Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

5. март 2016.

Први разред – А категорија

1. Нека је операција „$\diamond$“ на скупу $G = \{1, 2, 3, \dots, 2016\}$ задата доњом таблицом.

$\diamond$	1	2	3	4	$\cdots$	2016
1	5	5	5	5	$\cdots$	5
2	1	2	5	5	$\cdots$	5
3	4	3	5	5	$\cdots$	5
4	5	5	5	5	$\cdots$	5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
2016	5	5	5	5	$\cdots$	5

(Унутар таблице на свим местима која нису експлицитно наведена налази се број 5.) Испитати да ли је операција „$\diamond$“ асоцијативна.

2. Дат је оштроугли $\triangle ABC$ у ком важи $AB < AC$. Тачка D је средиште странице BC, а p је права симетрична правој AD у односу на симетралу $\measuredangle BAC$. Ако је P подножје нормале из темена C на праву p, доказати једнакост $\measuredangle APD = \measuredangle BAC$.

3. Свака тачка тродимензионалног простора је обојена једном од две боје: црвеном или плавом. Притом, ако су три тачке A, B и C обојене истом бојом и важи $AB = AC$, онда је и средиште дужи BC обојено истом том бојом. Доказати да постоји квадар чија су сва темена обојена истом бојом.

4. Производ биномног коефицијента $\binom{64}{21}$ и непознатог непарног броја износи

$$5{*}\,6{*}0\,{*}8{*}\,862\,{*}1{*}\,7{*}7\,{*}4{*}\,4{*}5\,12{*}\,9{*}{*}.$$

Одредити цифре означене звездицом.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

5. март 2016.

Други разред – А категорија

1. Одредити број пресликавања $f : \{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ која задовољавају:

- $f(x,x) = x$ за све $x \in \{1,2,3,4\}$ и
- $f(x, f(x,y)) = f(x,y)$ за све $x \in \{1,2,3,4\}$.

2. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да важи

$$f(x)f(x-y) + f(y)f(x+y) = x^2 + f(y)^2 \text{ за све } x, y \in \mathbb{R}.$$

3. Наћи сва решења (p,a,b,m) једначине

$$p^2 + 4^a 9^b = m^2,$$

где је p прост број и $a, b, m \in \mathbb{N}_0$.

4. Дат је $\triangle ABC$. Нека је D средиште дужи BC. Нека је k кружница описана око $\triangle ABD$. На луку $\widehat{AB}$ ком не припада тачка D уочимо тачку E такву да важи $\measuredangle EDB = \measuredangle DAC$. Нека нормала из A на AD сече праву BC у тачки F. Нека је G друга пресечна тачка праве FE са k; изузетно, ако је FE тангента на k, тада дефинишимо $G \equiv E$. Доказати: $DG = DB$.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

5. март 2016.

Трећи разред – А категорија

1. Дат је $\triangle ABC$. Симетрала $\measuredangle BAC$ сече страницу BC у тачки D. Нека је M средиште дужи BD. Уочимо кружницу k која пролази кроз тачку A, додирује страницу BC у тачки D, и сече дужи AM и AC у тачкама P и Q, редом ($P, Q \not\equiv A$). Доказати да су тачке B, P и Q колинеарне.

2. Да ли постоји природан број n такав да су $n - 2015$ и $\dfrac{n}{2015}$ природни бројеви који имају тачно 2015 делилаца?

3. У току је велики скуп n мудраца који седе за округлим столом. Сваки мудрац или увек лаже или увек говори истину. Места на којима мудраци седе су нумерисана од 1 до n почевши од неког места и идући редом у смеру казаљке на сату гледано одозго. Новинар, желећи да утврди који су мудраци лажљивци, ишао је редом око стола и интервјуисао мудраце, и за свако k, $k = 1, 2, \ldots, n$, мудрац на k-том месту му је рекао да су следећих k мудраца од њега у смеру казаљке на сату гледано одозго сви лажљивци.

a) За које вредности n је могуће да мудраци дају овај скуп изјава?

b) За које вредности n (међу оним вредностима за које је овакав скуп изјава могућ) новинар и даље неће бити у стању да утврди за сваког мудраца да ли је лажљивац или истинољубац?

c) За $n = 2016$ одредити на којим местима седе мудраци истинољупци.

4. Нека је дата функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ која није константна таква да важи

$$f(x)f(x-y) + f(y)f(x+y) = f(x)^2 + f(y)^2 \text{ за све } x, y \in \mathbb{R}.$$

Доказати: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ за све $x, y \in \mathbb{R}$.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

5. март 2016.

Четврти разред – А категорија

1. Означимо са A', B' и C', редом, подножја висина из темена A, B и C у $\triangle ABC$. Нека су I_A, I_B и I_C центри уписаних кружница у $\triangle AB'C'$, $\triangle BA'C'$ и $\triangle CA'B'$, редом. Доказати да је ортоцентар $\triangle I_AI_BI_C$ уједно и центар уписане кружнице у $\triangle ABC$.

2. Нека су $x_1, x_2, \dots, x_n$ реални бројеви. Познато је да за свако i, $i \in \{1, \dots, n\}$, постоји природан број k такав да важи $x_i + x_{i+1} + \dots + x_{i+k-1} \geqslant 0$ (где индексе посматрамо циклично по модулу n). Доказати: $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geqslant 0$.

3. Дат је природан број n. Доказати да за сваки непаран број x постоји природан број y такав да важи $y^y \equiv x \pmod{2^n}$.

4. Кажемо да се многоугао $\mathscr{M}_0$ у равни може *обмотати са n копија* ако постоје многоуглови $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, \dots, \mathscr{M}_n$ подударни с многоуглом $\mathscr{M}_0$ такви да важи:

1° свака два многоугла $\mathscr{M}_i$ и $\mathscr{M}_j$, $0 \leqslant i < j \leqslant n$, имају дисјунктне унутрашњости;

2° сваки од многоуглова $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, \dots, \mathscr{M}_n$ има бар једну заједничку рубну тачку с многоуглом $\mathscr{M}_0$;

3° $\bigcup_{i=0}^{n} \mathscr{M}_i$ је многоугао такав да је строго у његовој унутрашњости садржан многоугао $\mathscr{M}_0$.

Да ли постоји многоугао којим се не може поплочати раван, а који се може обмотати са 8 копија?

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

5. март 2016.

Први разред – Б категорија

1. a) Полином $x^8 + x^4 + 1$ представити као производ три полинома степена бар 1.

b) Рационалисати именилац разломка $\dfrac{1}{1 + \sqrt[4]{3} + \sqrt{3}}$.

2. Посматрајмо број

$$122333\ldots\underbrace{99\ldots9}_{9\text{ пута}}\underbrace{1010\ldots10}_{10\text{ пута}}\ldots\underbrace{2020\ldots20}_{20\text{ пута}}$$

(дакле, посматрани број добијен је надовезивањем броја 1 записаног једном, броја 2 записаног два пута, броја 3 записаног три пута итд. до броја 20 записаног двадесет пута). Испитати да ли је посматрани број:

a) дељив са 9;

b) дељив са 11;

c) потпун квадрат;

d) дељив са 16.

3. Да ли постоји пермутација $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ бројева $1, 2, 3, 4, 5$ таква да важи

$$(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_4)(a_4+a_5)(a_5+a_1) = (a_1+a_3)(a_3+a_5)(a_5+a_2)(a_2+a_4)(a_4+a_1)?$$

4. У једнакокраком $\triangle ABC$, $AB = BC$, тачка M је подножје висине из темена B, а симетрала $\measuredangle BAC$ сече страницу BC у тачки K. Ако важи $2BM = AK$, одредити углове тог троугла.

5. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$. Конструисати праву која пролази кроз теме A и дели тај четвороугао на два дела једнаких површина.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

5. март 2016.

