) = (f(x)+x)(f(y)+y)$, тј. ако означимо са $g(x) = f(x) + x$, добијамо:
$(1')$ $\quad g(x+y) = g(x)g(y), \quad$ за свако $x, y \in \mathbb{Q}$,
$(2')$ $\quad g(x) = 2g(x+1), \quad$ за свако $x \in \mathbb{Q}$,
$(3')$ $\quad g(1) > 0$.
За $x = y = 0$ из $(1')$ добијамо $g(0) = (g(0))^2$, па је $g(0) = 0$ или $g(0) = 1$. За $x = 0$ из $(2')$ и $(3')$ добијамо $g(0) = 2g(1) > 0$, па је $g(0) = 1$. Из $(2')$ је $g(1) = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^1$, па можемо показати, користећи $(1')$ и принцип математичке индукције, да је

$$g(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Ако у једнакост $(1')$ уместо y ставимо $y = -x$ добијамо $g(0) = 1 = g(x)g(-x)$, па је

$$g(-x) = \frac{1}{g(x)}. \qquad (*)$$

То нам заједно са $g(0) = 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$ и $g(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ даје

$$g(z) = \left(\frac{1}{2}\right)^z \quad (\forall z \in \mathbb{Z}).$$

Ако у једнакост $(1')$ уместо x и y ставимо $\frac{x}{2}$ добијамо да је

$$g(x) = g(\frac{x}{2})g(\frac{x}{2}) = (g(\frac{x}{2}))^2 \geqslant 0$$

за свако $x \in \mathbb{Q}$. Због тога када вадимо m-ти корен он је једнозначно одређен и када је m паран број (узимамо позитивну вредност!). Индукцијом по m можемо показати да је $g(m \cdot x) = g(x)^m$ за свако $m \in \mathbb{N}$. Коришћењем једнакости $(*)$ добијамо и

$$g(m \cdot x) = g(x)^m \tag{$**$}$$

за свако $m \in \mathbb{Z}$. Ако овде ставимо $x = \frac{1}{m}$ добијамо да је

$$g(m \cdot \frac{1}{m}) = g(1) = \frac{1}{2} = \left(g(\frac{1}{m})\right)^m$$

и одатле је

$$g(\frac{1}{m}) = \sqrt[m]{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/m}$$

за сваки $m \in \mathbb{N}$. Ако у једнакост $(**)$ ставимо $x = \frac{1}{k}$ добијамо $g(\frac{m}{k}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{m/k}$, односно

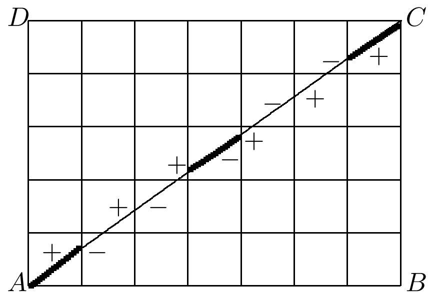
$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad (\forall x \in \mathbb{Q}).$$

Враћањем назад добијамо да је

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - x = 2^{-x} - x, \quad (x \in \mathbb{Q}).$$

Провером лако видимо да ова функција задовољава сва три услова задатка.

139. Без умањења општости можемо претпоставити да је $m \geqslant n$ (због симетрије). Рећи ћемо да је сегмент A_pA_{p+1} првог типа ако су A_p и A_{p+1} тачке пресека дијагонале AC са узастопним вертикалним линијама мреже (такви сегменти су на слици представљени подебљаним линијама). Када је једна од тачака A_p и A_{p+1} пресек дијагонале AC са вертикалном линијом мреже, а друга са хоризонталном линијом, кажемо да је сегмент A_pA_{p+1} другог типа.



Имамо $m-1$ пресечних тачака дијагонале AC са вертикалним линијама и $n-1$ пресечних тачака дијагонале AC са хоризонталним линијама, различитих од A и C.

Све те тачке су међусобно различите: ако би се поклапале неке, нпр. a-та тачка пресека са вертикалним линијама и b-та са хоризонталним онда би из Талесове теореме добили $a : b = m : n$, што даје $an = bm$, што је немогуће јер је НЗД$(m, n) = 1$, а за природне бројеве a и b важи $0 < a < m$ и $0 < b < n$. Стога оне деле AC на $m+n-1$ сегмената (овај број је непаран). Први члан у суми има знак $+$. Из непарности броја $m+n-1$ следи да у датој суми позитивних чланова има један више него негативних. Приметимо да ако је A_p пресечна тачака дијагонале AC са хоризонталном линијом тада су њени околни сегменти $A_{p-1}A_p$ и A_pA_{p+1} сегменти другог типа и имају супротан знак. Стога има једнак број "позитивних" и "негативних" сегмената другог типа. Зато има "позитивних" сегмената првог типа за један више од "негативних" сегмента првог типа. Како сви сегменти првог типа имају исту дужину (из Талесове теореме се добије $\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}$), добијамо да је допринос сегмената првог типа траженој суми једнак дужини једног таквог сегмента, тј. $\dfrac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}$.

За фиксиран $k = 1, 2, \dots, n-1$ имамо да број km при дељењу са n даје количник t_k и остатак r_n, односно, $km = t_k n + r_k$, где је $0 < r_k < n$. Пресечна тачка дијагонале AC са k-том хоризонталном линијом (AB је нулта!) је тачка A_s, где је $s = k + t_k + 1$ и она има координате (у координатном систему у ком је A координатни почетак): $(t_k + \frac{r_k}{n}, k)$. Одавде добијамо знак сегмената око тачке A_s:

$k+t_k$	$A_{s-1}A_s$	A_sA_{s+1}
парно	$-$	$+$
непарно	$+$	$-$

.

Следеће, покажимо да r_k има исту парност као и $k+t_k$. Ако је k паран и $km = t_k n + r_k$ је паран, па су бројеви r_k и t_k исте парности, па су и r_k и $k+t_k$ исте парности. Ако је k непаран и $km = t_k n + r_k$ је непаран, па су бројеви r_k и t_k различите парности, па су r_k и $k+t_k$ исте парности.

Са друге стране, како $r_p = r_q$ даје $pm \equiv qm \pmod n$, а ово повлачи $p \equiv q \pmod n$ (јер су m и n узајамно прости бројеви), односно $p = q$

(јер важи $0 < p, q < n$), добијамо да су бројеви r_k сви могући остаци (сем 0) по модулу n.

Када је r_k паран број имамо да је

$$\begin{aligned}-A_{s-1}A_s + A_sA_{s+1} &= -\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\cdot\frac{r_k}{n} + \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\cdot\frac{n-r_k}{n}\\ &= \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\cdot\frac{n-2r_k}{n}\ .\end{aligned}$$

Како r_k узима по једном сваку од вредности $2, 4, \ldots, n-1$ добијамо да ови чланови доприносе суми са

$$\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\cdot\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{n-2(2i)}{n} = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\cdot\left(\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}1 - \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}i\right)$$

$$= \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\cdot\left(\frac{n-1}{2} - \frac{4}{n}\cdot\frac{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\cdot\frac{1-n}{2n}.$$

Када је r_k непаран број имамо да је

$$A_{s-1}A_s - A_sA_{s+1} = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\cdot\frac{r_k}{n} - \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\cdot\frac{n-r_k}{n} = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\cdot\frac{2r_k-n}{n}\ .$$

Како r_k узима по једном сваку од вредности $1, 3, \ldots, n-2$ добијамо да ови чланови доприносе суми са

$$\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{2(2i-1)-n}{n} = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\left(\frac{4}{n}\cdot\frac{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}}{2} - \frac{2}{n}\cdot\frac{n-1}{2} - \frac{n-1}{2}\right)$$

Што кад средимо даје $\dfrac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\cdot\dfrac{1-n}{2n}$.

Стога је допринос свих сегмената другог типа траженој суми једнак $\dfrac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\cdot\dfrac{1-n}{n}$, што са $\dfrac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}$ од првог типа даје

$$\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j+1}|A_jA_{j+1}| = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{mn}\ .$$

44. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

140. Доказаћемо тврђење које је општије од тврђења датог у задатку:

Нека је A k-елементни подскуп скупа $S = \{1, 2, \dots, m\}$ и нека је n природан број за који важи $(n-1)(k^2-k+2) < 2m$. Постоје бројеви $t_1, t_2, \dots, t_n \in S$ такви да су скупови $t_j + A$, $j = 1, 2, \dots, n$, по паровима дисјунктни.

Дефинишимо низ скупова (S_i) и низ бројева (t_i) са: $S_0 = S$; ако је $S_{i-1} \neq \emptyset$ онда је $t_i = \min S_{i-1}$ и $S_i = S_{i-1} \setminus \{t_i + x - y \mid x, y \in A\}$. Ако је $t \in A_{i-1}A_i$, онда је $t = t_i$, или постоје $x, y \in A$, $x > y$, такви да је $t = t_i + x - y$. Зато је $|S_i \setminus S_{i-1}| \geqslant 1 + k(k-1)/2$, тј. $|S_i| \geqslant |S_{i-1}| - (k^2-k+2)/2$. Следи да је $|S_i| \geqslant |S_0| - i(k^2-k+2)/2 \geqslant m - (n-1)(k^2-k+2)/2 > 0$ за $i = 1, 2, .., n-1$, па низ (t_i) има бар n чланова. Скупови $t_i + A$ су по паровима дисјунктни. Заиста, ако би скупови $t_i + A$ и $t_j + A$, $i < j$, имали непразан пресек, постојали би бројеви $x, y \in A$, такви да је $t_i + x = t_j + y$, па бисмо имали да $t_j = t_i + x - y \notin S_i \supseteq S_{j-1}$, што је противуречно са $t_j \in S_{j-1}$.

141. *Решење 1:* Ако је $b = 1$ онда је $a^2/(2ab^2 - b^3 + 1) = a/2$. Тако смо нашли један низ решења датог проблема: $(2k, 1)$, $k \in \mathbb{N}$. Надаље претпостављамо да је $b > 1$.

Ако је $2a < b$, онда је $2ab^2 - b^3 + 1 = (2a - b)b^2 + 1 < 0$, па је вредност разматраног израза негативна. Ако је $2a = b$, онда је $2ab^2 - b^3 + 1 = (2a-b)b^2 + 1 = 1$, па је вредност разматраног израза једнака a^2. Тако смо нашли још један низ решења датог проблема: $(k, 2k)$, $k \in \mathbb{N}$. Надаље претпостављамо да је $2a > b$.

Из $a^2 \geqslant 2ab^2 - b^3 + 1 > (2a - b)b^2$ и $2a - b \geqslant 1$ добијамо да је $a > b$. Сада из $a^2 > (2a - b)b^2$ и $2a - b > a$ добијамо да је $a > b^2$.

Како је $(b^3 - 1)^2 = 4a^2b^4 - (2ab^2 - b^3 + 1)(2ab^2 + b^3 - 1)$, то $2ab^2 - b^3 + 1 \mid (b^3 - 1)^2$. Нека је $(b^3 - 1)^2 > 2ab^2 - b^3 + 1$. Како је $(b^3 - 1)^2, 2ab^2 - b^3 + 1 \equiv 1 \pmod{b^2}$, то је $(b^3 - 1)^2/(2ab^2 - b^3 + 1) \equiv 1 \pmod{b^2}$, па је $(b^3 - 1)^2 \geqslant (2ab^2 - b^3 + 1)(b^2 + 1)$. Имајући у виду да је $a > b^2$, добијамо да је $(b^3-1)^2 \geqslant (2b^4 - b^3 + 1)(b^2 + 1)$. Последња неједнакост није тачна, зато што је еквивалентна са $(b-1)b^5 + 2b^4 + b^3 + b^2 \leqslant 0$. Зато је $(b^3-1)^2 = 2ab^2 - b^3 + 1$. Одавде добијамо да је $a = (b^4 - b)/2$. Уврштавањем добијамо да је $a^2/(2ab^2 - b^3 + 1) = b^2/4$, а то је природан број ако и само ако је b паран природан број. Нашли смо и трећи низ решења датог проблема: $(8k^4 - k, 2k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Тражени парови су: $(2k, 1)$, $(k, 2k)$, $(8k^4 - k, 2k)$; $k \in \mathbb{N}$.

Решење 2: Ако је $b = 1$ онда је $a^2/(2ab^2 - b^3 + 1) = a/2$. Тако смо нашли један низ решења датог проблема: $(2k, 1)$, $k \in \mathbb{N}$. Надаље претпостављамо да је $b > 1$.

Ако је $2a < b$, онда је $2ab^2 - b^3 + 1 = (2a - b)b^2 + 1 < 0$, па је вредност разматраног израза негативна. Ако је $2a = b$, онда је $2ab^2 - b^3 + 1 = (2a-b)b^2 + 1 = 1$, па је вредност разматраног израза једнака a^2. Тако смо нашли још један низ решења датог проблема: $(k, 2k)$, $k \in \mathbb{N}$. Надаље претпостављамо да је $2a > b$. У том случају је $a > b$, зато што је

$a^2 \geqslant 2ab^2 - b^3 + 1 > (2a-b)b^2$ и $2a - b \geqslant 1$.

Разматрајмо квадратну једначину

$$\frac{x^2}{2xb^2 - b^3 + 1} = \frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}.$$

Једно њено решење је a. Помоћу Вијетових правила добијамо да је друго решење

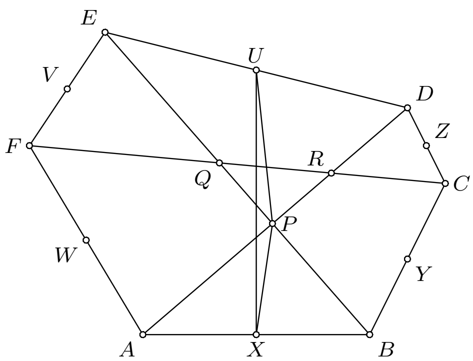
$$k = \frac{2a^2b^2}{2ab^2 - b^3 + 1} - a = \frac{a(b^3 - 1)}{2ab^2 - b^3 + 1}.$$

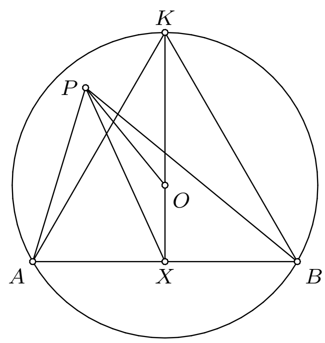
Очигледно је да је k природан број. Зато је пар (k, b) решење разматраног проблема. Неједнакост $k \leqslant b$ важи јер је еквивалентна са $(a-b)b^3 + a + b \geqslant 0$. Зато је $b = 2k$ и $2a(b^3-1)/(2ab^2 - b^3 + 1) = 2k(b^3 - 1)/(2kb^2 - b^3 + 1) = b^2$. Одавде следи да је $a = 8k^4 - k$. Нашли смо и трећи низ решења датог проблема: $(8k^4 - k, 2k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Тражени парови су: $(2k, 1)$, $(k, 2k)$, $(8k^4 - k, 2k)$; $k \in \mathbb{N}$.

142. Нека су X, Y, Z, U, V и W средишта страница AB, BC, CD, DE, EF и FA шестоугла $ABCDEF$ редом и нека је $P = AD \times BE$, $Q = BE \times CF$ и $R = CF \times AD$.

Нека је $\sphericalangle APB \geqslant 60^\circ$. Докажимо да је $XP \leqslant AB\sqrt{3}/2$, и да при том једнакост важи ако и само ако је троугао ABP једнакостраничан. Нека је K тачка која лежи са исте стране праве AB са које се налази и тачка P, таква да је троугао ABK једнакостраничан, и нека је O центар круга описаног око тог троугла. Како је $\sphericalangle APB \leqslant \sphericalangle AKB$, то је $OP \leqslant OK$. Зато је $XP \leqslant XO + OP \leqslant XO + OK = XK = AB\sqrt{3}/2$. Јасно је да једнакост важи ако и само ако је $P = K$, тј. ако и само ако је троугао ABP једнакостраничан.



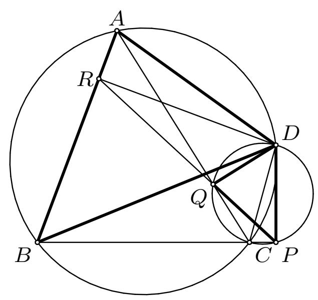


Збир углова $\sphericalangle APB$, $\sphericalangle BQC$ и $\sphericalangle CRD$ једнак је 180°. Ако нису сва три једнака 60°, један од њих је већи од 60°. Нека је то нпр. $\sphericalangle APB$. Тада је $XU \leqslant XP + UP < AB\sqrt{3}/2 + DE\sqrt{3}/2 = (AB + DE)\sqrt{3}/2$, а то је противно претпоставци задатка. Следи да је $\sphericalangle APB = \sphericalangle BQC = \sphericalangle CRD = 60^\circ$. Троуглови ABP, BCQ, CDR, DEP, EFQ и FAR су једнакостранични.

Заиста, ако нпр. троугао ABP није једнакостраничан, опет имамо да је $XU \leqslant XP+UP < AB\sqrt{3}/2+DE\sqrt{3}/2 = (AB+DE)\sqrt{3}/2$, што је противно претпоставци задатка.

Из чињенице да су троуглови ABP, BCQ, CDR, DEP, EFQ и FAR једнакостранични следи да су углови шестоугла $ABCDEF$ једнаки по $120°$.

143. _Решење 1_: Тачке P и Q леже на кругу коме је CD пречник. Имамо да је $\sphericalangle QPD = \sphericalangle QCD = \sphericalangle ACD = \sphericalangle ABD$ и $\sphericalangle PQD = \sphericalangle PCD = \sphericalangle BAD$, па је зато $\Delta PQD \sim \Delta BAD$. Одавде следи да је $PQ : QD = BA : AD$, тј. да је $PQ = AB \cdot DQ/AD$. На сличан начин може да се покаже да је $QR = CB \cdot DQ/CD$. Следи да је $PQ = QR$ ако и само ако је $AB \cdot DQ/AD = CB \cdot DQ/CD$. Последња једнакост је еквивалентна са $AB : CB = AD : CD$. Односи $AB : CB$ и $AD : CD$ су једнаки односима на које симетрале углова $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle ADC$ разлажу дуж AC. Они су једнаки ако и само ако симетрале углова $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle ADC$ секу дуж AC у истој тачки.



Решење 2: Нека је r полупречник круга описаног око четвороугла $ABCD$. Тачке P и Q леже на кругу коме је CD пречник. Зато је $PQ = CD \sin BCA = CD \cdot AB/2r$. На сличан начин може да се покаже да је $QR = AD \cdot CB/2r$. Следи да је $PQ = QR$ ако и само ако је $CD \cdot AB = AD \cdot CB$. Последња једнакост је еквивалентна са $AB : CB = AD : CD$. Односи $AB : CB$ и $AD : CD$ су једнаки односима на које симетрале углова $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle ADC$ разлажу дуж AC. Они су једнаки ако и само ако симетрале углова $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle ADC$ секу дуж AC у истој тачки.

144. Ако се има у виду да је $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, није тешко да се закључи да је

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j| = 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i)$$

и

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2 = 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i)^2.$$

Зато је дата неједнакост еквивалентна са

$$\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\right)^2\leqslant\frac{n^2-1}{3}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)^2.$$

Како је

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)=\sum_{k=1}^{n}(2k-n-1)x_k,$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)(x_j-x_i)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k-1}(k-i)-\sum_{j=k+1}^{n}(j-k)\right)x_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k(k-1)}{2}-\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}\right)x_k=\frac{n}{2}\sum_{k=1}^{n}(2k-n-1)x_k,$$

то је

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)=\frac{2}{n}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)(x_j-x_i).$$

Још ће нам требати

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)^2=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}(j-i)^2=\sum_{j=1}^{n}\frac{(j-1)j(2j-1)}{6}=\frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Коришћењем Кошијеве неједнакост добијамо да је

$$\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\right)^2=\frac{4}{n^2}\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)(x_j-x_i)\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4}{n^2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)^2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)^2=\frac{n^2-1}{3}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)^2.$$

Једнакост важи ако и само ако су сви бројеви $(x_j-x_i)/(j-i)$, $1\leqslant i<j\leqslant n$, једнаки међу собом, тј. ако и само ако је низ (x_k) аритметичка прогресија.

145. Како $p^{p-1}+p^{p-2}+\ldots+p+1\not\equiv 1 \pmod{p^2}$, постоји прост број q, такав да $q\mid p^{p-1}+p^{p-2}+\ldots+p+1$ и $p^2\nmid q-1$. Како је $p^{p-1}+p^{p-2}+\ldots+p+1\equiv 1 \pmod{p-1}$, то су $p^{p-1}+p^{p-2}+\ldots+p+1$ и $p-1$ узајамно прости, па $q\nmid p-1$. Како је $(p-1)(p^{p-1}+p^{p-2}+\ldots+p+1)=p^p-1$, то $q\mid p^p-1$. Зато је поредак броја p по модулу q једнак p. Следи да $p\mid q-1$.

Претпоставимо да постоји природан број n такав да је $n^p\equiv p \pmod{q}$. Тада је $1\equiv n^{q-1}\equiv p^{(q-1)/p} \pmod{q}$. Како $p\nmid(q-1)/p$ и како је поредак броја p по модулу q једнак p, то $p^{(q-1)/p}\not\equiv 1 \pmod{q}$. Контрадикција!

Напомена. Прост број q задовољава постављени услов ако и само ако је прост и у $K = Q(\sqrt{p})$. Примењујући теорему Чеботарјова о густини на Галоаово затварање поља K, добијамо да скуп таквих q има густину $1/p$. Следи да постоји бесконачно много простих бројева q који задовољавају постављени услов.

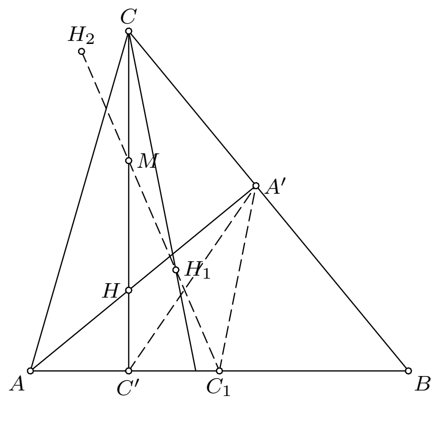
Решења пробних такмичења у 2003.

ПРВО ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ
недеља, 22. децембар 2002.

146. Имамо $N = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{a}{b+1} = \dfrac{b^2+b+ab+a+a^2b}{ab(b+1)}$, одакле одмах видимо да је $a \mid b$ неопходан услов да N буде цео. Ставимо $a = kb$, $k \in \mathbb{N}$. Сада је $N = \dfrac{(k+1)(b^2+b)+k^2b^3}{kb^2(b+1)}$, што је цео број ако и само ако $k \mid b^2+b$, $b \mid k+1$ и $b+1 \mid k^2$ (јер су b^3 и $b+1$ узајамно прости). Пошто $b \mid k+1$, b и k морају бити узајамно прости, па тако прва релација постаје $k \mid b+1$.

Ако $(k,b) = 1$, $k \mid b+1$ и $b \mid k+1$, онда $kb \mid k+b+1$, па мора да важи $kb-k-b-1 \leq 0$, тј. $(k-1)(b-1) \leq 2$. Следи да су једине могућности за k и b: $(k,b) \in \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)$. Лако је проверити да једино $(k,b) = (2,3)$ даје решење: $(a,b) = (6,3)$.

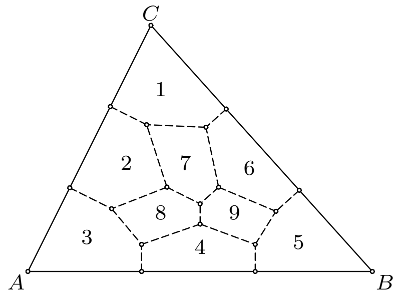
147. Означимо са M средиште дужи CH а са C' подножје нормале из C на AB. Пошто су тачке H_2, M и H_1 колинеарне, довољно је доказати да су тачке M, H_1 и C колинеарне. Доказаћемо да је $\sphericalangle HMH_1 = \sphericalangle C'MC_1$. Означимо са α, β и γ углове троугла који одговарају теменима A, B и C, редом и претпоставимо да је, као на слици, $\alpha > \beta$ (случај $\alpha = \beta$ је тривијалан). Тада је $\sphericalangle HMH_1 = 2\sphericalangle HCH_1$, а према познатој релацији из геометрије важи $\sphericalangle HCH_1 = |\alpha - \beta|/2$. Према томе, $\sphericalangle HMH_1 = \alpha - \beta$.



Нека је A' подножје висине из темена A. Тачке M, C', A' и C_1 припадају

Ојлеровом кругу троугла ABC па је $\sphericalangle C'MC_1 = \sphericalangle C'A'C_1 = \sphericalangle AA'C_1 - \sphericalangle C'A'C_1 = (90° - \beta) - (90° - \alpha) = \alpha - \beta$.

148. а) Могуће је. На слици је дато разлагање троугла на 8 конвексних петоуглова.



б) Није могуће. Претпоставимо супротно, да је троугао $\triangle ABC$ разложен на n шестоуглова. Нека је $\{A, B, C, P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ скуп свих темена шестоуглова која се појављују у овој подели. Нека је P_i теме тачно p_i шестоуглова у подели, а A, B, C редом темена a, b, c шестоуглова. Тада је $p_1 + \ldots + p_m + a + b + c = 6n$, а збир углова свих шестоуглова у подели је једнак $6n \cdot 120°$.

С друге стране, свако p_i је бар 2; ако је $p_i = 2$, онда се P_i налази на страници троугла или неког шестоуглова, па је збир углова шестоуглова у P_i једнак $180° < p_i \cdot 120°$. Ако је $p_i \geqslant 3$, онда је збир углова у P_i не већи од $360° \leqslant p_i \cdot 120°$. Најзад, збир углова у теменима троуглова је $180° < (a + b + c) \cdot 120°$. Сабирањем ових неједнакости добијамо да је збир свих углова шестоуглова у подели мањи од $(a + b + c + p_1 + \ldots + p_m) \cdot 120° = 6n \cdot 120°$, што је контрадикција.

149. Ако и леву и десну страну дате једначине поделимо са a_{n-1} добијамо $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = 6\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}} - 8\dfrac{a_{n-2}}{a_{n-3}}$. Нека је $b_n = a_{n+1}/a_n$. Низ b_n задовољава рекурентну релацију $b_1 = 2$, $b_2 = 12$ и $b_n = 6b_{n-1} - 8b_{n-2}$ за $n \geqslant 3$. Једноставно добијамо да је $b_n = 4^n - 2^n$ и

$$a_n = \prod_{i=1}^{n-1} b_i = \prod_{i=1}^{n-1} 2^i(2^i - 1) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n-1} (2^i - 1).$$

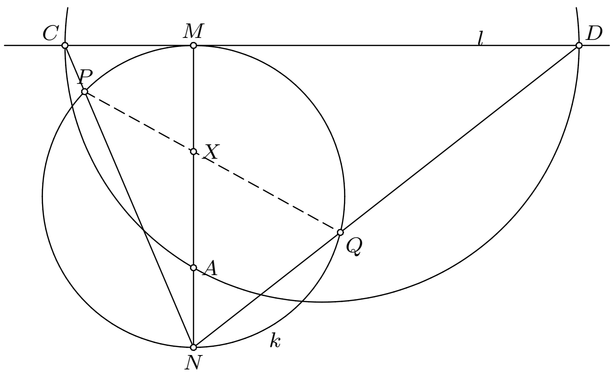
Треба да докажемо да је овај број дељив са $n!$. Ако је p^α највећи степен простог броја који дели a_n треба да докажемо да је $\alpha \geqslant \left[\dfrac{n}{p}\right] + \left[\dfrac{n}{p^2}\right] + \left[\dfrac{n}{p^3}\right] + \ldots$. За $p = 2$ ово је очигледно, а за остале просте бројеве p из Ојлерове теореме следи јача неједнакост $\alpha \geqslant \left[\dfrac{n-1}{p-1}\right] + \left[\dfrac{n-1}{p(p-1)}\right] + \left[\dfrac{n-1}{p^2(p-1)}\right] + \ldots$.

ДРУГО ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ
уторак, 29. април 2003.

150. Нека је X пресечна тачка дужи MN и PQ. Пошто је четвороугао $MPQN$ тетиван закључујемо да је $S_{\triangle MPQ} : S_{\triangle NPQ} = (MP \cdot MQ) : (NP \cdot NQ)$. Пошто је $MX : NX = S_{\triangle MPQ} : S_{\triangle NPQ}$ закључујемо да је

$$\frac{MX}{NX} = \frac{MP}{NP} \cdot \frac{MQ}{NQ}.$$

Троуглови $\triangle CMN$ и $\triangle DMN$ су правоугли са висинама MP и MQ, редом. Одатле добијамо да је $MP : NP = MC : MN$ и $MQ : NQ = MD : MN$.



Из правоуглог троугла CAD добијамо да је $CM \cdot MD = MA^2$. Према томе, $MX : NX = (MA : MN)^2$, па положај тачке X не зависи од избора променљивог круга.

151. Одмах закључујемо да је $n \geqslant 5$. Претпоставимо супротно, да тврђење није тачно за неки природан број n. Тада постоји најмањи природан број n за који тврђење није тачно.

Постоји елемент a који се налази у бар четири подскупа (у супротном, ако би се сваки елемент налазио у највише три скупа, укупан број појављивања свих елемената у свим скуповима би био мањи или једнак од $3n$. Међутим, како има $n+1$ скупова, укупан број појављивања елемената у њима је $3n+3$, што је контрадикција).

Посматрајмо елемент a. Нека су C_1, C_2, C_3 и C_4 скупови у којима се налази елемент a. Нека је $C_1 = \{a, b, c\}$. Пошто је пресек скупа C_1 са сваким од скупова C_2, C_3 и C_4 двочлан, један од елемената b и c се налази у два од скупова C_2, C_3 и C_4. Нека је то, не умањујући општост, елемент b и нека је $C_2 = \{a, b, d\}$ и $C_3 = \{a, b, e\}$. Међутим, тада мора бити и $b \in C_4$ да би пресек скупа C_4 са сваким од C_1, C_2 и C_3 био двочлан. Закључујемо следеће: сви скупови који садрже елемент

a морају садржати и елемент b (и обрнуто, сви скупови који садрже b садрже и a).

Нека су $C_1, \ldots, C_k$ сви скупови који садрже елементе a и b. Њихова унија има укупно $k+2$ елемената, и сви остали трочлани скупови не секу ни један од скупова $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Остатак трочланих подскупова у унији има $m = n-k-2$ елемената, а према претпоставци таквих скупова има $n+1-k = m+3$ што противречи минималности броја n. Контрадикција!

152. Посматрајмо полиноме $f_n(x) = \sum\limits_{i \in S_n} x^i$. Услов задатка се може записати у облику

$$f_{n+1}(x) \equiv (1+x) f_n(x) \pmod 2.$$

Тада је $f_N(x) \equiv (1+x)^N f_n(x) \pmod 2$. За $N > \max S_0$ тврђење задатка се може записати као

$$f_N(x) \equiv (1+x^N) f_n(x) \pmod 2.$$

Према томе, довољно је доказати да постоји бесконачно много природних бројева N таквих да је

$$(1+x)^N \equiv 1 + x^N \pmod 2.$$

Математичком индукцијом се једноставно доказује да претходна релација важи за $N = 2^k$ чиме је доказ завршен.

153. Можемо претпоставити, не умањујући општост, да су бројеви $x_1, x_2, \ldots, x_n$ у опадајућем поретку, тј. да је $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$. Тада је $\sqrt{\frac{1}{x_1} - 1} \geqslant \sqrt{\frac{1}{x_2} - 1} \geqslant \ldots \geqslant \sqrt{\frac{1}{x_n} - 1}$. На основу Чебишовљеве неједнакости добијамо да је

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} &= \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{\frac{1}{x_1} - 1}} + \ldots + \frac{\sqrt{x_n}}{\sqrt{\frac{1}{x_n} - 1}} \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{n} (\sqrt{x_1} + \ldots + \sqrt{x_n}) \left(\sqrt{\frac{1}{x_1} - 1} + \ldots + \sqrt{\frac{1}{x_n} - 1} \right). \end{aligned} \tag{1}$$

На основу неједнакости између аритметичхке и геометријске средине закључујемо да је (за $1 \leqslant i \leqslant n$) испуњено:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_i} - 1 &= \frac{x_1 + \ldots + x_{i-1} + x_{i+1} + \ldots + x_n}{x_i} \geqslant \\ &\geqslant \frac{(n-1) \left(x_1 \cdot \ldots \cdot x_{i-1} \cdot x_i \cdot \ldots \cdot x_n \right)^{\frac{1}{n-1}}}{x_i}. \end{aligned}$$

Замењујући ово у (1) добијамо да је

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\ldots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geqslant \frac{1}{n}(\sqrt{x_1}+\ldots+\sqrt{x_n})\cdot\sqrt{n-1}\cdot$$

$$\cdot\,(x_1\cdot\ldots\cdot x_n)^{\frac{1}{2(n-1)}}\cdot\left(\left(\frac{1}{x_1^{\frac{1}{2(n-1)}}}\right)^n+\ldots+\left(\frac{1}{x_n^{\frac{1}{2(n-1)}}}\right)^n\right). \qquad (2)$$

Тражена неједнакост се сада једноставно добија применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине на десну страну релације (2).

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\ldots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geqslant \frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\ldots+\sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}.$$

ТРЕЋЕ ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ
четвртак, 22. мај 2003.

154. Без умањења општости (тј. због тога што су обе стране симетричне по a,b,c,d) можемо предпоставити да је $1\geqslant a\geqslant b\geqslant c\geqslant d\geqslant 0$. Полазна неједнакост $\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}-\dfrac{1}{4}\leqslant\left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)^2$ је еквивалентна са

$$4(a^2+b^2+c^2+d^2-1)\leqslant a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd),$$

односно

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2\leqslant 4.$$

Како из услова $p,q,r\in[0,1]$ и $p+q+r\leqslant 1$ следи $p^2+q^2+r^2\leqslant 1$ (јер је $2pq+2pr+2qr\geqslant 0$), добијамо да је

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2\leqslant 1.$$

Сваки од преосталих чланова задовољава:

$$0\leqslant a-c\leqslant 1 \;\Rightarrow\; (a-c)^2\leqslant 1,$$

$$0\leqslant a-d\leqslant 1 \;\Rightarrow\; (a-d)^2\leqslant 1,$$

$$0\leqslant b-d\leqslant 1 \;\Rightarrow\; (b-d)^2\leqslant 1.$$

Све ово заједно даје тражену неједнакост.

Једнакост важи када у свим горњим једнакостима важи знак једнакости, тј. када је $2pq + 2pr + 2qr = 0$, $a - c = 1$, $a - d = 1$ и $b - d = 1$, што даје $a = b = 1$ и $c = d = 0$.

155. Детерминанта је дељива са q ако и само ако је детерминант над пољем Галоа $GF(q)$ једнака 0 (за такве матрице кажемо да су сингуларне над $GF(q)$ или да нису регуларне). Надаље ћемо рачунати над $GF(q)$ (у том пољу су операције сабирања и множења по модулу q).

Детерминанта је различита од 0 (тј. по модулу q) ако и само ако су њене колоне (означимо их са $c_1, c_2, \ldots, c_n$) линеарно независни вектори.

Колону c_1 можемо одабрати као произвољан ненула вектор. То можемо учинити на $q^n - 1$ начина.

Колона c_2 мора бити линеарно независна са колоном c_1. Стога је можемо изабрати као произвољан вектор различит од $\alpha_1 \cdot c_1$, $\alpha_1 \in \{0, 1, 2, \ldots, q-1\}$, што можемо учинити на $q^n - q$ начина.

Слично, ако су $c_1, c_2, \ldots, c_{j-1}$ већ одабране, колона c_j мора бити линеарно независна са колонама $c_1, c_2, \ldots, c_{j-1}$, што искључује q^{j-1} вектора за колону c_j (све линеарне комбинације $\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_{j-1} c_{j-1}$). Дакле, колону q_j можемо одабрати $q^n - q^{j-1}$ начина.

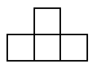
На основу принципа производа налазимо да је тражени број несингуларних матрица над $GF(q)$:

$$\prod_{j=0}^{n-1} (q^n - q^j) = (q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \cdot \ldots \cdot (q^n - q^{n-1}).$$

156. Јасно је да је довољно решити проблем за остатке по модулу 4 бројева $1, 2, \ldots, 64$ (њих има по 16 од сваке врсте: $0, 1, 2, 3$).

а) Претпоставимо да је могуће попунити шаховску таблу таквим бројевима. Размотримо део табле облика

$$\begin{array}{ccc} & p & \\ q & r & s \\ & t & \end{array}$$

Из услова да је у свакој фигури F облика  збир бројева дељив са 4 следи

$$p + q + r + s \equiv q + r + s + t \equiv p + q + r + t \equiv p + r + s + t \pmod 4,$$

а одатле добијамо

$$p \equiv q \equiv s \equiv t \pmod 4.$$

Одатле закључујемо да су на свим белим пољима шаховске табле (изузев два угаона бела поља) бројеви који дају исти остатак при дељењу са 4. Дакле, имамо 30 бројева који дају исти остатак при дељењу са 4 што није могуће.

б) Ако поставимо остатке по модулу 4 на таблу на следећи начин, лако се проверава да су задовољена оба услова:

1	0	3	2	1	0	3	2
2	3	0	1	2	3	0	1
3	2	1	0	3	2	1	0
0	1	2	3	0	1	2	3
1	0	3	2	1	0	3	2
2	3	0	1	2	3	0	1
3	2	1	0	3	2	1	0
0	1	2	3	0	1	2	3

157. Коришћењем услова 1° и 3°, тј. из $f(\frac{2003}{2002}) = 2 = f(x)\cdot f(\frac{2003}{2002\cdot x})$ добијамо да је $f(x)\neq 0$ за свако $x\neq 0$, а како $f:\mathbb{Q}\to[0,+\infty)$ добијамо да је $f(x)>0$ за свако $x\neq 0$.
Када у услов 1° заменимо $x=1$ и $y=\frac{2003}{2002}$ добијамо да је $f(1)=1$.
Сада због услова 2° и принципа математичке индукције добијамо да за сваки природан број n важи $f(n)\leqslant 1$.
Када у услов 1° заменимо $x=y=-1$ добијамо да је и $f(-1)=1$.
Одавде, због услова 2°, добијамо да је и $f(0)\leqslant 1$.
Како је $f(-n)=f(-1)\cdot f(n)=f(n)$ добијамо да важи $f(z)\leqslant 1$, $(\forall z\in\mathbb{Z})$.
Нека су $x,y\neq 0$. Тада је $f(\frac{x}{y})\cdot f(\frac{y}{x})=f(1)=1$, одакле добијамо да важи $f(\frac{x}{y})\leqslant 1$ или $f(\frac{y}{x})\leqslant 1$. Без умањења општости можемо предпоставити да је $f(\frac{x}{y})\leqslant 1$ и тада имамо:

$$f(\frac{x}{y})\leqslant 1 \underset{(2^\circ)}{\Rightarrow} f(1+\frac{x}{y})\leqslant 1 \;\Rightarrow\; f(x+y)=f(y)\cdot f(1+\frac{x}{y})\leqslant f(y).$$

Из $f(x+y)\leqslant f(y)$ добијамо да је $f(x+y)\leqslant\max\{f(x),f(y)\}$.
Нека су p и q различити прости бројеви и нека је $f(p)\neq 1$ (тј. $f(p)<1$). Тада постоје $a,b\in\mathbb{Z}$ такви да важи $1=ap+bq$. Како је $a\in\mathbb{Z}$ имамо да је $f(a)\leqslant 1$, а одатле је

$$f(ap)=f(a)f(p)\leqslant f(p)<1.$$

Сада је

$$1=f(1)=f(ap+bq)\leqslant\max\{f(ap),f(bq)\}\;\Rightarrow\; f(bq)=1,$$

а одатле следи и да је $f(q)=1$. Тиме смо показали да је $f(p)=1$ за сваки прост број p, сем евентуално једног.
Како се сваки $x\in\mathbb{Q}^+$ може представити у облику

$$x={p_1}^{\alpha_1}\cdot {p_2}^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot {p_k}^{\alpha_k},$$

при чему су $\alpha_i\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, из услова 1° добијамо

$$f(x)=f({p_1}^{\alpha_1}\cdot {p_2}^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot {p_k}^{\alpha_k})=f(p_1)^{\alpha_1}\cdot f(p_2)^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot f(p_k)^{\alpha_k}.$$

$$f\left(\frac{2003}{2002}\right)=\frac{f(2003)}{f(2)f(7)f(11)f(13)}=2,$$

добијамо да је један од бројева $f(2), f(7), f(11), f(13)$ једнак $\frac{1}{2}$, док су остали једнаки 1. Сада је

$$f\left(\frac{2004}{2003}\right)=\frac{[f(2)]^2f(3)f(167)}{f(2003)}=f(2)^2.$$

I случај: ако је $f(2)=\frac{1}{2}$, $f(p)=1$ за остале просте бројеве и $f({p_1}^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot {p_k}^{\alpha_k})=f(p_1)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot f(p_k)^{\alpha_k}$.
Овде су услови 1° и 3° очигледно задовољени, а за услов 2° имамо да ако је $f(x)\leqslant 1$ онда је $f(x+1)\leqslant \max\{f(x),f(1)\}=f(1)=1$. У овом случају је $f(\frac{2004}{2003})=\frac{1}{4}$.
II случај: ако је $f(2)=1$, $f(p)=1$ за остале просте бројеве сем једног од $7, 11, 13$ и $f({p_1}^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot {p_k}^{\alpha_k})=f(p_1)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot f(p_k)^{\alpha_k}$. На исти начин се покаже да су и у овом случају сви услови задовољени. У овом случају је $f(\frac{2004}{2003})=1$.
Дакле, $f(\frac{2004}{2003})\in\{\frac{1}{4},1\}$, у зависности од таога да ли је $f(2)=\frac{1}{2}$ или $f(2)=1$.

ЧЕТВРТО ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ

158. Означимо $k=[\sqrt{n}]$.
а) Једноставан пример генеришућег подскупа је

$$\{1,2,\ldots,k-1,k,2k,3k,\ldots,\left[\frac{n}{k}\right]k,n\}$$

и он садржи $k+[n/k]\leqslant[2\sqrt{n}]+1$ елемената.
б) Претпоставимо да је $n\in\mathbb{N}$ и $A=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$ генеришући подскуп скупа $\{1,2,\ldots,n\}$, при чему је $1\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_m\leqslant n$. За дати природан број r, посматрајмо разлике облика x_i-x_j, где је $1\leqslant i-j\leqslant r$. Преосталих $\frac{(m-r)(m-r-1)}{2}$ разлика покривају највише исто толико бројева из скупа $\{1,2,\ldots,n-1\}$, па посматраних $\frac{m(m-1)-(m-r)(m-r-1)}{2}$ разлика покривају бар $N=n-1-\dfrac{(m-r)(m-r-1)}{2}$ разлика.