Други разред – Б категорија

1. Решити неједначину
$$\log_{2-\frac{1}{5}x}(x^2-4x+4)<2.$$

2. Решити систем једначина
$$3x^2+2xy+6y^2=24;$$
$$x^4+4y^4=64.$$

3. Одредити све природне бројеве n за које је
$$1+2\cdot 3^n+10^n+19^n$$
потпун квадрат природног броја.

4. Посматрајмо систем једначина
$$y_1+y_2+\cdots+y_{1000}=2016;$$
$$y_n=x_n^{2^{2^n}} \text{ за } n=1,2,3,\ldots,1000.$$
(Дакле, систем има 1001 једначину и укупно 2000 непознатих.) Колико решења $(x_1,x_2,\ldots,x_{1000},y_1,y_2,\ldots,y_{1000})$ има посматрани систем у скупу ненегативних целих бројева?

5. Дат је оштроугли $\triangle ABC$. Конструисати нормалу на страницу AB која дели $\triangle ABC$ на два дела једнаких површина.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

5. март 2016.

Трећи разред – Б категорија

1. Дати су вектори $\vec{a} = (-3, -2, 1)$ и $\vec{b} = (1, 1, 3)$. Одредити, ако постоји, реалан број r такав да вектор $(1, r, -2)$ гради угао од 60° са вектором $\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{a})$.

2. Дата је трака 2015×1 подељена на јединичне квадратиће. Два играча наизменично уписују X у произвољан квадратић, под условом да он није већ попуњен. Добија први играч који постигне да након његовог потеза постоје бар 3 узастопна квадратића обележена словом X. Доказати да први играч има победничку стратегију.

3. Природни бројеви a, b и c су такви да је број $a + b + c$ прост и важи

$$ab + bc + ac \mid a^2 + b^2 + c^2.$$

Доказати: $a = b = c = 1$.

4. У правоуглом троуглу тежишне линије које одговарају катетама заклапају угао φ за који важи $\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{4}$. Наћи углове тог троугла.

5. За позитивне реалне бројеве a и b означимо

$$S(a, b) = \min\left(a, b, \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Наћи највећу могућу вредност израза $S(a, b)$ и за које a и b се та вредност достиже.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

5. март 2016.

Четврти разред – Б категорија

1. Дат је полином
$$P(x) = 3x^5 + ax^4 - 35x^3 + bx^2 + 32x + c$$
чије су две нуле $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$, и важи $x_3x_4x_5 = 2$. Наћи коефицијенте a, b и c и преостале нуле.

2. Теткица с Окружног такмичења поново пише по табли, овај пут по следећем обрасцу. На почетку је на табли написана промењлива x. У једном кораку теткица бира произвољна два израза која постоје на табли (укључујући могућност да узме исти израз два пута) и на таблу дописује њихов производ. Колико најмање корака је потребно да би се на табли добио израз x^{1025}?

3. Природан број n има следећу особину: за свако k из интервала $2 \leqslant k \leqslant m$ (где је m унапред фиксиран природан број) број kn је потпун k-ти степен (другим речима, $2n$ је потпун квадрат, $3n$ је потпун куб, ..., mn је потпун m-ти степен). Одредити највећи природан број m за који постоји такав природан број n.

4. За које вредности реалних параметара a и b систем
$$\begin{aligned} xyz + z &= a; \\ xyz^2 + z &= b; \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 4 \end{aligned}$$
има јединствено решење у скупу реалних бројева?

5. Тетраедар $ABCD$ има дужине ивица $AB = 1$ и $BD = 2$, а $\measuredangle BAD$ и $\measuredangle ABC$ су прави. Сфера додирује пљосни ABD и BCD у тачкама A и C, редом. Наћи полупречник те сфере.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Пошто су све нуле реалне и веће од 1, сви сабирци у загради су позитивни, па даље имамо

$$\left|\frac{P'(1)}{P(1)}\right| = \frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}+\cdots+\frac{1}{x_n-1}$$
$$\geqslant \frac{1}{x_n-1}+\frac{1}{x_n-1}+\cdots+\frac{1}{x_n-1}=\frac{n}{x_n-1}.$$

Одавде следи $\frac{x_n-1}{n} \geqslant \left|\frac{P(1)}{P'(1)}\right|$, из чега директно закључујемо $x_n \geqslant 1 + n\left|\frac{P(1)}{P'(1)}\right|$, што је и требало доказати.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 5. 3. 2016.

Први разред – А категорија

1. *Прво решење.* Доказујемо: i. за све $g_1, g_2, g_3 \in G$ међу којима је бар један број већи од 3 важи $(g_1 \diamond g_2) \diamond g_3 = g_1 \diamond (g_2 \diamond g_3)$; ii. за све $g, h \in G$ важи $(g \diamond h) \diamond 3 = g \diamond (h \diamond 3)$ и $(1 \diamond g) \diamond h = 1 \diamond (g \diamond h)$; iii. операција „$\diamond$“ је асоцијативна.

i. Како се применом операције „$\diamond$“ на било која два броја међу којима је бар један већи од 3 увек добија резултат 5, ако се број већи од 3 налази међу g_1, g_2, g_3, резултат оба израза $(g_1 \diamond g_2) \diamond g_3$ и $g_1 \diamond (g_2 \diamond g_3)$ износиће 5 (било већ приликом прве примене операције, било из два „корака“).

ii. Важи $(g \diamond h) \diamond 3 = 5$ и $g \diamond (h \diamond 3) = g \diamond 5 = 5$, као и $(1 \diamond g) \diamond h = 5 \diamond h = 5$ и $1 \diamond (g \diamond h) = 5$.

iii. Довољно је испитати могућности које нису размотрене под i. и ii., а то су оне у којима је на првом месту 2 или 3, на другом 1, 2 или 3, а на трећем 1 или 2.

$$\begin{array}{ll}
(2 \diamond 1) \diamond 1 = 1 \diamond 1 = 5; & 2 \diamond (1 \diamond 1) = 2 \diamond 5 = 5 \\
(2 \diamond 1) \diamond 2 = 1 \diamond 2 = 5; & 2 \diamond (1 \diamond 2) = 2 \diamond 5 = 5 \\
(2 \diamond 2) \diamond 1 = 2 \diamond 1 = 1; & 2 \diamond (2 \diamond 1) = 2 \diamond 1 = 1 \\
(2 \diamond 2) \diamond 2 = 2 \diamond 2 = 2; & 2 \diamond (2 \diamond 2) = 2 \diamond 2 = 2 \\
(2 \diamond 3) \diamond 1 = 5 \diamond 1 = 5; & 2 \diamond (3 \diamond 1) = 2 \diamond 4 = 5 \\
(2 \diamond 3) \diamond 2 = 5 \diamond 2 = 5; & 2 \diamond (3 \diamond 2) = 2 \diamond 3 = 5
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
(3 \diamond 1) \diamond 1 = 4 \diamond 1 = 5; & 3 \diamond (1 \diamond 1) = 3 \diamond 5 = 5 \\
(3 \diamond 1) \diamond 2 = 4 \diamond 2 = 5; & 3 \diamond (1 \diamond 2) = 3 \diamond 5 = 5 \\
(3 \diamond 2) \diamond 1 = 3 \diamond 1 = 4; & 3 \diamond (2 \diamond 1) = 3 \diamond 1 = 4 \\
(3 \diamond 2) \diamond 2 = 3 \diamond 2 = 3; & 3 \diamond (2 \diamond 2) = 3 \diamond 2 = 3 \\
(3 \diamond 3) \diamond 1 = 5 \diamond 1 = 5; & 3 \diamond (3 \diamond 1) = 3 \diamond 4 = 5 \\
(3 \diamond 3) \diamond 2 = 5 \diamond 2 = 5; & 3 \diamond (3 \diamond 2) = 3 \diamond 3 = 5
\end{array}$$

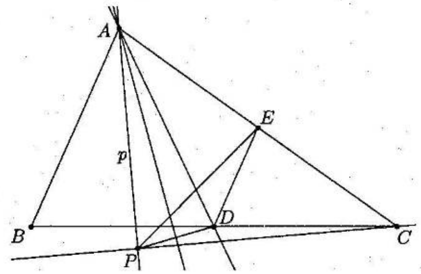
Друго решење. Приметимо, ако $x \diamond y \notin \{2,3\}$, тада $(x \diamond y) \diamond z = 5$ (што нам може знатно олакшати даље испитивање), а супротну могућност, $x \diamond y \in \{2,3\}$, имамо само у неким случајевима кад важи $y = 2$. Дакле, тиме долазимо до идеје да раздвојимо случајеве $y \neq 2$ и $y = 2$.