Сума S свих разлика облика x_i-x_j за $1\leqslant i-j\leqslant r$ је

$$S=r(x_m-x_1)+(r-1)(x_{m-1}-x_2)+\cdots+(x_{m-r+1}-x_r)\leqslant\binom{r}{2}(n-1).\quad(1)$$

С друге стране, по горњем разматрању ова сума није мања од

$$1+2+\cdots+N\geq\frac{1}{2}N^2\geq\frac{1}{2}\left(n-1-\frac{(m-r)^2}{2}\right)^2.\quad(2)$$

Следи да је $r^2(n-1) > 2\binom{r}{2}(n-1) \geq \left(n-1-\dfrac{(m-r)^2}{2}\right)^2$, одакле кореновањем и множењем са 2 добијамо $2r\sqrt{n-1} > 2n-2-(m-r)^2$. Последња неједнакост је еквивалентна

$$\left(m-r-\sqrt{n-1}\right)^2 > 3n-3-2m\sqrt{n-1}. \tag{3}$$

Како ова неједнакост мора да важи за свако $r = 1, 2, \ldots, n-1$, можемо одабрати r тако да лева страна у (3) буде мања од 1. Тада (3) постаје $3n-4 \leqslant 2m\sqrt{n-1}$, тј.

$$m \geq \frac{3n-4}{2\sqrt{n-1}} > \frac{3}{2}\sqrt{n}-1.$$

Добијена доња граница за m је за довољно велико n већа од $\sqrt{2n}+2003$. Према томе, одговор на овај део задатка је негативан.

159. Нека права PQ сече кругове k_1, k_2 и њихову заједничку тетиву XY редом у тачкама R, S и M. Приметимо да важи $XM \cdot MY = PM \cdot MR = QM \cdot MS$. Ако је $PM = MQ$, онда је и $RM = MS$, дакле $RP = QS$, одакле је $CP \cdot PD = RP \cdot PQ = PQ \cdot QS = AQ \cdot QB$, тј. $AQ \cdot QB = CP \cdot PD$. С друге стране, ако је $PM > MQ$, онда је $RM < MS$ и одатле $RP < QS$ што повлачи $AQ \cdot QB > CP \cdot PD$. Дакле, $PM = MQ$ је еквивалентно са $AQ \cdot QB = CP \cdot PD$.

Нека је E тачка пресека правих AB и CD. Означимо са a, b, c, d редом растојања од тачке E до A, B, C, D. Можемо претпоставити, одређености ради, да је $a < b$ и $d < c$. Како је $EP^2 = EA \cdot EB = ab$ и $EQ^2 = EC \cdot ED = cd$, једнакост $AQ \cdot QB = CP \cdot PD$ се своди на $(d-\sqrt{ab})(\sqrt{ab}-c) = (a-\sqrt{cd})(\sqrt{cd}-b)$, што је еквивалентно једнакости $\dfrac{a+b}{\sqrt{ab}} = \dfrac{c+d}{\sqrt{cd}}$. Последња једнакост важи ако и само ако је $a/b = d/c$, тј. ако и само ако је $AD \parallel BC$.

160. Претпоставимо супротно тврђењу задатка, да је НЗД$(m,n) = 1$. Тада је према познатом тврђењу из теорије бројева

$$\text{НЗД}(5^m-1, 5^n-1) = 5^{\text{НЗД}(m,n)}-1 = 4. \tag{1}$$

Нека је

$$5^m - 1 = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}, \tag{2}$$

где су p_i различити прости бројеви, а α, α_i природни бројеви. Тада је

$$\varphi(5^m-1) = 2^{\alpha-1}(p_1-1)\cdots(p_k-1)p_1^{\alpha_1-1}\cdots p_k^{\alpha_k-1} \qquad (3),$$

па како је $k \geq 1$ ($k=0$ је очигледно немогуће) следи да $2^\alpha \mid \varphi(5^m-1) = 5^n-1$. Из (1) закључујемо да је $\alpha = 2$. Међутим, за m парно би 5^m-1 било дељиво са $2^3 = 8$, па зато m мора бити непарно.

Нека је $m = 2r + 1$. Тада је $5^m - 1 = 5x^2 - 1$, где је $x = 5^r$. Како $p_i \mid 5x^2 - 1$ (за $i = 1, \ldots, k$), 5 мора бити квадратни остатак по модулу p_i. Мало теорије квадратних остатака нам даје да одавде следи да је $p_i \equiv \pm 1 \pmod 5$. Ако је неко $p_i \equiv 1 \pmod 5$, онда је по једначини (3) $5^n - 1$ дељиво са 5, што је немогуће. Према томе, за свако i је $p_i \equiv -11 \pmod 5$. Ако сада једначину (2) посматрамо по модулу 5, добијамо $(-1)^{k+1} \equiv -1 \pmod 5$, дакле k је парно. С друге стране, једначина (3) по модулу 5 даје $2 \cdot (-2)^k \equiv -1 \pmod 5$, па је $k \equiv -1 \pmod 4$. Ово је контрадикција са претпоставком да је НЗД$(m, n) = 1$.

161. Претпоставимо да је $n \geqslant 4$. За све различите i, j, k, l из скупа $\{1, \ldots, n\}$ важи $A_iA_k^2 - A_jA_k^2 = A_iA_l^2 - A_jA_l^2 = \lambda_i - \lambda_j$, одакле следи да је $A_kA_l \perp A_iA_j$. Између осталог, важи $A_3A_4 \perp A_1A_2$ и $A_2A_4 \perp A_1A_3$, што значи да је A_4 ортоцентар (недегенерисаног) троугла $A_1A_2A_3$.

Ако је $n > 4$, тада је аналогно и A_5 ортоцентар $\triangle A_1A_2A_3$, дакле $A_5 \equiv A_4$, што је немогуће. Дакле, $n = 4$.

Означимо сада са α_i угао код темена A_i у троуглу $A_1A_2A_3$ ($i = 1, 2, 3$) и са R његов полупречник описаног круга. Тада је $2\lambda_1 = A_1A_2^2 + A_1A_3^2 - A_2A_3^2 = 2A_1A_2 \cdot A_1A_3 \cos\alpha_1 = 8R^2 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_3$, тј. $\lambda_1 = K \cot\alpha_1$, где је $K = 4R^2 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_2$. Слично је $\lambda_2 = K \cot\alpha_2$, $\lambda_3 = K \cot\alpha_3$ и $\lambda_4 = -K \cot\alpha_1 \cot\alpha_2 \cot\alpha_3$, па је $\dfrac{1}{\lambda_1} + \dfrac{1}{\lambda_2} + \dfrac{1}{\lambda_3} + \dfrac{1}{\lambda_4} = 0$ еквивалентно познатој једнакости $\tan\alpha_1 + \tan\alpha_2 + \tan\alpha_3 = \tan\alpha_1 \tan\alpha_2 \tan\alpha_3$.

162. Претпоставимо да је x_0 реалан број такав да је $P(x_0)^2 = Q(x_0)^2$.

Приметимо да тада по услову задатка важи $P(y_0) = Q(y_0)$, а самим тим и $P(y_0)^2 = Q(y_0)^2$, где је $y_0 = 1 + x_0 + P(x_0)^2 > x$ такође реално. На овај начин можемо добити бесконачно много коренова полинома $P^2 - Q^2$, одакле одмах следи да је $P^2(x) = Q^2(x)$ за свако x. Шта више, одавде и из датог услова добијамо $P(y) = Q(y)$ за свако y облика $y = 1 + x + P(x)^2$, дакле за бесконачно много y, па закључујемо $P \equiv Q$.

Остаје да покажемо да x_0 са почетка решења постоји, тј. да полином $R(x) = P(x)^2 - Q(x)^2$ има бар једну реалну нулу. Нека су x_p и x_q редом произвољне реалне нуле полинома P и Q. Тада је $R(x_p) \leqslant 0$ и $R(x_q) \geqslant 0$, па због непрекидности функције $R(x)$ постоји реално x_0 за које је $R(x_0) = 0$, чиме је доказ завршен.

163. Претпоставимо да таблица $[a_{ij}]$ ($a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$) има тражено својство и означимо суме по врстама и колонама редом r_i и s_i ($i = 1, \ldots, n$). Међу r_i-овима и c_i-овима, један елемент $\{-n, \ldots, n-1, n\}$ недостаје, па има бар n ненегативних и бар n непозитивних сума. Пермутовањем врста и колона можемо постићи да управо $r_1, \ldots, r_k$ и $c_1, \ldots, c_{n-k}$ буду ненегативне. Јасно је да је

$$\sum_{i=1}^{n} |r_i| + \sum_{j=1}^{n} |c_j| \geqslant \sum_{r=-n}^{n} |r| - n = n^2.$$

С друге стране,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}|r_i|+\sum_{j=1}^{n}|c_j| \quad &= \sum_{i=1}^{k} r_i - \sum_{i=k+1}^{n} r_i + \sum_{j=1}^{n-k} c_j - \sum_{j=n-k+1}^{n} c_j \quad = \\
&= \sum_{i\leqslant k} a_{ij} - \sum_{i>k} a_{ij} + \sum_{j\leqslant n-k} a_{ij} - \sum_{j>n-k} a_{ij} \quad = \\
&= 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n-k} a_{ij} - 2\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=n-k+1}^{n} a_{ij} \qquad \leqslant 4k(n-k).
\end{aligned}$$

Следи да је $n^2 \leqslant 4k(n-k)$, тј. $(n-2k)^2 \leqslant 0$, па n мора бити парно.

Докажимо сада индукцијом да за свако парно n постоји таблица са траженим својством. Пример за $n=2$ је дат на слици 1. Нека имамо тражену таблицу $n \times n$ за неко парно $n \geq 2$, са $c_1 = n$, $c_2 = -n+1$, $c_3 = n-2, \ldots, c_{n-1} = 2$, $c_n = -1$ и $r_1 = n-1$, $r_2 = -n+2, \ldots, r_{n-1} = 1$, $r_n = 0$. Ако таблицу проширимо као на слици 2, позитивне суме се повећавају за 2, негативне се смањују за 2, а недостајући елементи $-1, 0, 1, 2$ се појављују у додатим врстама и колонама, тако да добијена таблица $(n+2) \times (n+2)$ такође има тражено својство.

1	0
1	-1

Фиг.1

<table>
<tr><td rowspan="4">$n \times n$</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>$1 \,|{-1}|\, 1 \,|{-1}$</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$1 \,|{-1}|\, 1 \,|{-1}$</td><td>1</td><td>-1</td></tr>
</table>

Фиг.2

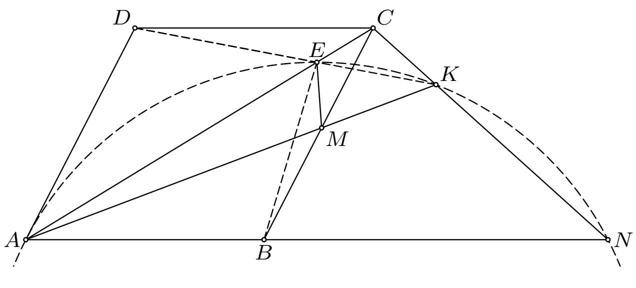
Решења званичних такмичења у 2004.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – А категорија

164. Претпоставимо да је тачка E одабрана тако да је $AE \geqslant CE$ (као на слици). Приметимо да су четвороуглови $ABME$ и $EBNC$ тетивни. Заиста, тетивност четвороугла $ABME$ следи из једнакости углова $\sphericalangle EAB = \sphericalangle ECM = \sphericalangle EMC$, а тетивност четвороугла $BNCE$ следи из $\sphericalangle ECB = \sphericalangle BAC = \sphericalangle ENB$. Докажимо, сада, да је и $ANKE$ тетиван. То важи јер је $\sphericalangle EAM = \sphericalangle EBM$ (као углови над тетивом EM круга описаног око $EABM$) и $\sphericalangle EBM = \sphericalangle ENC$ (као углови над тетивом EC круга описаног око $EBNC$).

Из тетивности четвороугла $ANKE$ закључујемо да је $\sphericalangle CEK = \sphericalangle KNB$, а из тетивности четвороугла $BNCE$ да је $\sphericalangle KNB = \sphericalangle AEB$. Пошто је AC оса симетрије ромба, имамо да је $\sphericalangle AEB = \sphericalangle AED$. То значи да је $\sphericalangle AED = \sphericalangle AEB = \sphericalangle KNB = \sphericalangle CEK$, из чега следи да су тачке K, E и D колинеарне.



165. Два од бројева a, b и c су исте парности. Нека су то, на пример, a и b. Тада је број $p = b^c + a$ паран, па је $p = 2$ и $a = b = 1$. Али тада је $q = a^b + c = c + 1 = c^a + b = r$.

166. Ако је q непаран, непарни су му и сви делиоци, па би и решење, x_0, морало бити непарно ($x_0 \mid q$). За то решење би морало бити

$$x_0^3 + 3x_0 + q = 0,$$

а то је немогуће јер сума три непарна броја никада није једнака нула.

167. Тачно $2n-m = m-2(m-n)$ птица су саме у својим кавезима, и њих можемо да одаберемо на $\binom{m}{2n-m}$ начина, а онда им одаберемо кавезе на $\frac{n!}{(m-n)!}$ начина. Преосталих $2(m-n)$ птица можемо да поставимо у ред на $(2m-2n)!$ начина, и две по две их стављамо у први кавез, други, итд. При том се сваки распоред добија на 2^{m-n} начина. Према томе, одговор је $\dbinom{m}{2n-m}\dfrac{n!}{(m-n)!}(2m-2n)!\dfrac{1}{2^{m-n}} = \dfrac{m!n!}{2^{m-n}(m-n)!(2n-m)!}$.

168. Не може. Офарбајмо таблу у црну и белу боју (као шаховску). Видимо да комарац увек слеће на поља исте боје, а горњи леви и доњи десни угао ове табле су различитих боја.

Други разред – А категорија

169. Видети решење 164. задатка (1. за први разред А категорије).

170. Из $b \mid a^2+1 \;\Rightarrow\; (b,a^2)=1 \;\Rightarrow\; (b,a)=1$, па $b \nmid a$. Имамо: $b \mid a^3-1+a^2+1 = a^3+a^2 \Rightarrow$ (због $(b,a^2)=1$) $b \mid a+1 \Rightarrow b \mid a(a+1)-(a^2+1) = a-1 \Rightarrow b \mid a+1-(a-1) = 2$. Дакле једина решења су $b=1$ и $b=2$ за које постоје бројеви a (за $b=1$ a је произвољан природан број, а за $b=2$ a је произвољан непаран број).

171. $x+y^2+z^2 = 1-y-z+y^2+z^2 = \frac{1}{2}+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \geqslant \frac{1}{2}$. Једнакост важи за $x=0$, $y=z=\frac{1}{2}$.

172. Ставимо $y=\sqrt[4]{x}$ и $z=\sqrt[4]{17-x}$. Дата једначина се своди на систем $y+z=3$ и $y^4+z^4=17$. Нека је $y^2+z^2=p$. Тада је $2yz=9-p$, значи $2y^2z^2=\frac{1}{2}(9-p)^2$, одакле добијамо квадратну једначину по p:

$$17 = y^4+z^4 = (y^2+z^2)^2-2y^2z^2 = p^2-\frac{1}{2}(9-p)^2,$$

чија су решења $p=5$ и $p=-23$. Само прво решење долази у обзир. Сада систем једначина постаје $y+z=3$, $y^2+z^2=5$, који се лако решава. Решења су $(x,y)=(2,1)$ и $(x,y)=(1,2)$.

173. Видети решење 168. задатка (5. за први разред А категорије).

Трећи разред – А категорија

174. Нека је квадрат подељен на n правоуглих троуглова и нека су њихове површине $P_1, P_2, \ldots, P_n$, а њихове хипотенузе $c_1, c_2, \ldots, c_n$. За површину правоуглог троугла важи $P_i \leqslant \dfrac{{c_i}^2}{4}$. Како за све те хипотенузе важи $c_i \leqslant \sqrt{2}$ имамо да је $\dfrac{c_i}{\sqrt{2}} \leqslant 1$. Стога имамо: $1 = P_1+P_2+\ldots+P_n \leqslant \dfrac{{c_1}^2}{4}+\dfrac{{c_2}^2}{4}+\ldots+\dfrac{{c_n}^2}{4} = \dfrac{c_1}{2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{c_1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{c_n}{2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{c_n}{\sqrt{2}} \leqslant \dfrac{c_1}{2\sqrt{2}}+\dfrac{c_2}{2\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{c_n}{2\sqrt{2}} =$

$\dfrac{S}{2\sqrt{2}}$, чиме смо показали тражену неједнакост.
Једнакост важи само када је јединични квадрат подељен на два једнакокрака правоугла троугла.

175. а) $x^p - y^p = (x-y)(x^{p-1} + x^{p-2}y + \ldots + xy^{p-2} + y^{p-1})$. Први фактор је дељив са p јер је $x \equiv y \pmod{p}$. $x^k y^{p-1-k} \equiv x^k x^{p-1-k} = x^{p-1} \pmod{p}$, па имамо и $x^{p-1} + x^{p-2}y + \ldots + xy^{p-2} + y^{p-1} \equiv x^{p-1} + x^{p-1} + \ldots + x^{p-1} = p \cdot x^{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$. Тиме смо показали $x^p \equiv y^p \pmod{p^2}$.
б) Коришћењем дела под а) добијамо да је

$$x^5 \equiv \begin{cases} 0 & \text{за} \quad n = 5k \\ \pm 1 & \text{за} \quad n = 5k \pm 1 \\ \pm 7 & \text{за} \quad n = 5k \pm 2 \end{cases} \pmod{25}.$$

Како је $2004 \equiv 4 \pmod{25}$, а три од ових бројева могу дати збир 4 или -21 само кад је $x \equiv y \equiv z \equiv -2 \pmod{5}$ и како је $3^5 = 243$, а већ $8^5 = 32768$ добијамо да једначина $x^5 + y^5 + z^5 = 2004$ нема решења у $\mathbb{N}$.

176. Остала два корена су $a - bi$ (комплексни корени реалног полинома су конјуговани) и $-2a$ (Виет: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$). Из Виетових формула имамо и $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -q$, тј. $q = 2a(a^2 + b^2)$, па је $qa = 2a^2(a^2 + b^2) > 0$ јер је $a \neq 0$ (због $q \neq 0$).

177. Како $x^2 + x + 1$ дели $x^3 - 1$, који дели $x^{2001} - 1$ и како је

$$P(x) = x^{2003} + x + 1 = x^2 + x + 1 + x^{2003} - x^2 = x^2 + x + 1 + x^2(x^{2001} - 1),$$

добијамо да је $P(x)$ дељив са $x^2 + x + 1$.
(до тога смо дођи и ако приметимо да је број $\varepsilon = e^{i2\pi/3}$ нула полинома $P(x) = x^{2003} + x + 1$, те је $P(x)$ дељив са $(x - \varepsilon)(x - \overline{\varepsilon}) = x^2 + x + 1$)
Тиме смо добили и да је број $n^{2003} + n + 1$ дељив са $n^2 + n + 1$ $(1 < n^2 + n + 1 < n^{2003} + n + 1)$ за сваки природан $n > 1$, те је $n^{2003} + n + 1$ сложен број за сваки природан $n > 1$.

178. <u>*Решење 1*</u>: Коришћењем смене $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\theta}$, формуле за двоструки угао $\operatorname{ctg} 2\theta = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\theta - 1}{\operatorname{ctg}\theta}$ и једнакости за углове $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$ полазна једначина се трансформише у

$$\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 2\beta + \operatorname{ctg}(2\pi - (2\alpha + 2\beta)) = 0.$$

Ако означимо $\operatorname{ctg} 2\alpha = x$, $\operatorname{ctg} 2\beta = y$, и применимо адициону формулу за збир котангенса, свешће се на:

$$x^2 + 2xy + y^2 - xy + 1 = 0, \text{ тј. } (x + y/2)^2 + 3y^2/4 + 1 = 0,$$

што не може бити задовољено ни за које реалне бројеве x и y, па такав троугао не постоји.

<u>*Решење 2*</u>: Ако пођемо од познатог идентитета који важи за углове

троугла: $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$, означимо $\operatorname{tg}\alpha=a$, $\operatorname{tg}\beta=b$, $\operatorname{tg}\gamma=c$, имаћемо $a+b+c=abc$, а из услова задатка је $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Тада је, са једне стране, $abc=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, тј. $(abc)^2=abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=bc+ca+ab$, а са друге стране квадрирањем идентитета $abc=a+b+c$, добићемо: $ab+bc+ca=\frac{(abc)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2}$, па заменом прве једначине у другој добијемо: $(abc)^2=-(a^2+b^2+c^2)$, што је могуће само кад су сви бројеви 0, а то је немогуће јер су бројеви a, b и c тангенси углова троугла.

Решење 3: Слично као у претходном решењу долазимо до

$$(a+b+c)^2=abc(a+b+c)=abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=bc+ca+ab.$$

Одатле је $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=0$, што кад помножимо са 2 даје:

$$(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2=0,$$

што је могуће само кад су сви бројеви 0, тј. када важи

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=0,\quad \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\gamma=0,\quad \operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=0.$$

Из тригонометријске формуле $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}$ добијамо да мора да важи

$$\sin(\alpha+\beta)=0,\quad \sin(\alpha+\gamma)=0,\quad \sin(\beta+\gamma)=0,$$

што даје $\alpha+\beta=k\pi$, $\quad\alpha+\gamma=l\pi$, $\quad\beta+\gamma=m\pi$, $k,lm\in\mathbb{Z}$, а то је немогуће јер су α,β,γ углови троугла, тј. $\alpha,\beta,\gamma\in(0,\pi)$.

Четврти разред – А категорија

179. Означимо са $f(XYZ)$ израз на десној страни који одговара троуглу $\triangle XYZ$, а $R(XYZ)$ полупречник описаног круга троугла $\triangle XYZ$. Претпоставимо $\sphericalangle ACB>120^\circ$. Нека је C' тачка на продужетку полуправе AC таква да је $\sphericalangle AC'B=120^\circ$. Из неједнакости троугла у $\triangle BCC'$, $BC<BC'+C'C$, добијамо да важи $f(ABC)<f(ABC')$. Како је $\gamma=\sphericalangle ACB>\sphericalangle AC'B=120^\circ$ (и γ и 120° су тупи углови па је $\sin\gamma<\sin 120^\circ$) из синусних теорема за троуглове $\triangle ABC$ и $\triangle ABC'$ добијамо $2R(ABC)=\dfrac{AB}{\sin\gamma}>\dfrac{AB}{\sin 120^\circ}=2R(ABC')$, тј. $R(ABC)>R(ABC')$. Стога је довољно доказати неједнакост онда када је $\sphericalangle ACB=120^\circ$. Нека је k описани круг око ABC и нека је E тачка на том кругу таква да је троугао ABE једнакостраничан. У том случају имамо

$$R=\frac{AB}{\sqrt{3}}\quad\text{и}\quad 2R\geqslant CE=AC+BC$$

(познато је да важи $CE = AC + BC$). Сабирајући ову једнакост и неједнакост добијамо жељену неједнакост:

$$3R \geqslant AC + BC + \frac{AB}{\sqrt{3}}.$$

Једнакост важи само кад је $\sphericalangle ACB = 120^\circ$ и $AC = BC$.

180. Видети решење 175. задатка (2. за трећи разред А категорије).

181. Једно од решења је дато следећом таблицом (П,А,В,М су ознаке за родове, а д,в,п,к за чинове):

Пд	Ак	Вв	Мп
Мв	Вп	Ад	Пк
Ап	Пв	Мк	Вд
Вк	Мд	Пп	Ав .

182. Приметимо да су бројеви ε, ε^2, ε^3 и ε^4, нуле полинома

$$P(x) = x^{17} + x^1 + x^{2004} + x^8 + 1,$$

где је $\varepsilon = e^{i\frac{2k\pi}{5}}$. Стога је

$$P(x) \ \text{дељив са} \ (x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)(x-\varepsilon^3)(x-\varepsilon^4) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Тиме смо добили и да је број $n^{17} + n^1 + n^{2004} + n^8 + 1$ дељив са бројем $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ $(1 < n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 < n^{17} + n^1 + n^{2004} + n^8 + 1)$ за сваки природан $n > 1$, те је он сложен за сваки природан $n > 1$.

183. Видети решење 178. задатка (5. за трећи разред А категорије).

Први разред – Б категорија

184. Из $\overline{aa} \cdot \overline{ba} \cdot \overline{aba} = 1001 \cdot \overline{aba}$ због $a \neq b (\neq 0)$, након дељења са $\overline{aba}$, следи $\overline{aa} \cdot \overline{ba} = 1001$, тј. $11a \cdot \overline{ba} = 7 \cdot 11 \cdot 13$, односно $a \cdot \overline{ba} = 7 \cdot 13$. Случај $a = 7$, $\overline{ba} = 13$ не даје решења, па мора бити $a = 1$ и $\overline{ba} = 91$, тј.

$$11 \cdot 91 \cdot 191 = 191191.$$

185. Означимо са $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCA$ и $x = \sphericalangle BAD$. Из $CD = CA$ следи $\sphericalangle CAD = \sphericalangle DAC = \alpha - x$. Како у $\triangle ACD$ важи $\alpha - x + \alpha - x + \gamma = 180^\circ$, тј. $2(\alpha - x) + 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ$, добијамо $\alpha - \beta = 2x$. Дакле, $x = \dfrac{\alpha - \beta}{2} = 22^\circ 30'$.

186. Видети решење 166. задатка (3. за први разред А категорије).

187. Нека је a основица, а b крак троугла. Из $a + 2b = 30$ следи да a мора бити паран број, а из неједнакости троугла $a < b + b = 2b$, тј. $a \leqslant 14$. У обзир долазе само следећи случајеви:

$$(a,b) \in \{(2,14),(4,13),(6,12),(8,11),(10,10),(12,9),(14,8)\},$$
па оваквих троуглова има укупно 7.

188. Како је $2^{12}+5^9=(2^4)^3+(5^3)^3=(2^4+5^3)(2^8-2^4\cdot 5^3+5^6)$, добијамо да је дати број дељив са $2^4+5^3=141$, па је сложен.

Други разред – Б категорија

189. Из сличности троуглова $\triangle ACD \sim \triangle CBD$ следи $\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{BC}{CD}$, а из својства симетрале угла следе $\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{PC}{PD}$ и $\dfrac{CB}{CD}=\dfrac{QB}{QD}$. Одавде је $\dfrac{PC}{PD}=\dfrac{BQ}{QD}$, па је $PQ \parallel BC$.

190. Како је $D=4[(a+b+c)^2-3(a^2+b^2+c^2)]=8(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)=-4[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\leqslant 0$, дата једначина не може имати реалне и различите корене.

191. Једначина се представи у облику $|2x-1|-|3x-2|-3x=1$ и разматрају се случајеви $x<\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{2}{3}$ и $x\geqslant\frac{2}{3}$. Једино решење је $x=-1$.

192. Видети решење 68. задатка (3. за други разред Б категорије, међуопштинско 2003. године).

193. Видети решење 188. задатка (5. за први разред Б категорије).

Трећи разред – Б категорија

194. Множењем израза са $\dfrac{16\cos 6^\circ}{16\cos 6^\circ}$ имамо $\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ=$ $\dfrac{16\sin 6^\circ\cos 6^\circ\sin 42^\circ\sin 66^\circ\sin 78^\circ}{16\cos 6^\circ}=\dfrac{8\sin 12^\circ\cos 48^\circ\cos 24^\circ\cos 12^\circ}{16\cos 6^\circ}=$ $\dfrac{4\sin 24^\circ\cos 48^\circ\cos 24^\circ}{16\cos 6^\circ}=\dfrac{2\sin 48^\circ\cos 48^\circ}{16\cos 6^\circ}=\dfrac{\sin 96^\circ}{16\cos 6^\circ}=\dfrac{1}{16}$.

195. $(\log_{2003}2004)^{-1}+(\log_{2005}2004)^{-1}=\dfrac{1}{\log_{2003}2004}+\dfrac{1}{\log_{2005}2004}=$ $\log_{2004}2003+\log_{2004}2005=\log_{2004}(2003\cdot 2005)=\log_{2004}(2004^2-1)<$ $\log_{2004}2004^2=2$.

196. Нека је $\{D\}=p\cap c$ и $A\in p$, $A\neq D$. Ако је C подножје нормале из A на раван β, а B подножје нормале из A на праву c, имаћемо $\varphi=\sphericalangle ABC$, $\psi=\sphericalangle ADB$ и $\gamma=\sphericalangle ADC$. Из троугла $\triangle ABD$ је $AB=AD\sin\psi$, а из троугла $\triangle ABC$ је $AC = AB\sin\varphi$, док се из троугла $\triangle ADC$ добија је $AC = AD\sin\gamma$. Из ове три једнакости следи да је $\sin\gamma = \sin\varphi\sin\psi$.

197. Ако од треће колоне одузмемо прву помножену са $\cos\delta$ и одузмемо другу помножену са $\sin\delta$ добијамо колону са свим елементима 0. Стога је и тражена детерминанта једнака 0.

198. *Решење 1*: Из прве две једначине имамо $y = 2x$, док из прве и треће имамо $z = 3x$. Сада из прве добијамо $648x^{10} = 1$, па су решења датог система

$$(x,y,z) = \left(\frac{1}{\sqrt[10]{648}}, \frac{2}{\sqrt[10]{648}}, \frac{3}{\sqrt[10]{648}}\right) \text{ и } (x,y,z) = \left(\frac{-1}{\sqrt[10]{648}}, \frac{-2}{\sqrt[10]{648}}, \frac{-3}{\sqrt[10]{648}}\right).$$

Решење 2: Логаритмујемо једначине и добијамо систем линеарних једначина.

Четврти разред – Б категорија

199. Број чланова у првих $n-1$ група је $1+2+\ldots+n-1 = \frac{(n-1)n}{2}$. Први члан n-те групе је $\frac{(n-1)n}{2}+1$ и у тој групи има n чланова, па је тражени збир (сума аритметичке прогресије) једнак $S_n = [2(\frac{(n-1)n}{2}+1)+(n-1)]\cdot\frac{n}{2} = \frac{n}{2}(n^2+1)$.

200. Из Вијетових формула добијамо: $x_1+x_2+x_3 = 0$ и $x_1x_2x_3 = -n$, па је ${x_1}^3+{x_2}^3+{x_3}^3 = (x_1+x_2+x_3)({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2)-(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)+3x_1x_2x_3 = -3n$.

201. Нека је x дужина странице правоугаоника, која не припада хипотенузи, и нека је EF страница која припада хипотенузи (распоред тачака је A, E, F, B). Тада је $AE = x\operatorname{tg}30^\circ$, $BF = x\operatorname{tg}60^\circ$, одакле је $EF = AB - AE - BF = 8 - \frac{4x}{\sqrt{3}}$, па је површина $P(x) = 8x - \frac{4x^2}{\sqrt{3}}$. Како је $P'(x) = 8 - \frac{8x}{\sqrt{3}}$, добијамо да је површина максимална када је $x = \sqrt{3}$. Друга страница правоугаоника има дужину 4.

202. Како је $(x-y)^2 \geqslant 0$ из прве једначине добијамо $z + 4 = \dfrac{1}{1+(x-y)^2} \leqslant 1$, одакле је $z \leqslant -3$. Али из друге једначине је $z \geqslant -3$ (да би корен био дефинисан), па добијамо да је $z = -3$. Из друге једначине добијамо $2x = 8$, тј. $x = 4$, а из прве $y = 4$. Значи систем има јединствено решење $(x,y,z) = (4,4,-3)$.

203. Видети решење 198. задатка (5. за трећи разред Б категорије).

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – А категорија

204. Означимо са D средиште странице BC. Пошто је симетрала угла код B истовремено и висина троугла ABD, онда је тај троугао једнакокрак, тј. $AB = BD = \frac{1}{2}BC$. Дакле, имамо да је $BC = AB + 2 = 2AB$ или $BC = AB + 1 = 2AB$. Други случај је немогућ, јер је тада $AB = 1$, $BC = 2$ и $AC = 0$ или $AC = 3$, што је у супротности са неједнакости троугла. Дакле, дужине страница су $AB = 2$, $AC = 3$ и $BC = 4$.

205. _Решење 1_: A_1 је центар описаног круга око троугла $\triangle BHC$, па је на симетрали странице CH, као и B_1 (из $\triangle CHA$), па је $A_1B_1 \perp CH$, тј. $A_1B_1 \parallel AB$. Аналогно се показује и $B_1C_1 \parallel BC$ и $C_1A_1 \parallel CA$. Докажимо да је H центар описаног круга око троугла $A_1B_1C_1$: из $\triangle AHB \cong \triangle AH_cB$ (где је H_c пресек продужетка висине из C са описаним кругом око $\triangle ABC$, полупречника R) следи да је $HA_1 = R$. Аналогно се показује и за HB_1 и HC_1, тј. добијамо $HA_1 = HB_1 = HC_1 = R$. Како су углови $\triangle A_1B_1C_1$ једнаки одговарајућим угловима $\triangle ABC$ (углови са паралелним крацима) и из чињенице да ова два троугла имају једнаке полупречнике описаних кругова следи подударност ова два троугла.

Решење 2: Нека је $A_2B_2C_2$ троугао који настаје кад кроз тачку A поставимо праву $C_2B_2 \parallel BC$, кроз B праву $A_2C_2 \parallel CA$ и кроз C праву $B_2A_2 \parallel AB$.
Из $CH \perp AB \;\Rightarrow\; CH \perp B_2A_2$, као и $BH \perp CA \;\Rightarrow\; BH \perp A_2B_2$, па је четвороугао $CHBA_2$ тетиван, тј. тачка A_2 припада кругу описаном око троугла $\triangle HBC$, односно HA_2 је пречник тог круга, па је A_1 средиште HA_2. Аналогно је и B_1 средиште HB_2, те је A_1B_1 средња линија у троуглу $\triangle HA_2B_2$, па је $A_1B_1 = \frac{1}{2}A_2B_2$. Како из $\triangle ABC \sim \triangle CAB_2 \sim \triangle A_2BC \;\Rightarrow\; AB = CB_2 = A_2C$, добијамо да је $AB = \frac{1}{2}A_2B_2$, односно $AB = A_1B_1$. Аналогно се добијају и $BC = B_1C_1$ и $CA = C_1A_1$, па је $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.

206. Одговор: 1503. Ако би посматрали низ $b_n = \frac{n^2}{2004}$, тада је $a_n = [b_n]$. Докле год је $b_{n+1} - b_n \leqslant 1$, то је $a_{n+1} - a_n$ или 0 или 1, тј. ни један број не бива прескочен. Тек за $n = 1002$, $b_{n+1} - b_n = \frac{2n+1}{2004} > 1$, па је од тада низ $\{a_n\}$ строго растући тј. сваки следећи члан је различит од претходног. Како је $a_{1002} = 501$, низ је узимао све целе вредности од 0 до 501 (дакле 502 различите вредности) плус још вредности које узимају чланови са индексима 1003 до 2003 (а оне су све међусобно различите, дакле 1001 различит члан). Дакле, низ $\{a_n\}$ садржи $502 + 1001 = 1503$ различитих чланова.

207. **а)** Не, јер би онда $8 \mid 4$ (због познатог својства да $x - y \mid P(x) - P(y)$ за сваки полином P са целобројним коефицијентима би имали да $8 = 15 - 7 \mid P(15) - P(7) = 12 - 8 = 4$)!
б) Да, нпр. $P(x) = 2x - 9$.

208. Ако означимо редом објекте, видимо да n страда од $n+1$ и од $n+2$. Стога за $k \leqslant 3$ трговац не може никако да отплови први пут, а да иза њега не остане неко ко настрада (нпр. из сваког од скупова $\{1,2,3\}$ и $\{5,6,7\}$ морамо да узмемо бар 2 елемента!). Докажимо да је тражено k управо $k = 4$. Означавајући А као почетну обалу, а Б као завршну, трговац може за $k = 4$ да примени следеће потезе:
А: утовари миша, пацова, пса и вука
Б: истовари миша и пса
А: утовари сир и мачку
Б: истовари сир и мачку, утовари миша и пса
А: истовари миша и пса, утовари медведа
Б: истовари медведа
А: утовари миша и пса
Б: истовари миша, пацова, пса и вука.
Стога је $k = 4$ минимално k које задовољава услове задатка.

Други разред – А категорија

209. Означимо са $x = \dfrac{n + \sqrt{n^2 - 4}}{2}$. Тада је $\dfrac{1}{x} = \dfrac{n - \sqrt{n^2 - 4}}{2}$ и $x + \dfrac{1}{x} = n$. Докажимо да је $x^m + \dfrac{1}{x^m} = k$ за неки природан број k. Ово тврђење доказујемо индукцијом по m. За $m = 1$, оно је очигледно. Претпоставимо да тврђење важи за све природне бројеве мање од неког m и докажимо га за m. Пођимо од једначине $x + \frac{1}{x} = n$ и степенујмо са m и леву и десну страну. Ако на леву страну применимо биномну формулу и групишемо сабирке први са последњим, други са претпоследњим, итд. добијамо

$$\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) + m\left(x^{m-2} + \frac{1}{x^{m-2}}\right) + \binom{m}{2}\left(x^{m-4} + \frac{1}{x^{m-4}}\right) + \ldots = n^m.$$

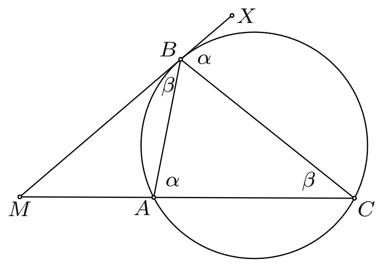
Сабирак у првој загради је онај који рачунамо, и то је позитиван број. Међутим у свим осталим заградама се налази природан број, према индуктивној претпоставци. Због тога је и $x^{m+1} + \frac{1}{x^{m+1}}$ природан број. Према томе $x^m + \frac{1}{x^m} = k$ за неки природан број k. Уводећи смену $x^m = t$ и решавајући добијену квадратну једначину добијамо да је $t = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}$. Пошто је $x > 1$, тада је и $t > 1$, па је $t = \frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2}$. Тиме је тврђење доказано.

210. Без умањења општости можемо претпоставити да је $AB < CB$. Означимо са X тачку на тангенти t, такву да је тачка B између M и X.

Због једнакости угла између тетиве и тангенте и периферијског угла над том тетивом имамо $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ABM$ и $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBX$. Одатле је $\sin\sphericalangle MBC = \sin(180^\circ - \sphericalangle CBX) = \sin\sphericalangle CBX = \sin\sphericalangle CAB$ и $\dfrac{BC}{\sin\sphericalangle BAC} \stackrel{S}{=} \dfrac{BA}{\sin\sphericalangle BCA} = \dfrac{BA}{\sin\sphericalangle MBA}$, при чему смо за једнакост S користили синусну теорему у троуглу $\triangle ABC$. Даље је:

$$\frac{MA}{MC} = \frac{P_{\triangle MBA}}{P_{\triangle MBC}} = \frac{\frac{1}{2}MB \cdot BA \cdot \sin\sphericalangle MBA}{\frac{1}{2}MB \cdot BC \cdot \sin\sphericalangle MBC} = \frac{BA^2}{BC^2} \cdot \frac{BC}{\sin\sphericalangle MBC} \cdot \frac{\sin\sphericalangle MBA}{BA}$$

$$= \frac{BA^2}{BC^2} \cdot \frac{BC}{\sin\sphericalangle BAC} \cdot \frac{\sin\sphericalangle MBA}{BA} = \frac{BA^2}{BC^2} \cdot 1 = k^2.$$



211. Бројеви $x + \sqrt{x^2+1}$ и $y + \sqrt{y^2+1}$ су позитивни. Ако су x и y оба позитивна, тада су $x + \sqrt{x^2+1}$ и $y + \sqrt{y^2+1}$ већи од 1, па њихов производ не може бити 1. Слично се доказује да је немогуће да и x и y буду негативни.

Према томе, x и y су различитог знака. Нека је, не умањујући општост, $x > 0$ а $y < 0$. Треба доказати да је $|x| = |y|$. Претпоставимо да то није тачно. Тада је, или $|x| > |y|$ или $|y| > |x|$. Ова два случаја су аналогна, и зато је довољно размотрити само први. Како је $x > -y$, важи $x + \sqrt{x^2+1} > -y + \sqrt{y^2+1}$, па је $\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \cdot \left(y + \sqrt{y^2+1}\right) > \left(-y + \sqrt{y^2+1}\right) \cdot \left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = 1$. Контрадикција! Према томе, $x+y = 0$.

212. _Решење 1:_ Нека је T тежиште, A_1 средиште BC, а D подножје висине из A (решење је без обзира да ли D пада на BC или продужетак). Пошто T лежи на кругу над BC, као пречником, то је $BC = 2TA_1$. Како је $\operatorname{ctg}\beta = \frac{BD}{AD}$, $\operatorname{ctg}\gamma = \frac{CD}{AD}$ (ако би један од ових углова био туп једно од ових би било $-\operatorname{ctg}$) онда је:

$$\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \frac{BD}{AD} + \frac{CD}{AD} = \frac{CB}{AD} \geqslant \frac{CB}{AA_1} = \frac{2AA_1}{3AA_1} = \frac{2}{3}$$

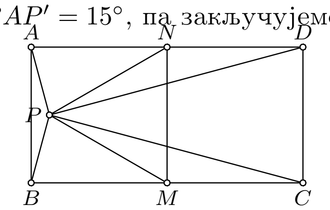
(у случају тупог угла овде уместо плуса имамо минус, али тада је управо $CB =| DB - CD |$). Једнакост важи кад је $AD = AA_1$, тј. када је троугао једнакокрак.

Решење 2: Нека су C_1,B_1, T, редом средиште AB, средиште AC, тежиште троугла. Означимо још $\gamma_1 = \sphericalangle BCC_1$, $\gamma_2 = \sphericalangle ACC_1$, $\beta_1 = \sphericalangle ABB_1$, $\beta_2 = \sphericalangle CBB_1$ и $x = \frac{t_b}{3}$, $y = \frac{t_c}{3}$. Са слике видимо: $\operatorname{ctg}\beta_1 = \frac{2x}{y}$, $\operatorname{ctg}\beta_2 = \frac{x}{y}$, $\operatorname{ctg}\gamma_1 = \frac{y}{x}$, $\operatorname{ctg}\gamma_2 = \frac{2y}{x}$. Остаје лакши рачун – $\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{ctg}(\beta_1+\beta_2) + \operatorname{ctg}(\gamma_1+\gamma_2)$, применом адиционе формуле за ctg збира добијемо да је тај израз на крају: $\frac{x^2+y^2}{3xy}$, а из неједнакости квадратне и геометријске средине добијамо $\frac{x^2+y^2}{3xy} \geqslant \frac{2}{3}$. Једнакост важи кад је $AB = AC$.

213. а) Након сваког корака је број црвених поља паран. На почетку имамо 2002×2003 белих и 0 црвених поља, тј. тај број је паран, а ако би имали исти број белих и црвених поља, тај број би био $1001 \cdot 2003 = 2\,005\,003$ непаран, што је немогуће.
б) Могуће је јер можемо да променимо боју 9 поља (квадрат 3×3) и 4 поља (ако променимо боју у квадратима 3×3 са доњим левим пољем у А1,А2,Б1,Б2, променићемо боју само у пољима А1,А4,Д1 и Д4). $1001 \cdot 2003 = 2\,005\,003 = 9 \cdot 222\,775 + 4 \cdot 7$.

Трећи разред – А категорија

214. Нека су M и N редом средишта страница BC и DA редом, и P' треће теме једнакостраничног троугла MNP', где је P' у унутрашњости $MNAB$. Тада је $P'M = MN = AB = \frac{1}{2}BC = MB = MC$, одакле следи да су троуглови $P'MB$ и $P'MC$ једнакокраки. Зато због $\sphericalangle P'MB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ имамо $\sphericalangle P'BM = \sphericalangle BP'M = 75^\circ$, одакле је $\sphericalangle ABP' = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$. Слично је $\sphericalangle BAP' = 15^\circ$, па закључујемо да је $P' \equiv P$.



Како је $\sphericalangle PMC = 150^\circ$ и $PM = MC$, добијамо $\sphericalangle PCM = 15^\circ$ и $\sphericalangle PCD = 75^\circ$. На исти начин је $\sphericalangle PDC = 75^\circ$, одакле коначно следи $\sphericalangle CPD = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$.

215. Означимо са h_a, h_b и h_c одговарајуће висине, са r полупречник уписаног круга и са P површину троугла $\triangle ABC$. Из сличности троугла $\triangle ABC$ са троугловима које одсецају одсечци m, n и p од троугла $\triangle ABC$ добијамо да је $\dfrac{m}{a} = \dfrac{h_a - r}{h_a} = 1 - \dfrac{r}{h_a}$ и слично $\dfrac{n}{b} = 1 - \dfrac{r}{h_b}$ и $\dfrac{p}{c} = 1 - \dfrac{r}{h_c}$. Дакле, $\dfrac{m}{a} + \dfrac{n}{b} + \dfrac{p}{c} = 3 - r\left(\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}\right) = 3 - r\left(\dfrac{a}{2P} + \dfrac{b}{2P} + \dfrac{c}{2P}\right) = 3 - r\left(\dfrac{a+b+c}{2P}\right) = 3 - \dfrac{r}{r} = 2$.

216. Полином $P(x) = (x+b_1)(x+b_2)\cdots(x+b_{2004}) - \alpha$ је 2004-тог степена и његове (међусобно различите реалне) нуле су: $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}$, па је

$P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_{2004})$. Дакле, за свако $i \in \{1, 2, \ldots, 2004\}$ имамо: $P(-b_i) = (-b_i - a_1)(-b_i - a_2) \cdots (-b_i - a_{2004}) = (b_i + a_1)(b_i + a_2) \cdots (b_i + a_{2004})$. С друге стране, имамо и да је $P(-b_i) = (-b_i + b_1)(-b_i + b_2) \cdots (-b_i + b_{2004}) - \alpha = -\alpha$.

217. Докажимо прво да су бројеви $\sqrt{p^2 + 14pq + q^2}$ и $\sqrt{p^2 + 7pq + q^2}$ природни. Ако је $a = p^2 + 14pq + q^2$ и $b = p^2 + 7pq + q^2$, онда је за неко $c \in \mathbb{N}$, $\sqrt{a} + \sqrt{b} = c$. Зато је $\sqrt{a} = c - \sqrt{b}$ што имплицира $a = c^2 + b - 2c\sqrt{b}$, односно $\sqrt{b} = \dfrac{c^2 + b - a}{2c}$. Дакле, $\sqrt{b}$ је рационалан број што је могуће само у случају да је b потпун квадрат. Аналогно закључујемо да је и a потпун квадрат. Зато су $\alpha = \sqrt{p^2 + 14pq + q^2} + \sqrt{p^2 + 7pq + q^2}$ и $\beta = \sqrt{p^2 + 14pq + q^2} - \sqrt{p^2 + 7pq + q^2}$ природни бројеви. Како је $\alpha\beta = 7pq$, то је $\alpha \in \{1, q, p, pq, 7, 7q, 7p, 7pq\}$. Без губљења општости можемо да претпоставимо да је $p \geqslant q$, те је $7q = 4q + 3q = \sqrt{q^2 + 14qq + q^2} + \sqrt{q^2 + 7qq + q^2} \leqslant \sqrt{p^2 + 14pq + q^2} + \sqrt{p^2 + 7pq + q^2} = \alpha$. Аналогно је и $\alpha \leqslant 7p$. Отуда је $\alpha \in \{7q, 7p, pq\}$. Ако је $\alpha = 7q$ или $\alpha = 7p$ одмах следи да је $p = q$. У случају да је $\alpha = pq$, користећи закључак да је $\alpha \leqslant 7p$ налазимо да је $q \leqslant 7$. Заменом за $q \in \{2, 3, 5\}$ налазимо да не постоји одговарајући прост број p, а за $q = 7$ добијамо да је и $p = 7$.
Сви парови простих бројева који задовољавају услов задатка су (p, p), где је p произвољан прост број.

218. Ставимо $f(1) = a$. Како је за свако x, $f(x) = f(\frac{x+2x}{3}) = \frac{f(x)+f(2x)}{3}$, добијамо $f(2x) = f(x)$: између осталог, $f(1) = f(2) = f(4) = a$. Такође, $a = f(2) = f(\frac{3+3}{3}) = \frac{f(3)+f(3)}{2} = f(3)$.
Доказаћемо индукцијом да је $f(n) = a$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Претпоставимо да је $f(1) = f(2) = \ldots = f(n-1) = a$. Тада за дато n постоји $i \in \{1, 2, 3\}$ такво да је $n + i$ дељиво са 3. Зато је $a = f(\frac{n+i}{3}) = \frac{f(n)+f(i)}{2} = \frac{f(n)+a}{2}$, тј. $f(n) = a$, с обзиром на то да је $\frac{n+i}{3} \leqslant n - 1$ за $n \geqslant 4$. Овим је индукција завршена.

Четврти разред – А категорија

219. Нека је X пресек права BG и AE. Пошто је $BX \perp AF$ и $AX \perp BF$ следи да је X ортоцентар троугла ABF те је према томе $FX \perp AB \Rightarrow FX \parallel BC \parallel AD$. Следи:

$$\frac{EF}{ED} = \frac{FX}{DA} = \frac{FX}{BC} = \frac{GF}{GC},$$

где прва једнакост следи из $\triangle EFX \sim \triangle EDA$, а последња из $\triangle GFX \sim \triangle GCB$. Из претходног добијамо да је $GE \parallel CD \perp BH$. Пошто је $BE \perp GH$ следи да је E ортоцентар троугла GHB из чега $\sphericalangle EGB = \sphericalangle EHB$ следи директно.

220. _Решење 1_: Претпоставимо да смо одабрали поља $a_{i,\sigma(i)}$, где је

$i = 1, 2, \ldots, n$ и σ пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$. Тада је
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_{i,\sigma(i)}} = \sum_{i=1}^{n} (i + \sigma(i) - 1) = 2 \sum_{i=1}^{n} i - n = n^2.$$
По неједнакости Коши-Шварц-Буњаковског је $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_{i,\sigma(i)}} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \geqslant n^2$, одакле следи тврђење.

<u>*Решење 2*</u>: Ако су међу изабраним бројевима a_{ij} и a_{kl} при чему је $i < k$ и $j < l$, онда се лако показује да је $a_{ij} + a_{kl} \geqslant a_{il} + a_{kj}$. Тако закључујемо да се најмања вредност збира a_{ij} достиже онда када одаберемо управо $a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}$ – а тада је збир једнак 1.

221. <u>*Решење 1*</u>: Приметимо да прва једначина представља једначину равни, док друга једначина система представља једначину сфере са средиштем у тачки $(0, 0, 0)$, полупречника $|b|$. Узимајући то у обзир добијамо да за $|a| = |b|\sqrt{3}$ систем има јединствено решење. Систем нема решења ако је $|a| > |b|\sqrt{3}$.

<u>*Решење 2*</u>: Из прве једначине имамо $x = a - y - z$, што кад уврстимо у другу једначину добијамо квадратну једначину (по y) $2y^2 + (2z - 2a)y + 2z^2 - 2az + a^2 - b^2 = 0$. Њена дискриминанта $D_y = 4(-3z^2 + 2az + 2b^2 - a^2)$ мора бити $D_y = 0$ да би једначина имала јединствено решење. $D_y = 0$ има јединствено решење (по z) уколико је њена дискриминанта $D_z = 128(3b^2 - a^2) = 0$, а то је испуњено за $a^2 = 3b^2$, тј. $|a| = |b|\sqrt{3}$.
Систем нема решења уколико је $D_y < 0$, што важи за свако z уколико је $D_z < 0$ (јер је коефицијент уз z^2 једнак $-12 < 0$). $D_z < 0$ када је $a^2 > 3b^2$, тј. $|a| > |b|\sqrt{3}$.

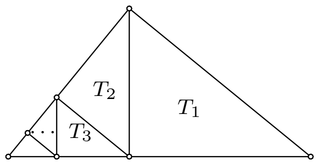
222. Како топ у сваком потезу може да одигра на тачно 4 поља (3 по хоризонтали и 1 по вертикали), то је $t_n = 4^n$. Означимо са a_n број n-потеза краљем ако се краљ налази на угаоном пољу (А1,А2,Д1,Д2), а са b_n број n-потеза краљем ако се краљ налази на неком од централних поља (Б1,Б2,Ц1,Ц2). Како краљ са угаоног поља може да оде на 1 угаоно и 2 централна поља добијамо $a_{n+1} = a_n + 2b_n$. Како краљ са централног поља може да оде на 2 угаона и 3 централна поља добијамо $b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$. Из овог система рекурентних једначина добијамо $a_{n+2} - 4a_{n+1} - a_n = 0$. Приметимо још да је $k_n = a_n$. Како је

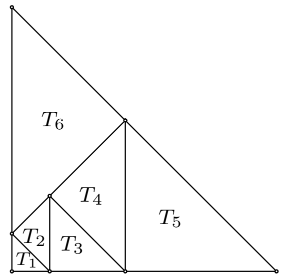
n	0	1	2	3	4	5	6	7	…
k_n	1	3	13	55	233	987	4181	17711	…
t_n	1	4	16	64	256	1024	4096	16384	…

остаје још да се математичком индукцијом покаже да је $k_n > t_n$ за $n \geqslant 6$: 1° *База математичке индукције* за $n = 6$ имамо да је $a_6 = 4181 > 4096 = 4^6 = t_6$. ✓.
2° *Индукцијска претпоставка* претпоставимо да за $n = k$ важи $a_k > 4^k = t_k$.
3° *Индукцијски корак* за $n = k + 1$ имамо $a_{k+1} = 4a_k + a_{k-1} > 4^k + 4^{k-1} >$

$4^{k+1} = t_{k+1}$.
Стога $k_n < t_n$ важи за $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

223. Имамо 2 случаја: 1° *троугао T није једнакокрак*
повлачењем висине из темена правоуглог троугла троугао је разбијен на два троугла који су слични полазном. Ако понављамо овај поступак (увек са мањом "половином" последње-подељеног троугла) долазимо до траженог разбијања троугла T.



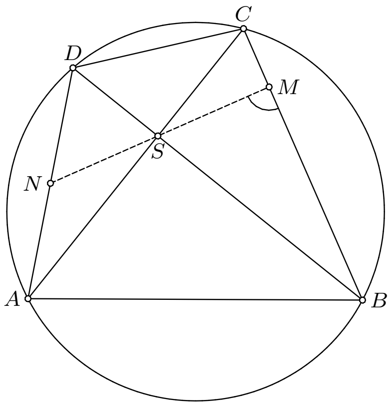


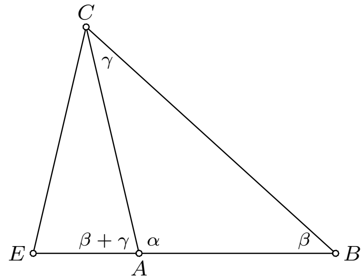
2° *троугао T је једнакокрак*
поновимо поступак из претходног случаја и поделимо троугао на 1999 делова, а затим један од два најмања троуглића поделимо на 6 делова као на слици десно (странице ових троуглића се односе као $1 : \sqrt{2} : 2 : 2\sqrt{2} : 4 : 3\sqrt{2}$), што нам даје тражену поделу.
Напомена: Постоје и другачија разбијања у случају 2°.

Први разред – Б категорија

224. Нека је $n = 2k + 1$. Тада је $n^n - n = n \cdot (n^k - 1) \cdot (n^k + 1)$. Како су $n^k - 1$ и $n^k + 1$ узастопни парни бројеви, тачно један од њих је дељив са 4, а један са 2, али не и са 4. Дакле, производ та два броја је дељив са 8. Ако је n дељиво са 3, онда је тврђење задатка показано. Ако није, онда ни n^k није дељиво са 3. Тада је или $n^k - 1$ или $n^k + 1$ дељиво са 3, јер од три узастопна природна броја један мора бити дељив са 3. Тиме смо у сваком случају добили да је број $n^n - n$ дељив са 24 за све непарне природне бројеве n.

225. Нека је подножје нормале n из S на BC тачка M, а пресек n и AD тачка M. Четвороугао $ABCD$ је тетиван па је $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC$ (над тетивом DC). Из $\sphericalangle ASD = \sphericalangle BMS = 90^\circ$ добијамо да је $\sphericalangle ADS = \sphericalangle BSM$. Како је $\sphericalangle BSM = \sphericalangle DSN$ (унакрсни углови) добијамо да је $\triangle DSN$ једнакокраки ($\sphericalangle NDS = \sphericalangle DSN$), тј. $NS = ND$. Стога је N центар описане кружнице око правоуглог $\triangle ADS$, па је $NA = ND$, што је и требало доказати.





226. а) Сабирањем левих и десних страна једнакости $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ и $\alpha-\beta=2\gamma$ добијамо $2\alpha=180^\circ+\gamma$, тј. $\alpha=90^\circ+\frac{\gamma}{2}>90^\circ$.
б) Како је $\sphericalangle EAC=\beta+\gamma$ (спољашњи угао) из једнакокраког троугла $\triangle EAC$ добијамо $\sphericalangle AEC=\sphericalangle EAC=\beta+\gamma$. Стога је $\sphericalangle ECA=180^\circ-\sphericalangle AEC-\sphericalangle EAC=180^\circ-2(\beta+\gamma)=\alpha+\beta+\gamma-2(\beta+\gamma)=\alpha-\beta-\gamma=2\gamma-\gamma=\gamma=\sphericalangle ACB$, па је CA симетрала угла $\sphericalangle ECB$.

227. Ако у релацији $f(x)+2f(1-x)=x$ уместо сваког x ставимо $1-x$ добијамо $f(1-x)+2f(x)=1-x$. Решавајући овај систем једначина налазимо $f(x)=-x+\frac{2}{3}$.

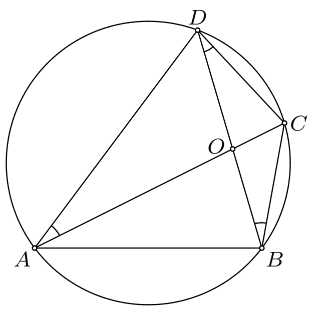
228. Могућа су два распореда (по националностима):

ИФФФФИШШШШШИ и ИШШШШШИФФФФИ.

Како у сваком од ових распореда Италијане можемо распоредити на 3! начина, Французе на 4! и Шпанце на 5! добијамо да се ови људи могу распоредити на $2\cdot 3!\cdot 4!\cdot 5!=34560$ начина.

Други разред – Б категорија

229. Из једнакости $\sphericalangle CAD=\sphericalangle CBD$ (периферијски углови круга) и из једнакокраког троугла $\triangle BCD$ добијамо $\sphericalangle CDB=\sphericalangle CBD$. Стога је $\sphericalangle CAD=\sphericalangle CDO$, што са $\sphericalangle ACD=\sphericalangle OCD$ даје сличност $\triangle ACD\sim\triangle DCO$. Дакле, важи $\dfrac{AC}{DC}=\dfrac{CD}{CO}$, одакле је $AC=18cm$.



230. Из $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\dfrac{4(5a+3)^2}{25}-\dfrac{4(5a^2+6a+1)}{5}=\dfrac{16}{25}$, добијамо да $x_1-x_2=\dfrac{4}{5}$ не зависи од параметра a.

231. $\sqrt{x}(x+1)+x(x-4)+1 = x\sqrt{x}+\sqrt{x}+x^2-4x+1 = (x^2-2x+1)+\sqrt{x}(x-2\sqrt{x}+1) = (x-1)^2+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2 \geqslant 0$. Једнакост важи само за $x=1$.

232. Како је број $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ трећи корен из -1, а број $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ трећи корен из 1, добијамо да је $z = (\frac{1+i\sqrt{3}}{2})^{2004} + (\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})^{2004} = \Big((\frac{1+i\sqrt{3}}{2})^3\Big)^{668} + \Big((\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})^3\Big)^{668} = (-1)^{668}+1^{668} = 2$.

233. _Решење 1_: $E=(x+y+1)^2+(x-2)^2-3$ има најмању вредност ако је $x+y+1=0$ и $x-2=0$, тј. $E_{\min}=-3$ је за $x=2$ и $y=-3$.

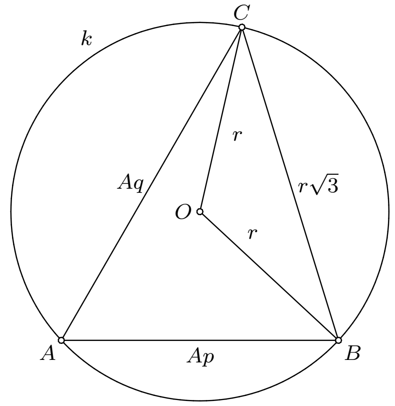
Решење 2: Квадратна функција $E(x,y)=y^2+2(x+1)y+2(x^2-x+1)$ има минимум (због $a=1>0$) за $y=\frac{-b}{2a}=-(x+1)$. Када то уврстимо у полазни израз добијамо $E(x)=x^2-4x+1$, што има минимум за $x=\frac{-b}{2a}=2$. Значи израз E има најмању вредност за $x=2$ и $y=-3$ (и тад је $E_{\min}=-3$).

Трећи разред – Б категорија

234. Полазна једначина је еквивалентна једначини $\frac{x^2}{4}+\left(\frac{x}{2}-y\right)^2+\left(\frac{x}{2}-z\right)^2+\left(\frac{x}{2}-t\right)^2=0$ а једино решење претходне једначине је $x=y=z=t=0$.

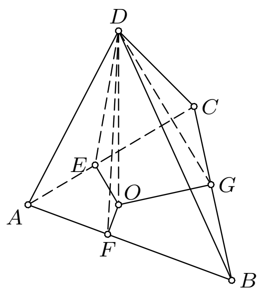
235. Да би оба корена била дефинисана потребно је да важи $\sin x \geqslant 0$ и $\cos x \geqslant 0$, тј. $2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Ако квадрирамо полазну неједначину добијамо $\sin x+\cos x+2\sqrt{\sin x\cos x}>1$. Како за $\sin x\geqslant 0$, $\cos x\geqslant 0$ важи $\sin x+\cos x\geqslant 1$, а за $\sin x>0$, $\cos x>0$ је $\sin x+\cos x>1$, добијамо да су сва решења дате неједначине $2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

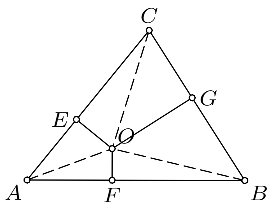
236. Нека је O центар круга k. Тада је централни угао $\sphericalangle BOC=120^\circ$, па се применом косинусне теореме у троуглу $\triangle BOC$ добија $BC^2=r^2+r^2-2\cdot r\cdot r\cdot\cos 120^\circ=3r^2$, односно $BC=r\sqrt{3}$.



237. Детерминанта система мора бити $\Delta = \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix} = -2abc \neq 0$ да би систем имао јединствено решење. Тада се добија решење:
$x = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $y = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $z = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

238. Нека су E, F и G подножја апотема и O подножје висине пирамиде $ABCD$. Површину троугла $\triangle ABC$ изразимо на два начина: $\dfrac{1}{2}a(OF+OG+OE) = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, па је $OF+OG+OE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Са друге стране, важи $OG = H\operatorname{ctg}\alpha$, $OE = H\operatorname{ctg}\beta$ и $OF = H\operatorname{ctg}\gamma$, па је $H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)}$ (овај резултат важи и када је O ван троугла $\triangle ABC$) и одатле $V = \dfrac{a^3}{8(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)}$.





Четврти разред – Б категорија

239. Из $R^2 = r^2 + (H-R)^2$ налази се $r^2 = 2HR - H^2$ и $s = \sqrt{r^2+H^2} = \sqrt{2HR}$, па је $M = \pi\sqrt{2HR-H^2}\cdot\sqrt{2HR}$. Ако посматрамо функцију

$f(H) = \frac{M^2}{2\pi^2}$, $f(H) = (2HR - H^2) \cdot HR$ биће $f'(H) = HR(4R - 3H)$ и ова функција (исто као и M) има максимум за $H = \frac{4}{3}R$.

240. Из $\dfrac{z+1}{z-1} = \dfrac{\cos\varphi + i\sin\varphi + 1}{\cos\varphi + i\sin\varphi - 1} = \dfrac{2\cos^2\frac{\varphi}{2} + 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{-2\sin^2\frac{\varphi}{2} + 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} = -i\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$ добијамо модул $\left|\dfrac{z+1}{z-1}\right| = \left|\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right|$. Ако је $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} > 0$, тј. $2k\pi < \varphi < (2k+1)\pi$, биће $\arg\dfrac{z+1}{z-1} = -\dfrac{\pi}{2}$, а ако је $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} < 0$, тј. $(2k-1)\pi < \varphi < 2k\pi$, биће $\arg\dfrac{z+1}{z-1} = \dfrac{\pi}{2}$.

241. Из $y(x^2 - x + 1) = x^2 + x + 1$ добија се $(y-1)x^2 - (y+1)x + y - 1 = 0$. За $y = 1$ биће $x = 0$, а за $y \neq 1$ да би решења квадратне једначине по x била реална треба да дискриминанта $D = -3y^2 + 10y - 3$ буде ненегативна, тј. $\dfrac{1}{3} \leqslant y \leqslant 3$.

242. Ако би се $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ завршавао неком од цифара 2,4,7 или 9, онда би се $n(n+1)$ завршавао или са 4 или са 8, што је немогуће јер се производ два узастопна природна броја може завршавати само једном од цифара 0, 2 или 6.

243. Збир спољашњих углова конвексног многоугла једнак је $360°$, па конвексан многоугао може имати највише 3 тупа спољашња угла и према томе највише 3 оштра унутрашња угла. Оштроугли троуглови су, на пример, конвексни многоуглови са три оштра унутрашња угла.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА РЕПУБЛИЧКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – А категорија

244. <u>*Решење 1:*</u> Означимо са $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BC}$ и $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$. Тада је $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{c}$, $\overrightarrow{DC} = -\vec{d} + \vec{a} + \vec{c}$, $\overrightarrow{AX} = \frac{1}{2}\vec{a}$ и $\overrightarrow{AY} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} + \vec{d})$. Из услова задатка имамо да је $\overrightarrow{AP} = p \cdot \overrightarrow{AC} = p \cdot (\vec{a} + \vec{c})$, за $p > 1$. За тачку N која припада страници AD важи $\overrightarrow{AN} = n \cdot \overrightarrow{AD} = n \cdot \vec{d}$ (где је $0 < n < 1$) и слично $\overrightarrow{BM} = m \cdot \overrightarrow{BC} = m \cdot \vec{c}$ (где је $0 < m < 1$), одакле добијамо $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + m \cdot \vec{c}$. Да би тачке N, Y и P биле колинеарне мора да важи $\varphi \cdot \overrightarrow{AN} + (1 - \varphi) \cdot \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AY}$, одакле налазимо $\varphi = \dfrac{2p-1}{2p}$ и $n = \dfrac{p}{2p-1}$. Слично је $\theta \cdot \overrightarrow{AX} + (1 - \theta) \cdot \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM}$, одакле налазимо

$\theta = \dfrac{2p-2}{2p-1}$ и $m = \dfrac{p}{2p-1}$. Како је $AB \parallel DC$ и $m = n$ из Талесове теореме добијамо и да је $AB \parallel NM \parallel DC$.

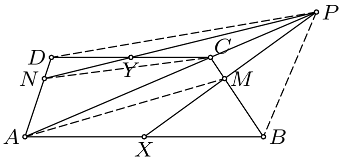
<u>*Решење 2*:</u> Приметимо да је $\frac{BM}{MC} = \frac{S_{\triangle PMB}}{S_{\triangle PMC}}$. Како је $S_{\triangle PMB} + S_{\triangle XMB} = S_{\triangle PXB} = S_{\triangle PXA} = S_{\triangle PCM} + S_{\triangle ACM} + S_{\triangle AXM}$, добијамо да је $S_{\triangle PMB} = S_{\triangle PMC} + S_{\triangle ACM}$. Према томе,

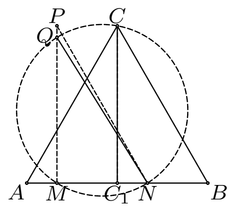
$$\frac{BM}{MC} = \frac{S_{\triangle PMC} + S_{\triangle ACM}}{S_{\triangle PMC}} = 1 + \frac{S_{\triangle ACM}}{S_{\triangle PMC}} = 1 + \frac{AC}{CP}. \tag{1}$$

Слично као и горе, користићемо да је $\frac{AN}{ND} = \frac{S_{\triangle PNA}}{S_{\triangle PDN}}$. Како је Y средиште дужи CD, важи: $S_{\triangle PNC} = S_{\triangle PYC} + S_{\triangle YCN} = S_{\triangle PDY} + S_{\triangle DYN} = S_{\triangle PDN}$. Из $S_{\triangle PNA} = S_{\triangle PNC} + S_{\triangle CNA}$ следи да је

$$\frac{AN}{ND} = \frac{S_{\triangle PNA}}{S_{\triangle PDN}} = \frac{S_{\triangle PNC} + S_{\triangle CNA}}{S_{\triangle PNC}} = 1 + \frac{S_{\triangle CNA}}{S_{\triangle PNC}} = 1 + \frac{AC}{CP}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следи $\frac{AN}{ND} = \frac{MB}{MC}$, што значи да је $NM \parallel AB \parallel CD$.





245. Претпоставимо без смањења општости да је M између тачака A и N. Нека је C_1 средиште дужи AB. Конструишимо тачку P са оне стране праве AB на којој је C такву да је $\triangle PMN \cong \triangle CC_1B$. Нека круг k описан око MCN сече праву MP у тачкама M и Q. Тада је $\sphericalangle NCQ = \sphericalangle NMQ = 90^\circ$ док је $\sphericalangle NCP = \sphericalangle BNC > 90^\circ$ (јер је $CP \parallel AB$). Следи да се тачка P налази изван круга k, па је према томе $\sphericalangle MCN = \sphericalangle MQN > \sphericalangle MPN = 30^\circ$.

246. Претпоставимо без смањења општости да је a највећи од три броја: $a \geqslant b$, $a \geqslant c$. Тада из $a \mid 2c+1 \leqslant 2a+1$ и $2c+1 \neq 2a$ добијамо да је $a = 1$ или $2c+1 = a$.
Ако је $a = 1$ онда имамо решење $(a,b,c) = (1,1,1)$.
Ако је $2c+1 = a$ онда имамо $b \mid 4c+3$ и $c \mid 2b+1$ и тада улазимо у 3 случаја:
1° ако је $b = c$ онда $b \mid 4b+3$ и $b \mid 2b+1$, па и $b \mid 4b+3-2(2b+1) = 1$, што повлачи $b = 1$, односно $(a,b,c) = (3,1,1)$.
2° Ако је $b < c$, онда $2b+1 < 3c$, па је $2b+1 = c$ и онда $b \mid 4c+3 = 8b+7$, тј. $b \mid 7$. У овом случају је $(a,b,c) = (31,7,15)$ или $(a,b,c) = (7,1,3)$.
3° Ако је $b > c$, онда $b \mid 4c+3 \leqslant 4b-1$, па имамо само две могућности: $4c+3 = b$ и $4c+3 = 3b$. У првом случају $c \mid 2b+1 = 8c+7$, и зато $(a,b,c) = (3,7,1)$ или $(a,b,c) = (15,31,7)$, супротно претпоставци да је a највећи. У другом случају $c \mid 6b+3 = 8c+9$ што се своди на $c \mid 9$, одакле добијамо $(a,b,c) = (19,13,9)$ (за $c = 1$ и $c = 3$ нема решења).

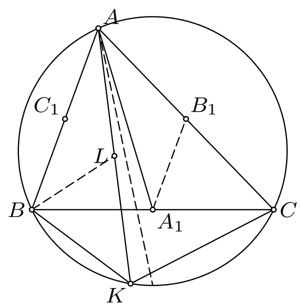
Сва решења су $(1,1,1)$, $(3,1,1)$, $(7,1,3)$, $(31,7,15)$, $(19,13,9)$ са цикличним пермутацијама (јер могу бити и b и c највећи и онда би аналогно резоновали), односно $(1,1,1)$, $(3,1,1)$, $(1,1,3)$, $(1,3,1)$, $(7,1,3)$, $(1,3,7)$, $(3,7,1)$, $(31,7,15)$, $(7,15,31)$, $(15,31,7)$, $(19,13,9)$, $(13,9,19)$, $(9,19,13)$. Дакле, тражених тројки има $1+3+3+3+3=13$.

247. Не може. Почевши од првог реда обојимо сваки четврти ред црвеном бојом. Укупан број црвених поља је дељив са 4. Свака вертикална домина покрива непаран број црвених поља (1), а свака хоризонтална паран (0 или 4). Претпоставимо да је број вертикалних домина једнак броју хоризонталних домина. Како је број домина дељив са 4, али не и са 8, следи да су бројеви вертикалних и хоризонталних домина дељиви са 2, али не и са 4. Стога је укупан број покривених црвених поља дељив са 2, али не и са 4, што је контрадикција (на почетку смо видели да је дељив са 4). Према томе, није могуће да бројеви вертикалних и хоризонталних домина буду исти.

248. Цифру десетица и цифру јединица, које испуњавају услове задатка, можемо одредити на 16 начина: 12, 16, 24, 28, 32, 36, 48, 52, 56, 64, 68, 72, 76, 84, 92, 96. 16 смо могли добити и без набрајанја: $16 = 9\cdot 2 - 2$ – цифра десетица може бити било која сем нуле и за сваку од тих цифара десетица (сем 4 и 8) можемо цифру јединица одабрати на 2 начина (тј. морамо избацити 44 и 88). Сваку следећу цифру можемо одабрати на 8 начина (све сем 0 и претходне цифре), те укупно тражених бројева има $16+16\cdot 8+16\cdot 8\cdot 8+16\cdot 8\cdot 8\cdot 8 = 16+128+1024+8192 = 9360$.

Други разред – А категорија

249. Решење 1: Нека су A_1, B_1 и C_1 средишта дужи BC, CA и AB, редом. Имамо $\sphericalangle BKA = \sphericalangle A_1CA$ и $\sphericalangle CKA = \sphericalangle A_1BA$ а такође и $\sphericalangle BAK = \sphericalangle A_1AC$ из чега следи $\triangle BAK \sim \triangle A_1AC$ и $\triangle CAK \sim \triangle A_1AB$. Сада је $\sphericalangle BLK = \sphericalangle A_1B_1C = \sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle KLC = \sphericalangle BC_1A_1 = \sphericalangle BAC$ одакле следи да је $\sphericalangle BLC = 2\sphericalangle BAC$.



Решење 2: Нека је O центар описаног круга k троугла $\triangle ABC$. Пошто је $\sphericalangle BOC = 2\sphericalangle BAC$ довољно је доказати да је четвороугао $BLOC$ тетиван. Применимо инверзију са центром у A и означимо слику сваке тачке X са X'. Пошто је $\frac{AB'}{AC'} = \frac{AC}{AB}$ а углови са теменом у A се не мењају следи да је AK' тежишна дуж троугла $\triangle AB'C'$ из A на $B'C'$. Пошто k иде у $B'C'$ следи да је K' средиште $B'C'$ те је онда због $AL' = 2AK'$ тачка L'

таква да је $AC'L'B'$ паралелограм. Нека је M дијаметрално супротна тачка тачки A на k. Пошто $AM \perp k$ следи $AM' \perp B'C'$ те је M' подножје висине из A на $B'C'$ па је тачка O', због $AO' = 2AM'$, симетрична тачки A у односу на $B'C'$. Сада имамо $\sphericalangle B'O'C' = \sphericalangle B'L'C' = \sphericalangle B'AC'$ те је $B'L'O'C'$ тетиван из чега следи да је $BLOC$ тетиван.

250. Очигледно је $b \leqslant \frac{5}{2}$.
Ако је $b \leqslant \frac{5}{3}$, тада се вредност израза $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ може повећати тако што ставимо $a = 5-b$, $c = d = e = b$. Тада је $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 = (5-b)^2+4b^2 = f(b)$. Максимална вредност функције $f(b)$ на интервалу $(0, \frac{5}{3})$ је $\max\{f(0), f(\frac{5}{3})\} = 25$ и достиже се за $a = 5$ и $b = c = d = e = 0$.
Ако је $\frac{5}{3} \leqslant b \leqslant \frac{5}{2}$ тада се вредност израза $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ може повећати тако што ставимо $a = 5-b$, $c = d = b$ и $e = 5-2b$. Тада је $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 = (5-b)^2+3b^2+(5-2b)^2 = g(b)$. Максимална вредност функције $g(b)$ на интервалу $(\frac{5}{3}, \frac{5}{2})$ је $\max\{g(\frac{5}{3}), g(\frac{5}{2})\} = 25$ и достиже се за $a = b = c = d = \frac{5}{2}$ и $e = 0$.

251. Нека је $p < a$ прост број. Ако је n дељив са p, доказ је готов. Нека n није дељив са p. Онда бројеви $2n+1, 3n+1, \dots, (p+1)n+1$ дају различите остатке $r_1, r_2, \dots, r_p$ при дељењу са p. Заиста, ако је $r_i = r_j$ за $i \neq j$, онда је $(i-j)n$ дељиво са p, па је и $i-j$ дељиво са p, што је немогуће, јер је $1 \leqslant |i-j| < p$. Пошто имамо p различитих остатака, један од њих је једнак нули.

252. Како је $x_2 = x_1 - 4$, то је $p+q = x_1x_2 - (x_1+x_2) = x_1(x_1-4) - x_1 - (x_1-4) = {x_1}^2 - 6x_1 + 4 = (x_1-3)^2 - 5$. Дакле, збир $p+q$ је минималан ако је $x_1 = 3$, $x_2 = -1$ ($p = -2$, $q = -3$).

253. Постоји. Скуп:

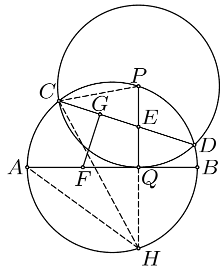
$$\{2, 2^2 3, 2^2 3^2 5, \dots, 2^2 3^2 5^2 \cdots p_{n-1}^2 p_n, \dots\},$$

где је p_n n-ти прост број задовољава услове задатка: збир ма колико бројева из овог скупа је дељив са неким p_k, где је k, индекс минималног сабирка те суме, а није дељив са ${p_k}^2$ (јер су њиме дељиви остали сабирци, а први је дељив само са првим степеном p_k), те никако не може бити степен (већи од 1) неког природног броја.

Трећи разред – А категорија

254. <u>*Решење 1*</u>: Обележимо са H другу пресечну тачку круга k са PQ. Како је AB симетрала дужи PH закључујемо да је $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle QAH$. Из једнакости $PD = PC$ имамо $\sphericalangle PHC = \sphericalangle PDC = \sphericalangle PCD$ и сличност троуглова $\Delta PCE \sim \Delta PHC$. Зато је $PH \cdot PE = PC^2 = PQ^2$. Тачка Q је средиште PH, па је $2PE = PQ$, односно $PE = EQ$.

Углови $\sphericalangle GFQ$ и $\sphericalangle CEP$ су једнаки (углови са нормалним крацима). Из горње сличности имамо једнакост $\sphericalangle PEC = \sphericalangle PCH = \sphericalangle PAH = 2\sphericalangle PAQ$. FE је средња линија троугла $\triangle PQA$, па следи $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle EFQ$. Сада имамо $\sphericalangle GFQ = 2\sphericalangle PAQ = 2\sphericalangle EFQ$, што је еквивалентно са чињеницом да је EF симетрала $\sphericalangle GFQ$. Троуглови $\triangle GFE$ и $\triangle QFE$ су подударни и $GE = EQ = EP$.
Из подударности закључујемо да је $AF = FQ = FG$, па је $\sphericalangle GAF = \sphericalangle EFQ$. Сада је AG паралелно са EF, што значи да су тачке A, G и P колинеарне.



Решење 2: Нека је l круг са центром P и полупречником PQ. Посматрајмо инверзију у односу на круг l. Круг k се пресликава у праву CD, а права AB се пресликава у круг m са пречником PQ. Пошто су круг k и права AB ортогонални, и њихове слике при инверзији ће бити ортогоналне, што значи да се центар круга m налази на CD. То значи да је E средиште дужи PQ. Тачка A припада и кругу k и правој AB па њена слика A' мора припадати и правој CD и кругу m. A' такође мора припадати и дужи PA, што значи да је A' пресек правих PA и CD и да важи $\sphericalangle PA'Q = 90^\circ$. Сада се једноставно добија да је $\sphericalangle FA'E = 90^\circ$ па се тачке A' и G поклапају и тражено тврђење сада непосредно следи.

255. Како је вредност корена увек ненегативна добијамо $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$ и $z \geqslant 1$. Нека је, даље, $x \geqslant y$ и $x \geqslant z$. Тада је $y = (x-1)^2$, $z = (y-1)^2$ и $x = (z-1)^2$, па из $x \geqslant y$ следи $(z-1)^2 \geqslant (x-1)^2$. Дакле, $z \geqslant x$, тј. $z = x$. Слично је $y = x$. Сада лако долазимо до решења $x = y = z = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

256. Претпоставимо да је n дељиво квадратом простог броја p, тј. да је $n = mp^2$, $m \in \mathbb{N}$. Тада $S = 1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n$ можемо написати као

$$S = \big(0^n + 1^n + \ldots + (p-1)^n\big) + \ldots + \big((p(mp-1))^n + \ldots + (p \cdot mp - 1)^n\big).$$

У овом представљању се појављује n сабирака који сви дају исти остатак при дељењу са p. Према томе, S је дељиво са p, па $S+1$ никако не може бити дељиво са $n = mp^2$, што је контрадикција.

257. *Решење 1*: Ако је a решење дате једначине, онда, због $x + f(x) = f(f(x))$ $(*)$, важи једнакост $a = -f(a)$. Замењујући $x = f(a)$ у $(*)$, добијамо $a = -f(a) - f(f(a)) = -f(f(f(a))) = -f(0)$. Опет из $(*)$, за $x = 0$, добијамо $f(0) = f(f(0))$, а за $x = f(0)$: $f(0) + f(f(0)) = f(f(f(0))) = f(f(0))$, па је $f(0) = 0$, тј. $a = 0$.
Покажимо још да је 0 решење дате једначине: $f(f(0)) = f(0) = 0$.

Решење 2: Из функционалне једначине непосредно следи да је f injективно пресликавање. Стављањем $x = 0$ добијамо да је $f(0) = f(f(0))$

што због инјективности даје $f(0)=0$. Опет, због инјективности, имамо да је 0 једино решење једначине $f(x)=0$ а тиме и $f(f(x))=0$.

258. _Решење 1_: Нека је D број Дејанових година. Из услова задатка имамо $y(x(D-x)-y)=D \Rightarrow D=\frac{x^2y+y^2}{xy-1}=x+\frac{y^2+x}{xy-1}$. Нека је $z=\frac{y^2+x}{xy-1}\in\mathbb{N}$. Следи $xyz=x+y^2+z$ при чему је $D=x+z$. Даље имамо $x+z=y(xz-y)\geqslant 1(xz-1)\Rightarrow(x-1)(z-1)\leqslant 2$. Претпоставимо даље без ограничења општости $x\leqslant z$. Сад разматрамо следеће случајеве.

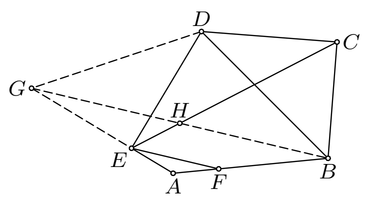
- $x=1\Rightarrow\frac{y^2+1}{y-1}=y+1+\frac{2}{y-1}\in\mathbb{N}\Rightarrow y\in\{2,3\}\Rightarrow z=5\Rightarrow D=6$.
- $x=z=2\Rightarrow y=2,\ D=4$.
- $x=2,\ z=3\Rightarrow y\in\{1,5\},\ D=5$.

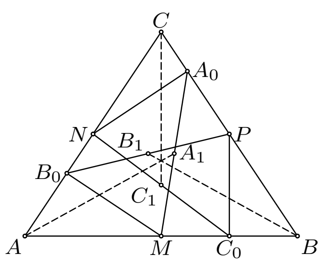
Следи да Дејан има 4, 5 или 6 година.

Решење 2: Као и у првом добијамо $xyz=x+y^2+z$. Решавајући квадратну једначину по y добијамо $y=\frac{xz\pm\sqrt{(xz)^2-4(x+z)}}{2}$. Приметимо да дискриминанта мора да буде квадрат природног броја и то исте парности као xz. Дакле $(xz)^2-4(x+z)\leqslant(xz-2)^2\Rightarrow(x-1)(z-1)\leqslant 2$. Даље разматрамо случајеве као у првом решењу.