Претпоставимо прво $y \neq 2$. Тада, као што смо већ приметили, имамо $(x \diamond y) \diamond z = 5$. С друге стране, из $y \neq 2$ следи $y \diamond z \in \{3,4,5\}$, а тада и $x \diamond (y \diamond z) = 5$, што је и требало доказати.

Приметимо још и следеће: уколико $x \notin \{2,3\}$, тада важи $x \diamond (y \diamond z) = 5$, и такође $x \diamond y = 5$ па тиме и $(x \diamond y) \diamond z = 5 \diamond z = 5$, што је и требало доказати. Слично, уколико $z \notin \{1,2\}$, тада важи $(x \diamond y) \diamond z = 5$, и такође $y \diamond z = 5$ па тиме и $x \diamond (y \diamond z) = x \diamond 5 = 5$, што је и требало доказати.

Према свему реченом, преостаје још само испитати случајеве у којима важи $x \in \{2,3\}$, $y = 2$ и $z \in \{1,2\}$. Тада имамо $x \diamond y = x \diamond 2 = x$ (ова једнакост важи за $x \in \{2,3\}$), тј. $(x \diamond y) \diamond z = x \diamond z$, и слично, $y \diamond z = 2 \diamond z = z$ (ова једнакост важи за $z \in \{1,2\}$), тј. $x \diamond (y \diamond z) = x \diamond z$, па опет важи $(x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z)$. Тиме је доказ завршен.

2. Посматрајмо средиште E странице AC. Како је E средиште хипотенузе правоуглог $\triangle APC$, важи $PE = AE = CE$. Даље, средња линија DE у $\triangle ABC$ паралелна је страници AB, па следи $\measuredangle EDA = \measuredangle BAD$. Стога имамо $\measuredangle APE = \measuredangle PAE = \measuredangle BAD = \measuredangle ADE$, па је четвороугао $APDE$ тетиван. Следи $\measuredangle APD = 180° - \measuredangle AED = \measuredangle BAC$.

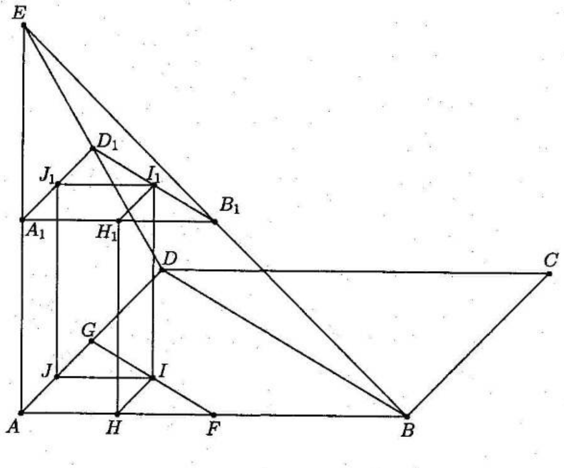


Др 2016 1А 2

3. *Прво решење.* Приметимо најпре следеће помоћно тврђење: уколико су темена једнакокрако-правоуглог троугла исте боје, тада су и средишта његових страница те боје. Заиста, ако посматрамо такав $\triangle PQR$, тада прво уочавамо да је и средиште S његове хипотенузе QR исте боје, а затим, применом услова на $\triangle SPQ$ и $\triangle SPR$, добијамо да су и средишта катета исте боје.

Докажимо сада да постоји једнакокрако-правоугли троугао чија су темена исте боје. Узмимо 2 тачке, P и R, које су обе, без умањења општости, плаве боје. Посматрајмо тачке Q и S такве да је четвороугао $PQRS$ квадрат. Уколико је бар једна од њих плаве боје, имамо тражени троугао. Уколико су обе црвене боје, тада посматрамо тачку T такву да $PQRST$ чини праву пирамиду с висином $\frac{PR}{2}$; без обзира на боју тачке T, можемо одабрати један од $\triangle PRT$ или $\triangle QST$.

Сада, посматрајући теме код правог угла уоченог троугла и средишта страница, добијамо једнобојни квадрат; назовимо га $ABCD$, и нека су сва његова темена, без умањења општости, плаве боје. Уочимо сада праве кроз A, B, C и D нормалне на раван квадрата $ABCD$, и на тим правима уочимо тачке које су од A, B, C и D, респективно, удаљене за дужину странице квадрата $ABCD$ (имамо укупно 8 таквих тачака, на свакој правој по 2). Ако су све ове тачке црвене, оне формирају квадар с истобојним теменима. Претпоставимо да је нека од тих тачака плава, рецимо E, при чему је, без умањења општости, E на правој кроз A. Нека су тачке A_1, D_1, B_1, F и G средишта дужи EA, ED, EB, AB и DA, а тачке H, I, J, H_1, I_1 и J_1 средишта дужи AF, FG, GA, A_1B_1, B_1D_1 и D_1A_1, све респективно. Из $\triangle EAB$, $\triangle EAD$ и $\triangle DAB$ налазимо да су и тачке A_1, B_1, D_1, F и G плаве, а затим из $\triangle AFG$ и $\triangle A_1B_1D_1$ добијамо да су и тачке H, I, J, H_1, I_1 и J_1 плаве. Тиме смо добили плави квадар $AHIJA_1H_1I_1J_1$.



Др 2016 1А 3

Друго решење. Из услова задатка директно добијамо да, ако су темена једнакостраничног троугла једне боје, онда су и средишта страница тог троугла исте боје.

Докажимо прво да постоји једнакостраничан троугао с истобојним теменима. У ту сврху, најпре ћемо наћи три истобојне тачке од којих је једна средиште дужи које образују преостале две, што чинимо на следећи начин: уочимо тачке A и C исте боје, рецимо плаве, и посматрајмо симетралу дужи AC; уколико је нека тачка на тој симетрали плава, тада је и средиште дужи AC плаво; у супротном, на тој симетрали можемо уочити три црвене тачке међу којима је једна средиште дужи које образују преостале две, како смо и желели. Назовимо добијену тројку тачака (рецимо плавих) A, B и C, где је B између A и C. Сада посматрајмо тачке D, E и F које са дужима AB, BC и AC, респективно, образују једнакостранични троуглове са исте стране праве AB. Ако је нека од тих тачака плава, онда она са одговарајућом дужи формира једнакостранични троугао са плавим теменима; с друге стране, ако су све црвене, тада је $\triangle DEF$ тражени троугао.

Дакле, имамо једнакостраничан $\triangle PQR$ чија су сва темена, без умањења општости, плава, а тада су и средишта његових страница плава. Сада ћемо доказати да постоји једнобојан правилан тетраедар. Посматрајмо четири тачке које са $\triangle PQR$ и три троугла одређена по једном од тачака P, Q или R и средиштима одговарајућих страница формирају правилне тетраедре. Ако је нека од те четири тачке плаве боје, имамо тражени тетраедар (плаве боје), а у супротном уочене четири тачке формирају црвени правилан тетраедар.