Четврти разред – А категорија

259. Нека је G тачка таква да је $\triangle GED\cong\triangle BCD$. Тачке G,E и A су колинеарне и, због постављеног услова (пропорције), важи $EF\parallel GB$. Нека је H пресечна тачка дужи EC и GB. Троуглови $\triangle DGB$ и $\triangle DEC$ су слични (јер је $\sphericalangle GDB=\sphericalangle EDC$ и $DG:DE=DB:DC$), па је $\sphericalangle DGH=\sphericalangle DEH$ и четвороугао $EHDG$ је тетиван. Због тога је $\sphericalangle GDE=\sphericalangle GHE$. Међутим, $\sphericalangle GDE=\sphericalangle BDC$ (из $\triangle GED\cong\triangle BCD$) и $\sphericalangle GHE=\sphericalangle CEF$ (углови са паралелним крацима). На тај начин смо доказали да је $\sphericalangle CEF=\sphericalangle CDB$. Једнакост $\sphericalangle FCE=\sphericalangle ADE$ се слично доказује.





260. Нека је $\{A_2\}=AA_1\cap BC$, очито је A_2 унутрашња тачка дужи BC. Такође, нека је Q подножје нормале из M на BC, тако да је очито A_1 центар правоугаоника $MNPQ$. Даље је, $\frac{BA_2}{A_2C}=\frac{\sin\sphericalangle BAA_2/\sin\sphericalangle BA_2A\cdot BA}{\sin\sphericalangle A_2AC/\sin\sphericalangle AA_2C\cdot CA}=$

$\frac{\sin\sphericalangle MAA_1}{\sin\sphericalangle A_1AN}\cdot\frac{BA}{CA}=\frac{\sin\sphericalangle AMA_1\cdot MA_1/AA_1}{\sin\sphericalangle ANA_1\cdot A_1N/AA_1}\cdot\frac{BA}{CA}=\frac{\sin\sphericalangle AMP}{\sin\sphericalangle ANQ}\cdot\frac{BA}{CA}=\frac{\sin\sphericalangle MAP\cdot AP/MP}{\sin\sphericalangle QAN\cdot AQ/NQ}\cdot\frac{BA}{CA}=\frac{BA\cdot AP\cdot\sin\sphericalangle BAP}{CA\cdot AQ\cdot\sin\sphericalangle QAC}=\frac{P_{\triangle BAP}}{P_{\triangle QAC}}=\frac{BP}{QC}$ (уместо површина могли смо још једном применити синусну теорему). Даље рачунамо применом косинусне теореме: $BP=BC-PC=a-\dfrac{1}{2}AC\cos\sphericalangle C=a-\dfrac{b}{2}\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{3a^2-b^2+c^2}{4a}$, $\quad QC=\dfrac{3a^2+b^2-c^2}{4a}$. То значи да се услов Чевине теореме за конкурентност правих AA_1, BB_1 и CC_1: $\quad \frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A}\cdot\frac{AC_2}{C_2B}=1$, може преписати као

$(3a^2-b^2+c^2)(3b^2-c^2+a^2)(3c^2-a^2+b^2)=(3a^2+b^2-c^2)(3b^2+c^2-a^2)(3c^2+a^2-b^2)$.

Ова релација се елементарним алгебарским трансформацијама своди на $(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)=0$, а то је управо услов да је троугао $\triangle ABC$ једнакокрак.

261. Може се узети да је $n>1$, јер је за $n=1$ $d(1)=1$ и тад је низ пун квадрата: 1,1,1,1,1...

Означимо са $d_0=n$ и $d_i=d(d_{i-1})$. Овај низ строго опада док се не заустави на броју 2. Значи, $d_k=2$ за неко k.

Ако је број n прост, имамо $d_1=d_2=\ldots=2$, па у низу d_i нема квадрата.

Претпоставимо да је n сложен. Ово повлачи да је $d_1>2$, па је $k\geqslant 2$. Испитајмо претходне чланове низа. Број d_{k-1} има тачно два делиоца по дефиницији, па мора бити прост (он је непаран јер је $d_{k-1}>2$). Следи да d_{k-2} има непаран број делилаца. Међутим, знамо да су једини бројеви који имају непаран број делилаца потпуни квадрати. Закључујемо да је d_{k-2} потпун квадрат.

Према томе, услове задатка испуњавају сви прости бројеви n.

262. Из $f(f(m)+f(n))=f(f(m))+f(n)$ заменом m и n добијамо

$$f(f(m))-f(f(n))=f(m)-f(n),$$

одакле следи да на скупу слика S важи $f(s_1)-f(s_2)=s_1-s_2$, односно $f(s)=s+c$. Како $2\in S$ и $f(2)=4$, следи

$$\forall s\in S,\quad f(s)=s+2.\qquad (1)$$

Одатле добијамо да је $f(2n)=2n+2$. Како је f 1-1, слике непарних бројева морају бити непарни бројеви. Нека је $2p+1$ најмањи непаран број у S. Из (1) имамо да за сваки непаран број $2s+1$ који није мањи од $2p+1$ важи $f(2s+1)=2s+3$, па је $2p+1$ слика неког мањег непарног броја. Доказаћемо да је $2p+1=5$. Како је $2p+1$ најмањи непаран број у S, и f 1-1, онда $p-1$ бројева $3,5,...,2p-1$ морају да се сликају у неке од $p+1$ бројева $1,3,...,2p+1$. Одатле следи да је $2p+1=5$ и $f(3)=5$ ($f(3)=1$ је контрадикција са $1\in S$ и (1)). Дакле једини кандидат за функцију која задовољава услове задатка је:

$$f(1)=2,\quad f(n)=n+2,\quad n>1.$$

Лако са проверава да она заиста задовољава услове задатка.

263. <u>*Решење 1*</u>: Уочимо да постоји укупно $\binom{6}{3}=20$ троелементних подскупова од A. Даље, тих 20 скупова се могу поделити на 10 парова

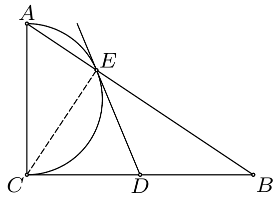
облика $\{B, A \setminus B\}$. По Дирихлеовом принципу, постоје i, j такви да је $A_i = A \setminus A_j$. Без губљења општости, нека су то A_1 и A_2.
Преосталих 9 скупова или имају двоелементни пресек са A_1, а једноелементни пресек са A_2, или обратно, двоелементни пресек са A_2, а једноелементни пресек са A_1. Дакле, по Дирихлеовом принципу, и без губљења општости, постоји 5 од преосталих 9 скупова који имају једноелементни пресек са A_2. Међу тих 5 скупова, постоје два скупа, A_k и A_l, чији је пресек са скупом A_2 исти једноелементан скуп, тј. $A_k \cap A_2 = \{a\}$ и $A_l \cap A_2 = \{a\}$. Тада је $|A_1 \cup A_k \cup A_l| = 4$, па су то тражени скупови.

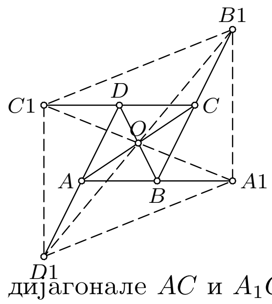
<u>*Решење 2*</u>: Постоји укупно $\binom{6}{3} = 20$ троелементних подскупова A и $\binom{6}{4} = 15$ четвороелементних подскупова A. Направимо граф чији су чворови свих тих 35 скупова, а два чвора су повезана граном акко је један од њих прави подскуп другог. Очигледно, могу да постоје гране само између троелементних и четвороелементних чворова. (Овакав граф се назива *бипартитан*). За сваки троелементни чвор, постоје тачно 3 чвора са којима је повезан, а за сваки четвороелементни чвор постоји тачно 4 чвора са којима је повезан (укупан број грана је 60). Даље, уочимо подграф овог графа који се добија тако што обришемо било којих 9 троелементних чворова и све гране које су у њих улазиле. Овај граф ће одговарати нашој фамилији скупова из поставке задатка. Преостало нам је 33 гране, а како свака грана повезује неки троелементни чвор и неки четвороелементни чвор, значи да је бар један од 15 четвороелементних чворова повезан са више од два троелементна чвора. То су тражени троелементни скупови.

Први разред – Б категорија

264. Из $\overline{abc} = \overline{bc} \cdot c$ следи $c \in \{1, 5, 6\}$ (из поставке је $c \neq 0$).
1° $c = 1$: $100a + 10b + 1 = 10b + 1$, што је немогуће због $a \neq 0$.
2° $c = 5$: $100a + 10b + 5 = 5(10b + 5)$, па је $5a = 2b + 1$, одакле је $a = 1$, $b = 2$ или $a = 3$, $b = 7$.
3° $c = 6$: $100a + 10b + 6 = 6(10b + 6)$, одакле је $10a = 5b + 3$, што је немогуће.
Дакле једина решења су $125 : 5 = 25$ и $375 : 5 = 75$.

265. Из правоуглог троугла $\triangle BCE$ добијамо $\sphericalangle DBE = 90^\circ - \sphericalangle BCE$ и $\sphericalangle BED = 90^\circ - \sphericalangle DEC$. Како су DC и DE тангенте из D на k, добијамо да је $DC = DE$, тј. троугао $\triangle DCE$ је једнакокраки, па важи $\sphericalangle DEC = \sphericalangle BCE$ и одатле $\sphericalangle DBE = \sphericalangle BED$.





266. а) AA_1CC_1 је паралелограм, па се дијагонале AC и A_1C_1 полове. Њихово средиште – тачка O је истовремено и средиште дијагонале BD и, аналогно, средиште и дијагонале B_1D_1 паралелограма BB_1DD_1. Дакле дијагонале A_1C_1 и B_1D_1 се полове, па је четвороугао $A_1B_1C_1D_1$ паралелограм.
б) Како троуглови $\triangle ABD_1$, $\triangle BA_1D_1$, $\triangle BA_1C$, $\triangle A_1CB_1$, $\triangle DCB_1$, $\triangle C_1DB_1$, $\triangle C_1DA$ и $\triangle C_1AD_1$ имају исте површине – по $\frac{1}{2}\cdot 2004cm^2$, добијамо да је укупна површина паралелограма $A_1B_1C_1D_1$ једнака $5\cdot 2004 = 10020cm^2$.

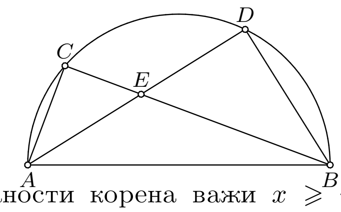
267. Како је $P(-2) = -4+4a+b = 0$ и остатак при делењу $P(x)$ са $x+3$ једнак $-21+9a+b = -12$, добијамо систем $4a+b = 4$ и $9a+b = 9$. Његова решења су $a = 1$ и $b = 0$, па је тражени полином $P(x) = x^3 + x^2 - 2x = x(x-1)(x+2)$.

268. Видети решење 248. задатка (5. за први разред А категорије).

Други разред – Б категорија

269. Треба да буде $x^3 - 9x^2 - x + 9 = 0$ и $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$, тј. $(x^2-1)(x-9) = 0$ и $(x^2-1)(x+3) = 0$, одакле је $x^2 - 1 = 0$, тј. $x_{1,2} = \pm 1$.

270. Користимо да су троуглови $\triangle BCE$ и $\triangle BCE$ правоугли, као и потенцију тачке E у односу на круг k: $AE\cdot ED = BE\cdot ED$. Стога имамо да је $AE\cdot AD = AE^2+AE\cdot ED = AC^2+EC^2+AE\cdot ED = AC^2+EC^2+BE\cdot EC = AC^2 + EC(EC+BE) = AC^2 + EC\cdot BC = AC^2 + (BC-BE)\cdot BC = AC^2 + BC^2 - BE\cdot BC$, па је $AE\cdot AD + BE\cdot BC = AB^2$.



271. Због дефинисаности корена важи $x \geqslant y^2 + 1$, па је $x + y^2 + \sqrt{x-y^2-1} \geqslant 2y^2 + 1 + \sqrt{x-y^2-1} \geqslant 1$. Дакле дата неједнакост важи само ако је $x + y^2 + \sqrt{x-y^2-1} = 1$, где је $x = y^2 + 1$, а то је испуњено за $x = 1$, $y = 0$.

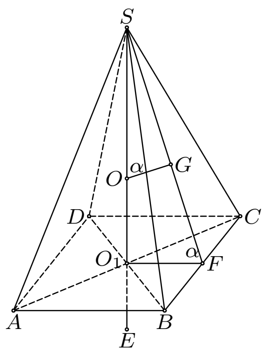
272. Видети решење 252. задатка (4. за други разред А категорије).

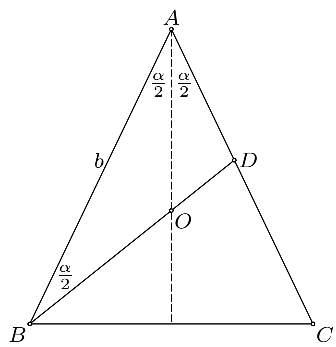
273. Из $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^m = 1$, тј. $\left(\dfrac{(1+i)^2}{2}\right)^m = 1$, односно $i^m = 1$ добија се $m = 4k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Трећи разред – Б категорија

274. Ови бројеви су једнаки јер је $\log 2^{\sqrt{\log_2 2004}} = \sqrt{\log_2 2004} \cdot \log 2 = \dfrac{\sqrt{\log 2004}}{\sqrt{\log 2}} \cdot \log 2 = \sqrt{\log 2004 \cdot \log 2}$ и $\log 2004^{\sqrt{\log_{2004} 2}} = \sqrt{\log_{2004} 2} \cdot \log 2004 = \dfrac{\sqrt{\log 2}}{\sqrt{\log 2004}} \cdot \log 2004 = \sqrt{\log 2 \cdot \log 2004}$.

275. Из $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ налазимо $r = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}$. Ако је SE пречник лопте, из правоуглог троугла $\triangle SBE$ налазимо $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = H(2r - H)$, а из троугла $\triangle FO_1S$ (који је сличан са $\triangle OGS$, па је $\sphericalangle O_1FS = \sphericalangle GOS = \alpha$) имамо $\dfrac{a}{2} = H \operatorname{ctg} \alpha$, па је $H = \dfrac{2r}{2\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}$, односно $H = \dfrac{1}{1 + 2\operatorname{ctg}^2 \alpha} \left(\dfrac{6V}{\pi}\right)^{1/3}$.





276. Како је $\sphericalangle ADB = 180^\circ - \frac{3\alpha}{2}$ (због $BO = AO$), применом синусне теореме у троуглу $\triangle ABD$ налазимо $\dfrac{BD}{\sin \alpha} = \dfrac{AB}{\sin(180^\circ - \frac{3\alpha}{2})}$, тј. $BD = \dfrac{b \sin \alpha}{\sin \frac{3\alpha}{2}}$.

277. Дата неједнакост је еквивалентна неједнакости $\cos^4 \alpha \cos^2 \beta + \sin^4 \alpha \sin^2 \beta \geqslant \sin^2 \beta \cos^2 \beta$, тј. $\cos^4 \alpha \cos^2 \beta + (1 - \cos^2 \alpha)^2 (1 - \cos^2 \beta) \geqslant (1 - \cos^2 \beta) \cos^2 \beta$, односно $(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 1)^2 \geqslant 0$. Једнакост важи ако и само ако је $\cos^2 \alpha = \sin^2 \beta$ ($\beta \neq \frac{k\pi}{2}$), тј. $\alpha = \pm\beta + \dfrac{2n+1}{2}\pi$, $\beta \neq \frac{k\pi}{2}$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

278. Добија се $\Delta = (a+3)(2-a)$, $\Delta_x = (a+3)(2-a)$, $\Delta_y = 2-a$ и $\Delta_z = 2-a$, па за
1° $a \neq 2, a \neq -3$ систем има решење $(x,y,z) = (1, \frac{1}{a+3}, \frac{1}{a+3})$;
2° $a = -3$ систем нема решења;
3° $a = 2$ систем је еквивалентан систему $x+y-z=1$, $2x+3y+2z=3$, чија су решења $(x,y,z) = (5t, 1-4t, t)$.

Четврти разред – Б категорија

279. Нека је x_0 цео корен дате једначине. Како из једначине имамо $q = {x_0}^3(p-x_0)$, да би q био прост број мора да буде $x_0 = 1$ или $x_0 = -1$.
1° $x_0 = 1$: тада је $q = p-1$, тј. прости бројеви p и q су различите парности, па је $p=3$ и $q=2$.
2° $x_0 = -1$: тада је $q = -p-1$, што је немогуће. Дакле, $p=3$, $q=2$.

280. Ако у релацији $\cos n(x+3\pi)\cdot \sin\dfrac{5}{n}(x+3\pi) = \cos nx \cdot \sin\dfrac{5}{n}x$ заменимо $x=0$, добијамо $\sin\dfrac{15\pi}{n} = 0$, одакле је $n \in \{\pm1, \pm3, \pm5, \pm15\}$. Непосредном провером се закључује да за све ове вредности функција f има период 3π.

281. Сабирањем свих ових једначина добија се $(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2 = 1+3+\ldots+2n-1 = n^2$, па је $x_1+x_2+\ldots+x_n = \pm n$. Стога имамо два решења: $(\frac{1}{n}, \frac{3}{n}, \frac{5}{n}, \ldots, \frac{2n-1}{n})$ и $(-\frac{1}{n}, -\frac{3}{n}, -\frac{5}{n}, \ldots, -\frac{2n-1}{n})$.

282. Треба да буде $f'(x) = 2^x \ln 2\big(2^{2x} + a\cdot 2^x + (1-a)\big) > 0$. Нека је $2^x = t$. Неједнакост $(*)$ $t^2 + at + 1 - a > 0$ треба да важи за све $t > 0$. Ако је дискриминанта $D = a^2 - 4(1-a)$ негативна, тј. за $-2(1+\sqrt{2}) < a < 2(\sqrt{2}-1)$ неједнакост важи за све $t \in \mathbb{R}$.
Нека је $D \geqslant 0$. $(*)$ важи за све $t > 0$ ако су ова корена одговарајуће једначине $t_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2+4a-4} \leqslant 0$. Ово важи за $2(\sqrt{2}-1) \leqslant a \leqslant 1$.
Дакле, функција је растућа за све вредности x ако и само ако важи $-2(1+\sqrt{2}) \leqslant a \leqslant 1$.

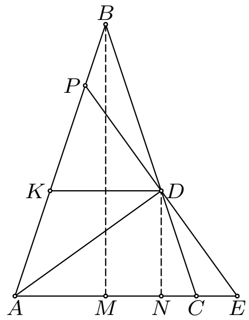
283. Дата неједнакост је еквивалентна неједнакости $(n+1)^n > n!$, која је последица очигледних неједнакости: $n+1 > 1$, $n+1 > 2$, $n+1 > 3$, $\ldots$, $n+1 > n$.

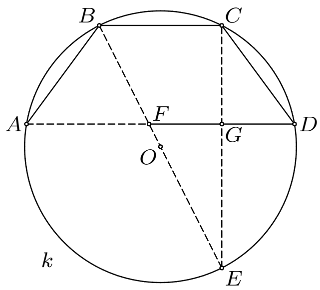
ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИЗБОР ЕКИПЕ ЗА САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред

284. Нека је $DE \cap AB = \{P\}$ и $KD \parallel AC$, $K \in AB$ и $KD \cap BM = \{Q\}$. Тада имамо следеће једнакокраке троуглове: $\triangle AEP$, $\triangle KDP$ и $\triangle KAD$. $\triangle AEP$ је једнакокрак јер је $\triangle AED \cong \triangle APD$ ($AD = AD$, $\sphericalangle EAD = \sphericalangle PAD = \frac{\alpha}{2}$ и $\sphericalangle EDA = \sphericalangle PDA = 90°$). $\triangle KDP$ је једнакокрак јер је $\sphericalangle KPD = \sphericalangle AED = \sphericalangle KDP$ (из претходног једнакокраког и углови са паралелним крацима). $\triangle KAD$ је једнакокрак јер је $\sphericalangle KAD = \sphericalangle CAD = \sphericalangle KDA$ (симетрала угла и углови са паралелним крацима). Из последња два једнакокрака троугла имамо да је $KP = KD = KA$. Сада имамо:

$$MN = QD = \tfrac{1}{2}KD = \tfrac{1}{2}KP = \tfrac{1}{4}AP = \tfrac{1}{4}AE = \tfrac{1}{4}a.$$





285. Из $AB = BC = CD$ добијамо да је $ABCD$ једнакокраки трапез, тј. $AD \parallel BC$. Из подударности $\triangle ABO \cong \triangle CBO$ следи $\sphericalangle ABO = \sphericalangle CBO = \sphericalangle AFB$ (углови са паралелним крацима), па је троугао $\triangle ABF$ је једнакокрак, односно $AB = AF$.
$\sphericalangle BEC = \sphericalangle CED$ (периферијски над тетивама исте дужине), па је EC симетрала угла $\sphericalangle BED$. Због $BC \parallel AD$ и $\sphericalangle BCE = 90°$ (периферијски над пречником) имамо да је EC и висина троугла $\triangle FED$. Стога је тај троугао једнакокраки, па је EC и тежишна дуж, тј. CE полови FD, што је и требало доказати.

286. Збир првог и трећег сабирка једнак је $S_1 = \frac{-a-c+b+d}{(a-b)(a-d)(c-b)(c-d)}$, док је збир друга два сабирка једнак: $S_2 = \frac{a+c-b-d}{(b-a)(b-c)(d-a)(d-c)}$. Сада је јасно да је $S = S_1 + S_2 = 0$.

287. Нека је $r = \sqrt{m} + \sqrt{n} \in \mathbb{Q}$. Тада је $\sqrt{m} = r - \sqrt{n}$ односно, $m = r^2 - 2r\sqrt{n} + n$ одакле имамо да је $\sqrt{n} = (r^2 + n - m)/(2r) \in \mathbb{Q}$. Ако је корен из природног броја n рационалан, онда је он и природан, тј. $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$ и аналогно $\sqrt{m} \in \mathbb{N}$, па је и $\sqrt{m} + \sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

288. Допунимо те бројеве са цифрама 0 на почетку тако да сви буду четвороцифрени.

Решење 1 (Бијекцијом): Уочимо пресликавање које слика бројеве $\overline{abcd}$ (код којих је $a+b=c+d$) у бројеве $\overline{abef}$ (код којих је $a+b+e+f=18$)

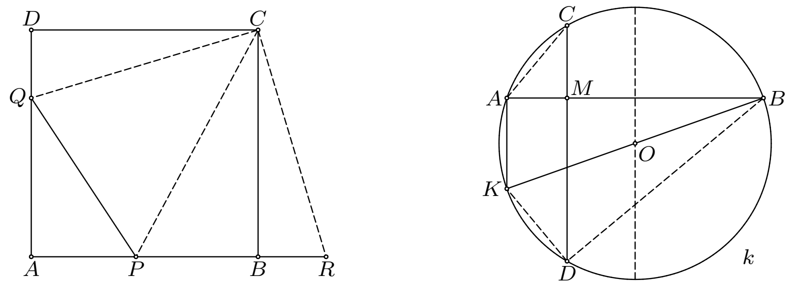
помоћу $e = 9 - c$ и $f = 9 - d$. То пресликавање је бијекција (лако се покаже да је "1-1" и "на"), па бројева $(0 \leqslant n \leqslant 9999)$ из првог скупа има колико и бројева из другог скупа, али 0000 није природан број, те бројева чији је збир цифара једнак 18 има један више од бројева код којих је збир цифара јединица и десетица једнак збиру цифара стотина и хиљада.

Решење 2 (Пребројавањем): Бројева чији је збир цифара једнак 18, који почињу са 00 има 1 (само 0099); бројева који почињу са 01 или 10 има $4 = 2 \cdot 2$ (0189, 0198, 1089, 1098); ... бројева чији је збир цифара стотина и хиљада једнак 9, а укупан збир цифара 18, има $100 = 10 \cdot 10$ (цифре стотина и хиљада можемо изабрати на 10 начина – 09, 18,..., 90; као и цифре десетица и јединица – истих 10 начина); бројева чији је збир цифара стотина и хиљада једнак 10, а укупан збир цифара 18, има $81 = 9 \cdot 9$ (цифре стотина и хиљада можемо изабрати на 9 начина – 19, 28,..., 91; цифре десетица и јединица на 8 начина – 08, 17, ..., 80); ... бројева чији је збир цифара стотина и хиљада једнак 18, а укупан збир цифара 18, има само један, $1 = 1 \cdot 1$ (9900). Стога је укупан број бројева чији је збир цифара једнак 18 једнак $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \ldots + 9 \cdot 9 + 10 \cdot 10 + 9 \cdot 9 + \ldots + 1 \cdot 1 = 670$ (овде сумирање може олакшати формула $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).
На сличан начин бројева код којих је збир цифара јединица и десетица једнак збиру цифара стотина и хиљада има $2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \ldots + 9 \cdot 9 + 10 \cdot 10 + 9 \cdot 9 + \ldots + 1 \cdot 1 = 669$ (нема 0000, па разматрање крећемо од оних којима је збир цифара стотина и хиљада једнак 1 и ту имамо $4 = 2 \cdot 2$ могућности: 0101, 0110, 1001, 1010).

Бројева чији је збир цифара једнак 18 (670) има један више од бројева код којих је збир цифара јединица и десетица једнак збиру цифара стотина и хиљада (669).

Други разред

289. Извршимо ротацију $\triangle CDQ$ око C за 90°, тако да се CD слика у CB. Нека је R слика тачке Q у тој ротацији (R је на AB иза B). По услову задатка је $PQ + QA + AP = 2 = AB + AD$. Међутим, $AD = DQ + QA = BR + QA$, па је $PQ + QA + AP = AP + PB + BR + QA$, а одавде је $PQ = PR$. Дакле, троуглови $\triangle CQP$ и $\triangle CRP$ су подударни ($CQ = CR$, $PQ = PR$ и $CP = CP$), па је $\sphericalangle QCP = \sphericalangle RCP = \frac{1}{2} \sphericalangle QCR = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$.



290. **а)** Без умањења оштости можемо узети да је $AM < MB$. Нека је $p \parallel CD$, $A \in p$, $p \cap k = \{A, K\}$. Тада је $AK < CD < 2r$. Из $\sphericalangle KAB = 90°$ добијамо да је BK пречник. Стога је $(2r)^2 = BK^2 = AB^2 + AK^2 < AB^2 + CD^2$.
б) Из једнакокраког трапеза $DCAK$ имамо да је $KD = AC$, што са Питагориним теоремама у правоуглим троугловима $\triangle DKB$, $\triangle MDB$ и $\triangle MCA$ даје:
$KB^2 = BD^2 + KD^2 = BD^2 + AC^2 = BM^2 + DM^2 + AM^2 + CM^2$.

291. Ако дату једначину поделимо са 2^6 добијамо $2^{x+1} + 2^{2x^2+6x+4} + 2^{-3x-3} = 3$, односно $2^t + 2^{2t^2+2t} + 2^{-3t} = 3$, где је $t = x+1$. Како су бројеви $2^t, 2^{2t^2+2t}, 2^{-3t}$ позитивни, то на њих можемо применити неједнакост између аритметичке и геометријске средине. Зато је

$$1 = \frac{3}{3} = \frac{2^t + 2^{2t^2+2t} + 2^{-3t}}{3} \geqslant \sqrt[3]{2^{t+2t^2+2t-3t}} = \sqrt[3]{2^{2t^2}} \geqslant 1.$$

Једнакост у претходном реду важи акко је $t = 0$ и $2^t = 2^{2t^2+2t} = 2^{-3t}$, односно само за $t = 0$. Зато је једино решење полазне једначине $x = -1$.

292. Дата једначина еквивалентна је са

$$x^2 + 2x + a - 2 = 0, \text{ за } x \in (-2, 1)$$

или

$$x^2 = a + 2, \text{ за } x \in (-\infty, -2] \bigcup [1, \infty).$$

Нека је $f(x) = x^2 + 2x + a - 2$. Ова функција има два реална и различита реална корена у интервалу $(-2, 1)$ акко

$$f(-2) > 0 \wedge f(1) > 0 \wedge D > 0 \wedge -\tfrac{2}{2} \in (-2, 1).$$

Иста функција има тачно један корен у интервалу $(-2, 1)$ акко

$$(D = 0 \wedge -\tfrac{2}{2} \in (-2, 1)) \vee (f(-2) \leqslant 0 \wedge f(1) > 0).$$

Отуда (решавањем наведених неједначина) налазимо да почетна једначина у интервалу $(-2, 1)$ има два различита решења акко $2 < a < 3$ и једно акко $-1 < a \leqslant 2 \vee a = 3$.
Лако се види да квадратна једначина $x^2 = a + 2$ на унији интервала $(-\infty, -2] \cup [1, \infty)$ има два различита решења акко $a \geqslant 2$ и једно акко $-1 \leqslant a < 2$.
Из свега наведеног закључујемо да постоје две вредности параметра

a које задовољавају почетни услов и то су $a = 2$ и $a = 3$.

293. Видети решење 288. задатка (5. за први разред).

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред

294. Лако се проверава да не постоји решење код кога је $a = 1$. Нека је $a \geqslant 2$. Ако је $b \geqslant 9$, онда важи $5a^b - b \geqslant 5 \cdot 2^9 - 9 = 2551$. Провером за вредности $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ добија се решење $a = 401$, $b = 1$.

295. Нека је M пресечна тачка правих HP и DE, Q тачка у којој се секу нормала из D на BC и нормала из E на AC. Како је $CD = CE = \frac{a+b}{2}$, имамо да је $DQ = CQ$, дакле D припада симетрали угла ACB. Даље је $BD = \left|\frac{a-b}{2}\right| = AE$. Из једнакости катета правоуглих троуглова AEQ и BDQ следи да је $AQ = BQ$. Стога Q припада симетрали дужи AB. Из претходног следи $Q = P$. Нека је T тачка у којој права AH по други пут сече кружницу описану око троугла ABC и R и S тачке пресека праве TP са правама BC и DE. Сада је $\sphericalangle SDP = \sphericalangle EDP = \sphericalangle\gamma/2$. Такође због паралелности кракова важи $\sphericalangle SPD = \sphericalangle STA = \gamma/2$. Из претходног следи да је $SP = SD$, односно да је S средиште хипотенузе RP правоуглог троугла RPD. С обзиром на то да су H и T симетричне тачке у односу на праву BC, имамо да је $\sphericalangle RHT = \sphericalangle RTH = \sphericalangle PTA = \sphericalangle PCA = \gamma/2$ и $\sphericalangle PDS = \sphericalangle PDE = \gamma/2$. Како је $PD \parallel HT$, из претходног следи да је $DS \parallel HR$, што значи да је SM средња линија троугла HRP, односно да је $MH = MP$.

296. Примењујући неједнакост између аритметичке и геометријске средине на бројеве $1/2$ и $b + 1/a + 1/2$ добијамо да је

$$2\sqrt{(1/2) \cdot (b + 1/a + 1/2)} \leqslant 1 + b + 1/a,$$

односно

$$\frac{1}{\sqrt{b + \frac{1}{a} + \frac{1}{2}}} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{1 + b + \frac{1}{a}}. \tag{1}$$

Аналогно се доказују неједнакости:

$$\frac{1}{\sqrt{c + \frac{1}{b} + \frac{1}{2}}} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{1 + c + \frac{1}{b}}, \tag{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{1+a+\frac{1}{c}}. \tag{3}$$

Ако саберемо неједнакости (1), (2) и (3) и применимо идентитет

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+b+1/a}+\frac{1}{1+c+1/b}+\frac{1}{1+a+1/c}\\ =\frac{a}{a+ab+1}+\frac{ab}{ab+1+a}+\frac{1}{1+a+ab}=1,\end{aligned}$$

добијамо да је

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}}\\ \geqslant \sqrt{2}\left(\frac{1}{1+b+1/a}+\frac{1}{1+c+1/b}+\frac{1}{1+a+1/c}\right)=\sqrt{2}.\end{aligned}$$

297. Нека је n тражени број тетраедара. У сваком тетраедру постоји $\binom{4}{3}$ неуређених тројки темена, а због услова задатка од свих $n\cdot\binom{4}{3}$ тројки, сваке две су различите. Зато је $n\cdot\binom{4}{3}\leqslant\binom{100}{3}$, па следи

$$n \leqslant \frac{\binom{100}{3}}{\binom{4}{3}} = 40\,425 < 40\,804 = 4\cdot 101^2.$$

Други разред

298. Ако су сви a, b, c једнаки 1, тврђење је тривијално. Даље, можемо да претпоставимо без смањења општости да је НЗД$(a,b,c)=1$. Ако је НЗД$(a,b,c)=d>1$, довољно је да докажемо тврђење за бројеве $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$, $\frac{c}{d}$.

Нека је p произвољан прост делилац броја abc. Претпоставимо, без смањења општости, да p не дели a, $p \mid b$ и да је k највећи степен броја p који дели b. Тада је степен броја p у имениоцу у скраћеном запису разломка $\frac{a}{b}$ једнак p^k. Међутим, како је $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ цео број, степен броја p у бар још једном од скраћених разломака $\frac{b}{c}$ и $\frac{c}{a}$ мора бити тачно једнак p^k. То мора бити разломак $\frac{b}{c}$ (разломак $\frac{c}{a}$ отпада јер p не дели a. Према томе, највећи степен броја p који дели c једнак је степену p који дели $b\cdot p^k$, тј. једнак је p^{2k}. Сада добијамо да је тачан степен броја p у abc једнак p^{3k}. Како ово важи за сваки прост делилац p броја abc, то следи да је abc потпун куб.

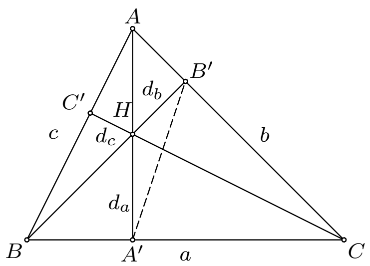
299. _Решење 1_: Означимо $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$ и нека је P површина троугла ABC, а R полупречник описаног круга. Нека су d_a, d_b,

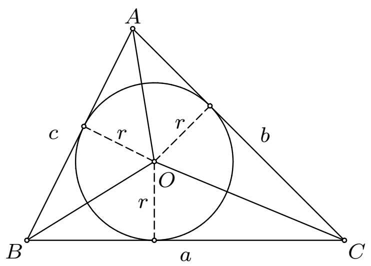
d_c редом растојања од ортоцентра H до страница BC, CA, AB и A', B', C' редом подножја висина h_a, h_b и h_c из A, B, C. Без умањења општости претпоставимо да је $a \geqslant b \geqslant c$ и покажимо да је $d_a \geqslant d_a \geqslant d_a$: $\sphericalangle A'HC = 90^\circ - \sphericalangle HCA' = \sphericalangle CBC' = \beta$. Због тетивности четвороугла $A'CB'H$ добијамо да је и $\sphericalangle A'B'C = \beta$. Аналогним расуђивањем добијамо и $B'A'C = \alpha$, па имамо сличне троуглове $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C$ одакле због $a \geqslant b$ добијамо да је $B'C \geqslant A'C$. Сада из Питагориних теорема примењених на троуглове $\triangle A'HC$ и $\triangle B'HC$ добијамо неједнакост ${d_a}^2 = A'H^2 = HC^2 - A'C^2 \geqslant HC^2 - B'C^2 = B'H^2 = {d_b}^2$, одакле следи тражена неједнакост $d_a \geqslant d_b$. Аналогно се показује и $d_b \geqslant d_c$.
Једнакости важе уколико важе и у полазној неједнакости $a \geqslant b \geqslant c$.

Како двоструку површину троугла можемо изразити и као $2P = (a+b+c)\cdot r$ и као $2P = 2(P_{BCH} + P_{ACH} + P_{ABH}) = a\cdot d_a + b\cdot d_b + c\cdot d_c$ и како због $a \geqslant b \geqslant c$ и $d_a \geqslant d_b \geqslant d_c$ важи Чебишовљева неједнакост $a\cdot d_a + b\cdot d_b + c\cdot d_c \geqslant \frac{1}{3}(a+b+c)(d_a+d_b+d_c)$ имамо да је

$$(a+b+c)\cdot r = 2P = a\cdot d_a + b\cdot d_b + c\cdot d_c \geqslant \frac{1}{3}(a+b+c)(d_a+d_b+d_c)$$

одакле је $3r \geqslant d_a + d_b + d_c$.
Једнакост у Чебишовљевој неједнакости важи акко је $a = b = c$ или $d_a = d_b = d_c$ (тад је H и центар уписане кружнице, што опет повлачи $a = b = c$), односно за једнакостраничан троугао.





<u>*Напомена*</u>: Део задатка $a \geqslant b \geqslant c \;\Rightarrow\; d_a \geqslant d_b \geqslant d_c$ може се показати и уз помоћ тригонометрије:
$d_a = A'C \cdot \operatorname{tg}\sphericalangle HCA' = A'C \cdot \operatorname{ctg}\beta = b\cdot\cos\gamma\cdot\operatorname{ctg}\beta = \dfrac{b}{\sin\beta}\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma = 2R\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$ и аналогно је $d_b = 2R\cdot\cos\alpha\cdot\cos\gamma$ и $d_c = 2R\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta$.
Како наспрам веће странице лежи већи угао, тј.

$$a \geqslant b \geqslant c \;\Rightarrow\; \alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma \Rightarrow\; \cos\alpha \leqslant \cos\beta \leqslant \cos\gamma \Rightarrow\; d_a \geqslant d_b \geqslant d_c,$$

одакле следи тражена неједнакост.

<u>*Решење 2*</u>: Уведимо ознаке тачака као у претходном решењу. Како је

збир растојања од H до темена једнак $2R+2r$, добијамо да је проблем еквивалентан са

$$h_a + h_b + h_c \leqslant 5r + 2R.$$

Изразимо све ове величине у функцији страница троугла:

$$h_a = \frac{2P}{a}, \quad h_b = \frac{2P}{b}, \quad h_c = \frac{2P}{c}, \quad r = \frac{2P}{a+b+c}, \quad R = \frac{abc}{4P},$$

чиме се претходна неједнакост свела на

$$\frac{2P}{a} + \frac{2P}{b} + \frac{2P}{c} = \frac{10P}{a+b+c} + \frac{abc}{2P}.$$

Поделимо све са S и уврстимо стандардне смене

$$x = \frac{1}{2}(b+c-a), \quad y = \frac{1}{2}(c+a-b), \quad z = \frac{1}{2}(a+b-c),$$

као и Херонов образац $16P^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$. Тиме се полазна неједнакост свела на неједнакост

$$\frac{1}{2(x+y)} + \frac{1}{2(y+z)} + \frac{1}{2(z+x)} \leqslant \frac{5}{4(x+y+z)} + \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8xyz(x+y+z)}.$$

Након сређивања добијамо да је ова неједнакост еквивалентна са

$$\begin{aligned} 6x^2y^2z^2 + 2xyz(x^3+y^3+z^3) \quad &\leqslant \quad x^4y^2 + x^4z^2 + y^4x^2 + y^4z^2 + z^4x^2 + z^4x^2 \\ &\quad +2(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3). \end{aligned}$$

Ову неједнакост можемо показати или коришћењем Мјурхедове неједнакости или сабирањем следеће две неједнакости (у другој смо користили неједнакост аритметичке и геометријске средине):

$$x^4(y-z)^2 + y^4(z-x)^2 + z^4(x-y)^2 \geqslant 0,$$

$$2(x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3) \geqslant 2 \cdot 3\sqrt[3]{x^3y^3y^3z^3z^3x^3} = 6x^2y^2z^2.$$

Једнакост важи само када је и у претходне две неједнакости испуњен знак једнакости, што је само у случају $x = y = z$, одакле је $a = b = c$, тј. за једнакостраничан троугао.

300. Претпоставимо да тврђење није задовољено за неке тачке M, N, P. Нека су A_1, B_1, C_1 редом средишта страница BC, CA, AB. Можемо да претпоставимо, не смањујући општост, да $M \in A_1C$. Ако $P \in AC_1$, тада је пројекција дужи MP на A_1C_1 дужине не мање од $A_1C_1 = \frac{1}{2}AC$, што је контрадикција. Дакле, $P \in C_1B$. Слично $N \in B_1C$ води контрадикцији, па је $N \in B_1A$.

Означимо $x = MA_1$, $y = NB_1$, $z = PC_1$. Тада је дужина пројекције дужи NP на B_1C_1 једнака $p_a = B_1C_1 + z\cos B - y\cos C$, па зато важи

$B_1C_1 + z\cos B - y\cos C < B_1C_1$ и $\frac{z}{\cos C} < \frac{y}{\cos B}$. Аналогно се добија да важи $\frac{y}{\cos B} < \frac{x}{\cos A}$ и $\frac{x}{\cos A} < \frac{z}{\cos C}$, што је контрадикција.

301. Ако сваки кружни пут садржи паран број градова, тада се сви ти градови могу обојити црвено и бело, тако да се увек из црвеног града иде у бели и обрнуто. То ћемо доказати тако што ћемо извршити ефективно бојење. Произвољан град A (нека је то баш родни град барона Минхаузена) обојимо црвеном бојом, затим све његове суседе белом, а суседне градове од ових опет црвеном (уколико већ нису обојени црвеном бојом) итд. Претпоставимо да не можемо извршити тражено бојење. Тада у процесу бојења долазимо до града B који треба обојити, на пример бело, а да је један од њему суседних градова већ обојен у бело. Међутим, тада од почетног града A воде у град B две различите путање, од којих једна има паран, а друга непаран број елементарних путева. (Елементарним путем зовемо пут између два града на коме нема других градова.) Ако спојимо ове две путање , онда добијамо кружни пут са непарним бројем градова на њему, што је у контрадикцији са претпосатвком задатка.

Нека је n_C градова обојено црвеном бојом, а n_B градова белом бојом. Нека из свих градова полази тачно r елементарних путева, сем из родног града барона Минхаузена A, из кога полази тачно s путева. Како сваки елементаран пут спаја један црвени и један бели град, то добијамо да је укупан број елементарних путева једнак $n_B \cdot r$ (ако гледамо из белих градова), односно $(n_C - 1) \cdot r + 1 \cdot s$ (ако гледамо из црвених градова). Према томе,

$$n_B \cdot r = (n_C - 1) \cdot r + s,$$

односно $s = (n_B - n_C + 1) \cdot r$, што је немогуће јер је барон рекао да је $s < r$. Тако је математичар закључио да барон Минхаузен лаже.

Трећи и четврти разред

302. Нека су α, β, γ углови троугла ABC и R полупречник његове описане кружнице. Из правоуглог троугла ADC добијамо да је $CD/AC = \cos\gamma$, па с обзиром на то да су троуглови CDE и CAB слични, добијамо да је $S_{CDE} = S\cos^2\gamma$. Слично је $S_{AEF} = S \cdot \cos^2\alpha$ и $S_{BFD} = S\cos^2\beta$. Због тога је $S_{DEF} = |S - S\cos^2\alpha - S\cos^2\beta - S\cos^2\gamma|$, односно

$$S_{DEF} = S|\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2|.$$

С друге стране имамо да је $S_{PQR} = S_{ABC} + S_{ABR} + S_{BCP} + S_{CAQ} - S_{PBR} - S_{RAQ} - S_{QCP} = 4S - S_{PBR} - S_{RAQ} - S_{QCP}$. Даље је $S_{PBR} = \frac{1}{2}(BP \cdot BR\sin 3\beta = \frac{1}{2}ac\sin\beta(3 - 4\sin^2\beta) = (3 - 4\sin^2\beta)S$. Аналогно добијамо $S_{RAQ} = (3 - 4\sin^2\alpha)S$, $S_{QCP} = (3 - 4\sin^2\gamma)S$, па добијамо да важи

$$S_{PQR} = S|4(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) - 5|.$$

Означимо $t = \sin^3\alpha + \sin^3\beta + \sin^3\gamma$. Из $S_{PQR} = S_{DEF} = T$ добијамо да је $|t-2| = |4t-5|$, односно $t^2 - 4t + 4 = 16t^2 - 40t + 25$. Последња квадратна једначина има решења $t_1 = 7/5$ и $t_2 = 1$. За $t = 7/5$ добијамо да је $T = |7/5 - 2|S = \frac{3}{5}S$, што је немогуће због услова $T > \frac{3}{5}S$. Према томе, $t = 1$ и $T = S$.

303. Нека је $b_n = n^2 a_n$ за $n \geqslant 1$. Тада је $(n+1)b_{n+1} = 2(2n+1)b_n + 2(3n+1)$. Нека је $c_n = b_n + \alpha$ за $n \geqslant 1$. Тада је $(n+1)(c_{n+1} - \alpha) = 2n^2(2n+1)(c_n - \alpha) + 2(3n+1)$, тј.

$$c_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+1}c_n + \frac{3n+1}{n+1}(2-\alpha),$$

па за $\alpha = 2$ имамо: $c_1 = 1^2 \cdot 0 + 2 = 2$,

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \frac{2(2n+1)}{n+1}c_n = \frac{2^2(2n+1)(2n-1)}{(n+1)n}c_{n-1} = \cdots = \frac{2^n \cdot (2n+1)!!}{(n+1)!}c_1 \\ &= \frac{2^{n+1} \cdot (2n+1)!!}{(n+1)!} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \binom{2n+2}{n+1}. \end{aligned}$$

Одавде следи

$$a_n = \frac{c_n - \alpha}{n^2} = \frac{\binom{2n}{n} - 2}{n^2}.$$

Како је

$$\binom{2n}{n} - 2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 - 2 = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}^2$$

и како за прост број n и $0 < k < n$ важи $n \mid \binom{n}{k}$, следи да за просте бројеве n важи $a_n \in \mathbb{N}$, па пошто простих бројева има бесконачно много, то следи тврђење задатка.

304. Сваки подскуп B скупа $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ одређен низом нула и јединица дужине 11. Нпр, за $B = \{1,4,5,6,8,9\}$ низ који га одређује је 10011101100. Према томе, пребројавање броја подскупова B са траженом особином своди се на пребројавање поменутих низова нула и јединица дужине 11 у којима се *не појављује* 1010. Нека је a_n број низова нула и јединица дужине n у којима се не појављује 1010 и нека је S_n скуп свих тих низова. Одредимо рекурентну релацију за a_n. Нека је $A_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \overset{def}{=} x_1 x_2 \ldots x_n \in S_n$, где је $x_i \in \{0,1\}$. Јасно је да $0A_{n-1} \in S_n$, док $1A_{n-1} \in S_n$ ако и само ако A_{n-1} не почиње са 010. Зато ћемо од броја $2a_{n-1}$ свих низова облика $1A_{n-1}$ и $0A_{n-1}$ одузети број свих који почињу са 10, а њих има a_{n-1}. Тиме смо одузели број свих низова облика $1000A_{n-4} \in S_n$, $1001A_{n-4} \in S_n$, $1011A_{n-4} \in S_n$, $1010A_{n-4} \notin S_n$, а требало је одузети само број низова облика $1010A_{n-4}$. Зато сада броју $2a_{n-1} - a_{n-2}$ додајемо број свих низова облика $100A_{n-3} \in S_n$ и $101A_{n-3} \in S_n$, тј. број $2a_{n-3}$. И коначно од броја $2a_{n-1} - a_{n-2} + 2a_{n-3}$

треба одузети број свих низова облика $1010A_{n-4}$, тј. број a_{n-4}. Тиме смо добили да је

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2a_{n-3} - a_{n-4}.$$

Сада једноставно добијамо да је: $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$, $a_4 = 15$, $a_5 = 28$, $a_6 = 53$, $a_7 = 100$, $a_8 = 188$, $a_9 = 354$, $a_{10} = 667$, $a_{11} = 1256$.

305. Решавањем рекурентне једначине добијамо

$$a_n = \left(3x - \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2}, \tag{1}$$

па за довољно велико n важи $0 < a_n - \frac{1}{6} < a_n + \frac{1}{6} < 1$, односно $\left[a_n - \frac{1}{6}\right] = \left[a_n + \frac{1}{6}\right] = 0$, па су A и B коначне суме (можемо мењати поредак њихових чланова). Следи да је

$$A + B = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left[a_n - \frac{1}{6}\right] + \left[a_n + \frac{1}{6}\right] \right).$$

Користећи Ермитов идентитет $\left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right] = [3x] - [x]$, добијамо

$$\begin{aligned} A + B &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[3\left(a_n - \frac{1}{2}\right)\right] - \left[a_n - \frac{1}{2}\right] \right\} \\ &= \left[3\left(a_1 - \frac{1}{2}\right)\right] - \left[a_1 - \frac{1}{2}\right] + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left[a_{n-1} - \frac{1}{2}\right] - \left[a_n - \frac{1}{2}\right] \right\}, \end{aligned}$$

па је n-та парцијална сума

$$(A + B)_n = \left[3\left(a_1 - \frac{1}{2}\right)\right] - \left[a_n - \frac{1}{2}\right]$$

и константна је почев од неког n. Из (1) следи да је $a_n \geqslant \frac{1}{2} \iff x \geqslant \frac{1}{2}$, па како је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$, то за довољно велике n важи

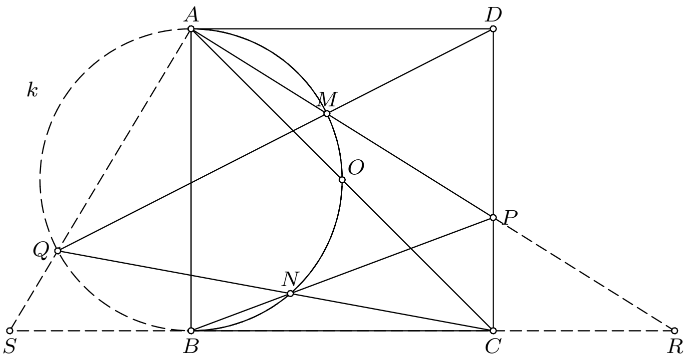
$$\left[a_n - \frac{1}{2}\right] = \begin{cases} 0, & \text{за} \quad x \geqslant 1/2, \\ -1, & \text{за} \quad x < 1/2, \end{cases}$$

$$A + B = \begin{cases} \left[3\left(x - \frac{1}{2}\right)\right], & \text{за} \quad x \geqslant 1/2, \\ \left[3\left(x - \frac{1}{2}\right)\right] + 1, & \text{за} \quad x < 1/2. \end{cases}$$

МАЛА ОЛИМПИЈАДА

306. Означимо са k круг који садржи γ. Доказаћемо да $Q \in k$.
Нека DM по други пут сече k у тачки Q_1 и нека праве AM и AQ_1

секу BC у тачкама R и S. Тада је $AQ_1 \cdot AS = AB^2 = AD^2 = a^2$ (где је a страница квадрата), одакле је $\triangle ADQ_1 \sim \triangle ASD$. Следи да је $\sphericalangle ASD = \sphericalangle ADQ_1$. На сличан начин показујемо да је $\sphericalangle ARD = \sphericalangle ADM$, па је према томе $\sphericalangle ASD = \sphericalangle ARD$. Закључујемо да су тачке A, S, R, D на кругу и зато $BS = CR$.
Ако аналогно дефинишемо $Q_2 = CN \cap k$ ($Q_2 \neq N$) и T, U пресечне тачке BN, BQ_2 са AD редом, добијамо на исти начин да је $AU = DT$.
Како је на основу Талесове теореме $CR : AD = CP : PD = CB : DT$, следи $CR \cdot DT = a^2$. Сада, из $BS \cdot AU = CR \cdot DT = a^2$ следи $SB : BA = BA : AU$ и најзад $\triangle SBA \sim \triangle BAU$. Сада видимо да је $AS \perp BU$, па се AS и BU секу на кругу k, у тачки $Q \equiv Q_1 \equiv Q_2$. Штавише, $AQ : QB = AU : AB = DT : BC = DP : PC$.
Напомена: Може се показати да $Q \in k$ и на следећи начин. Ако је O центар квадрата, онда на основу Паскалове теореме A, M, O, N, B, Q леже на конусном пресеку, тј. кругу. Међутим, ово не олакшава израчунавање $AQ : QB$.



307. Претпоставимо супротно да су сва три броја

$$2a - \frac{1}{b}, \quad 2b - \frac{1}{c}, \quad 2c - \frac{1}{a}$$

већа од 1.
Бар један од бројева a,b или c мора бити позитиван. Ако је $a > 0$, онда је $2c > 2c - \frac{1}{a} > 1$, па је $c > 0$ и стога и $b > 0$. Аналогно закључујемо да је $c > 0$. Дакле сви бројеви a, b и c су позитивни.
Из $2b - \frac{1}{c} > 1$ следи

$$b > \frac{1 + \frac{1}{c}}{2}. \qquad (*)$$

Из $2a - \frac{1}{b} > 1$ следи $\frac{2}{bc} - \frac{1}{b} > 1$ одакле је

$$b < \frac{2}{c} - 1. \qquad (**)$$

Из неједнакости (∗) и (∗∗) добијамо

$$\frac{2}{c}-1>\frac{1+\frac{1}{c}}{2},$$

што нам након сређивања даје $c<1$. Аналогно се добијају и $a<1$ и $b<1$, што је немогуће јер би онда било $abc<1$, па је полазна претпоставка нетачна.

308. Показујемо да важи општије тврђење:
Ако су $a_1,a_2,\dots,a_k$ произвољн реални бројеви и $R_k(x)$ и $S_k(x)$ реални полиноми такви да је

$$P_k(x)=(x+a_1-i)(x+a_2-i)\dots(x+a_k-i)=R_k(x)+iS_k(x).$$

Тада полиноми $R_k(x)$ имају k реалних корена $\alpha_{k,1}<\alpha_{k,2}<\dots<\alpha_{k,k}$ и при том је

$$\alpha_{k,1}<\alpha_{k-1,1}<\alpha_{k,2}<\alpha_{k-1,2}<\dots<\alpha_{k-1,k-1}<\alpha_{k,k}$$

где су $\alpha_{k-1,1}$ корени полинома $R_{k-1}(x)$.
Тврђење показујемо математичком индукцијом по k.
За $k=1$, $R_1(x)=x+a_1$ и јасно је да $R_1(x)$ има један реалан корен $\alpha_{1,1}=-a_1$. За $k=2$ имамо да је $R_2(x)=x^2+(a_1+a_2)x+a_1a_2-1$, па из $R_2(-a_1)=1$ добијамо да $R_2(x)$ има два реална корена $\alpha_{2,1}$ и $\alpha_{2,2}$ и да при том важи $\alpha_{2,1}<\alpha_{1,1}<\alpha_{2,2}$.
Предпоставимо сада да тврђење важи за $k=d$ и покажимо да важи за $k=d+1$.
Имајући у виду да је $P_{m+1}(x)=P_m(x)\cdot(x+a_{m+1}-i)$ добијамо

$$P_{m+1}(x)=(x+a_{m+1})R_m(x)+S_m(x)+i\cdot[(x+a_{m+1})S_m(x)-R_m(x)].$$

Добијамо да важе рекурентне везе:

$$R_{m+1}(x)=(x+a_{m+1})R_m(x)+S_m(x)$$

$$S_{m+1}(x)=(x+a_{m+1})S_m(x)-R_m(x).$$

Из прве релације имамо $S_m(x)=R_{m+1}(x)-(x+a_{m+1})R_m(x)$, а из друге онда налазимо рекурентну везу $R_{m+2}(x)-(x+a_{m+2})R_{m+1}(x)=(x+a_{m+1})\cdot[R_{m+1}(x)-(x+a_{m+1})R_m(x)]-R_m(x)$, односно

$$R_{m+2}(x)=R_{m+1}(x)\cdot[(x+a_{m+2})+(x+a_{m+1})]-R_m(x)\cdot[(x+a_{m+1})^2+1].$$

Сада се враћамо на индукцијски корак:

$$R_{d+1}(x)=R_d(x)\cdot[(x+a_{d+1})+(x+a_d)]-R_{d-1}(x)\cdot[(x+a_d)^2+1].$$

Вредности $\operatorname{sgn}(R_{d+1}(x))$ у тачкама $\alpha_{d,1},\alpha_{d,2},\dots,\alpha_{d,d}$ једнаке су редом

$$-\operatorname{sgn}(R_{d-1}(\alpha_{d,1}))=(-1)^n,$$

$$-\operatorname{sgn}(R_{d-1}(\alpha_{d,2})) = (-1)^{n-1},$$
$$\vdots$$
$$-\operatorname{sgn}(R_{d-1}(\alpha_{d,d})) = -1$$

што заједно са чињеницом да је полином $R_{d+1}(x)$ полином $(d+1)$-вог степена (па за довољно мале вредности има знак $(-1)^{d+1}$) повлачи постојање $(d+1)$-ног корена полинома $R_{d+1}(x)$:

$$\alpha_{d+1,1} < \alpha_{d+1,2} < \ldots < \alpha_{d+1,d+1}$$

за које важи

$$\alpha_{d+1,1} < \alpha_{d,1} < \alpha_{d+1,2} < \alpha_{d,2} < \ldots < \alpha_{d+1,d} < \alpha_{d,d} < \alpha_{d+1,d+1}.$$

Овим је доказ индукцијом окончан.

21. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

309. *Решење 1*: Одредићемо првих неколико чланова, а затим погодити општи члан и коначно то показати математичком индукцијом. $a_1 = 3$ је дато у поставци задатка, а заменом вредности за m и n добијамо:

$$\begin{array}{lcl} m=0, n=0 & \Rightarrow & a_0 = 1 \\ n=0 & \Rightarrow & a_{2m} = 4a_m - 2m - 3 \\ m=1 & \Rightarrow & a_2 = 7 \\ m=2 & \Rightarrow & a_4 = 21 \\ m=2, n=1 & \Rightarrow & a_3 = 13. \end{array}$$

Сада можемо претпоставити да је $a_n = n^2+n+1$ и покажимо то математичком индукцијом.
База индукције: већ смо одредили $a_0 = 1 = 0^2+0+1$ и $a_1 = 3 = 1^2+1+1$, као и $a_2 = 7$.
Индукцијска претпоставка: претпоставимо да је тврђење тачно за неко $n \leqslant m$, тј. нека је $a_n = n^2+n+1$ за све $n \leqslant m$.
Индукцијски корак: из $a_{2m} = 4a_m - 2m - 3$ добијамо да је

$$a_{2m} = 4a_m - 2m - 3 = 4(m^2+m+1) - 2m - 3 = (2m)^2 + 2m + 1.$$

Сада ако у полазну релацију убацимо $n = 1$ добијамо да је

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= \frac{a_{2m}+a_2}{2} - a_{m-1} + m \\ &= \frac{(2m)^2+2m+1+7}{2} - [(m-1)^2 + 2(m-1)+1] + m, \end{aligned}$$

што коначно даје $a_{m+1} = (m+1)^2 + (m+1) + 1$.
По принципу математичке индукције имамо да је $a_n = n^2 + n + 1$ за свако $n \in \mathbb{N}_0$.
Одговор на питање из задатка је $a_{2004} = 2004^2 + 2005$.

Решење 2: за $n = 0$ добијамо

$$a_{2m} = 4a_m - 2m - 3. \tag{$*$}$$

За $m = 1$ и $n = 0$ добијамо $a_2 = 7$. $n = 1$ у полазној релацији даје $a_{m+1} + a_{m-1} - m = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_2)$ и одатле налазимо

$$a_{2m} = 2a_{m+1} + 2a_{m-1} - 2m - 7. \tag{$**$}$$

Када од $(**)$ одузмемо $(*)$ и поделимо са 2 добијамо нехомогену линеарну рекурентну једначину

$$a_{m+1} - 2a_m + a_{m-1} = 2. \tag{$\star$}$$

Како је и $a_{m+2} - 2a_{m+1} + a_m = 2$ одузимањем претходне две једнакости добијамо хомогену линеарну рекурентну једначину

$$a_{m+2} - 3a_{m+1} + 3a_m - a_{m-1} = 0.$$

Како карактеристична једначина $t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$ има троструки корен $t + 1$, добијамо да је општи члан облика $a_n = A + Bn + Cn^2$. Константе A, B и C лако се налазе из почетних услова $a_0 = 0 = A$, $a_1 = 3 = A + B + C$ анд $a_2 = 7 = A + 2B + 4C$: $A = B = C = 1$, што нам даје $a_n = n^2 + n + 1$ за свако $n \in \mathbb{N}_0$.
Одговор на питање из задатка је $a_{2004} = 2004^2 + 2005$.

Напомена: Могли смо и одмах да решимо нехомогену једначину $(\star)$, тада добијамо да је хомогени део решења $a_{n,h} = A+Bn$, а партикуларно решење је $a_{n,p} = n^2$, па је $a_n = a_{n,h} + a_{n,p} = A + Bn + n^2$. Константе A и B добијамо из почетних услова $a_0 = 1 = A$, $a_1 = 3 = A + B + 1$, што нам даје исто решење.

310. Јасно је да полазна једначина

$$x^y - y^x = xy^2 - 19 \tag{1}$$

нема решења за $x = y$ јер је тада лева страна једнака 0, а десна $x^3 - 19$, што је немогуће. Ако једначину (1) узмемо прво по модулу y, а затим и по модулу x добијамо

$$x + 19 \equiv 0 \pmod{y} \qquad (2) \qquad\qquad 19 - y \equiv 0 \pmod{x}. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) следи да xy дели $x - y + 19$. Не може бити $x - y + 19 = 0$ (због парности би x морало бити $x = 2$, али онда $y = 21$ није прост), те имамо неједнакости $x + y + 19 > |x - y + 19| \geqslant xy$ одакле је

$$(x-1)(y-1) < 20. \tag{4}$$

Одавде имамо да су прости бројеви x и y мањи од 20, што нам даје $|x-y|<19$. Стога је $|x-y+19|=x-y+19$, па је $x-y+19 \geqslant xy$, те је

$$(x+1)(y-1) \leqslant 18. \tag{5}$$

Из (9) следи да, за $x \geqslant 5$, прост број y може бити само $y=2$ или $y=3$. За $y=2$ имамо

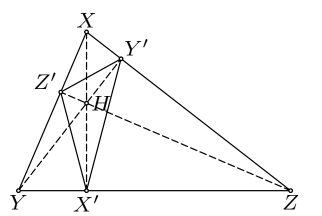
$$x^y - y^x = x^2 - 2^x < 0 < 5 \cdot 2^2 - 19 \leqslant x \cdot y^2 - 19$$

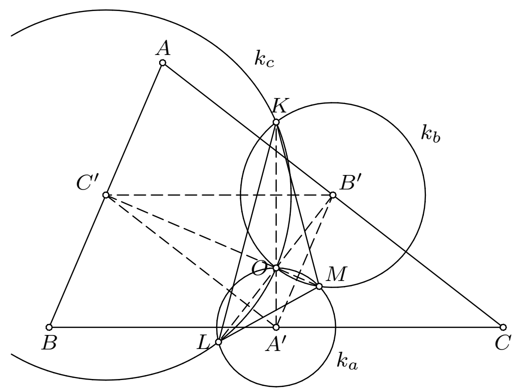
($x^2 - 2^x < 0$ се лако показује математичком индукцијом), док за $y=2$ имамо

$$x^y - y^x = x^3 - 3^x < 0 < 5 \cdot 3^2 - 19 \leqslant x \cdot y^2 - 19$$

(опет се $x^3 - 3^x < 0$ показује математичком индукцијом). Стога за $x \geqslant 5$ полазна једначина нема решења.
Остаје да проверимо случајеве $(x,y) \in \{(2,3),(2,5),(2,7),(3,2),(3,5)\}$. Добија се да су једина два решења $(x,y)=(2,3)$ и $(x,y)=(2,7)$.

311. Означимо са A', B' и C' средишта страница BC, CA и AB, респективно, као и са k_a, k_b и k_c кружнице кроз тачку O са центрима у тачкама A', B' и C'. Како су K и O пресечне тачке кружница k_b и k_c имамо да је $KO \perp B'C'$ (притом $B'C'$ полови KO), а како је $B'C' \parallel BC$ (средња линија $\triangle ABC$), добијамо да је $KO \perp BC$. Аналогно се добијају и $LO \perp CA$ и $MO \perp AB$.





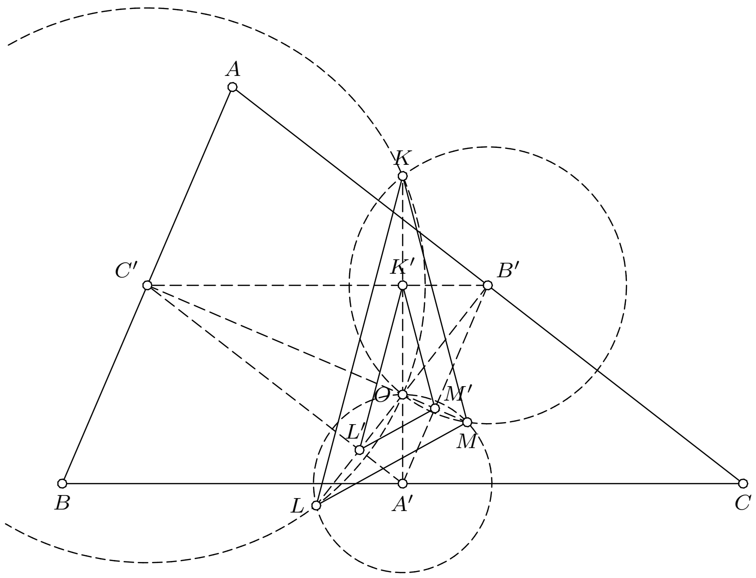
$\Leftarrow$: (нека је O центар описаног круга око $\triangle ABC$)
Решење 1: Искористићемо следећу лему:

Лема. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла $\triangle XYZ$ и нека су X', Y' и Z' пројекције ортоцентра H на странице YZ, ZX и XY, респективно. Тада је H центар уписаног круга у троугао $\triangle X'Y'Z'$.

Доказ леме: Четвороугао $XY'HZ'$ је тетиван јер је $\sphericalangle XY'H = \sphericalangle XZ'H = 90°$. Одатле имамо $\sphericalangle HZ'Y' = \sphericalangle HXZ$. Аналогно се добија и $\sphericalangle HZ'X' = \sphericalangle HYZ$. Али из сличности троуглова $\triangle X'XZ \sim \triangle Y'YZ$ добијамо да је $\sphericalangle HXZ = \sphericalangle HYZ$. Стога је $\sphericalangle HZ'Y' = \sphericalangle HZ'X'$, па је права HZ' симетрала угла $\sphericalangle X'Z'Y'$. Аналогно се показује и да је HY'

симетрала угла $\sphericalangle X'Y'Z'$, те је H центар уписаног круга у троугао $\triangle X'Y'Z'$.

Вратимо се на задатак. Како је $OA' \perp BC$, односно $OA' \perp B'C'$ добијамо да је O ортоцентар троугла $\triangle A'B'C'$. Како су $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ и како је $\triangle ABC$ оштроугли добијамо да је и $\triangle A'B'C'$ оштроугли, па је његов ортоцентар O у унутрашњости троугла $\triangle A'B'C'$. Означимо са K', L' и M' средишта дужи OK, OL и OM (то су подножја висина у троуглу $\triangle A'B'C'$). Сада на основу леме имамо да је O центар уписаног круга у троугао $\triangle K'L'M'$. Како је троугао $\triangle KLM$ слика троугла $\triangle K'L'M'$ при хомотетији са центром у O и коефицијентом 2, следи да је O и центар уписаног круга у троугао $\triangle KLM$.



<u>*Решење 2*</u>: Из чињенице да је $\sphericalangle A'B'O = 90^\circ - \sphericalangle B'A'C' = \sphericalangle A'C'O$ и из односа периферијских и централних углова у круговима k_b и k_c добијамо једнакост

$$\sphericalangle LKO = \frac{1}{2}\sphericalangle LC'O = \sphericalangle A'C'O = \sphericalangle A'B'O = \frac{1}{2}\sphericalangle MB'O = \sphericalangle MKO.$$

Слично као у претходном решењу можемо показати да је O тачка у унутрашњости троугла $\triangle A'B'C'$, а одавде следи да је O тачка у унутрашњости троугла $\triangle K'L'M'$. Због овога и једнакости $\sphericalangle LKO = \sphericalangle MKO$ добијамо да је KO симетрала угла $\sphericalangle LKM$. Аналогно се показује да је и MO симетрала угла $\sphericalangle KML$, те је O центар уписаног круга у троугао $\triangle KLM$.

$\Rightarrow$:

Како је O центар уписаног круга у $\triangle KLM$ имамо да O припада ун-

утрашњости троугла $\triangle KLM$, па он припада и унутрашњости троугла $\triangle K'L'M'$ који се добија од $\triangle KLM$ хомотетијом са центром у O и коефицијентом $\frac{1}{2}$. Како K' припада дужи $B'C'$, L' припада дужи $C'A'$ и M' припада дужи $A'B'$, добијамо да је тачка O и у унутрашњости троугла $\triangle A'B'C'$.
Из чињенице да је O центар уписаног круга у $\triangle KLM$ добијамо да је $\sphericalangle LKO = \sphericalangle MKO$, што нам са једнакостима $\sphericalangle LKO = \sphericalangle A'C'O$ и $\sphericalangle MKO = \sphericalangle A'B'O$ (које се показују аналогно, као у претходном смеру) даје $\sphericalangle A'C'O = \sphericalangle A'B'O$. Аналогно је $\sphericalangle C'A'O = \sphericalangle C'B'O$ и $\sphericalangle B'A'O = \sphericalangle B'C'O$. Сабирањем ове три једнакости добијамо

$$\sphericalangle C'A'O+\sphericalangle A'C'O+\sphericalangle B'C'O = \frac{\sphericalangle C'A'B' + \sphericalangle A'B'C' + \sphericalangle B'C'A'}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

Одавде следи да је $A'O \perp B'C'$, а због $B'C' \parallel BC$ имамо да је $A'O \perp BC$. Аналогно се показује и $B'O \perp AC$, те је O центар описаног круга око $\triangle ABC$.

Напомена: Бугарска комисија је у сваком смеру одузимала по 1 поен уколико се не покаже да је O унутрашња тачка троугла $\triangle KLM$, односно $\triangle A'B'C'$.

312. Ако су све праве паралелне, тада коришћењем услова 2° за сваку од две праве које одређују неку област, показујемо да су сви бројеви у областима једнаки 0 и тада није испуњен услов 1°.

Ако постоје две праве које нису паралелне показаћемо да је могуће уписати целе бројеве који задовољавају оба услова.
Прво ћемо уписати знаке, + и −, у све области, тако да су знаци у суседним областима различити. Да је могуће тако уписати знаке показаћемо принципом математичке индукције.
База индукције: за $n = 1$ можемо уписати: $+|-$
Индукцијска претпоставка: претпоставимо да је могуће уписати знаке тако да су знаци у суседним областима различити када је раван подељена на области са $n = k$ правих од које нису све паралелне.
Индукцијски корак: када имамо $n = k + 1$ правих тада имамо бар две праве које нису паралелне и уочимо једну од њих, праву p, коју кад одстранимо осталих k нису паралелне. Њу привремено одстранимо и у области на које раван дели преосталих k правих упишимо знаке према индукцијској претпоставци. Сада вратимо праву p и са једне њене стране свим бројевима променимо знак (а са друге стране оставимо знак који је био). Уочимо две суседне области.

- Ако су оне биле на оној страни праве p где се није мењао знак оне имају исти знак као пре увођења праве p, тако да оне имају различит знак.
- Ако су оне биле на оној страни праве p где се мењао знак, онда су обе промениле знак, па како су пре увођења праве p имале различит знак, онда опет имају различит знак.

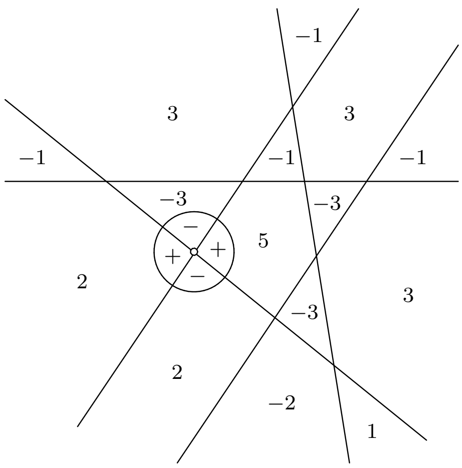
- Ако су ове области са разних страна праве p оне су настале од јединствене области која је подељена правом p, па оне имају различит знак.

Тиме смо показали да је могуће уписати знакове и када је раван подељена са $n = k + 1$ правих.

Сада у сваку област ставимо број $z \cdot u$, где је z већ одређени знак, а u је број углова у тој области.

Лако се проверава да овако уписани бројеви задовољавају оба услова:
1° У сваком пару суседних области имамо два цела броја, a и b, од којих је један позитиван, а други је негативан. Нека је $a < 0 < b$. Тада очигледно важи $ab \leqslant a < a + b$.
2° У свакој тачки пресека две праве ми бројимо околне углове или два или четири пута са различитим знацима: $+$ и $-$ у случају кад имамо 2 дела (тј. кад је та тачка пресека на правој у односу на коју рачунамо збир свих бројева са једне стране) и $+, -, +, -$ у случају кад имамо 4 дела (тј. кад бројимо све углове око те тачке).

Пример:



45. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

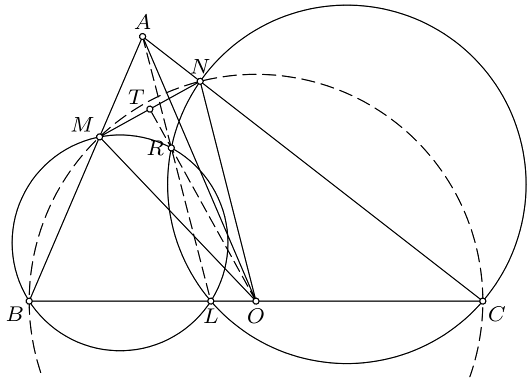
313. Означимо са L пресек симетрале угла $\sphericalangle BAC$ и странице BC, а са T средиште дужи MN и са α, β, γ углове троугла $\triangle ABC$ код темена A, B, C респективно. Нека је k кружница са дијаметром BC, k_B кружница описана око троугла $\triangle BMR$ и k_C кружница описана око троугла $\triangle CNR$.

Решење 1: Како је $OM = ON$, симетрала угла $\sphericalangle MON$ поклапа се са симетралом дужи MN. Стога се у троуглу $\triangle AMN$ симетрала угла $\sphericalangle MAN$ и симетрала странице MN секу у тачки R, која припада кружници описаној око троугла $\triangle AMN$.
(Приметимо да је $AM \neq AN$; заиста, $\sphericalangle AMN = 180^\circ - \sphericalangle BMN = \gamma$ и $\sphericalangle ANM = 180^\circ - \sphericalangle CNM = \beta$ добијамо из тетивног четвороугла $BCNM$, што са $\beta \neq \gamma$ које добијамо из претпоставке $AB \neq AC$, даје $\sphericalangle AMN \neq \sphericalangle ANM$, односно $AM \neq AN$.)

Из тетивних четвороуглова $AMRN$ и $BMNC$ имамо

$$\sphericalangle ARM = \sphericalangle ANM = \alpha = \sphericalangle ABL, \qquad \sphericalangle ARN = \sphericalangle AMN = \gamma = \sphericalangle ACL,$$

одакле добијамо да су четвороуглови $BLRM$ и $CLRN$ тетивни. Тиме смо показали да је L заједничка тачка кружница k_B и k_C, те се ове две кружнице секу у тачки (L) која припада страници BC.



Решење 2: Како су троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle ANM$ слични (у претходном решењу смо показали да је $\sphericalangle AMN = \gamma$ и $\sphericalangle ANM = \beta$), са одговарајућим тежишним линијама AO и AT, добијамо $\sphericalangle BAO = \sphericalangle CAT$. Стога је симетрала AR угла $\sphericalangle BAC$ такође и симетрала угла $\sphericalangle OAT$. Одатле добијамо

$$\frac{RT}{RO} = \frac{AT}{AO}.$$

Даље, користећи поново чињеницу да су AT и AO одговарајуће тежишне линије у сличним троугловима, као и да је O центар кружнице k која пролази и кроз B и кроз M (тј. $OB = OM$) добијамо следећи низ једнакости

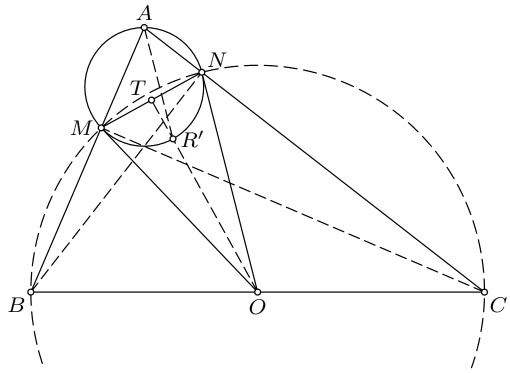
$$\frac{RT}{RO} = \frac{AT}{AO} = \frac{MN}{BC} = \frac{MT}{BO} = \frac{MT}{MO}.$$

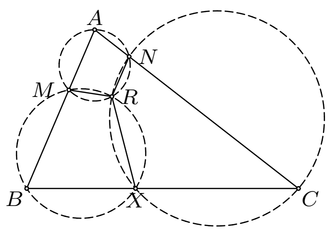
Одавде закључујемо да је MR симетрала угла $\sphericalangle OMN$. Сада имамо да је $\sphericalangle BMO = \beta$ (O је центар кружнице око $BCNM$) са $\sphericalangle AMN = \gamma$ (сличност $\triangle ABC \sim \triangle ANM$) нам даје $\sphericalangle OMN = \alpha$. Коначно добијамо $\sphericalangle BMR = \beta + \frac{1}{2}\alpha = \sphericalangle CLR$, одакле добијамо да тачке B, L, R, M припадају истој кружници. Потпуно аналогно добијамо и да C, L, R, N

припадају истој кружници, те се те две кружнице секу на страници BC.

<u>*Решење 3*</u> (Милан Новаковић): Како је BC пречник круга на коме су и M и N то је $BM \perp CM$ и $BN \perp CN$, па су BN и CM висине $\triangle ABC$ (пошто је он оштроугли, то су ове висине унутар троугла).

Нека симетрала $\sphericalangle MON$ (која је уједно и симетрала дужи MN јер је $\triangle MON$ једнакокрак, $OM = ON$) сече круг описан око $\triangle MAN$ у тачки R'. Тада је $MR' = NR'$ (јер је R' на симетрали дужи MN), па су и лукови $\widehat{MR'}$ и $\widehat{NR'}$ исте дужине, па је $\sphericalangle MAR' = \sphericalangle R'AN$ одакле је R' и на симетрали угла $\sphericalangle MAN$. Како $A \notin OR'$ ($A \in OR'$, тј. A је на симетрали дужи MN, па је $AM = AN \;\Rightarrow\; AC{\cdot}\cos\alpha = AB{\cdot}\cos\alpha \;\Rightarrow\; AC = AB$, што је противно услову задатка), те је R' пресек симетрала углова $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle MON$, дакле $R' = R$, па је четвороугао $MRNA$ тетиван.





Кругови описани око $\triangle BMR$ и $\triangle CNR$ се секу у R и нека је друга пресечна тачка X. Сада из тетивних четвороуглова $BXRM$, $MRNA$ и $XCNR$ добијамо следеће једнакости:

$$\sphericalangle BXR = 180^\circ - \sphericalangle RMB = 180^\circ - (180^\circ - \sphericalangle AMR) = \sphericalangle AMR,$$

$$\sphericalangle CXR = 180^\circ - \sphericalangle RNC = 180^\circ - (180^\circ - \sphericalangle ANR) = \sphericalangle ANR.$$

Одавде добијамо да је

$$\sphericalangle BXR + \sphericalangle CXR = \sphericalangle AMR + \sphericalangle ANR = 180^\circ,$$

одакле следи да су тачке B, X и C колинеарне. Тачка R је унутар угла $\sphericalangle BAC$ (јер је на симетрали угла $\sphericalangle BAC$) па је и X унутар $\sphericalangle BAC$. Тиме смо показали да X припада дужи BC, што је и требало доказати.

<u>*Напомена*</u>: Тврђење задатка остаје на снази и за произвољан круг k који пролази кроз тачке B и C, са центром O који не мора бити средиште странице BC.

314. Решење задатка чине полиноми

$$P(x) = \alpha x^2 + \beta x^4, \text{ где је } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

<u>*Решење 1*:</u> Ако је $a = b = 0$ онда је $ab + bc + ca = 0$ испуњено за свако $c \in \mathbb{R}$, те добијамо $P(0-0)+P(0-c)+P(c-0) = 2P(0+0+c)$, односно $P(0) + P(-c) = P(c)$ за све реалне c. Стављајући $c = 0$ добијамо $P(0) = 0$, те је $P(-c) = P(c)$ за све $c \in \mathbb{R}$. Дакле P је парна функција, те мора да буде облика $P(x) = a_n x^{2n} + a_{n-1}x^{2n-2} + \cdots + a_1 x^2$, са $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Сада ћемо показати да је степен $2n$ полинома P највише 4.

За произвољне реалне бројеве u и v, тројка

$$a = uv, \qquad b = (1-u)v, \qquad c = (u^2-u)v$$

задовољава услов:

$$ab + bc + ca = (a+b)c + ab = v(u^2-u)v + uv(1-u)v = 0.$$

Тада једначина постаје

$$P\big((2u-1)v\big) + P\big((1-u^2)v\big) + P\big((u^2-2u)v\big) = 2P\big((u^2-u+1)v\big) \text{ за све } u, v \in \mathbb{R}.$$

Фиксирајмо u и посматрајмо претходну једначину као полиноме по променљивој v. Изједначавањем водећих коефицијената на обе стране добијамо

$$(2u-1)^{2n} + (1-u^2)^{2n} + (u^2-2u)^{2n} = 2(u^2-u+1)^{2n} \quad \text{за све } u \in \mathbb{R}.$$

Стављајући $u = -2$ добијамо једнакост

$$5^{2n} + 3^{2n} + 8^{2n} = 2 \cdot 7^{2n}.$$

Како је $8^{2n} > 2 \cdot 7^{2n}$ већ за $n = 3$

$$(8^{2\cdot 3} > 256000 > 235298 = 2 \cdot 7^{2\cdot 3}),$$

а разлика између леве и десне стране је још већа што је веће n. Дакле $n \leqslant 2$, што повлачи $P(x) = \alpha x^2 + \beta x^4$ за неко $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Још треба да покажемо да сваки такав полином задовољава дати услов. Да бисмо ово проверили приметимо да је свака линеарна комбинација решења такође решење. Стога је довољно проверити да ли су x^2 и x^4 решења. x^2 је решење, што следи из идентитета

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 - 2(a+b+c)^2 = -6(ab+bc+ca).$$

За x^4 уведимо смене $x = a-b$, $y = b-c$, $z = c-a$ и приметимо да смо у провери за x^2 управо показали $x^2+y^2+z^2 = 2(a+b+c)^2$. Сада, како је $x+y+z = 0$, тражени услов добијамо на следећи начин:

$$xy + yz + zx = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) = -(a+b+c)^2,$$

$$(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)=(a+b+c)^4,$$
$$x^4+y^4+z^4=(x^2+y^2+z^2)^2-2\big[(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2\big]=2(a+b+c)^4.$$

Решење 2: За свако реално x тројка $(a,b,c)=(6x,3x,-2x)$ задовољава услов $ab+bc+ca=0$. За ову тројку услов постаје

$$P(3x)+P(5x)+P(-8x)=2P(7x)\quad \text{за све } x\in\mathbb{R}.$$

Ако је полином $P(x)$ облика $P(x)=\sum a_ix^i$, добијамо да важи

$$\big(3^i+5^i+(-8)^i-2\cdot 7^i\big)a_i=0\quad \text{за све } i=0,1,2,\ldots$$

Израз у загради је негативан за непарне вредности i, а позитиван за $i=0$ и све парне $i\geqslant 6$. Само за $i=2$ и $i=4$ овај израз је једнак 0. Одавде следи да је $P(x)=\alpha x^2+\beta x^4$, где су $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
Као и у претходном решењу остаје да проверимо да ли ово решење испуњава услов.

Решење 3 (Милан Новаковић): За $a=b=c=0$ је $ab+bc+ca=0$ и

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=3P(0)=2P(0)=2P(a+b+c),$$

одакле добијамо $P(0)=0$. За $a=b$ и $c=\frac{a}{2}$ је $ab+bc+ca=0$ и

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=P(0)+P(\frac{3a}{2})+P(-\frac{3a}{2})=2P(\frac{3a}{2}),$$

тј. $P(-\frac{3a}{2})=P(\frac{3a}{2})$. Како a може бити било који реалан број, та једнакост важи у полиномијалном смислу, тј. $P(-x)=P(x)$. Полином је паран, па је

$$P(x)=a_{2n}x^{2n}+a_{2n-2}x^{2n-2}+\ldots+a_2x^2+a_0,$$

а због $P(0)=0$ имамо да је $a_0=0$.

Приметимо да ако су $Q(x)$ и $R(x)$ решења, тада је и

$$P(x)=\alpha Q(x)+\beta R(x)$$

такође решење. Стога је довољно посматрати полиноме $P(x)=x^{2n}$.

За $n=1$ је $P(x)=x^2$ и тада је $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)=2(a^2+b^2+c^2)=2(a^2+b^2+c^2)+4(ab+bc+ca)=2(a+b+c)^2$.