Средишта ивица уоченог истобојног тетраедра такође су исте боје, а она чине правилан октаедар. И средишта ивица овог октаедра су исте боје, а међу тим средиштима можемо уочити осам (средишта оних ивица која полазе из два наспрамна темена октаедра) таквих која формирају квадар. Тиме је доказ завршен.

Треће решење. Уведимо стандардан Декартов правоугли координатни систем у нашем простору. Прво претпоставимо да, за $i = 1, 2, 3$, постоји дуж A_iB_i чији су крајеви исте боје а средиште C_i супротне боје, и да је притом A_1B_1 паралелна са x-осом, A_2B_2 са y-осом, а A_3B_3 са z-осом. Нека је α_i раван нормална на A_iB_i која пролази кроз C_i. За свако i, $i = 1, 2, 3$, све тачке равни α_i међусобно су исте боје (у супротном имамо контрадикцију с условом задатка). Како су равни α_1, α_2 и α_3 међусобно нормалне, све имају исту боју, рецимо плаву. Ако постоји плава тачка A која није у $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$, тада лако налазимо квадар чија су сва темена плаве боје. С друге стране, ако су све тачке ван $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$ црвене боје, тада још лакше налазимо црвени квадар.

Сада можемо претпоставити да не постоји права паралелна са, без умањења општости, x-осом, таква да на њој можемо уочити три тачке A, B и C, где је C средиште дужи AB, при чему су A и B исте боје а C друге боје. Од сада до краја решења посматрамо само тачке са целобројним координатама, осим када је експлицитно наглашено другачије.

Посматрајмо произвољну праву p паралелну са x-осом. Тврдимо да на p не постоје две тачке једне боје такве да је нека тачка између њих (не нужно средиште дужи) друге боје. Претпоставимо супротно. Одаберимо две такве тачке на најмањем растојању. Тада имамо нпр. плаве тачке са

x-координатама n и $n+k$, а све тачке између њих су црвене. Случај $k=2$ је немогућ јер средиште дужи с плавим крајевима мора такође бити плаво. С друге стране, за $k>2$, средиште дужи (можда нецелобројно) између тачака са x-координатама n и $n+k$ мора бити плаво јер су ове тачке плаве, но то средиште је уједно и средиште дужи између тачака са x-координатама $n+1$ и $n+k-1$, а ове тачке су црвене, контрадикција. Дакле, можемо закључити следеће: за сваку праву p паралелну са x-осом постоји $n \in \mathbb{Z}$ такво да све тачке са x-координатом већом од n имају једну боју, а све остале тачке другу.

Сада посматрајмо све тачке с координатама облика (x, b_i, c_i), где важи $x \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant b_i \leqslant 6$ и $0 \leqslant c_i \leqslant 2$. Приметимо да се ове тачке могу груписати на 21 праву паралелну са x-осом (сваки пар (b_i, c_i) одређује по једну такву праву). Уочимо број $m \in \mathbb{Z}$ такав да на свакој од тих 21 правих све тачке x-координатом већом од m имају исту боју. Међу посматраним правима имамо 7 оних на којима леже тачке с z-координатом једнаком 0; према Дирихлеовом принципу, на бар 4 од њих све тачке са x-координатом већом од m имају међусобно исту боју, рецимо плаву. Изнад те 4 праве налазе се још 4 од наших уочених правих, p_1, p_2, p_3 и p_4, оне на којима леже тачке са z-координатом једнаком 1, и још 4 од наших уочених правих, q_1, q_2, q_3 и q_4, оне на којима леже тачке са z-координатом једнаком 2. Ако неке две од правих p_i имају плаве тачке са x-координатом већом од m, тада лако уочавамо плави квадар. Слично, ако неке две од правих q_i имају плаве тачке са x-координатом већом од m, тада лако уочавамо плави квадар. Најзад, ако три од правих p_i и три од правих q_i имају црвене тачке са x-координатом већом од m, тада постоје две од те три праве p_i такве да су директно изнад њих две од ове три праве q_i, и тада лако уочавамо црвени квадар.

4. Из записа $\binom{64}{21} = \frac{64!}{21!\cdot 43!}$ добијамо да највећи степен броја 5 који дели $\binom{64}{21}$ јесте

$$5^{\lfloor \frac{64}{5} \rfloor + \lfloor \frac{64}{25} \rfloor - \lfloor \frac{21}{5} \rfloor - \lfloor \frac{43}{5} \rfloor - \lfloor \frac{43}{25} \rfloor} = 5^{12+2-4-8-1} = 5,$$

док највећи степен броја 2 који дели $\binom{64}{21}$ јесте

$$2^{32+16+8+4+2+1-10-5-2-1-21-10-5-2-1} = 2^{63-18-39} = 2^6.$$

Дакле, број из поставке дељив је са 5, и дељив је са 2^6 али не и са 2^7. Одатле следи да је његова последња цифра једнака 0. Обележимо преостале непознате цифре на следећи начин:

$$\overline{5a\,6b0\,c8d\,862\,e1f\,7g7\,h4i\,4j5\,12k\,9l0}. \tag{1}$$

Приметимо да због дељивости броја (1) са 2^6 троцифрени завршетак $\overline{9l0}$ мора бити дељив са 8, тј. $\overline{9l}$ мора бити дељиво са 4, одакле добијамо $l \in \{2,6\}$. Највећи степени бројева 3 и 11 који деле $\binom{64}{21}$ јесу $3^{21+7+2-7-2-14-4-1} = 3^2$ и $11^{5-1-3} = 11$. Одатле, број (1) дељив је са 9 и са 11, па добијамо

$$\begin{aligned}0 &\equiv 5+a+6+b+0+c+8+d+8+6+2+e+1+f+7+g+7\\ &\qquad +h+4+i+4+j+5+1+2+k+9+l+0\\ &= 75+a+b+c+d+e+f+g+h+i+j+k+l \equiv 3+S \pmod 9\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}0 &\equiv 5-a+6-b+0-c+8-d+8-6+2-e+1-f+7-g+7\\ &\qquad -h+4-i+4-j+5-1+2-k+9-l+0\\ &= 61-S \equiv 6-S \pmod{11},\end{aligned}$$

где смо са S означили суму $a+b+c+\cdots+l$. Претходне две релације своде се на $S \equiv 6 \pmod 9$ и $S \equiv 6 \pmod{11}$, тј. $99 \mid S-6$. Како је S збир 12 цифара и за цифру l имамо ограничење $2 \leqslant l \leqslant 6$, следи $2 \leqslant S \leqslant 105$, па из овог и претходног закључка добијамо $S=6$ или $S=105$. Претпоставимо најпре $S=105$. Ово је могуће само у случају $a=b=c=\cdots=k=9$ и $l=6$. Но, тада би четвороцифрени завршетак броја (1) износио $\overline{k9l0} = 9960$ и он би морао да буде дељив са $2^4=16$, а што није тачно (јер 996 није дељиво са 8). Према томе, остаје $S=6$.