За $n\geqslant 2$ имамо да је $c=-\dfrac{ab}{a+b}$. Тада ислов постаје

$$(a-b)^{2n}+\left(b+\frac{ab}{a+b}\right)^{2n}+\left(\frac{ab}{a+b}+a\right)^{2n}=2\left(a+b-\frac{ab}{a+b}\right)^{2n}.$$

Када ову једначину помножимо са $\left(\dfrac{a+b}{b}\right)^{2n}$ и уведемо смену $z=\dfrac{a}{b}$ добијамо једнакост

$$(z^2-1)^{2n}+(2z+1)^{2n}+(z^2+2z)^{2n}=2(z^2+z+1)^{2n}.$$

Како је $n \geqslant 2$, коефицијенти уз z^{4n-2} дају

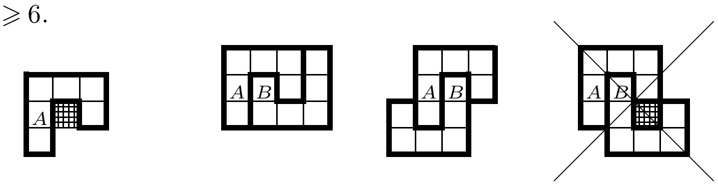
$$-\binom{2n}{1} + 0 + 2\binom{2n}{2} = 2 \cdot (\binom{2n}{1} + \binom{2n}{2}),$$

одакле је $3\binom{2n}{1} = 2\binom{2n}{2}$, тј. $3 \cdot 2n = (2n)(2n-1)$, што нам даје $n = 2$. Тиме смо показали да је за $n \geqslant 2$ једино решење $P(x) = x^4$.

Тражено решење је $P(x) = \alpha x^2 + \beta x^4$, где су $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

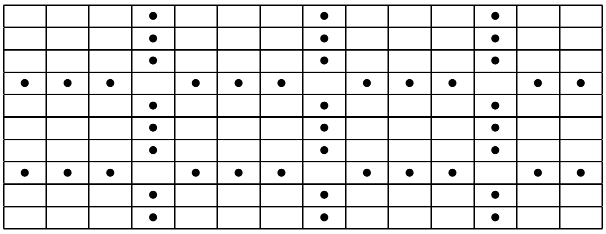
315. Одговор је: $4k \times 3\ell$ и $12k \times a$, $a \geqslant 6$.

Када спојимо две куке, као на другој слици ниже, добијамо правоугаоник димензија 4×3. Спајањем тих правоугаоника, добијамо да се могу прекрити сви правоугаоници димензија $4k \times 3\ell$, $k, \ell \in \mathbb{N}$. Такође, добијамо и да се сви правоугаоници облика $12k \times 3$, $12k \times 4$, $12k \times 6$ и $12k \times 8$ могу прекрити. Спајањем прве две врсте од малопре набројаних добијамо правоугаоник $12k \times 7$. Додавањем трака облика $12k \times 3$, покривамо правоугаонике $12k \times (6+3\ell)$, $12k \times (7+3\ell)$ и $12k \times (8+3\ell)$, чиме смо показали да је могуће покрити све правоугаонике облика $12k \times a$, где је $a \geqslant 6$.



Претпоставимо да смо покрили неки $m \times n$ правоугаоник тако да су испуњени услови задатка. За сваку куку A, постоји јединствена кука B која покрива "унутрашњи" квадратић куке A (на првој слици тај квадратић је исшрафиран). Назовимо B *суседом* од A. Јасно је да унутрашњи квадратић куке A мора бити покривен једним од "крајњих" квадратића куке B. У десном делу претходне слике представљене су све 3 могућности за постављање куке B тако да се она не преклапа са оригиналном куком A. У првом случају се добија правоугаоник 4×3; у другом A и B формирају унију два 2×3 правоугаоника који су налепљени један на други; а трећи случај је немогућ јер остаје непокривен усамљен квадратић између две куке (на слици је исшрафиран). У оба могућа случаја, оригинална кука A је сусед свога суседа B. Стога се све куке могу поделити у парове узајамних суседа. Стога је укупан број кука паран. Како се свака кука састоји од 6 квадратића, добијамо да је број квадратића, mn, у правоугаонику покривеном кукама дељив са 12.

Сада ћемо показати да је бар један од бројева m и n дељив са 4. Претпоставимо супротно, да су и m и n парни (mn је дељиво са 4) али да дају остатак 2 при дељењу са 4. Претпоставимо да је правоугаоник подељен на јединичне квадратиће, са врстама и колонома које су означене са $1, \ldots, m$ и $1, \ldots, n$ (од врха ка дну и са лева на десно). Ставимо кружић у квадратић у i-тој врсти и j-тој колони ако је тачно један од i и j дељив са 4, као што је приказано на следећој слици.



Сваки од два могућа облика који формирају две суседне куке прекрива 12 квадратића. Директном провером утврђујемо да ма како те две суседне куке биле постављене оне покривају или 3 или 5 кружића, односно покривају *непаран* број кружића.

Са друге стране имамо да ако је $m = 4u + 2$ и $n = 4v + 2$, тада је укупан број кружића $u(3v + 2) + v(3u + 2) = 2(3uv + u + v + 2)$, што је паран број. Дакле укупан број облика формираних од 2 суседне куке је паран. Одатле закључујемо да је укупан број квадратића у правоугаонику, mn, дељив са 24, а самим тим и са 8. Ово је у супротности са претпоставком да ниједан од бројева m и n није дељив са 4.

Без умањења општости можемо узети да је $m = 4k$. Ако m није дељиво са 3 онда је n (раније смо показали да је mn дељиво са 12) и онда имамо правоугаоник облика $4k \times 3l$. Ако је m дељиво и са 3, тада имамо правоугаоник облика $12k \times a$. Остаје да покажемо да a не може бити 1, 2 или 5. Наравно, ниједна кука не може бити смештена у траку ширине 1 или 2. Да би прекрили правоугаоник $12k \times 5$, морамо прекрити и ивичну траку S дужине 5. Али како год ставили две суседне куке да покривају неке од квадратића траке S, остаће нам квадратићи правоугаоника (из S) који се не могу прекрити. Овиме је доказ комплетиран.

Comment for the PSC. I am ready to restore the original exposition. It is probably personal, but I got confused when reading the proposed text as to how the “markings” are counted.

Solution 2. Consider a covering of an $m \times n$ rectangle satisfying the conditions. For any hook A, there is a unique hook B covering the “inside” square of A with one of its “endmost” squares. In turn, the “inside” square of B must be covered by an “endmost” square of A. Thus, in a tiling, all hooks are matched into pairs. There are only two possibilities to place B so that it does not overlap with A and no gap occurs. In one case, A and B form a 3×4 rectangle; in the other, their union is an octagonal shape, with side lengths 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2.

So an $m \times n$ rectangle can be covered with hooks if and only if it can be covered with the 12-square tiles shown above. Suppose that such a tiling exists; then mn is divisible by 12. We now show that one of m and n is divisible by 4.

Assume on the contrary that this is not the case; then m and n are both even, because mn is divisible by 4. Imagine the rectangle divided into unit squares, with the rows and columns formed labeled $1, \dots, m$ and $1, \dots, n$. Write 1 in the square (i, j) if exactly one of i and j is divisible by 4, and 2, if i and j are both divisible by 4. Since the number of squares in each row and column is even, the sum of all numbers written is even. Now, it is easy to check that a 3×4 rectangle always covers numbers with sum 3 or 7; and the other 12-square shape always covers numbers with sum 5 or 7. Consequently, the total number of 12-square shapes is even. But then mn is divisible by 24, and hence by 8, contrary to the assumption that m and n are not divisible by 4.

Notice also that neither m nor n can be 1, 2 or 5 (any attempt to place tiles along a side of length 1, 2 or 5 fails). We infer that if a tiling is possible, then one of m and n is divisible by 3, one is divisible by 4, and $m, n \notin \{1, 2, 5\}$.

Conversely, if these conditions are satisfied, the tiling is possible (using only 3×4 rectangles at that). This is immediate if 3 divides m and 4 divides n (or vice versa). Let m be divisible by 12 and $n \notin \{1, 2, 5\}$ (or vice versa). Then n can be represented as the sum of several 3's and several 4's. Hence the rectangle can be partitioned into $m \times 3$ and $m \times 4$ rectangles, which are easy to cover, only with 3×4 tiles again.

Напомена: Here is one more proof that one of m and n is divisible by 4 (the essential part of the problem). Depending on how a 12-square tile (of whichever type) is placed on the grid plane, exactly one of the following two situations occurs:

(a) The tile has 4 columns, each of length 3, and 3 or 4 rows, each of length 2 or 4;

(a) The tile has 4 rows, each of length 3, and 3 or 4 columns, each of length 2 or 4.

Suppose a tiling is possible; then mn is divisible by 12. If the number of tiles is even, then mn is divisible by 24, and one of m, n is divisible by 4. Let there be an odd number of tiles. Then one of the situations (a), (b) occurs an odd number of times, say (a). Color black every fourth column. Each (a)-tile covers 3 black squares, and each (b)-tile covers an even number of black squares. Thus the total number of black squares is odd, implying that the column length is odd. So the row length must be divisible by 4.

316. Због симетрије, довољно је показати $t_1 < t_2 + t_3$. Средимо израз

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} t_i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} &= n + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} \right) \\ &= n + t_1 \left(\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} \right) + \frac{1}{t_1}(t_2 + t_3) + \sum_{\substack{1 \leqslant i < j \leqslant n \\ (i,j) \neq (1,2),(1,3)}} \left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} \right).\end{aligned}$$

Због неједнакости аритметичке и геометријске средине је

$$\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}\geqslant\frac{2}{\sqrt{t_2t_3}},\quad t_2+t_3\geqslant 2\sqrt{t_2t_3},\quad \text{и}\quad \frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}\geqslant 2\quad \text{за све } i,j.$$

Ставимо $a=t_1/\sqrt{t_2t_3}>0$ и искористимо услов задатка:

$$n^2+1>\sum_{i=1}^{n}t_i\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}\geqslant n+2\frac{t_1}{\sqrt{t_2t_3}}+2\frac{\sqrt{t_2t_3}}{t_1}+2\left[\binom{n}{2}-2\right]=2a+\frac{2}{a}+n^2-4.$$

Како мора да буде $2a+2/a-5<0$, што је еквивалентно са условом $(2a-1)(a-2)<0$ те нам даје $1/2<a=t_1/\sqrt{t_2t_3}<2$. Дакле $t_1<2\sqrt{t_2t_3}$, што са још једном применом неједнакости аритметичке и геометријске средине даје $t_1<2\sqrt{t_2t_3}\leqslant t_2+t_3$, што је и требало показати.

Напомена: Није тешко одредити највећи број $f(n)$ такав да за позитивне $t_1,\dots,t_n$, неједнакост $\sum_{i=1}^{n}t_i\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}<f(n)$ повлачи да су било која три t_i-а странице троугла. Одговор је $f(n)=(n+\sqrt{10}-3)^2$.

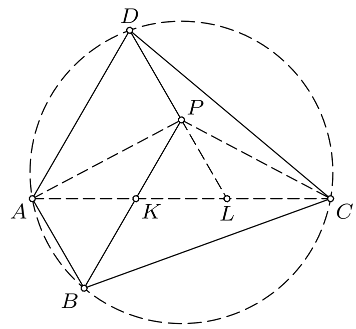
317. _Решење 1_: Како је P унутрашња тачка четвороугла $ABCD$, имамо да важи $\sphericalangle DBA<\sphericalangle DBC$ ако и само ако је $\sphericalangle BDA<\sphericalangle BDC$. Стога без умањења општости можемо претпоставити да се тачка P налази у троугловима $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$.

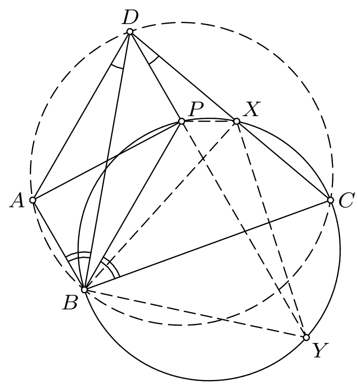
$\Rightarrow$: Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао. Означимо са K и L пресеке правих BP и DP са правом AC, респективно. Тада из једнакости у услову задатка ($\sphericalangle PBC=\sphericalangle DBA$ и $\sphericalangle PDC=\sphericalangle BDA$) и $\sphericalangle ACB=\sphericalangle ADB$, $\sphericalangle ABD=\sphericalangle ACD$ следи да су троуглови $\triangle DAB$, $\triangle DLC$ и $\triangle CKB$ слични. Одатле добијамо $\sphericalangle PLK=\sphericalangle PKL$, односно $PK=PL$.

Такође и троуглови $\triangle ADL$ и $\triangle BDC$ су слични одакле добијамо

$$\frac{AL}{BC}=\frac{AD}{BD}=\frac{KC}{BC},$$

што повлачи $AL=KC$. Сада имамо да су троуглови $\triangle ALP$ и $\triangle CKP$ подударни ($AL=CK$, $\sphericalangle ALP=\sphericalangle CKP$, $PL=PK$). Одатле следи $AP=CP$.





$\Leftarrow$: Обратно, нека је $AP = CP$. Означимо са X и Y тачке пресека круга описаног око $\triangle BCP$ са правама CD и DP, респективно. Троуглови $\triangle ADB$ и $\triangle PDX$ су слични, што повлачи да су и $\triangle ADP$ и $\triangle BDX$ слични. Одатле је

$$\frac{BX}{AP} = \frac{BD}{AD} = \frac{XD}{PD}. \tag{1}$$

Штавише, троуглови $\triangle DPC$ и $\triangle DXY$ су слични, што даје

$$\frac{YX}{CP} = \frac{XD}{PD}. \tag{2}$$

Како је $AP = CP$, из (1) и (2) следи $BX = YX$. Одатле је

$$\begin{aligned} \sphericalangle DCB &= \sphericalangle XYB = \sphericalangle XBY = \sphericalangle XPY = \sphericalangle PDX + \sphericalangle PXD \\ &= \sphericalangle ADB + \sphericalangle ADB = 180^\circ - \sphericalangle BAD. \end{aligned}$$

Претходна једнакост повлачи да је четвороугао $ABCD$ тетиван.

<u>*Решење 2*</u>: $\Rightarrow$: Нека тачке A, B, C, D леже на истом кругу k. Означимо пресеке правих BP и DP са кругом описаним око $ABCD$ са E и F, респективно. Из датих услова тада следи $\widehat{AB} = \widehat{CF}$ и $\widehat{AD} = \widehat{CE}$, те је $BF \parallel AC$ и $DE \parallel AC$. Стога је четвороугао $BFED$ једнакокраки трапез (или правоугаоник) чије се дијагонале секу у тачки P. Стога P лежи на пречнику круга k које је нормалан на AC. Одатле следи $AP = CP$.

$\Leftarrow$: Претпоставимо обратно да је $AP = CP$. Без умањења општости можемо узети да тачка P припада троугловима $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$. Означимо са K и L пресеке правих BP и DP са правом AC, респективно.

The points A and C are isogonal conjugates with respect to the triangle BDP, which implies that $\sphericalangle APK = \sphericalangle CPL$. Since $AP = CP$, we infer that K and L are symmetric with respect to the perpendicular bisector p of AC.

Let E be the reflection of D in p. Then E lies on the line BP, and the triangles APD and CPE are congruent. Thus $\sphericalangle BDC = \sphericalangle ADP = \sphericalangle BEC$, which means that the points B, C, E, D are concyclic. Moreover, A, C, E, D are also concyclic. So $ABCD$ is a cyclic quadrilateral.

318. Позитиван број n има алтернирајући садржалац ако и само ако n није дељив са 20.

Ако је n дељив са 20 тада су његове последње две цифре у децималном запису парне, те не постоји алтернирајући садржалац.

За остале вредности n постоји алтернирајући садржалац, што ћемо показати разбијајући проблем на случајеве. Одвојено ћемо разматрати када је n степен броја 2, као и када је облика $2 \cdot 5^k$. Надаље ћемо са $u^\alpha \parallel a$ означавати да је u^α највећи степен броја u који дели a.

Лема 1. За $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, постоји алтернирајући садржалац са парним бројем цифара.

<u>*Доказ Леме 1*:</u> Довољно је конструисати низ $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ децималних цифара за који важи

$$a_k \equiv k+1 \pmod 2; \qquad 2^{2k-1} \parallel \overline{a_{2k-1} \dots a_1}\,; \qquad 2^{2k+1} \parallel \overline{a_{2k}a_{2k-1} \dots a_1}$$

за свако $k \in \mathbb{N}$. Почнимо са $a_1 = 2$ и $a_2 = 7$. Ако је низ конструисан до a_{2k}, $k \geqslant 1$, за следећу цифру ставимо $a_{2k+1} = 4$. Тада је a_{2k+1} парна и

$$2^{2k+1} \parallel \overline{a_{2k+1}a_{2k} \dots a_1} = 4 \cdot 10^{2k} + \overline{a_{2k}a_{2k-1} \dots a_1}\,,$$

јер је $2^{2k+1} \parallel \overline{a_{2k}a_{2k-1} \dots a_1}$ по индуктивној хипотези, а и $2^{2k+2} \parallel 4 \cdot 10^{2k}$. Означимо $\overline{a_{2k+1}a_{2k} \dots a_1} = 2^{2k+1}A$, где је A непаран број. Сада, a_{2k+2} мора бити непаран и

$$\begin{aligned} 2^{2k+3} \parallel \overline{a_{2k+2}a_{2k+1} \dots a_1} &= a_{2k+2}10^{2k+1} + \overline{a_{2k+1}a_{2k} \dots a_1} \\ &= 2^{2k+1}[a_{2k+2}5^{2k+1} + A]. \end{aligned}$$

Како је $5^{2k} \equiv 1 \pmod 8$, ова релација важи за $5a_{2k+2} + A \equiv 4 \pmod 8$. Решења ове конгруенције су непарна, јер је A непаран. Штавише, решење a_{2k+2} ће бити изабрано из скупа $\{0, 1, \dots, 7\}$. Тиме смо завршили конструкцију, чиме је Лема 1 показана. $\diamondsuit$

Лема 2. За $n = 2 \cdot 5^k$, $k \in \mathbb{N}$, постоји алтернирајући садржалац са парним бројем цифара.

<u>*Доказ Леме 2*:</u> Конструишимо низ $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ децималних цифара за који важи

$$b_k \equiv k+1 \pmod 2 \quad \text{и} \quad 2 \cdot 5^k \mid \overline{b_k b_{k-1} \dots b_1}$$

за свако $k \in \mathbb{N}$. Почнимо са $b_1 = 0$ и $b_2 = 5$. Ако је низ конструисан до b_k, $k \geqslant 1$ и нека је $\overline{b_k \dots b_1} = 5^\ell B$, где је $\ell \geqslant k$ и B није дељив са 5. Следећа цифра b_{k+1} мора да задовољава

$$b_{k+1} \equiv k+2 \pmod 2 \quad \text{и} \quad 5^{k+1} \mid \overline{b_{k+1}b_k \dots b_1}$$

Како је $\overline{b_{k+1}b_k \dots b_1} = b_{k+1}10^k + \overline{b_k \dots b_1} = 5^k[b_{k+1}2^k + 5^{\ell-k}B]$ имамо следећа два случаја:

1° $\ell > k$ и тада бирамо $b_k \in \{0, 5\}$ са одговарајућом парно71у;
1° $\ell = k$ и тада је потребно да 5 дели $b_{k+1}2^k + B$. Сада, систем конгруенција

$$b_k \equiv k+1 \pmod 2 \quad \text{и} \quad b_{k+1}2^k + B \equiv 0 \pmod 5$$

има решење по Кинеској теореми о остацима, јер су 2^k и 5 узајамно прости. Такође, решење b_{n+1} може бити изабрано из скупа $\{0, 1, \ldots, 9\}$, као што је потребно. $\diamondsuit$

Приметимо да смо Лемом 2 показали тврђење и за $n = 5^k$, јер је малопре конструисани алтернирајући садржалац броја $2 \cdot 5^k$ и садржалац броја $n = 5^k$.

Прелазимо на општи случај $n = 2^\alpha 5^\beta m$, где је m узајамно прост са 10. Ако n није дељив са 20 онда је $2^\alpha 5^\beta$ степен броја 2, степен броја 5, или број облика $2 \cdot 5^\beta$. Према Лемама 1 и 2, у свим случајевима $2^\alpha 5^\beta$ има паран алтернирајући садржалац M са парним бројем $(2k)$ цифара. Јасно је да су и сви бројеви облика $\overline{MM\ldots M}$ такође алтернирајући садржаоци броја $2^\alpha 5^\beta$. Доказаћемо да је неки од њих и садржалац броја $n = 2^\alpha 5^\beta m$. Размотримо бројеве

$$C_\ell = 1 + 10^{2k} + \ldots + 10^{2k(\ell-1)}, \qquad \ell = 1, 2, \ldots, m+1.$$

Нека два од њих, C_{ℓ_1} и C_{ℓ_2}, $\ell_1 < \ell_2$, су когруентна по модулу m према Дирихлеовом принципу. Тада m дели њихову разлику:

$$m \mid C_{\ell_2} - C_{\ell_1} = C_{\ell_2 - \ell_1} \cdot 10^{2k\ell_1}.$$

Како је m узајамно прост са 10, следи да m дели $C_{\ell_2-\ell_1}$. Одатле директно следи да је $C_{\ell_2-\ell_1} \cdot M$, који је број облика $\overline{MM\ldots M}$, тражени алтернирајући садржалац броја n.

Решења пробних такмичења у 2004.

Прво интерно такмичење

Недеља, 7. децембар 2003.

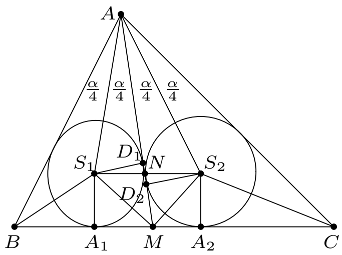
Први разред

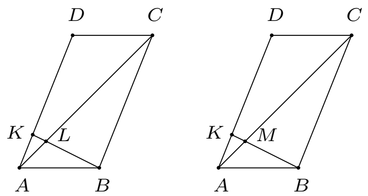
319. Из $a(bcd-1)=1235$, $b(acd-1)=235$, $c(abd-1)=35$, $d(abc-1)=5$ добијамо да су сви a,b,c,d непарни, али би онда број $abcd-a=1235$ био паран што је контрадикција, па не постоје такви цели бројеви.

320. Означимо са $t=\frac{x-1}{x+3}$. Тада је $tx+3t=x-1$, одакле налазимо $x=\frac{3t+1}{1-t}$. Тиме смо полазну једнакост свели на $f(t)+2f(\frac{1}{t})=\frac{3t+1}{1-t}$. Ако овде свако t заменимо са $\frac{1}{t}$ добијамо $f(\frac{1}{t})+2f(t)=\frac{3\frac{1}{t}+1}{1-\frac{1}{t}}=\frac{3+t}{t-1}$. Тако смо добили систем $f(t)+2f(\frac{1}{t})=\frac{3t+1}{1-t}$, $2f(t)+f(\frac{1}{t})=\frac{3+t}{t-1}$. Када од двоструке друге једначине одузмемо прву добијамо $3f(t)=\frac{7+5t}{t-1}$, а одатле је $f(t)=\frac{7+5t}{3t-3}$.

321. $\Leftarrow$: Троугао $\triangle ABC$ је једнакокрак са крацима $AB=AC \Rightarrow \triangle AMB\cong\triangle AMC$ ($AM=AM$, $AB=AC$ и $\sphericalangle BAM=\sphericalangle CAM=\frac{\alpha}{2}$), а за подударни троуглови имају једнаке полупречнике уписаних кругова: $r_1=r_2$.

$\Rightarrow$: Нека су S_1 и S_2 центри уписаних кругова у троуглове $\triangle ABM$ и $\triangle AMC$. Нека су A_1 и A_2 додирне тачке тих кругова и странице BC, а D_1 и D_2 додирне тачке тих кругова и симетрале AM и $S_1S_2\cap AM=\{N\}$. $\triangle S_1D_1N\cong\triangle S_2D_2N$ ($\sphericalangle S_1ND_1=\sphericalangle S_2ND_2$ – унакрсни углови, $\sphericalangle S_1D_1N=\sphericalangle S_2D_2N=90^\circ$ и $S_1D_1=r_1=r_2=S_2D_2$) $\Rightarrow$ $S_1N=S_2N$. AN је симетрала угла $\sphericalangle S_1AS_2$ (јер је $\sphericalangle S_1AN=\sphericalangle S_2AN=\frac{\alpha}{4}$) и та симетрала полови наспрамну страницу $S_1S_2 \Rightarrow$ троугао $\triangle S_1AS_2$ је једнакокрак и $AN\perp S_1S_2$ (односно тачке D_1, D_2 и N се поклапају). Из чињенице да је четвороугао $A_1A_2S_2S_1$ правоугаоник ($S_1A_1=r_1=r_2=S_2A_2$, $S_1A_1\perp BC$ и $S_2A_2\perp BC$) добијамо и да је $AM\perp BC$, што нам даје $\triangle AMB\cong\triangle AMC$ ($AM=AM$, $\sphericalangle BAM=\sphericalangle CAM=\frac{\alpha}{2}$ и $\sphericalangle BMA=\sphericalangle CMA=90^\circ$) $\Rightarrow$ $AB=AC$, па је троугао $\triangle ABC$ једнакокрак, q.e.d.





322. <u>*Решење 1*</u>: Означимо са $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Тада је $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\vec{b}$ и $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{5}(\vec{a} + \vec{b})$. Одатле је $\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AK} = \vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$ и $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK} = \frac{1}{5}(\vec{a} + \vec{b}) - \frac{1}{4}\vec{b} = \frac{1}{5}\vec{a} - \frac{1}{20}\vec{b}$. Како је $\overrightarrow{KB} = 5\overrightarrow{KL}$ добијамо да су тачке K, L и B колинеарне.

<u>*Решење 2*</u>: Исто као у претходном начину добијемо $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{5}(\vec{a}+\vec{b})$. Како је $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{5}(\vec{a}+\vec{b}) = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AK}$ и $\frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$ добијамо да су тачке B, L и K колинеарне.

<u>*Решење 3*</u>: Дужи KB и AC се секу и нека је $KB \cap AC = \{M\}$. Тада имамо сличне троуглове $\triangle AKM \sim \triangle CBM$ ($\sphericalangle AMK = \sphericalangle CMB$ – унакрсни углови, $\sphericalangle AKM = \sphericalangle MBC$ и $\sphericalangle MAK = \sphericalangle MCB$ – углови са паралелним крацима) па је $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{AK}{CB} = \dfrac{\frac{1}{4}AD}{AD} = \dfrac{1}{4}$, па је $MC = 4AM$, а како је $LC = 4AL$ добијамо да је $M = L$, односно $L \in KB$, тј. тачке K, L и B су колинеарне.

323. а) Оба случаја су могућа.
Уколико је у почетној позицији 20 белих фигура једна до друге, а затим 20 црвених фигура у сваком потезу ће први играч узимати 2 црвене са границе, а други играч ће у сваком потезу узимати 2 беле фигуре. Игра ће тада тећи на следећи начин

	п.п.	I	II	I	II	I	...	I	II	I
црвене	20	18	18	16	16	14		2	2	0
беле	20	20	18	18	16	16		4	2	2

и на крају остају само 2 беле.

б)<u>*Решење 1*</u>: Уколико је у почетној позицији 19 белих фигура једна до друге, а затим 21 црвена фигура у сваком потезу ће први играч узимати 2 црвене са границе, а други играч ће у сваком потезу узимати 2 беле фигуре, док на крају не остане по једна фигура и тада други играч узима последњу белу куглицу и остаје само 1 црвена. Игра ће тада тећи на следећи начин

	п.п.	I	II	I	II	I	...	II	I	II
црвене	21	19	19	17	17	15		3	1	1
беле	19	19	17	17	15	15		1	1	0

.

Решење 2: Уколико је у почетној позицији 19 црвених фигура једна до друге, а затим 18 белих фигура међу којима су још 3 раздвојене црвене у првом потезу ће први играч узети 5 црвених (2 са границе и све 3 издвојене), а затим ће други играч у сваком потезу узимати 2 беле фигуре, а први играч ће у сваком потезу узимати 2 црвене са границе. Игра ће тада тећи на следећи начин

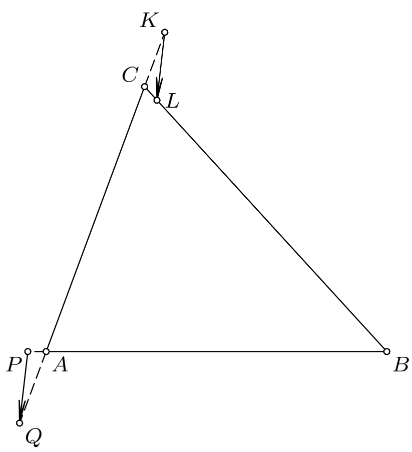
	п.п.	I	II	I	II	I	...	II	I	II
црвене	22	17	17	15	15	15		3	1	1
беле	18	18	16	16	14	14		2	2	0

и на крају остаје само 1 црвена.

Понедељак, 1. децембар 2003.

Други разред

324. Нека је $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$.
Тада је $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL} = \dfrac{\|\vec{c}\|}{\|\vec{b}\|}\vec{b} + \vec{c} + \dfrac{\|\vec{c}\|}{\|\vec{a}\|}\vec{a} = \|\vec{c}\| \cdot \left(\dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} + \dfrac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} + \dfrac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|}\right)$.
Сасвим слично се доказује да је $\overrightarrow{PQ} = \|\vec{a}\| \cdot \left(\dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} + \dfrac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} + \dfrac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|}\right)$, одакле следи да је $KL \| PQ$. Сасвим слично се доказује и да је $KL \| MN$ одакле следи тврђење у целини.



325. Нека су A' и C' тачке у којима праве AR и CS секу круг k по други пут. Праве AA' и CC' су нормалне на PQ, и како је AC' нормално на

CC' закључујемо да су праве RS и AC' паралелне. Сасвим слично закључујемо да је и $A'C \| RS$ и четвороугао $AA'CC'$ је правоугаоник. Нека је l права која садржи центар круга k и нормална је на $A'C$. Тада је l оса симетрије правоугаоника $A'CC'A$ и оса симетрије круга k одакле следи да је $SQ = PR$.

326. Нека је $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ при чему су p_i прости бројеви а α_i природни бројеви ($1 \leqslant i \leqslant k$). Нека је $d = p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$ произвољан делилац броја n^2. Тада је $0 \leqslant \beta_i \leqslant 2\alpha_i$. Овом делиоцу броја n^2 придружићемо уређени пар $f(d) = (u, v)$ на следећи начин: $u = p_1^{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\gamma_k}$, $v = p_1^{\delta_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\delta_k}$ при чему је

$$\gamma_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}, \quad \text{а} \quad \delta_i = \begin{cases} \beta_i - \alpha_i, & \gamma_i = \alpha_i, \\ \alpha_i, & \gamma_i < \alpha_i. \end{cases}$$

Јасно је да је НЗС $(u, v) = n$ и да за сваки пар (u, v) коме је најмањи заједнички садржалац једнак n постоји тачно један делилац d броја n^2 такав да је $f(d) = (u, v)$. На тај начин смо направили бијекцију између скупа свих уређених парова (u, v) којима је НЗС једнак n и свих делилаца броја n^2 одакле следи тражено тврђење.

327. За $a, b \in \mathbb{N}$ дефинишимо број a_b на следећи начин: $a_1 = 1$ и $a_{b+1} = a^{a_b}$, за $b \in \mathbb{N}$.

Докажимо следеће помоћно тврђење: Ако је $p > q$ и $\frac{a^p}{p} > \frac{b^q}{q}$, тада важи:

$$a^p > b^q \quad \text{и} \quad \frac{a^{a^p}}{a^p} > \frac{b^{b^q}}{b^q}.$$

Заиста, из полазних претпоставки одмах добијамо да је $b^q < \frac{q}{p} a^p < a^p$. Важи и:

$$\frac{b^{b^q}}{b^q} = b^{b^q - q} = (b^q)^{\frac{b^q}{q} - 1} < \left(\frac{q}{p} a^p\right)^{\frac{a^p}{p} - 1} < (a^p)^{\frac{a^p}{p} - 1} = \frac{a^{a^p}}{a^p}.$$

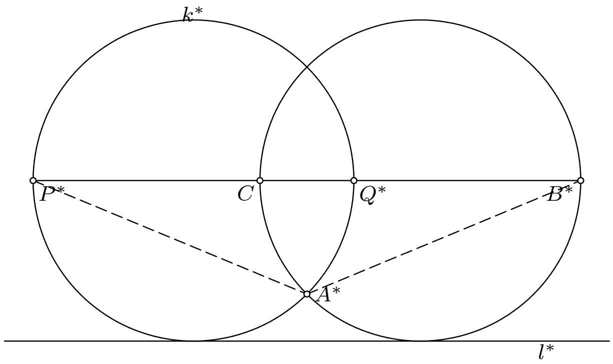
Примењујући доказано помоћно тврђење на бројеве $a^p > b^q$ и $\frac{a^{a^p}}{a^p} > \frac{b^{b^q}}{b^q}$, добијамо да је $a^{a^p} > b^{b^q}$ и $\frac{a^{a^{a^p}}}{a^{a^p}} > \frac{b^{b^{b^q}}}{b^{b^q}}$. Специјално, како је $3^3 > 1$ и $3^{3^3} > 100^1$, користећи претходно тврђење много пута добијамо да је $\frac{3_{101}}{3_{100}} > \frac{100_{99}}{100_{98}}$ (што нам није много потребно) и $3_{100} > 100_{98}$. Део да је $100_{99} > 3^{100}$ се лако доказује индукцијом. Према томе $m = 99$.

328. Означимо са B тачку у којој буба завршава пут. Посматрајмо општи граф у коме се свака ивица полиедра посматра као двострука. Ако су A и B различите, допуњавањем графа додатном ивицом BA добијамо граф са Ојлеровом контуром (то је путања бубе допуњена ивицом BA) у коме A и B имају непарне степене, што је немогуће (јер по теореми која карактерише Ојлерове графове имамо да граф има Ојлерову контуру ако и само ако је повезан и сваки чвор има паран степен). Следи да је $B = A$, па завршна тачка не зависи од пута.

Трећи разред

329. Нека је H ортоцентар троугла ABC. Нека је Q тачка праве PH таква да је $PH \cdot HQ = AH \cdot HK$. Тада тачка Q припада кругу описаном око троугла AHK. Како је $PH \cdot HQ = AH \cdot HK = BH \cdot HL = CH \cdot HM$ закључујемо да тачка Q припада и круговима описаним око троуглова BKL и CKM.

330. Применимо инверзију са центром C. Права PQ се пресликава у праву P^*Q^*, круг k се пресликава у круг k^* који је, поново, ортогоналан на PQ, а то значи да је P^*Q^* пречник круга k^*. Круг l се пресликава у праву l^* паралелну са P^*Q^* која додирује круг k^*. Права AB се пресликава у круг m^* који пролази кроз тачке A^* и B^* и који је ортогоналан на P^*Q^* (тј. чији се центар налази на правој P^*Q^*). Како права l^* додирује и m^*, закључујемо да су m^* и k^* подударни. Пошто је A^* пресечна тачка кругова k^* и m^*, добијамо да је $\angle A^*P^*C = \angle A^*B^*C$. Још остаје да се види да је $\angle A^*P^*C$ једнак углу између круга A^*P^*C и праве AC, и као такав једнак је углу $\angle PAC$. Сасвим слично се доказује да је $\angle A^*B^*C = \angle CAB$, одакле следи тражено тврђење.



331. Видети решење 336. задатка (3. за четврти разред).

332. Нека је P произвољна плава тачка (ако таква тачка не постоји, тврђење је доказано). Посматрајмо круг k са центром P. Тај цео круг мора бити црвене боје. Посматрајмо произвољан правилан шестоугао $ABCDEF$ који припада том кругу. Нека је $AB \cap CD = X$, $CD \cap EF = Y$ и $EF \cap AB = Z$. Бар две од тачака X, Y и Z су плаве боје. Ротирајмо тачке A, B, C, D, E, F, X, Y и Z око тачке P за такав угао да добијемо $A', B', \ldots, Z'$ тако да буде $XX' = 1, YY' = 1$ и $ZZ' = 1$. Јасно је да су бар две од тачака X', Y' и Z' плаве боје па је бар једна од дужи XX', YY', ZZ' јединична дуж са плавим крајевима.

333. Претпоставимо да је $P(x) \equiv Q(x)R(x)$. Како је $P(0) = p = Q(0)R(0)$, можемо узети без смањења општости да је $|Q(0)| = 1$. Ако је $Q(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - \alpha_i)$, тада је $|\alpha_1 \ldots \alpha_k| = 1$ одакле је и $|\alpha_1^m \ldots \alpha_k^m| = 1$, па пошто је на основу дефиниције полинома P, $\alpha_i^m(\alpha_i - a)^n = -p$, важи $|Q(a)|^n = |(\alpha_1 - a)^n \ldots (\alpha_k - a)^n| = |\prod_{i=1}^{k} \alpha_i^m(\alpha_i - a)^n| = p^k$. Међутим, $|Q(a)| \mid p = |P(a)|$, дакле $|Q(a)| = 1$ или $|Q(a)| = p$. Прва могућност наравно отпада, значи $|Q(a)| = p$, па одавде следи $p^n = p^k$. Дакле $\deg Q = k = n$, због чега је и $\deg R = m$. Сада из познате релације $a \mid |Q(a) - Q(0)| = p \pm 1$ долазимо до контрадикције.

Четврти разред

334. Нека је M средиште лука BC који не садржи A. Означаваћемо са ψ инверзију са центром у E, и са X' слику $\psi(X)$ ма ког објекта X. Ова инверзија слика праву AB у себе, па су и тачке A', E, M', D' колинеарне, а права BD се слика у круг $EB'D'$. При том је $\measuredangle EB'D' = \measuredangle EDB = \measuredangle EAB + \measuredangle EMB = \measuredangle EB'A' + \measuredangle EB'M' = \measuredangle A'B'M'$. Слика круга χ је права паралелна правој $A'EM'D'$, и додирује кругове $A'B'M'$ и $EB'D'$, одакле због управо изведеног $\measuredangle EB'D' = \measuredangle A'B'M'$ добијамо да су ова два круга подударна, па су између осталог и троуглови $D'B'E$ и $A'B'M'$ подударни. Следи $\measuredangle ED'B' = \measuredangle EA'B'$, дакле $\measuredangle EBD = \measuredangle EBA$. Закључујемо да се E налази на симетрали угла ABC, па је то центар уписаног круга у $\triangle ABC$.

335. Ако $a \mid b$ онда за различите природне бројеве u и v важи $u^a - v^a \mid u^b - v^b$. Нека је $n = 3^{2^k} - 2^{2^k}$. Доказаћемо да $n \mid 3^{n-1} - 2^{n-1}$. Довољно је доказати да $2^k \mid n - 1 = 3^{2^k} - 2^{2^k} - 1$. Докажимо, сада, индукцијом да $2^k \mid 3^{2^k} - 1$. За $k = 1$ ово је очигледно, а ако тврђење важи за k, онда постоји природан број l такав да је $3^{2^k} = 2^k l + 1$, па је $3^{2^{k+1}} - 1 = \left(3^{2^k}\right)^2 - 1 = \left(3^{2^k} - 1\right)\left(3^{2^k} + 1\right) = 2^k l \left(3^{2^k} + 1\right)$. Последњи број је, очигледно, дељив са 2^{k+1}.

336. Нека су $p_1, p_2, \ldots, p_{2004}$ различити прости бројеви. Узећемо да је $n + 1$ дељив са ${p_1}^2$, $n + 2$ са ${p_2}^2, \ldots$, $n + 2003$ са ${p_{2003}}^2$, односно добијамо систем конгруенција $n \equiv -1 \pmod{{p_1}^2}$, $n \equiv -2 \pmod{{p_2}^2}$, $\ldots$, $n \equiv -2003 \pmod{{p_{2003}}^2}$. Тиме смо испунили услов $2°$. Ако узмемо да је $n \equiv -2004 + p_{2004} \pmod{{p_{2004}}^2}$, тада имамо да је $n + 2004$ дељив са p_{2004}, а није са ${p_{2004}}^2$, па $n + 2004$ није потпун степен неког природног броја и тиме смо испунили и услов $3°$. Сви ови модули су узајамно прости па по Кинеској теореми о остацима постоји такав број n, чак за n добијамо бесконачно много решења $n_0 + t \cdot m$, где је $m = {p_1}^2{p_2}^2 \ldots {p_{2004}}^2$ и $t \in \mathbb{Z}$. Сада ћемо искористити Дирихлеову теорему:
Т. У свакој аритметичкој прогресији $at + b$, $t \in \mathbb{Z}$, $(a, b) = 1$ постоји прост број.

Погодним избором простих бројева p_i (нпр. сви већи од 2004) добијамо да су бројеви n_0 (који је између 0 и m) и m узајамно прости, па нам у тој аритметичкој прогресији постоји прост број p и онда ћемо узети $n = p$ (тиме смо испунили и услов 1°).

337. 1° За $n = 4$ лева страна неједнакости постаје $\dfrac{x_1 + x_3}{x_2 + x_4} + \dfrac{x_2 + x_4}{x_1 + x_3}$. Међутим $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$ важи за свака два позитивна реална броја a и b као директна последица неједнакости између аритметичке и геометријске средине.

Докажимо да ако тврђење важи за неко n тада оно важи и за $n+1$. Претпоставимо да су $x_1, \ldots, x_{n+1}$ дати бројеви такви да је x_{n+1} најмањи (или један од најмањих). Тада је $\dfrac{x_1}{x_{n+1} + x_2} + \dfrac{x_n}{x_{n-1} + x_{n+1}} + \dfrac{x_{n+1}}{x_n + x_1} > \dfrac{x_1}{x_{n+1} + x_2} + \dfrac{x_n}{x_{n-1} + x_{n+1}} \geq \dfrac{x_1}{x_n + x_2} + \dfrac{x_n}{x_{n-1} + x_1}$ и тражено тврђење директно следи.

2° Ако је $x_1 = x_2 = 1$ и $x_k = \varepsilon^{k^2}$ за неко $0 < \varepsilon < 1/2$, тада је $\dfrac{x_1}{x_n + x_2} + \dfrac{x_2}{x_1 + x_3} + \ldots + \dfrac{x_{n-1}}{x_{n-2} + x_n} + \dfrac{x_n}{x_{n-1} + x_1} \leq 2 + \varepsilon^{3^2} + \varepsilon^{4^2 - 3^2} + \varepsilon^{5^2 - 4^2} + \cdots + \varepsilon^{n^2 - (n-1)^2} \leq 2 + \varepsilon^9 + \varepsilon^{2 \cdot 3} + \varepsilon^{2 \cdot 4} + \cdots + \varepsilon^{2 \cdot (n-1)} \leq 2 + \varepsilon^9 + \varepsilon^6 < 2 + \varepsilon$. Пошто је $0 < \varepsilon < 1/2$ произвољно, константа 2 је најбоља могућа.

338. Из конвексности скупа S следи да, кад год S садржи три неколинеарне тачке A, B, C, онда садржи и све унутрашње тачке троугла ABC. Самим тим, S садржи све тачке произвољне кружнице k у унутрашњости $\triangle ABC$.

Постоји бесконачно много правилних N-тоуглова уписаних у кружницу k, при чему је $N = (n-1)p + 1$. По Дирихлеовом принципу, у сваком од ових N-тоуглова бар n темена има исту боју. Овако смо сваком оваквом N-тоуглу придружили једнобојни n-тоугао. Како су темена сваког таквог n-тоугла уједно и темена неког правилног N-тоугла фиксне странице, то међу придруженим n-тоугловима постоји само коначно много међусобно неподударних. Дакле, међу придруженим n-тоугловима, којих је бесконачно много, постоји бесконачан скуп M међусобно подударних (једнобојних) n-тоуглова. Како је скуп боја коначан, постоји бесконачно много n-тоуглова из скупа M који су сви обојени истом бојом.

Друго интерно такмичење

Петак, 30. јануар 2004.

339. а) Претпоставимо да се, када златник пређе из руку једног витеза у руке другог, први витез *потпише* на златнику. Затим, ако неки витез даје златник свом суседу, претпоставимо да му он даје златник потписан од стране обојице (уколико такав држи у руци). На тај начин сваки златник постаје заробљен између два витеза, и за $n < 2005$ постоје два суседа који никад неће разменити златник. Због тога, постоји витез V који је био на потезу само коначан број пута. Ако је његов сусед играо бесконачно пута, онда би V након свог последњег потеза само акумулирао златнике бесконачно дуго, што је немогуће. Према томе, сваки витез је на потезу био само коначан број пута.

б) да ли се расподела може завршити ако је $z = 2005$?

340. Из дате једначине видимо да је $0 = (BP^2 + PE^2) - (CP^2 + PF^2) = BF^2 - CE^2$, па је $BF = CE = x$ за неко x. Слично, постоје y и z такви да је $CD = AF = y$ и $BD = AE = z$. Једноставно се проверава да D, E и F припадају сегментима BC, CA, AB.

Означимо са a, b, c дужине сегмената BC, CA, AB. Следи да $a = z + y$, $b = z + x$, $c = x + y$, па су D, E, F тачке у којима приписани кругови додирујуј ивице $\triangle ABC$. Дакле, P, D и S_A аре су колинеарне и $\angle PS_AC = \angle DS_AC = 90^\circ - \dfrac{180^\circ - \angle ACB}{2} = \dfrac{\angle ACB}{2}$. На исти начин можемо добити $\angle PS_BC = \dfrac{\angle ACB}{2}$ и $PS_B = PS_A$. Аналогно добијамо $PS_C = PS_B$ што значи да је P центар описаног круга троугла $S_AS_BS_C$.

341. Нека је $S_N = \{(m,n) \in S \mid m+n = N\}$ за произвољан непаран број $N > 1$. Ако је $f(m,n) = (m_1, n_1)$, онда је $m_1 + n_1 = m + n$ и m_1 је непаран, $m_1 \leqslant \frac{n}{2} < \frac{N}{2} < n_1$, што значи да f слика S_N у S_N. Шта више, f је бијективна јер је за дато $f(m,n) = (m_1, n_1)$ број n једнозначно одређен као јединствен паран број облика $2^k m_1$ који припада интервалу $[\frac{N+1}{2}, N]$. Самим тим је и m једнозначно одређено.

Скуп S_N има највише $\left[\frac{N+1}{4}\right]$ елемената, при чему једнакост важи ако и само ако је N прост. Према томе, за свако $(m,n) \in S_N$ постоје s, r, $1 \leq s < r \leq \left[\frac{N+5}{4}\right]$ такви да је $f^s(m,n) = f^r(m,n)$. Због бијективности f следи $f^t(m,n) = (m,n)$ за $t = r - s$, $0 < t \leq \left[\frac{N+1}{4}\right] = \left[\frac{m+n+1}{4}\right]$.

Нека је $(m,n) \in S_N$ и нека је t најмањи природан број за који је $f^t(m,n) = (m,n)$. Пишемо $(m,n) = (m_0, n_0)$ и $f^i(m,n) = (m_i, n_i)$ за $i = 1, \ldots, t$. Тада постоје $a_i \in \mathbb{N}$ такви да је $2^{a_i} m_i = n_{i-1}$, $i = 1, \ldots, t$. Како је $m_t = m_0$, множењем ових једнакости добијамо

$$2^{a_1 + a_2 + \ldots + a_t} m_0 m_1 \ldots m_{t-1} = n_0 n_1 \ldots n_{t-1} \equiv (-1)^t m_0 m_1 \ldots m_{t-1} \pmod{N}. \quad (1)$$

Следи да $N \mid 2^k \pm 1$ и одатле $N \mid 2^{2k} - 1$, где $k = a_1 + \cdots + a_t$. С друге стране, такође следи $2^k \mid n_0 n_1 \ldots n_{t-1} \mid (N-1)(N-3) \cdot \cdots \cdot (N - 2[\frac{N}{4}])$. Међутим, из једнакости

$$\frac{(N-1)(N-3) \cdot \cdots \cdot (N - 2[\frac{N}{4}])}{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2[\frac{N-2}{4}] + 1)} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (N-1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot \frac{N-1}{2}} = 2^{\frac{N-1}{2}},$$

закључујемо $0 < k \leq \frac{N-1}{2}$, при чему важи једнакост ако и само ако

$\{n_1, \dots, n_t\}$ је скуп свих парних бројева од $\frac{N+1}{2}$ до $N-1$, и дакле $t = \frac{N+1}{4}$.

Ако је сада $N \nmid 2^h - 1$ за $1 \le h < N-1$, мора бити $2k = N-1$. Закључујемо да је $t = \frac{N+1}{4}$.

342. Имамо да је $f(x+a+b) - f(x+a) = f(x+b) - f(x)$, за $a = 1/6$ и $b = 1/7$. Сабирајући ове једнакости за $x, x+b, \dots, x+6b$ добијамо $f(x+a+1) - f(x+a) = f(x+1) - f(x)$. Сабирајући нове једнаксоти за $x, x+a, \dots, x+5a$ добијамо:

$$f(x+2) - f(x+1) = f(x+1) - f(x).$$

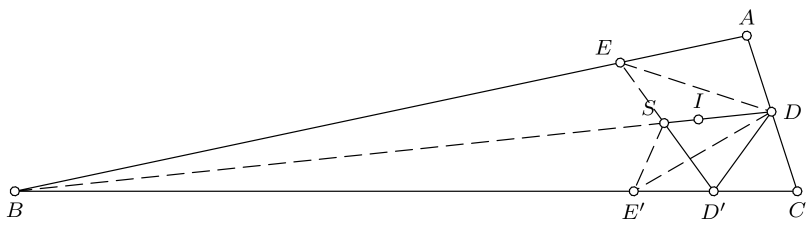
Индукцијом закључујемо да је $f(x+n) - f(x) = n[f(x+1) - f(x)]$. Ако би било $f(x+1) \neq f(x)$, онда би $f(x+n) - f(x)$ по апсолутној вредности могло да буде веће од произвољно великог броја за довољно велико n, што противречи претпоставци да је f ограничена. Дакле $f(x+1) = f(x)$ за свако x.

Треће интерно такмичење

Недеља, 21. март 2004.

Први и други разред

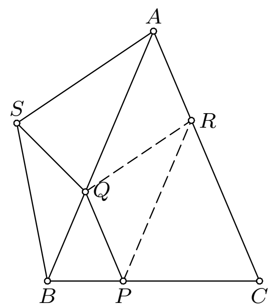
343. Нека су α, β, γ углови троугла код темена A, B, C редом. Означимо са $I = BD \cap CE$ центар уписаног круга троугла ABC. Пошто је $180^\circ - \beta/2 - \gamma/2 = \sphericalangle BIC = \sphericalangle DIE = 138^\circ$, добијамо $\beta + \gamma = 84^\circ$, па је дакле $\alpha = 96^\circ$.



Доцртајмо тачке D' и E' симетричне тачкама D и E у односу на CE и BD редом: ове тачке се наравно налазе на страници BC. Нека је S пресек правих ED' и BD. Тада је $\sphericalangle BDE' = 24^\circ$ и $\sphericalangle D'DE' = \sphericalangle D'DE - \sphericalangle E'DE = 24^\circ$, и према томе DE' је унутрашња симетрала угла SDD'. Такође, имамо да је $\sphericalangle E'SB = \sphericalangle ESB = \sphericalangle EDS + \sphericalangle DES = 60^\circ$, одакле следи да је SE' спољашња симетрала угла DSD'. Закључујемо да је E' центар споља приписаног круга троугла DSD', па зато он лежи на спољашњој симетрали угла $DD'S$. Сада је лако израчунати углове троугла ABC: имамо $\sphericalangle D'DC = \sphericalangle DD'C = \sphericalangle SD'E' = \frac{1}{2}(180^\circ - 72^\circ) = 54^\circ$, па је коначно $\gamma = 180^\circ - 2 \cdot 54^\circ = 72^\circ$ и $\beta = 12^\circ$.

344. Како је троугао ABC једнакокрак знамо да је $\measuredangle ABC = \measuredangle BCA$.

Троугао QBP је једнакокрак па из $QP = QB$ и $QS = QP$, закључујемо да је $QS = QB$ одакле следи да је $\measuredangle BSQ = \measuredangle SBQ$. Пошто је и $\measuredangle SQR = \measuredangle PQR = \measuredangle QRA$ акључујемо да је $SQRA$ једнакокраки трапез, па је и $\measuredangle ASQ = \measuredangle RAS$.



Сада је јасно да је $\measuredangle BSA + \measuredangle BCA = \measuredangle CBS + \measuredangle CAS$ што значи да је $BCAS$ тетиван.

345. $(n+2)^4 - n^4 = \left((n+2)^2 - n^2\right) \cdot \left((n+2)^2 + n^2\right) = (4n+4)(2n^2+4n+4) = 8(n+1)(n^2+2n+2) = 8\left((n+1)^3 + (n+1)\right) = 8(k^3+k)$, где је $k = n+1$. Број $k^3 + k$ не може бити потпун куб јер је $k^3 < k^3 + k < (k+1)^3$.

346. $S^2 = \frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} + 2(x^2+y^2+z^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{z^2x^2}{y^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2}\right) + 2 \geqslant \frac{1}{2}2y^2 + \frac{1}{2}2x^2 + \frac{1}{2}2z^2 + 2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2 = 3$. Дакле, $S^2 \geqslant 3$, па како је $S > 0$, то је $S \geqslant \sqrt{3}$. Једнакост важи за $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

347. Претпоставимо да је то могуће. Нека је n број четвороуглова у подели. Означимо са S збир свих углова свих четвороуглова. Јасно је да је $S = 360^\circ n$.
Сваки од четвороуглова има по један неконвексан угао и теме сваког од неконвексних углова се налази у унутрашњости многоугла. Свако теме може бити теме само једног од неконвексних углова. Према томе, број темена неконвексних углова је једнак n. Збир свих углова око тих темена је једнак $360^\circ n$, и како четвороуглови у подели имају још темена (темена многоугла, и евентуално, темена на рубу многоугла), закључујемо да је $S > 360^\circ n$, што је контрадикција.

Понедељак, 22. март 2003.

Трећи и четврти разред

348. Разрежимо тетраедар дуж ивица DA, DB, DC и развијмо га у равни троугла ABC. Другим речима, конструишимо тачке D_a, D_b, D_c у равни ABC такве да су троуглови D_aBC, D_bCA, D_cAB редом подударни троугловима DBC, DCA, DAB и доцртани изван троугла ABC. Сада услов задатка значи управо да су D_b, A, D_c колинеарне и да су D_a, B, D_c колинеарне. Штавише, пошто је $D_bA = D_cA = DA$ и $D_aB = D_cB = DB$, тачке A и B су редом средишта дужи D_bD_c и D_aD_c. Следи да је $AB = \frac{1}{2}D_aD_b$. Како је, с друге стране, $D_aD_b \leqslant CD_a + CD_b = 2CD$, закључујемо да је $AB \leqslant CD$.

349. Претпоставимо да је $a_n = 10q + r$ ($r \in \{0, \dots, 9\}$) највећи од датих бројева. Ако све оне бројеве $10q$, $10q+1$, $\dots$, $10q+9$ међу бројевима a_n избацимо, а уместо њих убацимо q, полазно својство ће и даље важити, с тим што ће се збир $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$ повећати. Настављајући ову процедуру, можемо постићи да сви a_i-ови постану једноцифрени, а да се при том сума реципрочних вредности стално повећава. Како је у случају кад су сви a_i-ови једноцифрени почетна сума не већа од $1 + \dfrac{1}{2} + \dots + \dfrac{1}{9}$, тврђење задатка следи.

350. Приметимо да је полином $Q(x) = P(x) - x$ неопадајући почев од неког M (иначе не би могао да буде позитиван, а мора да буде већи од 1 за свако n).
Јасно је да је $P(x) \geqslant x+1$ за сваки природан број x. Уколико би важило $P(x) = x + 1$ за бесконачно много $x \in \mathbb{N}$, онда би било $P(x) = x + 1$ (јер ненула полином $P(x) - x - 1$ не може да има бесконачно много нула).
Према томе, постоји индекс $k \in \mathbb{N}$ такав да је $x_k > M$ и $P(x_k) - x_k \geqslant 2$. Тада за свако $l \geqslant k$ важи $P(x_l) - x_l \geqslant 2$.
Докажимо да постоји природан број $m \geqslant k$ такав да $P(x_m) - x_m$ не дели x_m. У супротном би $P(x_m) - x_m$ био делилац броја x_m за свако $m \geqslant k$, и како $x_m \to +\infty$, то је могуће једино ако је $P(x) - x$ константа (укључујући и 0) или x. Случај $P(x) = x + c$ је немогућ, јер је $c \geqslant 2$ и $x_n = 1 + cn$ па ни за једно n, x_n није дељив са c. У случају $P(x) - x = x$ би било $P(x) = 2x$ и $x_n = 2^{n-1}$ и ни један од чланова низа не би био дељив са 3.
Нека је сада m природан број такав да $d = P(x_m) - x_m \geqslant 2$ не дели x_m. Имамо да је $x_{m+1} \equiv x_m \pmod d$ што имплицира да је $P(x_{m+1}) \equiv P(x_m) \pmod d$, односно $x_{m+2} \equiv x_{m+1} \pmod d$. Индукцијом следи да је $x_n \equiv x_m \pmod d$ за свако $n \geqslant m$, што значи да d не дели ни један од бројева

x_n за $n \geqslant m$, а то је у контрадикцији са чињеницом да за свако $\alpha \in \mathbb{N}$ постоји индекс n такав да $d^\alpha \mid x_n$.

351. Означимо са z број златника. Конфигурације ћемо писати по следећем примеру: $\{5!, 2!, 4\}$ који означава да је најјачи предложио да он добије 5, средњи 2 и најслабији 4 златника при чему су најјачи и средњи гласали за тај предлог, а најслабији не. Пирате ћемо означавати бројевима 1, 2, … (почевши од најслабијег). Разматрајмо два случаја:

- $2z \geqslant n$. За $n = 2$ најјачи евидентно задржава сав плен за себе. Даље је по индукцији евидентно да ће финална расподела бити $\{z - k + 1!, 0, 1!, 0, \ldots, 1!, 0\}$ за $n = 2k$ и $\{z - k!, 0, 1!, 0, \ldots, 1!, 0, 1!\}$ за $n = 2k+1$ јер би пирати који су у расподели добили један златник остали празних руку кад би одбили предлог а са друге стране најјачи пират је себи обезбедио довољно гласова уз минималан издатак (у овој фази пошто свако може да направи споменуту поделу и да преживи никоме није у интресу да подржи пирата ако није ништа добио). За $n = z = 100$ подела $\{51!, 0, 1!, 0, \ldots, 1!, 0\}$ коју најјачи предложи биће изгласана.

- $n = 2z + t$. За $t = 1$ и $t = 2$ се расподела врши као и у првом делу при чему најјачи пирати не могу да приуште део плена (ако им је живот мио). Код $t = 3$ свих $2z + 2$ слабијих пирата имају обезбеђену деобу у којој преживљавају те им није у интресу да гласају за поделу ако не добију нешто плена. Како је број златника z следи да код $t = 2z + 3$ најјачи неизбежно страда. Зато за $t = 4$ ће за њега гласати и други пират по јачини иако ништа не добија те најјачи има довољно подршке. Даље по индукцији за $2^{s+1} > t > 2^s$ пирати од $2z + 1$ до $2z + 2^s$ неће гласати без подплате те ће пирати од $2z + 2^s + 1$ до $2z + 2^{s+1} - 1$ страдати те ће $2z + 2^{s+1}$ имати довољно подршке да преживи. Дакле за $2z + 2^{s+1} > n \geqslant 2z + 2^s$ пират са бројем $2z + 2^s$ преживљава и да би се осигурао предлаже поделу $\{0!\ (2^{s-1}\text{ пута}), 0\ (2^{s-1}\text{ пута}), 1!, 0, \ldots, 1!, 0\}$ за $2 \nmid s$, $\{0!\ (2^{s-1}\text{ пута}), 0\ (2^{s-1}\text{ пута}), 0, 1!, 0, \ldots, 1!\}$ за $2 \mid s > 0$ и $\{0!, 0, 1!, 0, \ldots, 1!\}$ за $s = 0$. За $n = 2004$ и $z = 100$ имамо да пират са бројем $1224 = 200 + 2^{10}$ први преживљава (најјачих $2004 - 1224 = 780$ страда) предлажући поделу $\{0!\ (512\text{ пута}), 0\ (512\text{ пута}), 0, 1!, 0, \ldots, 1!\}$

Четврто интерно такмичење

Први дан - субота, 26. јун 2004.

352. Како је $\dfrac{1}{[a_i,a_{i+1}]}=\dfrac{(a_i,a_{i+1})}{a_ia_{i+1}}\le\dfrac{a_{i+1}-a_i}{a_ia_{i+1}}=\dfrac{1}{a_i}-\dfrac{1}{a_{i+1}}$, закључујемо да је $\dfrac{1}{[a_1,a_2]}+\cdots+\dfrac{1}{[a_{n-1},a_n]}\le\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_n}<1$.

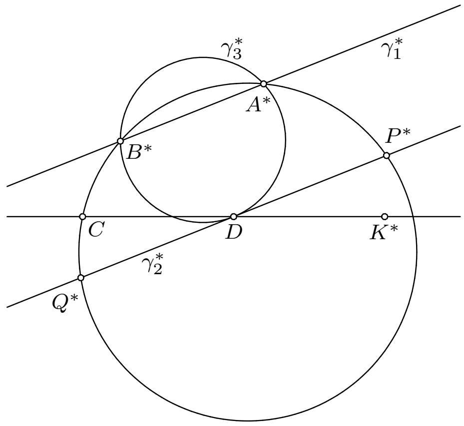
353. Применимо инверзију са центром у тачки C и произвољним полупречником. При овој инверзији тачке A,B,C,D,P,Q,K се сликају у тачке A',B',C',D',P',Q',K' редом. Како је $\sphericalangle PKC=\sphericalangle K'P'C$ и $\sphericalangle QKC=\sphericalangle K'Q'C$, наш задатак се своди на доказивање једнакости $\sphericalangle K'P'C=\sphericalangle K'Q'C$.

Кругови γ_1 и γ_3 се сликају у праве γ_1' и γ_3' и при том $A',B'\in\gamma_1'$, $P',Q'\in\gamma_3'$ и $A'B'\parallel P'Q'$. Права кроз тачке A,B,P,Q се слика у круг кроз тачке A',B',P',Q', одакле закључујемо да је $A'B'Q'P'$ једнакокраки трапез. Круг γ_2 се слика у круг γ_2' који пролази кроз A',B' и додирује $P'Q'$ у тачки D'. Како се D' налази на симетрали дужи $A'B'$, следи да је D' средиште дужи $P'Q'$. Најзад, из $CK=CD/2$ добијамо $CK'=2CD'$, тј. D' је уједно и средиште дужи CK'. Следи да је $CP'K'Q'$ паралелограм (јер му се дијагонале полове у тачки D'), одакле је $\sphericalangle K'P'C=\sphericalangle K'Q'C$ што је и требало показати.

****

Видети које је решење боље и да ли ставити оба
******

Посматрајмо инверзију у односу на тачку C којом се тачка D пресликава у саму себе. Означаваћемо са X^* слику објекта X при овој инверзији. Као прво, $CD=DK^*$. Кругови γ_1 и γ_3 се пресликавају у две паралелне праве које не садрже тачку C. При томе, права γ_3^* садржи тачку D. γ_2^* је круг који садржи тачке A^* и B^* (са праве γ_1^*) и праву γ_3^* додирује у тачки D. Права PQ се пресликава у круг који садржи тачке A^*,B^* и C. Тај круг сече праву γ_3^* у тачкама P^* и Q^*. Лако се види да је $DP^*=DQ^*$. Треба доказати да права CD гради једнаке углове са круговима описаним око троуглова CK^*P^* и CK^*Q^*. Међутим, то је очигледно јер су ова два круга симетрична у односу на праву CD.



354.

Лема. Ако су A и B скупови од по k (респ. l) дисјунктних дужи на датој правој, тада пресек $A \cap B$ садржи не више од $k+l-1$ дисјунктних дужи.

Доказ. Нека су $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots [a_k, b_k]$ дужи из скупа A $(a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_k < b_k)$. За сваку дуж d_i скупа B $(1 \le i \le l)$ уочимо два броја: x_i-број дужи из A које се секу са d_i и y_i- број оних дужи (a_j, b_j) из A чији крај b_j припада дужи d_i. Укупан број дужи у пресеку $A \cap B$ је једнак $S = x_1 + x_2 + \dots + x_l$. Очигледно је $x_i \le y_i + 1$, а за последњу дуж d_l из скупа B важи: $x_i \le y_i$. Сабирањем ових нејднакости се добија: $S = x_1 + \dots + x_l \le y_1 + 1 + y_2 + 1 + \dots + y_l$. Како је $y_1 + \dots + y_l = k$, следи да је $S \le k + l - 1$.

Индукцијом по k сада директно следи да се у скупу $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k$ налази не више од $kn - k + 1$ дужи.

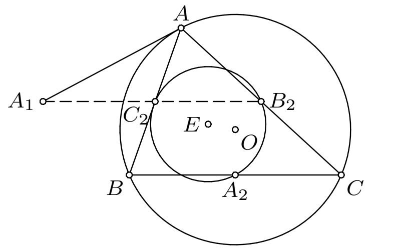
Други дан - понедељак, 28. јун 2004.

355. Из $(a_i, a_{2i}) = (i, 2i) = i$ закључујемо да $i \mid a_i$, што специјално значи да је $(i, a_i) = i$. Такође имамо да $a_i \mid a_{a_i}$, па је $a_i = (a_i, a_{a_i}) = (i, a_i) = i$.

356. Означимо са A_2, B_2 и C_2 средишта страница BC, CA и AB троугла ABC.

Из сличности $\triangle A_1C_2A \sim \triangle A_1AB_2$ следи да је $A_1A^2 = A_1C_2 \cdot A_1B_2$. То значи да су потенције тачке A_1 у односу на описани круг k око $\triangle ABC$ и у односу на описани круг e око $\triangle A_2B_2C_2$ (тј.

Ојлеров круг $\triangle ABC$) једнаке. То значи да A_1 припада потенцијалној оси кругова k и e.



Сасвим слично се доказује да и тачке B_1 и C_1 припадају потенцијалној оси кругова k и e из чега специјално следи да су A_1, B_1 и C_1 колинеарне, а из чињенице да је потенцијална оса нормална на праву која спаја центре кругова (у овом случају то је Ојлерова права) закључујемо да важи и други део тврђења у задатку.

357. Означимо са $a_{m,n}$, $(m,n\in\mathbb{Z})$ елементе дате таблице. Докажимо прво следеће помоћно тврђење:

Лема. Нека су $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, $\dots$, $a_{2^k+1,2^k+1}$ узастопни елементи једне дијагонале ове квадратне таблице. Тада је $a_1-a_{2^k+1}\equiv 2^k \pmod{2^{k+1}}$.

Доказ. Доказаћемо следеће: Ако су $x_1=a_{2^k+1,1}$, $x_2=a_{2^k+1,2}$, $\dots$, $x_{2^k+1}=a_{2^k+1,2^k+1}$ бројеви са "горње катете" правоуглог троугла коме је "хипотенуза" низ бројева $a_{1,1}$, $\dots$, $a_{2^k+1,2^k+1}$, тада је $a_{1,1}=2^{k+1}L_k(x_1,\dots,x_{2^k})+x_{2^k+1}+2^k$, при чему је L_k линеарна функција. Из овога ће тврђење леме директно следити.

Тврђење ћемо доказати математичком индукцијом по k. Очигледно је да тврђење важи за $k=0$. Претпоставимо да тврђење важи за k и докажимо га за $k+1$.

Посматрајмо бројеве

$$x_1=a_{2^{k+1}+1,1},\ x_2=a_{2^{k+1}+1,2},\ \dots,\ x_{2^{k+1}+1}=a_{2^{k+1}+1,2^{k+1}+1}.$$

На основу индуктивне претпоставке имамо:

$$\begin{aligned} a_{2^k+1,1} &= 2^{k+1}L_k(x_1,\dots,x_{2^k})+x_{2^k+1}+2^k,\ \dots,\ a_{2^k+1,2^k+1}\\ &= 2^{k+1}L_k(x_{2^k+1},\dots,x_{2^{k+1}})+x_{2^{k+1}+1}+2^k. \end{aligned}$$

Примењујући индуктивну претпоставку још једном, добијамо:

$$a_{1,1}=2^{k+1}L_k\left(a_{2^k+1,1},\dots,a_{2^k+1,2^k}\right)+a_{2^k+1,2^k+1}+2^k=$$

$$2^{k+1}L_k\left(2^{k+1}L_k(x_1,\dots,x_{2^k})+x_{2^k+1}+2^k,\dots,2^{k+1}L_k(x_{2^k},\dots,x_{2^{k+1}-1})+x_{2^{k+1}}+2^k\right)$$

$$+2^{k+1}L_k(x_{2^k+1},\dots,x_{2^{k+1}})+x_{2^{k+1}+1}+2^k+2^k=$$

$$2^{2k+2}L_k\left(L_k(x_1,\dots,x_{2^k}),\dots,L_k(x_{2^k},\dots,x_{2^{k+1}-1})\right)+2^{k+1}L_k(2^k,\dots 2^k)+$$
$$+2\cdot 2^{k+1}L_k(x_{2^k+1},\dots,x_{2^{k+1}})+x_{2^{k+1}+1}+2^{k+1}.$$

Тиме је помоћно тврђење доказано.

Докажимо сада да су $a_{m,m}$ и $a_{n,n}$ различити за $m \neq n$. Нека је $m > n$ и $m - n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_l}$ за $k_1 > x_2 > \cdots > k_l \geq 0$. Тада је, на основу леме, $a_n - a_{n+2^{k_1}} \equiv 2^{k_1} \pmod{2^{k_1+1}}$. Аналогно $a_{n+2^{k_1}} - a_{n+2^{k_1}+2^{k_2}} \equiv 2^{k_2} \pmod{2^{k_2+1}}$, ..., $a_{n+2^{k_1}+\cdots+2^{k_{l-1}}} - a_m \equiv 2^{k_l} \pmod{2^{k_l+1}}$, што значи да је $a_n - a_m \equiv 2^{k_l} \pmod{2^{k_l+1}}$ па је $a_m \neq a_n$.

Пето интерно такмичење

Први дан - среда, 30. јун 2003.

358. Ако је t било који природан број, приметимо да тачно два од бројева $10t$, $10t+1$, ..., $10t+9$ имају збир цифара дељив са 5.

1. Претпоставимо супротно, да само коначан број елемената низа има збир цифара који није дељив са 5. Тада постоји природан број m такав да је $M = 10m$ већи од сваког елемента низа коме збир цифара није дељив са 5. Нека је сада k произвољан природан број. Пошто су сви елементи низа различити, постоји најмање n такво да је $a_n > 10k - 10$. Нека је $K = 10k$. Сви они чланови низа који се налазе између $10m$ и $10k$ имају збир цифара дељив са 5 па је таквих највише $\frac{1}{5}(10k - 10m) = 2k - 2m$. Према томе, $n \leq 2k - 2m + M = 2k + 8m$. Знамо да је $a_n < an$, тј. $a_n \leq 4n$. Сада је $10k - 10 < a_n \leq 4n < 4(2k+8) = 8k + 16$, што значи да је $2k < 26$ а то није могуће јер је k произвољан природан број. Контрадикција!

2. У случају $n = 5$, ставимо $a_i = i$ за $1 \leq i \leq 4$, а за остале чланове узимамо, редом, све природне бројеве којима је збир цифара дељив са 5. Треба доказати да је за свако n испуњено $a_n < 5n$. Довољно је доказати да се у скупу $\{1, 2, \dots, 5n-1\}$ налази бар $n - 4$ броја којима је збир цифара дељив са 5. На основу разматрања са самог почетка, у скупу $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ има 2 таква броја (с тим што се једном од тих бројева и не радујемо баш претерано зато што није природан), у скупу $\{10, 11, 12, \dots, 19\}$ још два, итд., у скупу $\left\{10\left(\left[\frac{5n}{10}\right]-1\right),\dots,10\left(\left[\frac{5n}{10}\right]-1\right)+9\right\}$ још два. Како имамо $\left[\frac{5n}{10}\right]$ скупова од којих сви (осим првог) садрже по 2 елемента са збиром цифара који је дељив са 5, закључујемо

да постоји бар $2\cdot[5n/10]-1\geq 2(5n/10-1)-1=n-3$ броја са овом особином. Тиме је тврђење у потпуности доказано.

359. Обојимо $(2n-1)\times(2n-1)$ таблу као шаховску где су угаона поља обојена црном бојом. Сваки квадрат 2×2 има тачно два дијагонално спојена црна поља. Постоји бијекција између црних поља на $(2n-1)\times(2n-1)$ табли и поља дијаманта реда n при чему дијагонално спојена црна поља одговарају пољима у дијаманту са заједничком страницом. Црна поља које покрива 2×2 квадрат се сликају у домину на дијаманту и те домине се не смеју преклапати, те сваком постављању 2×2 квадрата на $(2n-1)\times(2n-1)$ табли ињективно одговара једно постављање домина на дијаманту реда n. Обрнуто не важи јер две домине које формирају 2×2 квадрат се сликају у два 2×2 квадрата са заједничким белим пољем. Лако је за свако $(n-1)^2\geqslant k\geqslant 2$ конструисати поклапање у коме ово постоји те стога важи строга неједнакост (за $k>(n-1)^2$ није уопште могуће извршити постављања).

360. Посматрајмо полином $P(X)=(X-a)(X-b)(X-c)(X-d)=X^4-\sigma_1X^3+\sigma_2X^2-\sigma_3X+\sigma_4$, при чему користимо ознаке $\sigma_1=a+b+c+d$, $\sigma_2=ab+ac+ad+bc+bd+cd$, $\sigma_3=abc+abd+acd+bcd$, $\sigma_4=abcd$. Дато нам је $3\sigma_1+4\sigma_3=8$ и треба да докажемо $\sigma_2\leq 2$.

По Роловој теореми, полином $P'(X)=4x^3-3\sigma_1x^2+2\sigma_2x-\sigma_3$ има три ненегативне реалне нуле које означавамо са p,q,r. Тада важи $3\sigma_1=4(p+q+r)$, $2\sigma_2=4(pq+qr+rp)$ и $\sigma_3=4pqr$, што даје $p+q+r+4pqr=2$. Према томе, довољно је да покажемо да последња неједнакост, заједно са условом $p,q,r\geq 0$, повлачи $pq+qr+rp\leq 1$.

Из једнакости $p+q+r+4pqr=2$ добијамо $r=\dfrac{2-p-q}{1+4pq}$. С друге стране, $pq+qr+rp\leq 1$ је еквивалентно са $r\leq\dfrac{1-pq}{p+q}$. Сада је довољно доказати да је $\dfrac{2-p-q}{1+4pq}\leq\dfrac{1-pq}{p+q}$, тј. да $(p+q)(2-p-q)\leq(1-pq)(1+4pq)$. Ако претпоставимо без смањења општости $p\leq q\leq r$, онда из $pqr\leq\frac{1}{2}$ следи $pq\leq\frac{3}{4}$, а одавде следи $(1-pq)(1+4pq)\geq 1$. Како је по неједнакости између средина $(p+q)(2-p-q)\leq 1$, ово доказује тврђење.
****

Видети које је решење боље и да ли ставити оба
******

Формирајмо полином $P(X)=(X-a)(X-b)(X-c)(X-d)$. Овај полином има четири позитивне нуле, одакле следи да полином $P'(X)=4X^3-3(a+b+c+d)X^2+2(ab+bc+ca+ad+bd+cd)X-(abc+abd+acd+bcd)$ има три позитивне нуле. Означимо их са α, β и γ. На основу Вијетових формула добијамо $3(a+b+c+d)=4(\alpha+\beta+\gamma)$, $ab+bc+ca+ad+bd+cd=2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$ и $abc+abd+acd+bcd=4\alpha\beta\gamma$. Довољно је доказати следеће: Ако је

$$\alpha+\beta+\gamma+4\alpha\beta\gamma=2, \tag{1}$$

тада је $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \leq 1$. Из (1) добијамо да је $\alpha+\beta \leq 2$ и $\gamma = \dfrac{2-\alpha-\beta}{1+4\alpha\beta}$. Треба доказати да је

$$\alpha\beta + (\alpha+\beta)\frac{2-\alpha-\beta}{1+4\alpha\beta} \leq 1.$$

Последња неједнакост је еквивалентна са

$$4\alpha^2\beta^2 + 2\alpha + 2\beta \leq \alpha^2 + \beta^2 + 5\alpha\beta + 1. \tag{2}$$

Неједнакост (2) се елементарним трансформацијама може превести у облик $(4\alpha\beta-1)(\alpha\beta-1) \leq (\alpha-1)^2 + (\beta-1)^2$. Пошто је $\alpha\beta \leq 1$ (јер је $\alpha\beta = (\sqrt{\alpha\beta})^2 \leq ((\alpha+\beta)/2)^2 \leq 1$), у случају да је $4\alpha\beta \geq 1$ неједнакост (2) је тривијално задовољена. Претпоставимо, зато, да је $4\alpha\beta < 1$. Тада је $4\alpha^2\beta^2 < \alpha\beta$. Да бисмо доказали (2) довољно је да докажемо неједнакост

$$2\alpha + 2\beta \leq \alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha\beta + 1. \tag{3}$$

Последња неједнакост је еквивалентна са $0 \leq \alpha^2 + \beta^2 + (2\alpha-1)(2\beta-1)$. Ова неједнакост је задовољена ако су и α и β мањи од $1/2$. Ако је, међутим, $\alpha \geq 1/2$, тада је $\alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta+1 \geq \alpha^2+\beta^2+2\beta+1 \geq 2\alpha+2\beta+\beta^2 \geq 2\alpha+2\beta$ из чега опет следи (3). Према томе, нејднакост (2) је тачна, што је требало доказати.

Други дан - понедељак, 5. јул 2004.

361. Нека су дужине страница троугла редом a, b и c, а растојања произвољне тачке троугла до правих које садрже те странице редом x, y и z. Из неједнакости Коши-Шварц-Буњаковског је

$$ax + by + cz \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

па је $\sqrt{x^2+y^2+z^2} \geqslant \dfrac{2P}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, тј. $x^2+y^2+z^2 \geqslant \dfrac{4P^2}{a^2+b^2+c^2}$, где је P површина троугла ABC.
Једнакост вреди акко $a:b:c = x:y:z$. Конструишимо тачку M унутар троугла ABC која задовољава овај услов. Нека је N тачка угла ACB удаљена a од BC и b од AC. Свака тачка K полуправе CN задовољава очигледно $x(K):y(K) = a:b$. Обратно, тачка K овог угла која ово задовољава припада полуправој CN. У супротном права кроз K паралелна BC секла би CN у L, па из $x(L) = x(K)$ следи $y(L) = y(K)$ и одатле контрадикција $BC \parallel AC$. Дакле полуправа CN је скуп тачака угла ACB за који важи $x:y = a:b$. Слично, скуп тачака угла $\angle CAB$ за које је $y:z = b:c$ је полуправа с врхом A. Те две полуправе секу се у тачки M унутар трогла, за коју је $x:z = \dfrac{x}{y}\dfrac{y}{z} = \dfrac{a}{b}\dfrac{b}{c} = a:c$.

Тачка M зато задовољава услов, те је она тражена тачка за коју је збир квадрата растојања до правих које садрже странице троугла ABC минималан.

362. Могуће је за све бројеве $n \geqslant 3$, $n \neq 4$. Доказ за њих иде индукцијом са кораком 2 (база 3 и 6 се види са слике).
Остаје још да се покаже да је за $n = 4$ немогуће. Да би из сваког града могло да се стигне у било који други из сваког града мора одлазити бар 1 авио линија и у сваки град мора долазити бар једна авио линија. Стога за сваки град имамо 2 могућности:
1° из њега воде 2 линије, а у њега 1;
2° из њега води 1 линије, а у њега 2.
Како је сума свих бројева одлазећих линија једнака суми свих бројева долазећих линија, добијамо да су тачно два града типа 1° (A и B), а тачно два града типа 2° (C и D). Како између свака два града постоји једна директна линија, без умањења општости, можемо узети да су линије $B \to A$ и $D \to C$. Због типа градова добијамо да је $A \to C$, $A \to D$, $B \to D$, $C \to B$, али тада из чвора D најкраћи пут до A води са 2 преседања!

363. Ради једноставности, писаћемо $a = 1001$: тада је $1002000 = a^2 - 1$.

За дато A претпоставимо да је (x, y) целобројно решење дате једначине са $x, y \geq 0$ и најмањим x. Посматрана једначина је еквивалентна са
$$\left(x + y\sqrt{a^2-1}\right)\left(x - y\sqrt{a^2-1}\right) = A.$$
Како је $\left(a + \sqrt{a^2-1}\right)\left(a - \sqrt{a^2-1}\right) = 1$, следи да је
$$\left(ax - (a^2-1)y\right)^2 - (a^2-1)(ay - x)^2 =$$
$$= \left(ax - (a^2-1)y + (x - ay)\sqrt{a^2-1}\right)\left(ax - (a^2-1)y - (x - ay)\sqrt{a^2-1}\right) =$$
$$= \left(x + y\sqrt{a^2-1}\right)\left(a - \sqrt{a^2-1}\right)\left(x - y\sqrt{a^2-1}\right)\left(a + \sqrt{a^2-1}\right) = A.$$
Према томе, $(ax - (a^2-1)y, ay - x)$ је такође решење посматране једначине. Пошто је $ax - (a^2-1)y > 0$, на основу претпоставке важи $ax - (a^2-1)y \geq x$, што повлачи $x \geq (a+1)y$. Сада је
$$A = x^2 - (a^2-1)y^2 \geq (a+1)^2y^2 - (a^2-1)y^2 = (2a+2)y^2 \geq 2a + 2 = 2004$$
јер $y \neq 0$ (за $y = 0$ је $A = x^2$, супротно претпоставци).

С друге стране, за $A = 2004$ постоји решење $(x, y) = (1002, 1)$. Следи да је 2004 тражена вредност броја A.

Решења сусрета гимназија централне Србије

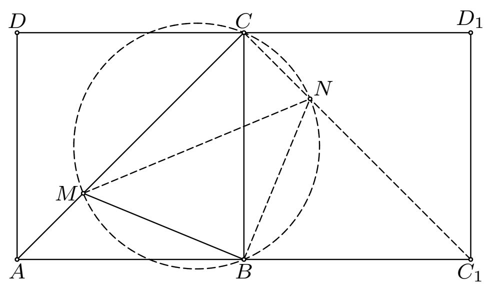
Први сусрети гимназија централне Србије

Први разред

364. Заротирајмо квадрат $ABCD$ за угао од -90° око темена B и означимо слику тачке M са N, слику тачке C са C_1 и слику тачке D са D_1. Тада је $CN = AM = 7$, $BN = BM = 13$ и троугао $\triangle MBN$ је једнакокрако-правоугли са правим углом у B, одакле је $MN = 13\sqrt{2}$. Како је $CN^2 + CM^2 = 7^2 + 17^2 = 338 = \left(13\sqrt{2}\right)^2$, угао $\sphericalangle MCN$ је прав, па тачке M, B, N, C све леже на кругу над пречником MN. Сада из Птоломејеве теореме имамо

$$13\sqrt{2}\cdot BC = MN\cdot BC = MB\cdot NC + NB\cdot MC = 13\cdot 7 + 13\cdot 17 \quad\Rightarrow\quad BC = 12\sqrt{2}.$$

Површина квадрата $ABCD$ је једнака $P_{ABCD} = BC^2 = 288$.



<u>*Напомена:*</u> У задатку смо добили да је $AM + CM = AC$, те се тачка M налази на дијагонали AC.

365. Како је $xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1 = (x + 1)(y + 1)(z + 1)$, а $2001 = 3\cdot 23\cdot 29$, једина решења су $(x, y, z) = (2, 22, 28)$ са пермутацијама:

$$(x, y, z) \in \{(2, 22, 28), (2, 28, 22), (22, 2, 28), (22, 28, 2), (28, 2, 22), (28, 22, 2)\}.$$

366. Тачно 30 гусара је сачувало оба ока, 25 оба уха, 20 обе руке и 15 обе ноге, што укупно чини највише 90 гусара. Преостали, којих је бар $100 - 90 = 10$, су остали без ока, уха, руке и ноге. Јасно је да се овај број може достићи ако су свих наведених 90 гусара различити.

367. Међу свим правама одређеним страницама и дијагоналама $n-$тоугла, означимо са AB ону која је на минималном растојању од M (таквих, наравно, може бити више). Доказаћемо да су A и B она два темена која тражимо.