Подсетимо се, $l \in \{2,6\}$. Размотримо прво случај $l=2$. Како мора важити $2^3 \mid \overline{k9l} = \overline{k92}$, следи $k=1$ или $k=3$ (не може бити $k \geqslant 5$ због $S=6$). Могућност $k=3$ отпада јер мора важити $2^4 \mid \overline{2k9l}$, али $16 \nmid 2392$. Преостаје $k=1$. Тада седмоцифрени завршетак броја (1) износи 5 121 920; но, како је ово дељиво са 2^7 (што се лако може видети примећујући да $2^6 = 64 \mid 512192$ због $64 \mid 512000$ и $64 \mid 192$), и број (1) био би дељив са 2^7, али раније је констатовано да је он дељив са 2^6 али не и са 2^7, контрадикција. Коначно закључујемо $l=6$. Сада из $S=6$ следи $a=b=c=\cdots=k=0$. Посматрани број је

$$50\,600\,080\,862\,010\,707\,040\,405\,120\,960.$$

Други разред – А категорија

1. Обележимо $f_i(x) = f(i,x)$ за $i \in \{1,2,3,4\}$. Тада се први услов своди на $f_i(i) = i$ за све $i \in \{1,2,3,4\}$, а други услов своди се на

$f_i(f_i(x)) = f_i(x)$ за све $i \in \{1,2,3,4\}$. Дакле, f можемо еквивалентно представити као уређену четворку пресликавања (f_1, f_2, f_3, f_4), где сваки f_i задовољава $f_i(f_i(x)) = f_i(x)$ и $f_i(i) = i$. Даље, број пресликавања $h : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ која задовољавају $h(h(x)) = h(x)$ и $h(i) = i$, где је $i \in \{2,3,4\}$ неки фиксиран број, једнак је броју пресликавања $g : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ која задовољавају $g(g(x)) = g(x)$ и $g(1) = 1$.

Дакле, из правила производа следи да је број пресликавања f која задовољавају услов задатка једнак четвртом степену броја пресликавања $g : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ која задовољавају $g(g(x)) = g(x)$ и $g(1) = 1$. Обележимо

$$A = \{g : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\} \mid g(g(x)) = g(x) \text{ и } g(1) = 1\}.$$

Нека је g пресликавање скупа $\{1,2,3,4\}$ у самог себе, и нека је S скуп слика функције g ($S \subseteq \{1,2,3,4\}$). Лако примећујемо да важи $g \in A$ ако и само ако $1 \in S$ и рестрикција g на S је идентичко пресликавање. Дакле, да бисмо једнозначно одредили $g \in A$, довољно је одредити скуп слика S такав да $1 \in S \subseteq \{1,2,3,4\}$, као и рестрикцију пресликавања g које слика $\{1,2,3,4\} \setminus S$ (тј. комплемент од S) у скуп S на произвољан начин.

Сада раздвајамо случајеве у зависности од кардиналности скупа S. За $|S| = 1$ и $|S| = 4$ постоји јединствено пресликавање $g \in A$, наиме, константно пресликавање и идентичко пресликавање, редом. За $|S| = 2$ имамо $1 \in S$ и 3 избора за други елемент скупа S, и $2^2 = 4$ пресликавања за сваки избор S, дакле укупно 12 пресликавања. За $|S| = 3$ имамо $1 \in S$ и $\binom{3}{2} = 3$ избора за преостала два елемента скупа S, и $3^1 = 3$ пресликавања за сваки избор S, дакле укупно 9 пресликавања. Коначно, $|A| = 1 + 12 + 9 + 1 = 23$, па је тражени број једнак $|A|^4 = 23^4$.

2. За $x = y = 0$ добијамо $f(0) = 0$. Затим уврштавање $y = 0$ у полазну једначину даје $f(x)^2 = x^2$. Овим за свако x имамо $f(x) = \pm x$.

Претпоставимо да постоје x и z различити од 0 такви да важи $f(x) = x$ и $f(z) = -z$. За $y = x - z$ полазна једначина своди се на

$$-xz + f(x-z)f(2x-z) = x^2 + (x-z)^2,$$

тј.

$$-xz \pm (2x^2 - 3xz + z^2) = 2x^2 - 2xz + z^2,$$

што се даље своди на

$$0 = (2x^2 - xz + z^2)^2 - (2x^2 - 3xz + z^2)^2 = 2xz(4x^2 - 4xz + 2z^2) = 4xz(x^2 + (x-z)^2).$$

Одавде следи $x = 0$ или $z = 0$, контрадикција с претпоставком. Дакле, мора важити или $f(x) = x$ за све x, или $f(x) = -x$ за све x. Директно се проверава да ове функције заиста задовољавају једначину из поставке.

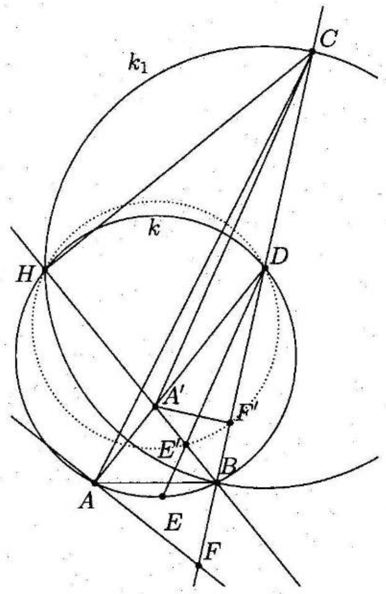
3. Дата једначина може се записати у облику $p^2 = (m - 2^a 3^b)(m + 2^a 3^b)$. Како је p прост број, једина могућност је $m + 2^a 3^b = p^2$ и $m - 2^a 3^b = 1$. Одузимањем ових двеју релација добијамо $2^{a+1} 3^b = (p-1)(p+1)$. Како бар један од бројева $p-1$ и $p+1$ није дељив са 3, он мора бити облика 2^k за неко $k \in \mathbb{N}_0$. Пошто за $p = 2$ нема решења, важи $k > 0$. Разликујемо два случаја.

- $p+1 = 2^k$: Тада имамо $p - 1 = 2^k - 2 = 2^{a+1-k} 3^b$, тј. $2^k - 2^{a+1-k} 3^b = 2$, одакле следи $k = a$ и $2^a - 2 \cdot 3^b = 2$, тј. $2^{a-1} = 3^b + 1$. Како је остатак при дељењу са 8 израза $3^b + 1$ увек 2 или 4, добијамо $a = 2$ (и тада $b = 0$) или $a = 3$ (и тада $b = 1$), што даје решења $(p,a,b,m) \in \{(3,2,0,5), (7,3,1,25)\}$.
- $p-1 = 2^k$: Тада имамо $p + 1 = 2^k + 2 = 2^{a+1-k} 3^b$, тј. $2^{a+1-k} 3^b - 2^k = 2$, одакле следи $k = 1$ или $k = a$. У случају $k = 1$ добијамо $a = 2$, $b = 0$ и $(p,a,b,m) = (3,2,0,5)$, што није ново решење. Зато узмимо $k \geqslant 2$. Тада следи $k = a$ и $2 \cdot 3^b - 2^a = 1$, тј. $2^{a-1} = 3^b - 1$. За $a = 2$ имамо решење $(p,a,b,m) = (5,2,1,13)$. За $a \geqslant 3$ добијамо $4 \mid 3^b - 1$, па b мора бити парно, рецимо $b = 2b_1$. Сада из $2^{a-1} = (3^{b_1} + 1)(3^{b_1} - 1)$ закључујемо да су $3^{b_1} - 1$ и $3^{b_1} + 1$ степени двојке који се разликују за 2, а једини такви степени двојке су 2 и 4. Дакле, $b_1 = 1$ и одатле $b = 2$, $a = 4$, што нам даје решење $(17, 4, 2, 145)$.