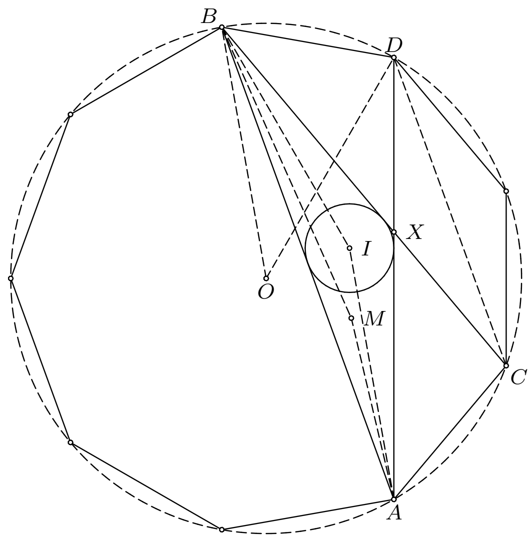
Нека су C и D темена n-тоугла суседна редом теменима A и B, са исте стране праве AB са које је тачка M. Ако се тачка M не налази унутар угла $\sphericalangle ABC$, онда је њено растојање до праве AC мање од растојања до AB, што је немогуће. Према томе, M се налази унутар угла $\sphericalangle ABC$, и аналогно унутар угла $\sphericalangle BAD$. Нека је X пресек правих AB и CD, I центар уписаног круга у троугао ABX и O центар правилног многоугла. Како је тачка M ближа правој AB него правој AD, она лежи унутар или на крацима угла $\sphericalangle BAI$. Слично, M лежи унутар угла $\sphericalangle ABI$. Закључујемо да је

$$\sphericalangle MAB \leqslant \sphericalangle IAB = \frac{1}{2}\sphericalangle DAB = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sphericalangle DOB) = 180^\circ/2n$$

и аналогно показујемо и $\sphericalangle MBA \leqslant \sphericalangle IBA = 180^\circ/2n$, одакле следи $\sphericalangle AMB \geqslant 180^\circ - 180^\circ/n$ (и наравно, $\sphericalangle AMB \leqslant 180^\circ$). Тиме смо показали

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) 180^\circ \leqslant \sphericalangle AMB \leqslant 180^\circ.$$

Једнакост са леве стране важи када се тачка M налази на некој симетрали угла одређеног двема узастопиним дијагоналама (или страницом и дијагоналом) из истог темена, а једнакост са десне стране важи када се M налази на некој дијагонали.



Други разред

368. На основу формуле

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1-x+x^2}{1-x+x^2}=\frac{1-x+x^2}{1+x^3}$$

дати разломак је једнак

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+3\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}} &= \frac{1}{\big(1+\sqrt[3]{2}\big)}\cdot\frac{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{1}{\big(1+2\sqrt[3]{2}\big)}\cdot\frac{1-2\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{4}}{1-2\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{4}}\\ &= \frac{\big(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\big)\big(1-2\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{4}\big)}{3\cdot 17}=\frac{-11+5\sqrt[3]{2}+7\sqrt[3]{4}}{51}.\end{aligned}$$

369. Мора бити $x^2-6x+15\neq 0$ и $x^2-8x+15\neq 0$ (да не би дошло до дељења нулом). Нека је $A=x^2-8x+15$. Тада се једначина може записати у облику

$$\frac{A-2x}{A+2x}=\frac{3x}{A},$$

односно $A^2-2Ax=3Ax+6x^2\Leftrightarrow(A-3x)(A+2x)=0$.
Решавамо једначине $A-3x=0$ и $A+2x=0$. Прва једначина постаје $x^2-11x+15=0$ и њена решења су $x_{1,2}=\dfrac{11\pm\sqrt{61}}{2}$. Друга једначина је еквивалентна са $x^2-6x+15=0$ и њена решења нису решења полазне једначине (то смо констатовали на самом почетку). Решења

$$x_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{61}}{2}$$

задовољавају $x^2-6x+15\neq 0$ и $x^2-8x+15\neq 0$ па су то једина решења полазне једначине.

370. Сваком конвексном k-тоуглу који не садржи тачку A можемо придружити конвексан $k+1$-тоугао који садржи тачку A (додавањем тачке A). Према томе конвексних многоуглова који садрже тачку A има више или једнако од оних који је не садрже. Међутим, у овој кореспонденцији троуглови који садрже тачку A немају одговарајуће многоуглове који не садрже A (јер би то били многоуглови са два темена!), што значи да има више многоуглова који садрже тачку A него оних који је не садрже.

371. После замене $x=\dfrac{1-4y}{2}$ тражена неједнакост постаје еквивалентна са $(1-4y)^2+4y^2\geqslant\dfrac{1}{5}$. Ова неједнакост је еквивалентна са

$$100y^2-40y+4\geqslant 0$$

односно са $(10y-2)^2 \geqslant 0$ што је тачна неједнакост.
Једнакост важи ако и само ако је $y=\dfrac{1}{5}$, тј. за $x=\dfrac{1-4y}{2}=\dfrac{1}{10}$.

Трећи и четврти разред

372. Из задатих једначина добијамо

$$a=\log 196=\log(2^2\cdot 7^2)=2\log 2+2\log 7,$$

$$b=\log 56=\log(2^3\cdot 7)=3\log 2+\log 7.$$

Решавањем система по $\log 2$ и $\log 7$ налазимо:

$$\log 2=\frac{2b-a}{4},\qquad \log 7=\frac{3a-2b}{4}.$$

Сада се једноставно рачуна:

$$\begin{aligned}\log 0.175 &= \log\frac{7}{40}=\log\frac{7}{2^2\cdot 10}=\log 7-2\log 2-\log 10\\ &= \frac{3a-2b}{4}-\frac{2b-a}{2}-1=\frac{5a-6b}{4}-1.\end{aligned}$$

373. Нека је ABC дати троугао. Претпоставимо да је $AB=AC=b$ и $BC=a$. Нека је O центар описаног а I центар уписаног круга. Тада је на основу Ојлерове теореме испуњено $OI^2=R^2-2Rr=16$, тј. $OI=4$. Нека је A_1 средиште дужи BC (тада је A_1 уједно и подножје висине из темена A и додирна тачка уписаног круга са страницом BC). Постоје две могућности за распоред тачака (случај $A-I-O-A_1$ је немогућ, јер је $IO=4>3=IA_1$):

1° $A-O-A_1-I$: Како је $OI=4$, $OA=R=8$ и $IA_1=r=3$ налазимо да је $A_1O=IO+IA_1=7$ и

$$AA_1=h_a=AO+OA_1=8+7=15.$$

Из Питагорине теореме примењене на троугао $\triangle BOA_1$ добијамо да је

$$\frac{a}{2}=BA_1=\sqrt{BO^2-A_1O^2}=\sqrt{15},$$

одакле је $a=2\sqrt{15}$. Из релације $P=\dfrac{abb}{4R}=\dfrac{(a+b+b)r}{2}=\dfrac{ah_a}{2}$ добијамо да је $b=4\sqrt{15}$.

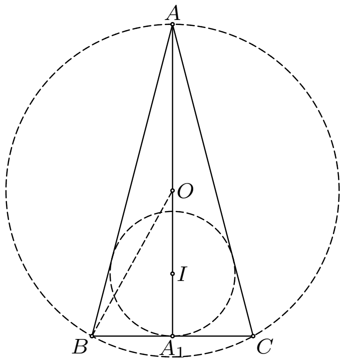
2° $A-I-A_1-O$: Како је $OI=4$, $OA=R=8$ и $IA_1=r=3$ налазимо да је $A_1O=IO-IA_1=1$ и

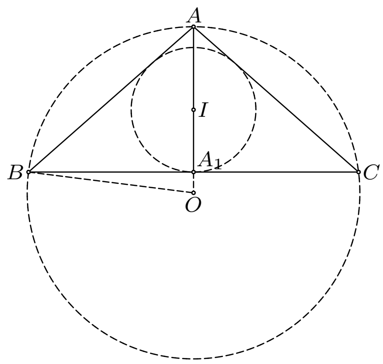
$$A_1A=h_a=AO-A_1O=8-1=7.$$

Из Питагорине теореме примењене на троугао $\triangle BOA_1$ добијамо да је

$$\frac{a}{2} = BA_1 = \sqrt{BO^2 - A_1O^2} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7},$$

одакле је $a = 6\sqrt{7}$. Из релације $P = \dfrac{abb}{4R} = \dfrac{(a+b+b)r}{2} = \dfrac{ah_a}{2}$ добијамо да је $b = 4\sqrt{7}$.





374. Нека је R полупречник лопте, а a и b, редом, полупречници мање и веће основе зарубљене купе. Нека је s дужина изводнице зарубљене купе. Попречни пресек ове зарубљене купе је тангентни трапез па важи $2s = 2a + 2b$, одакле закључујемо да је $s = a + b$. Како је

$$V_L = \frac{4}{3}R^3\pi, \quad V_K = \frac{2R\pi}{3} \cdot (a^2 + ab + b^2), \quad P_L = 4R^2\pi$$

$$P_K = \pi \cdot (a^2 + b^2 + s(a+b)) = 2(a^2 + b^2 + ab)\pi,$$

тражена једнакост, $V_L : V_K = P_L : P_K$, се непосредно проверава.

375. Ако је $x = \operatorname{tg} 5^\circ$, $y = \operatorname{tg} 20^\circ$ и $z = \operatorname{tg} 65^\circ$, доказати да је $xy + yz + zx = 1$.

Нека је $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 20^\circ$ и $\gamma = 65^\circ$. Тада је $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$. Пошто важи $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$, добијамо да је $1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}$ и да бисмо доказали тражену једнакост довољно је доказати $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} = \operatorname{tg}\gamma(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)$ што је еквивалентно са $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\gamma = 1$ што је очигледно пошто је $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$.

Други сусрети гимназија централне Србије

Први разред

376. Решити по $x \in R$ једначину:

$$x + |x - |1 - x|| = 2.$$

Очигледно важи $x \leq 2$. За $1 \leqslant x \leqslant 2$ једначина постаје $x + 1 = 2$, тј. $x = 1$. За $1/2 \leqslant x \leqslant 1$ имамо $3x - 1 = 2$, што даје већ познато решење $x = 1$. За $x \leqslant 1/2$ имамо $1 - x = 2$, што даје решење $x = -1$. Једина решења су $x = -1$ и $x = 1$.

377. У декадном запису деветоцифреног броја, који се завршава цифром 5, појављују се све цифре осим нуле. Доказати да тај број не може бити потпун квадрат.

378. Један конвексан четвороугао подељен је дијагоналама на четири троугла чије су површине природни бројеви. Доказати да је производ та четири броја потпун квадрат.

Означимо дати четвороугао са $ABCD$, и са O тачку пресека дијагонала AC и BD. Нека су P_1, P_2, P_3, P_4 редом површине троуглова OAB, OBC, OCD, ODA и h_a, h_c редом висине из A и C на BD. Тада је $P_1 = OB \cdot h_1$, $P_2 = OB \cdot h_2$, $P_3 = OD \cdot h_2$ и $P_4 = OD \cdot h_1$. Следи $P_1P_3 = P_2P_4$, па је $P_1P_2P_3P_4 = (P_1P_3)^2$.

379. Израчунати:

$$\frac{(2^4+2^2+1)(4^4+4^2+1)(6^4+6^2+1)(8^4+8^2+1)(10^4+10^2+1)}{(1^4+1^2+1)(3^4+3^2+1)(5^4+5^2+1)(7^4+7^2+1)(9^4+9^2+1)}.$$

За свако x је $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = f(x-1)f(x)$, где је $f(t) = t^2 + t + 1$. Следи да је задати разломак једнак

$$\frac{f(1)f(2)f(3) \cdot f(10)}{f(0)f(1)f(2) \cdot f(9)} = \frac{f(10)}{f(0)} = 111.$$

Други разред

380. Одредити a тако да решења x_1 и x_2 једначине $x^2 - x + a - 2 = 0$ задовољавају услов $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} + \dfrac{1}{2}x_1x_2 + 4 = 0$.

Дати услов се може написати у облику $\dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} + \dfrac{1}{2}x_1x_2 = -4$. Вијетове формуле нам дају $x_1x_2 = a - 2$ и $x_1 + x_2 = 1$, па добијамо и $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5 - 2a$. Сада дати услов добија облик $\dfrac{5 - 2a}{a - 2} + \dfrac{a - 2}{2} = -4$, што се своди на $a^2 - 2 = 0$, $a \neq 2$. Решења су $a = \pm\sqrt{2}$.

381. Дат је полукруг над пречником AB. Кроз средину C лука $\widehat{AB}$ конструисане су четири праве које дати полукруг деле на пет делова једнаких површина. Одредити однос ду

382. ина одсечака које конструисане праве граде на пречнику AB.

Нека је r полупречник полукруга. Површина сваког од пет делова полукруга је $r^2\pi/10$, па је дужина средишњег одсечка на пречнику једнака $d = r\pi/5$. Како је $3d < 2r$, све четири праве секу дуж AB одсецајући од ње три једнака и два крајња, мања одсечка. Однос одсечака је $\dfrac{2r-3d}{2} : d : d : d : \dfrac{2r-3d}{2} = (10-3\pi) : 2\pi : 2\pi : 2\pi : (10-3\pi)$.

383. Дат је правоугаоник $ABCD$, такав да је $AB = 3BC$. Ако су E и F тачке странице AB такве да је $AE = EF = FB$, доказати да је права DE тангента круга описаног око троугла FBD.

Како је угао између тетиве и тангенте у једној њеној крајњој тачки једнак периферијском углу над том тетивом, довољно је показати да је $\sphericalangle EDF = \sphericalangle DBF$. Нека је G тачка изван правоугаоника таква да је $GE = 1$ и $GE \perp AB$. Троугао BGF је једнакокрако-правоугли са правим углом код G, па због подударности троуглова AFD и EBG важи $\sphericalangle EDF = 45^\circ - \sphericalangle AFD = 45^\circ - \sphericalangle EBG = \sphericalangle FBD$, што је и требало показати.

384. Решити једначину:

$$(\sqrt[3]{3} - \sqrt[6]{3}\,\sqrt[10]{5} + \sqrt[5]{5})(x^4 + x^2 + 1) = (\sqrt[3]{3} + \sqrt[6]{3}\,\sqrt[10]{5} + \sqrt[5]{5})(x^4 - x^2 + 1).$$

Означимо $a = \sqrt[6]{3}$ и $b = \sqrt[10]{5}$. Задату једначина сада добија облик $(a^2 - ab + b^2)(x^4 + x^2 + 1) = (a^2 + ab + b^2)(x^4 - x^2 + 1)$. Приметимо да су сва четии чиниоца строго позитивни бројеви. Зато смемо да препишемо једначину као $\dfrac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} = \dfrac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} = k$ за неко $k > 0$. Тада је $\dfrac{(x^2-1)^2}{x^4 + x^2 + 1} = \dfrac{(a-b)^2}{a^2 + ab + b^2} = 3k - 1$ и $\dfrac{(x^2+1)^2}{x^4 + x^2 + 1} = \dfrac{(a+b)^2}{a^2 + ab + b^2} = 3 - k$. Дељењем прве једнакости другом (приметимо да је то дозвољено јер разломци нису једнаки нули) добијамо $\dfrac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$, што нам даје $\dfrac{x^2-1}{x^2+1} = \dfrac{a-b}{a+b}$ или $\dfrac{x^2-1}{x^2+1} = \dfrac{b-a}{a+b}$.

У првом случају је $x = \pm\sqrt{a/b}$, а у другом $x = \pm\sqrt{b/a}$. Лако је проверити да ова четири решења заиста јесу решења.

Трећи и четврти разред

385. Решити једначину $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$.

Знамо да је $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, па је $\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 = 1$ одакле закључујемо да је $\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x = 1$. Како је $2\sin^2 x \cos^2 x \geqslant 0$, добијамо да је $\sin^4 x + \cos^4 x \leqslant 1$, а једнакост важи ако и само ако је $\sin x \cos x = 0$, тј. ако и само ако је $\sin x = 0$ или $\cos x = 0$, тј. ако и само ако је $x = \frac{k\pi}{2}$ за неко $k \in \mathbb{Z}$.

386. Ако је $2^n + 1$ прост број, тада постоји природан број k тако да је $n = 2^k$, $n \in N$. Доказати.

Претпоставимо супротно, да је $n = 2^l \cdot m$ при чему је m непаран број већи од 1. Међутим, како је $a^m + b^m = (a+b)\left(a^{m-1} - a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 - a^{m-4}b^3 + \cdots + b^{m-1}\right)$, важи $2^n + 1 = \left(2^{2^l}\right)^m + 1^m$, заменом $a = 2^{2^l}$ и $b = 1$, добијамо да је $2^n + 1$ представљен у облику производа бројева $a + b$ и $a^{m-1} - a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 - a^{m-4}b^3 + \cdots + b^{m-1}$. Међутим, како је први број строго већи од 1, а мањи од $2^n + 1$, закључујемо да је $2^n + 1$ сложен а то је контрадикција.

387. Нека је n природан број. Доказати

$$(\underbrace{33\ldots3}_{n})^2 + (\underbrace{55\ldots5}_{n-1}\underbrace{44\ldots4}_{n})^2 = (\underbrace{55\ldots5}_{n-1}\underbrace{44\ldots4}_{n-1}5)^2.$$

Тражена једнакост је еквивалентна са $(\underbrace{33\ldots3}_{n})^2 = (\underbrace{55\ldots5}_{n-1}\underbrace{44\ldots4}_{n-1}5)^2 - (\underbrace{55\ldots5}_{n-1}\underbrace{44\ldots4}_{n})^2 = (\underbrace{55\ldots5}_{n-1}\underbrace{44\ldots4}_{n-1}5 - \underbrace{55\ldots5}_{n-1}\underbrace{44\ldots4}_{n})(\underbrace{55\ldots5}_{n-1}\underbrace{44\ldots4}_{n-1}5 + \underbrace{55\ldots5}_{n-1}\underbrace{44\ldots4}_{n}) = 2 \cdot \underbrace{55\ldots5}_{n-1}\underbrace{44\ldots4}_{n} + 1$. Како је $\underbrace{33\ldots3}_{n} = 3 \cdot \dfrac{10^n - 1}{9}$ и $\underbrace{55\ldots5}_{n-1}\underbrace{44\ldots4}_{n} = 5 \cdot \dfrac{10^{2n-1} - 1}{9} - \dfrac{10^n - 1}{9}$, добијамо да је тражена једнакост еквивалентна са $\left(3 \cdot \dfrac{10^n - 1}{9}\right)^2 = 2 \cdot \left(5 \cdot \dfrac{10^{2n-1} - 1}{9} - \dfrac{10^n - 1}{9}\right) + 1$ која се једноставно проверава.

388. Да ли постоје природни бројеви m и n тако да је $(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n$?

Нека је $(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n = A + B\sqrt{2}$. Можемо претпоставити да су m и n узајамно прости (у супротном, скраћивањем бројева m и n истим фактором једнакост се не нарушава). Претпоставимо, прво, да је m непаран број. Тада из $(5 + 3\sqrt{2})^m = A + B\sqrt{2}$ закључујемо да је A дељиво са 5, а из $(3 + 5\sqrt{2})^n = A + B\sqrt{2}$ следи да је $A \equiv 3^n$ (мод 5) што је контрадикција. Слично поступамо и у случају када је n непаран број (а бар један од бројева мора бити непаран јер смо претпоставили да су m и n узајамно прости).

Трећи сусрети гимназија централне Србије

Први разред

389. У правилном $n-$тоуглу $A_1A_2\dots A_{n-1}A_n$ је $\sphericalangle A_3A_1A_4 = 6^\circ$. Колико дијагонала има тај многоугао?

Пошто су $\sphericalangle A_3A_1A_4$ и $\sphericalangle A_3A_2A_4$ периферијски углови над луком A_3A_4, они су једнаки, а како је троугао $A_2A_3A_4$ једнакокрак добијамо да је $\angle A_2A_3A_4 = 180^\circ - 2\cdot 6^\circ$. Закључујемо да је спољашњи угао многоугла 12°, па је $n = \dfrac{360^\circ}{12^\circ} = 30$. Број дијагонала је $\dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{30\cdot 27}{2}$.

390. Ако су x, y, z реални бројеви такви да су xy, yz и zx рационални бројеви различити од нуле. Доказати:
а) број $x^2+y^2+z^2$ је рационалан;
б) ако је $x^3+y^3+z^3$ рационалан број различит од нуле, тада су и бројеви x, y, z рационални.

1. Пошто су xy и yz рационални и њихов производ је рационалан, тј. xy^2z је рационалан. Пошто је и xz рационалан, закључујемо да је и $\dfrac{xy^2z}{xz} = y^2$ рационалан. Сасвим слично добијамо да су и x^2 и z^2 рационални, што значи и да је $x^2+y^2+z^2$ рационалан.

2. Број $xy\cdot y^2$ је рационалан (као производ два рационална броја). Сасвим слично и xz^3 је рационалан, па је $x(y^3+z^3)$ рационалан. Како је и $x^4 = (x^2)^2$ рационалан, добијамо да је $x^4 + x(y^3+z^3) = x(x^3+y^3+z^3)$ рационалан. Пошто је $x^3+y^3+z^3 \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ закључујемо да $x\in\mathbb{Q}$. Аналогно добијамо да $y, z\in\mathbb{Q}$.

391. Одредити све просте бројеве p, q и r за које је испуњена једнакост $3(p+q+r) = pqr$.

Пошто је лева страна дељива са 3 закључујемо да је и десна страна дељива са три одакле следи да је један од бројева p, q, r једнак 3. Нека је, не умањујући општост, $p = 3$. Једнакост постаје $3(3+q+r) = 3qr$ односно $3+q+r = qr$.

Размотримо случајеве:

1° $q = r$: Сада је $3+2q = q^2 \Leftrightarrow 0 = q^2-2q-3 = (q-3)(q+1)$ што значи да је $q = r = 3$. Једноставном провером се добија да $p = q = r = 3$ заиста јесте решење.

2° $q \neq r$: Претпоставимо да је $q < r$. Тада је $3+q+r = qr$ па је $3+q$ дељиво са r. Уколико је $3+q \neq r$, тада је $3+q \geqslant 2r$ а пошто је $r > q$ добијамо $3+r > 3+q \geqslant 2r$ односно $3 > r$. Међутим, то значи да су q и r прости бројеви који задовољавају $q < r < 3$ а то је немогуће. Због тога је $3+q = r$. Уколико је $q \neq 2$, тада је

q непаран прост број, па r мора бити паран и као такав не може бити прост. Уколико је $q = 2$, тада је $r = 5$ и то јесте прост број. Лако се проверава да је $(p, q, r) = (3, 2, 5)$ решење.

Према томе, тражене тројке простих бројева су $\{(3,3,3),(2,3,5),(2,5,3),(3,2,5),(3,5,2),(5,2,3),(5,3,$

Други разред

392. Колико има природних бројева n таквих да је

$$100 < \sqrt[3]{n} < 101\,?$$

Неједнакост је еквивалентна са $100^3 < n < 101^3$. Природних бројева између 100^3 и 101^3 има $101^3 - 100^3 - 1 = 101^2 + 101 \cdot 100 + 100^2 - 1 = 10300$.

393. Наћи вредност израза $x^6 + x^3y^3 + y^6$, ако реални бројеви x и y задовољавају једнакости

$$x^2 + xy + y^2 = 4 \quad \text{и} \quad x^4 + x^2y^2 + y^4 = 8.$$

Квадрирањем једнакости $x^2 + xy + y^2 = 4$ и коришћењем једнакости $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 8$ добијамо да је $2xy(x^2 + y^2 + xy) = 8$, и ако још једном применимо прву једнакост добијамо да је $xy = 1$. Сада је $x^6 + x^3y^3 + y^6 = \left(x^{2^3} + y^{2^3}\right) + x^3y^3 = (x^2+y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4) + x^3y^3 = (4 - xy)(8 - 2x^2y^2) + x^3y^3 = (4-1)(8-1) + 1 = 22$.

394. За сваки природан број n, нека је $S(n)$ збир цифара броја n (записаног у декадном систему). Доказати да важи $9 \mid S(n^3) - (S(n))^3$.

Ако је $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_0}$, тада важи $n = a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + \cdots + a_0$. Пошто је $10 \equiv 1$ (мод 9) важи $10^i \equiv 1^i \equiv 1$ (мод 9) (за $i = 1, 2, \ldots, k$) па је

$$n = a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + \cdots + a_0 \equiv a_k + a_{k-1} + \cdots + a_0 = S(n) \text{ (мод 9)}. \quad (1)$$

Из релације (1) добијамо $S(n)^3 \equiv n^3$ (мод 9). Из једнакости (1) добијамо и да је $S(n^3) \equiv n^3$(мод 9), па тражено тврђење директно следи.

Трећи и четврти разред

395. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Ако је површина пирамиде $ABCDA_1$ једнака 1, израчунати површину дате коцке.

Означимо са a дужину странице квадрата. ABA_1 и ADA_1 су једнакокрако-правоугли троуглови и површина сваког од њих је $a^2/2$. Троуглови BCA_1 и DCA_1 су правоугли троуглови са катетама a и $a\sqrt{2}$. Према томе, површина омотача је $a^2 + a^2\sqrt{2}$ а површина базе је

a^2. Површина пирамиде је је $a^2(2+\sqrt{2}) = 1$, из чега следи $a^2 = \dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$. Сада видимо да је површина коцке $6a^2 = \dfrac{3}{1+\sqrt{2}} = 3(\sqrt{2}-1)$.

396. У скупу реалних бројева решити систем једначина:

$$x^z = y^{\frac{8}{3}},\ \ y^z = x^{\frac{2}{3}},\ \ z = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{9y}.$$

Као прво, да би прве две једначине биле дефинисане мора бити $x, y > 0$. Трећа једначина одмах повлачи да је и $z > 0$. Из друге једначине добијамо да је $x = y^{3z/2}$. Замењивањем овог израза у прву једначину добијамо:

$$y^{9z^2/16} = y. \tag{1}$$

Одмах видимо да је $y = 1$ решење једначине (1) за свако z. У том случају $x = 1$ и $z = 1+\sqrt{3}$ и $(1, 1, 1+\sqrt{3})$ је решење полазног система. Ако је $y \neq 1$, због ињективности степене функције, једначина (1) повлачи да је $\dfrac{9z^2}{16} = 1$ што уз $z > 0$ даје $z = \dfrac{4}{3}$. Прва једначина даје $x = y^2$. Последња једначина сада даје $y = \dfrac{1}{9}$ и $x = \dfrac{1}{81}$.

397. За које вредности реалног параметра a једначина

$$1 + \sin^2 ax = \cos x$$

има јединствено решење?

Пошто је $1+\sin^2 ax \geqslant 1 \geqslant \cos x$ дата једнакост може бити задовољена само ако је $\sin ax = 0$ и $\cos x = 1$. Како је $\cos x = 1$ ако и само ако је $x = 2k\pi$ за $k \in \mathbb{Z}$ закључујемо да је $x = 2k\pi$ решење полазне једначине ако и само ако је $\sin(2ak\pi) = 0$, односно ако и само ако постоји цео број n такав да је $2ak\pi = n\pi$. $n = 0$ задовољава последњу релацију, и такво n је јединствено ако и само ако је a ирационалан број.

О такмичењима у 2003. и 2004. години

Међународна такмичења средњошколаца у 2003. години

Наша екипа за оба такмичења је, као и претходних година, одређена на основу резултата постигнутих на Савезном такмичењу и додатном такмичењу за одређивање репрезентације (популарно Мала олимпијада). Њу су сачињавали следећи ученици:

YUG 1.	**Александар Илић**,	Ниш,
YUG 2.	**Јелена Милановић**,	Београд,
YUG 3.	**Милан Новаковић**,	Београд,
YUG 4.	**Марко Радовановић**,	Београд,
YUG 5.	**Александар Пејчев**,	Београд,
YUG 6.	**Александар Бранковић**,	Београд.

Александар Илић је ученик Гимназије Светозар Марковић из Ниша, док су остали чланови екипе из Математичке гимназије у Београду.

20. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА, Албанија – Тирана, 2.–7. мај 2003.

Двадесета Балканска математичка олимпијада (популарно Балканијада) одржана у Тирани, у Албанији, од 2. до 7. маја 2003. године (организатори су и трајање Балканијаде, у односу на претходне, скратили за један дан!). Учествовало је 9 земаља: Албанија, Бивша југословенска република Македонија, Бугарска, Грчка, Југославија, Кипар, Молдавија, Румунија и Турска. Била је предвиђена и екипа

Босне и Херцеговине, али они и ове године нису учествовали јер су опет организовали савезно такмичење након Балканијаде! Наше име је званично било Југославија, а донета је и одлука да нам се од следеће године и на Балканијадама мења име у Србија и Црна Гора (на албанском: Serbi Mali i Zi).

Вође наше екипе били су Ђорђе Кртинић, асистент Математичког факултета у Београду и председник Републичке комисије за такмичења из математике за ученике средњих школа и Владимир Балтић, асистент Економског факултета у Београду.

Министарство просвете Србије није обезбедило потребна средства за учешће наше екипе, а и ЈАТ је одобрио попуст од само 25% (ЈАТ се рекламира да је главни спонзор фудбалске репрезентације наше земље, а за математичку репрезентацију није могао да обезбеди ни карте на редовној ЈАТ-овој линији Београд–Тирана!), тако да је наша осмочлана екипа путовала возом до Подгорице, а затим минибусом (који је обезбедило Друштво математичара Црне Горе) до Тиране и на исти начин натраг. Једина екипа, поред наше, која није допутовала авионом на ово такмичење је била екипа Македоније. Напоран пут, може бити оправдање за мало слабији резултат наше екипе.

Организатори су направили велики број пропуста: ништа се није одвијало по унапред утврђеном распореду, неки њихови чланови жирија нису говорили енглески језик него само руски, имали су неких пропуста у прегледању задатака (на нашу корист :), док је водич која је била додељена нашој екипи била потпуно некорисна, између осталог и због слабог коришћења енглеског језика. Главни разлози тих пропуста су што је први пут организована Балканијада у Албанији, њихова екипа није учествовала на свих 19 претходних такмичења, а и тада њихови вође екипа нису имали значајнију улогу у избору задатака, тако да је у свим аспектима преовладавало неискуство.

Динамика такмичења је била следећа:
2. мај — долазак екипа и смештај,
3. мај — свечано отварање такмичења (уз пригодан културно-уметнички програм), као и обилазак центра Тиране (неорганизован и пешке),
4. мај — преподне такмичење, а поподне и током ноћи прегледање задатака,
5. мај — ученици су ишли на излет у Драч, а вође екипа бранили задатке пред жиријем који су сачињавали домаћи математичари – напоран део усаглашавања вредности (не)урађених задатака,
6. мај — излет у Крују, историјско место где је пре коју деценију подигнут комплекс посвећен Скендербегу (Gjergj Kastrioti=Ђорђе Кастратовић), највећем албанском јунаку, поподне свечано затварање (у њиховој скупштини) и увече обилата вечера са културно-уметничким програмом,
7. мај — одлазак екипа у раним јутарњим часовима.

Такмичење се састојало од 4 задатка, сваки је носио 10 поена и радило се 4 сата. Прва три задатка су се показали као доста лакши од уобичајених, док је четврти прецтављао тврд орах већини такмичара (само 12 ученика је добило преко 5 поена). Због таквог избора задатака наша екипа није успела да направи разлику у односу на екипу Молдавије, која је увек била иза нас на међународним такмичењима из математике. То је довело и до чуднијих граница за награде: I награду је добило само шест ученика који су имали максималних 40 поена, II награда је била од 39 до 33 поена, III награда од 32 до 18, а ученици који су урадили потпуно тачно један задатак, а нису освојили неку од прве три награде добили су похвалу. Екипа Бугарске је суверено победила са 232 поена (цела екипа је изгубила само 8 поена!), али пласмани осталих репрезентација су били крајње неизвесни: Румуни су тек на последњем задатку претекли Турке, који су имали максималних 180 поена на прва три задатка, ми смо несрећно иза Молдавије, а и Македонци су тесно победили Грке. Сви наши такмичари су се вратили са медаљом, али само је Јелена Милановић освојила другу награду, док су остала петорица добили трећу награду. Табеларно по задацима, као и екипама то изгледа овако:

	1.	2.	3.	4.	$\sum$
Јелена Милановић	10	10	10	3	33
Марко Радовановић	10	8	10	3	31
Александар Илић	10	10	8	2	30
Александар Пејчев	10	8	10	2	30
Милан Новаковић	10	10	7	0	27
Алексан. Бранковић	0	10	9	2	21

	1.	2.	3.	4.	$\sum$
1. Бугарска	59	60	60	53	232
2. Румунија	52	58	60	44	214
3. Турска	60	60	60	30	210
4. Молдавија	46	60	49	21	176
5. **Југославија**	50	56	54	12	172
6. БЈРМ	47	42	44	12	145
7. Грчка	34	54	48	7	143
8. Албанија	18	31	34	5	88
9. Кипар	14	12	18	5	49

Наша екипа је била најбоља у спортовима: кошарци, стоном тенису и билијару. Наши ученици и ученица највише су се дружили са Македонцима и Турчином Алијем (Ali Adali).

44. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА, Јапан – Токио, 11.–19. јул 2003.

Овогодишња међународна математичка олимпијада средњошколаца одржана је у Токију (Јапан) од 11. до 19. јула ове године. Учествовало је 87 земаља са свих континената. Екипе су биле смештене у омладинском олимпијском селу у срцу Токија, једног од највећих градова на свету. Ту је 13. и 14. јула одржано и само такмичење. За то време жири је измештен у оближњи градић Мукахари на обали Токијског залива. Љубазни домаћини својски су се трудили да угосте све учеснике. Тако смо брзо заборавили проблеме са визом, финансијама и дуготрајни лет преко Сибира. Учесницима су са поносом показивали своја техничка достигнућа, облакодере високе преко 300 метара, путеве изнад путева, саобраћајне гужве, а помало и делове своје древне цивилизације. Иако смо се, због непостојања свакодневног лета од Амстердама до Београда, морали вратити пре завршне церемоније затварања, утисак који смо собом донели је изванредан. Томе доприноси и добар резултат који је наша шесточлана екипа под вођством проф. др Ђорђа Дугошије, професора Математичког факултета из Београда и његовог заменика Кртинић Ђорђа, асистента на истом факултету, постигла – три сребрне и једна бронзана медаља и две похвале.

Сребрне медаље освојили су: Александар Илић, Марко Радовановић и Александар Пејчев. Бронзану медаљу освојила је Јелена Милановић, док су Милан Новаковић и Александар Бранковић заслужили похвале.

У генералном пласману (који се званично не рачуна), наша екипа је двадесеттрећа (са 101 бодом), што је далеко боље него пласмани осталих бивших југословенских република (следе Хрватска 61. са 80 бодова, Босна и Херцеговина 65. са 71 бодом итд.). На опште изненађење најбољи резултат на Олимпијади остварила је екипа Бугарске. Ранг првих десет са бројем освојених бодова изгледа овако: БУГАРСКА (227), КИНА (212), ВИЈЕТНАМ (172), КОРЕА (157), САД (156), РУМУНИЈА (143), РУСИЈА (142), ТУРСКА (132), ЈАПАН (131), МАЂАРСКА и ВЕЛИКА БРИТАНИЈА (128). Из ових резултата сасвим је јасно да проблеми задати ове године нису ни мало били лаки.

Међународна такмичења средњошколаца у 2004. години

Нашу екипу ове године су сачињавали следећи ученици:

SCG 1. **Марко Радовановић**, Београд,
SCG 2. **Милан Новаковић**, Београд,
SCG 3. **Александар Пејчев**, Београд,
SCG 4. **Ђорђе Баралић**, Крагујевац,
SCG 5. **Урош Рајковић**, Београд,
SCG 6. **Петра Стојсављевић**, Нови Сад.

Ђорђе Баралић је ученик Прве гимназије из Крагујевца, Петра Стојсављевић је била ученица Гимназије "Јован Јовановић Змај" из Новог Сада, док су остали чланови екипе из Математичке гимназије у Београду.

Прва двојица ученика пласирала су се директно након савезног такмичења, док су остали ушли у екипу након мале олимпијаде (такмичења за избор екипе за Олимпијаду). Прва тројица су ученици IV разреда (били су најбољи и на републичком такмичењу: Милан Новаковић 100 поена, Александар Пејчев 95, Марко Радовановић 90, следећи 62, просек 49), док су остали ученици III разреда (Урош Рајковић је био најбољи на републичком такмичењу са 70 поена, следећи 62, просек 28).

21. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА, Бугарска – Плевен, 5.–10. мај 2004.

Балканијада је ове године одржана у Бугарској, у Плевену, у периоду од 5. до 10. маја 2004. Вође наше екипе били су Владимир Балтић, асистент Економског факултета у Београду и Ђорђе Кртинић, асистент Математичког факултета у Београду. Само такмичење је било у петак, 7. маја 2004. Сваки задатак вреди 10 поена и ради се за $4\frac{1}{2}$ сата.

Границе за награде: I награду је добило седам ученика који су имали од 40 до 37 поена (максималних 40 поена је имало троје ученика - 2 Румуна и 1 Бугарин, а поред њих злато су добили још 2 Бугара, 1 Албанац и 1 Молдавац, који је узео злато и на Јуниорској Балканијади, као и на Олимпијади!), II награда је била од 36 до 30 поена, III награда од 29 до 22, а ученици који су урадили потпуно тачно један задатак, а нису освојили неку од прве три награде добили су похвалу. Екипа Румуније је за 1 поен победила домаћине Бугарску, док смо ми поново заузели пето место иза треће Молдавије и четврте Турске. Сви наши такмичари су се вратили са медаљом, али само је Марко Радовановић освојио другу награду, док су осталих петоро добили трећу награду. Табеларно по задацима то изгледа овако:

	1.	2.	3.	4.	$\sum$
Марко Радовановић	10	10	9	5	34
Милан Новаковић	10	7	9	3	29
Ђорђе Баралић	10	7	7	4	28
Петра Стојсављевић	10	9	8	1	28
Александар Пејчев	9	8	5	5	27
Урош Рајковић	10	10	0	4	24

	1.	2.	3.	4.	$\sum$
1. Румунија	60	59	54	34	207
2. Бугарска	59	56	51	40	206
3. Молдавија	56	55	42	38	191
4. Турска	60	59	48	14	181
5. **СЦГ**	59	51	38	22	170
6. Грчка	56	51	40	6	153
7. БЈРМ	51	24	19	8	102
8. Албанија	38	26	17	13	94
8. Кипар	49	26	9	10	94

45. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА, Грчка – Атина, 9.–19. јул 2004.

Балканијада је ове године одржана у Грчкој, у Атини,у периоду од 9. до 19. јуна 2004. Вође наше екипе били су Ђорђе Дугошија, професор Математичког факултета у Београду и Владимир Балтић, асистент Економског факултета у Београду. Такмичење се одржавало два дана у преподневним часовима: понедељак, 12. јул 2004. и уторак, 13. јул 2004. Сваког дана такмичари су радили по три задатка (сваки носи по 7 поена) за $4\frac{1}{2}$ сата. Такмичење је обележило доста организационих пропуста: велика кашњења, у такмичење се одржавало у холу факултета, без клима уређаја на 40°C, веома слабе комисије за оцењивање задатака... Након такмичења, док су вође екипа браниле задатке, ученици су ишли на неколико излета: Микена и Епидаурус, као и обилазак Атине – аутобусом, уз разгледање Акропоља и трговачког центра, Плаке.

Наша екипа је на Међународној математичкој олимпијади средњошколаца освојила две сребрне и три бронзану медаља. Сребрне медаље освојили су: Марко Радовановић и Милан Новаковић. Бронзане медаље освојили су Александар Пејчев, Ђорђе Баралић и Урош Рајковић. Марко Радовановић је другог дана имао максимум поена (21), али због мало слабије урађеног првог дана је остао без златне медаље (недостајао му је 1 поен!). Петра Стојсављевић је остала без похвале, јер је усвојен чудан критеријум за оцењивање 1. задатка. Границе за награде су: I награда је била од 42 до 32 поена (45 ученика), II награда од 31 до 24 поена (78 ученика), III награда од 23 до 16 (120 ученика), а ученици који су урадили потпуно тачно један задатак, а нису освојили неку од прве три награде добили су похвалу.

Табеларно по задацима то изгледа овако:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
Марко Радовановић	7	2	1	7	7	7	31
Милан Новаковић	7	4	1	7	7	2	28
Александар Пејчев	7	2	0	7	5	1	22
Ђорђе Баралић	6	1	2	7	3	1	20
Урош Рајковић	3	4	1	7	4	1	20
Петра Стојсављевић	6	2	1	1	0	1	11
$\sum$	36	15	6	36	26	13	132

У генералном пласману наша екипа дели од двадесетог до двадесеттрећег места (са 132 бодом), што је далеко боље него пласмани осталих бивших југословенских република (**40.** Хрватска са 89 поена, **47.** Македонија са 71, **48–49.** Словенија са 69 и 70. БиХ са свега 40 поена), као и неких много развијенијих западних земаља (од балканских држава били смо четврти - Молдавија је имала 8 поена више од нас, док је Турска остала 14 поена иза нас). За разлику од наших спортиста на Олимпијади која се одржавала месец дана касније (интересантно је да се ове године у Атини одржавају 3 Олимпијаде – математичка у јулу, спорцка у августу и информатичка у септембру), наши математичари су били најбољи у спортовима – ватерполу и фудбалу (добили смо Хрвате 5:0 и Мексиканце 5:2 са неколико играча мање), као и у картама. Чланови наше екипе су се највише дружили са такмичарима из бивших југословенских република. Најбољи резултат на Олимпијади остварила је екипа Кине. Ранг првих десет са бројем освојених бодова изгледа овако (у загради је распоред медаља златне-сребрне-бронзане):

1. Кина 220 (6-0-0) **2.** САД 212 (5-1-0) **3.** Русија 205 (4-1-1) **4.** Вијетнам 196 (4-2-0) **5.** Бугарска 194 (3-3-0) **6.** Тајван 190 (3-3-0) **7.** Мађарска 187 (2-3-1) **8.** Јапан 182 (2-4-0) **9.** Иран 178 (1-5-0) **10.** Румунија 176 (1-4-1) **11.** Украјина 174 (1-5-0) **12.** Јужна Кореја 166 (2-2-2) **13.** Белорусија 154 (0-4-2) **14.** Индија 151 (0-4-2) **15.** Израел 147 (1-1-4) **16.** Пољска 142 (2-1-1) **17.** Сингапур 141 (0-3-3) **18.** Молдавија 140 (2-0-4) **19.** Монголија 135 (0-3-2) **20.** Велика Британија 134 (1-1-4) **21-24.** **СЦГ 132 (0-2-3)**, Бразил 132 (0-2-4), Канада 132 (1-0-3), Казахстан 132 (2-0-2), **25.** Немачка 130 (0-3-1).

ИНФОРМАЦИЈА О НАРЕДНИМ МЕЂУНАРОДНИМ ТАКМИЧЕЊИМА

Наредна Балканијада се одржава у Румунији почетком маја 2005. године, а након тога је на Кипру.

Наредна Олимпијада се одржава у Канкуну у Мексику од 1. до 12. јула 2005. (ето мотива за такмичење). Након тога је у Словенији (Љубљана), затим у Вијетнаму (Ханој), а одређена су и наредна два домаћина: Шпанија и Немачка (Бремен).