Дакле, постављена једначина има четири решења:

$$(p,a,b,m) \in \{(3,2,0,5), (5,2,1,13), (7,3,1,25), (17,4,2,145)\}.$$

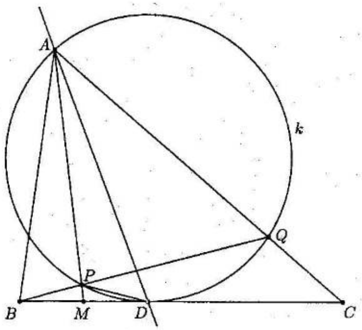
4. Приметимо да је $\angle BGC$ прав ако и само ако важи $DG = DB$; дакле, ако са H означимо други пресек кружнице k и кружнице k_1 с пречником BC, следи да је довољно доказати да су тачке H, E и F колинеарне (из овога би следило $H \equiv G$). Применимо инверзију у односу на кружницу k_1: нека се тачке A, E и F пресликавају у тачке A', E' и F', редом, а приметимо још да тачке B, C и H остају фиксне. Треба доказати да су тачке D, H, E' и F' концикличне. Приметимо следеће чињенице: посматраном инверзијом k се пресликава у праву BA', F' је



Др 2016 2А 4

подножје висине из A' на BC, H је подножје висине из C на BA' и најзад, из једнакости $\measuredangle E'DB = \measuredangle EDB = \measuredangle DAC = \measuredangle DCA'$ следи $E'D \parallel A'C$, а пошто је E' на дужи BA', следи да је E' средиште дужи BA'. Према томе, тачке D, H, E' и F' припадају Ојлеровој кружници за $\triangle A'BC$, те су концикличне. Овим је доказ завршен.

Трећи разред – А категорија



Др 2016 3А 1

1. Приметимо једнакост $MP \cdot MA = MD^2 = MB^2$. Одатле добијамо $\triangle MPD \sim \triangle MDA$ и $\triangle MPB \sim \triangle MBA$, па следи $\measuredangle BPD = 180^\circ - \measuredangle PBD - \measuredangle PDB = 180^\circ - \measuredangle PAB - \measuredangle PAD = 180^\circ - \measuredangle CAD = 180^\circ - \measuredangle QPD$. Тиме је задатак решен.

2. Пошто је $\frac{n}{2015}$ природан број који има непаран број делилаца, закључујемо $n = 2015a^2$ за неко $a \in \mathbb{N}$. Сада је и број $n - 2015 = 2015(a^2 - 1)$ потпун квадрат који има 2015 делилаца. Из факторизације $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ и чињенице да су нам већ позната 3 проста фактора броја $2015(a^2-1)$ (управо 5, 13 и 31) следи да број $a^2 - 1$ не може имати неке просте факторе различите од простих фактора броја 2015 (наиме, број делилаца броја $2015(a^2-1)$ једнак је производу експонената у његовом каноничком запису увећаних за 1, а будући да овај производ треба да износи 2015, и како се број 2015, као производ три проста броја, не може представити као производ четири природна броја већа од 1, закључак следи). Одавде добијамо $a^2-1 = (a-1)(a+1) = 5^{2x+1}13^{2y+1}31^{2z+1}$ за неке $x, y, z \in \mathbb{N}_0$. Сваки од бројева 5, 13 и 31 дели тачно један од бројева $a-1$ и $a+1$, одакле и читави посматрани степени бројева 5, 13 и 31 деле тачно један од њих. Приметимо да важи $5^{2x+1} \equiv \pm 5 \pmod{13}$ и $31^{2z+1} \equiv 5^{2z+1} \equiv \pm 5 \pmod{13}$. Ако $13 \mid a \pm 1$, тада имамо $a \mp 1 \equiv \mp 2 \pmod{13}$, али како број $a \mp 1$ мора бити нешто од 5^{2x+1}, 31^{2z+1} или $5^{2x+1} \cdot 31^{2z+1}$, из малопређашњег закључка добијамо да је он конгруентан са ± 1 или ± 5 по модулу 13, контрадикција. Дакле, тражени природан број не постоји.

3. Пошто први мудрац означава другог као лажова, следи да тачно један од њих двојице говори истину. Надаље, нека i-ти мудрац говори истину. Тада су сви мудраци на местима од $i+1$ до $2i$ лажљивци, али пошто мудрац на месту $i+1$ лаже, следи да мудрац на неком од места $2i+1$ или $2i+2$ говори истину. Дакле, можемо рекурентно дефинисати низ чији чланови представљају позиције истинољубивих мудраца, редом, на следећи начин: $a_1 = 1 + e_0$ и $a_{k+1} = 2a_k + 1 + e_k$, где $e_0, e_1, e_2 \ldots \in \{0, 1\}$. Индукцијом директно добијамо $a_k = 2^k - 1 + 2^{k-1}e_0 + 2^{k-2}e_1 + \cdots + e_{k-1}$. Да бисмо добили неконтрадикторан скуп изјава, за неко k мора важити $a_k = n + 1 + e_0$, те добијамо $n = 2^k - 2 - e_0 + 2^{k-1}e_0 + 2^{k-2}e_1 + \cdots + e_{k-1}$. Дакле, за све вредности n од $n = 2^k - 2$ до $n = 2^{k+1} - 4$ постоји аранжман мудраца (дат низом a_k) где би мудраци могли дати наведене изјаве. Одговоримо сада на сва три дела задатка.

а) Мудраци могу дати овакав скуп изјава за све природне бројеве n који нису облика $2^k - 3$, $k \in \mathbb{N}$.

b) За $e_0 = 0$ примећујемо да n може узимати вредности од $n = 2^k - 2$ до $n = 2^k + 2^{k-1} - 3$, и при томе се свака од њих остварује на јединствен начин (што следи из једнозначности бинарног записа), а за $e_0 = 1$ имамо распон од $n = 2^k + 2^{k-1} - 3$ до $n = 2^{k+1} - 4$, такође остварене на јединствен начин. Дакле, од свих вредности за n поменутих под а), једино за n облика $2^k + 2^{k-1} - 3$, $k \in \mathbb{N}$, новинар неће бити у могућности да установи ко су истинољупци (јер постоји једна могућност са $e_0 = 0$ и једна са $e_0 = 1$).

c) Из неједнакости $1024 + 512 - 3 < 2016 < 2048 - 4$, следи $e_0 = 1$ и $k = 10$. Имамо $2^8 e_1 + \cdots + e_9 = 2016 - (1024 + 512 - 3) = 483$, одакле следи $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e_8 = e_9 = 1$ и $e_5 = e_6 = e_7 = 0$. Сада се лако добија да истинољубиви мудраци седе на позицијама: 2, 6, 14, 30, 62, 125, 251, 503 и 1008.

4. Трансформишимо постављену једначину на следећи начин:

$$f(x)(f(x) - f(x-y)) = f(y)(f(x+y) - f(y)).$$

Уврштавањем $y = 0$ добијамо $0 = f(0)(f(x) - f(0))$. Пошто није могуће да за свако x важи $f(x) = f(0)$ (јер f није константна), следи $f(0) = 0$.

Уврштавањем $x = y$, $x = 2y$ и $x = 3y$ у посматрану једначину добијамо редом једнакости

$$f(y)(f(2y) - 2f(y)) = 0,$$
$$f(2y)(f(2y) - f(y)) = f(y)(f(3y) - f(y)),$$
$$f(3y)(f(3y) - f(2y)) = f(y)(f(4y) - f(y)).$$

Докажимо да из ових једнакости следи

$$f(2y) = 2f(y) \text{ и } f(3y) = 3f(y) \text{ за све } y \in \mathbb{R}.$$

Заиста, уколико важи $f(y)\neq 0$, тада лако добијамо жељени закључак. Уколико важи $f(y)=0$, тада следи $f(2y)=0$ и $f(3y)=0$, па и у том случају закључак важи. Сада уврштавањем $y=2x$ у посматрану једначину добијамо $f(x)^2=-f(x)f(-x)$, одакле следи

$$f(-x)=-f(x) \text{ или } f(x)=0 \text{ за свако } x\in\mathbb{R}.$$

Најзад, нека је y такво да важи $f(y)\neq 0$ (такво y постоји јер f није константна). Уврстимо $-y$ уместо y у посматрану једначину, чиме добијамо (након сређивања) $f(x)f(x+y)-f(y)f(x-y)=f(x)^2+f(y)^2$. Помножимо ову једнакост са $f(x)$ и саберимо је с полазном једнакошћу помноженом са $f(y)$; тиме добијамо

$$(f(x)^2+f(y)^2)\cdot(f(x)+f(y)-f(x+y))=0.$$

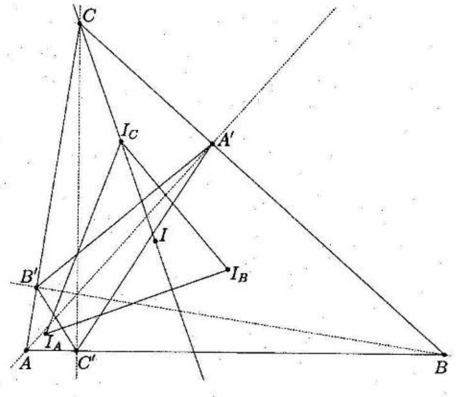
Како важи $f(y)^2>0$, остаје $f(x)+f(y)-f(x+y)=0$.

Према томе, $f(x)+f(y)=f(x+y)$ кад год је бар једна од вредности $f(x), f(y)$ различита од нуле. С друге стране, у случају $f(x)=f(y)=0$ заменом x са $x+y$ у постављеној једначини добијамо $f(x+y)=0$, тј. жељена једнакост и тада важи, што завршава доказ.

Четврти разред – А категорија

1. Нека су α, β и γ углови у $\triangle ABC$ који одговарају, редом, теменима A, B и C. Нека је I центар уписане кружнице у $\triangle ABC$ а r њен полупречник. Докажимо прво једнакости $II_A\cdot IA=II_B\cdot IB=II_C\cdot IC=2r^2$. Из сличности $\triangle AB'C'\sim\triangle ABC$ добијамо $\frac{AI_A}{AI}=\frac{AB'}{AB}$. Из тога следи

$$\begin{aligned}II_A\cdot IA&=IA^2\cdot\left(1-\frac{AI_A}{AI}\right)\\&=\left(\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\left(1-\frac{AB'}{AB}\right)\\&=\frac{r^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\cdot(1-\cos\alpha)=2r^2.\end{aligned}$$



Др 2016 4А 1

Аналогно се доказују и друге две једнакости.

На основу доказаног, $\triangle II_AI_B$ и $\triangle IBA$ су слични па следи $\measuredangle II_AI_B=\frac{\beta}{2}$ и $\measuredangle II_BI_A=\frac{\alpha}{2}$. Аналогно показујемо $\measuredangle II_AI_C=\frac{\gamma}{2}$ и $\measuredangle II_CI_A=\frac{\alpha}{2}$. Како важи $\measuredangle I_BI_AI_C+\measuredangle II_CI_A=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=90^\circ$, закључујемо $I_CI\perp I_AI_B$, па следи тражено тврђење.

2. Означимо $s=x_1+\cdots+x_n$. Продужимо низ периодично: $x_{i+jn}=x_i$ за $j\in\mathbb{N}$. Дефинишимо $a_0=1$ и, за $k=0,1,2,\ldots$, нека је a_{k+1} природан број такав да важи $a_{k+1}>a_k$ и $\sum_{i=a_k+1}^{a_{k+1}}x_i\geqslant 0$. Међу бројевима $a_0,a_1,a_2,\ldots$ постоје два конгруентна по модулу n, рецимо $a_p\equiv a_q \pmod n$, $q>p$. Тада из $a_q=a_p+jn$ $(j\in\mathbb{N})$ имамо $0\leqslant\sum_{i=a_p+1}^{a_q}=js$, одакле следи $s\geqslant 0$.

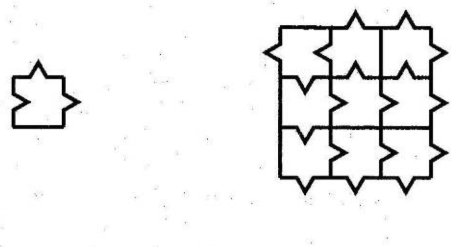
3. Писаћемо $f(y)=y^y$. Доказујемо индукцијом по n да скуп $\{f(1),f(3),\ldots,f(2^n-1)\}$ чини сведен систем остатака по модулу 2^n. За $n=1$ тврђење је тривијално. Претпоставимо $n\geqslant 2$ и да тврђење важи за $n-1$.

По Ојлеровој теореми имамо $(y+2^{n-1})^{2^{n-1}}\equiv 1 \pmod{2^n}$ за непарно y, одакле следи $f(y+2^{n-1})\equiv(y+2^{n-1})^y \pmod{2^n}$. С друге стране,

$$\begin{aligned}(y+2^{n-1})^y&=y^y+\binom{y}{1}y^{y-1}2^{n-1}+\binom{y}{2}y^{y-2}2^{2n-2}+\cdots\\&\equiv y^y+\binom{y}{1}y^{y-1}2^{n-1}\equiv f(y)+2^{n-1}\pmod{2^n}.\end{aligned}$$

Следи $f(y+2^{n-1})\equiv f(y)+2^{n-1} \pmod{2^n}$. Зато међу $f(1),f(3),\ldots,f(2^n-1)$ нема бројева међусобно конгруентних по модулу 2^n, чиме је индуктивни корак завршен.

4. Тражени многоугао постоји. Посматрајмо јединични квадрат и конструишимо довољно мале једнакостраничне троуглове (рецимо, странице $\frac{1}{100}$) над три његове странице као што је приказано на слици лево.



Др 2016 4А 4

Оваквом конструкцијом посматраном квадрату су додата два „шпица“ и један „усек“. На слици десно је приказано да се тако добијени многоугао заиста може обмотати са 8 копија. Докажимо још да се посматраним многоуглом не може поплочати раван.

Претпоставимо супротно: нека је раван поплочана посматраним многоуглом. Јасно, овакво поплочавање заправо је регуларно поплочавање равни квадратом, до на шпицеве и усеке. Одаберимо један квадрат 5×5 издељен на 25 јединичних квадратића. Овим квадратићима одговара 25 усека и 50 шпицева, па следи да од тих 50 шпицева постоји бар 25 оних који нису упарени ни с једним од тих 25 усека. Неупарени шпицеви се морају налазити на рубу посматраног квадрата 5×5; међутим, обим тог квадрата износи свега 20, па се на њему може налазити највише 20 шпицева, контрадикција. Према томе, раван није могуће поплочати описаним многоуглом.

Први разред – Б категорија

1. a) Растављање налазимо на следећи начин:

$$\begin{aligned}
x^8+x^4+1 &= x^8+2x^4+1-x^4=(x^4+1)^2-(x^2)^2\\
&=(x^4-x^2+1)(x^4+x^2+1)\\
&=(x^4-x^2+1)(x^4+2x^2+1-x^2)\\
&=(x^4-x^2+1)((x^2+1)^2-x^2)\\
&=(x^4-x^2+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1).
\end{aligned}$$

b) Користећи део под a) (за $x=\sqrt[4]{3}$) видимо да ће проширивањем разломка са $(3-\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-\sqrt[4]{3}+1)$ у имениоцу остати $((\sqrt[4]{3})^8+(\sqrt[4]{3})^4+1)$, тј. 13. Дакле, тражени облик разломка је

$$\frac{(4-\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt[4]{3}+1)}{13}.$$

2. a) Збир цифара посматраног броја износи

$$1\cdot 1+2\cdot 2+\cdots+9\cdot 9+10\cdot(1+0)+11\cdot(1+1)+\cdots+20\cdot(2+0)=1205.$$

Дакле, како збир цифара није дељив са 9, ни посматрани број није дељив са 9.

b) Рачунамо разлику збирова цифара на парним, односно непарним позицијама:

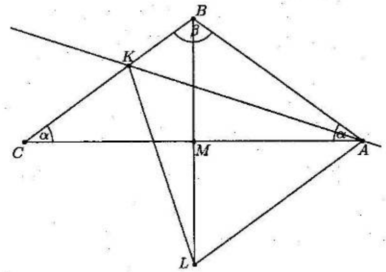
$$\begin{aligned}
&(1\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+3\cdot 6+3\cdot 7+4\cdot 8+5\cdot 9+11\cdot 1+\cdots+19\cdot 9)\\
&\quad-(1\cdot 2+2\cdot 3+2\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6+4\cdot 7+4\cdot 8+4\cdot 9+(10+\cdots+19)\cdot 1+20\cdot 2)\\
&\qquad=880-325=555.
\end{aligned}$$

Како ова разлика није дељива са 11, ни посматрани број није дељив са 11.

c) Из збира израчунатог под a) видимо да посматрани број даје остатак 2 при дељењу са 3. Како потпуни квадрати могу давати само остатке 0 или 1 по модулу 3, следи да посматрани број није потпун квадрат. (Другачије, могуће је приметити и да, ако се квадрат неког броја завршава цифром 0, онда се и сам тај број завршава цифром 0, али онда се његов квадрат завршава цифрама 00; другим речима, потпуни квадрати који се завршавају цифром 0 морају се завршавати цифрама 00, а како се посматрани број завршава цифрама 20, он не може бити потпун квадрат.)

d) Како је троцифрен завршетак посматраног броја 020, што није дељиво са 8, посматрани број није дељив са 8, па није дељив ни са 16.

3. Не постоји. Видимо да је у задатих 10 заграда заступљено свих могућих 10 парова бројева, па без обзира на то коју пермутацију посматрамо, чиниоци из поставке су: 3, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8 и 9. Но како год ови бројеви били распоређени на леву и десну страну, укупан степен простог броја 3 у овим чиниоцима износи 5, па не може на левој и десној страни бити једнак број појављивања простог чиниоца 3 (можемо исто закључити и за прост чинилац 2).

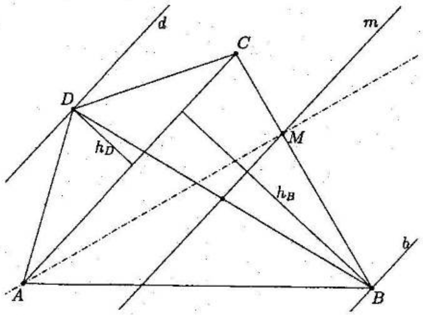


Др 2016 1Б 4

4. Означимо углове $\angle BAC=\angle BCA=\alpha$ и $\angle ABC=\beta$ (важи $2\alpha+\beta=180°$). Приметимо да важи $\angle AKB=\frac{3\alpha}{2}$ (спољашњи угао за $\triangle AKC$). Нека је L тачка симетрична тачки B у односу на праву AC. Имамо $BL=2BM=AK$. Како је $BALC$ ромб, четвороугао $BALK$ је трапез; он притом има једнаке дијагонале ($BL=AK$), па је једнакокрак, а тиме и тетиван. Сада из $\angle ABL=\angle AKL=\frac{\beta}{2}$ и $\angle ABK=\angle LKB$ закључујемо $\beta=\frac{3\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}$, одакле следи $\beta=3\alpha$. Добијамо $5\alpha=180°$, па су углови овог троугла $36°$, $36°$ и $108°$.

5. *Анализа.* Површина четвороугла $ABCD$ једнака је збиру површина $\triangle BAC$ и $\triangle DAC$. Нека су h_B и h_D висине спуштене на AC у $\triangle BAC$ и $\triangle DAC$, редом. Површина четвороугла $ABCD$ износи $\frac{(h_B+h_D)AC}{2}$. Нека су b и d праве кроз B и D, редом, паралелне са AC. Права m паралелна овим двема правима и једнако удаљена од обе (за по $\frac{h_B+h_D}{2}$) сећи ће било страницу CB, било CD у некој тачки M (у зависности од тога која од висина h_B и h_D је већа). Права AM је тражена права јер се лако проверава да је збир површина $\triangle AMC$ и мањег од $\triangle BAC$ или $\triangle DAC$ једнака половини површине четвороугла $ABCD$.

Конструкција. Одредимо средиште дијагонале BD и затим кроз њега повучемо праву паралелну са правима b и d. У пресеку повучене праве са изломљеном линијом BCD добијамо тачку M. Права AM је тражена права.



Доказ. Следи из анализе.

Дискусија. Решење је увек јединствено.

Други разред – Б категорија

Др 2016 1Б 5

1. Услови су $0 < 2 - \frac{1}{5}x \neq 1$ и $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 > 0$, што се своди на $x < 10$, $x \neq 5$ и $x \neq 2$. Посматрану неједначину можемо записати у облику $\log_{2-\frac{1}{5}x}(x-2)^2 < 2$, тј. $2\log_{2-\frac{1}{5}x}|x-2| < 2$, а ово се своди на $\log_{2-\frac{1}{5}x}|x-2| < 1$.

У случају када је основа логаритма мања од 1, тј. $x > 5$, добијена неједначина еквивалентна је са $|x-2| > 2 - \frac{1}{5}x$, тј. (с обзиром на $x > 5$) $x - 2 > 2 - \frac{1}{5}x$, што даје $x > \frac{10}{3}$, а ово је надскуп услова $x > 5$; у овом случају, дакле, добијамо решење $x \in (5, 10)$ (имали смо у виду и услов $x < 10$).

У случају када је основа логаритма већа од 1, тј. $x < 5$, добијена неједначина еквивалентна је са $|x-2| < 2-\frac{1}{5}x$. Претпоставимо прво $x < 2$. Тада решавамо неједначину $2-x < 2-\frac{1}{5}x$, тј. $\frac{4}{5}x > 0$, па добијамо решење $x \in (0,2)$. Претпоставимо сада $x > 2$. Тада решавамо неједначину $x-2 < 2 - \frac{1}{5}x$, тј. $\frac{6}{5}x < 4$, па добијамо решење $x \in (2, \frac{10}{3})$.

Све скупа, решење је: $x \in (0,2) \cup (2, \frac{10}{3}) \cup (5,10)$.

2. *Прво решење.* Приметимо да важи $x^4+4y^4 = x^4+4x^2y^2+4y^4-4x^2y^2 = (x^2+2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2)$. Уведимо смену $u = x^2-2xy+2y^2$, $v = x^2+2xy+2y^2$. Тада се посматрани систем своди на $u+2v = 24$ и $uv = 64$. Одавде добијамо $(24-2v)v = 64$, тј. $v^2-12v+32 = 0$. Решавањем ове квадратне једначине добијамо

$$v_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{144-128}}{2} = \frac{12 \pm 4}{2},$$

тј. $v_1 = 8$ и $v_2 = 4$. Овим вредностима одговара $u_1 = 24 - 2 \cdot 8 = 8$ и $u_2 = 24 - 2 \cdot 4 = 16$.

У првом случају враћањем смене добијамо $x^2 - 2xy + 2y^2 = 8$ и $x^2 + 2xy + 2y^2 = 8$, што се своди на $xy = 0$ и $x^2 + 2y^2 = 8$. Одавде налазимо решења: $(x,y) \in \{(\pm 2\sqrt{2}, 0), (0, \pm 2)\}$.

У другом случају враћањем смене добијамо $x^2 - 2xy + 2y^2 = 16$ и $x^2 + 2xy + 2y^2 = 4$, што се своди на $xy = -3$ и $x^2 + 2y^2 = 10$. Одавде добијамо $x^2 + 2(\frac{-3}{x})^2 = 10$. Сменом $t = x^2$ добијена једначина своди се на $t + \frac{18}{t} = 10$, тј. $t^2 - 10t + 18 = 0$. Њена решења су

$$t_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-72}}{2} = \frac{10 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 5 \pm \sqrt{7}.$$

Дакле, могућности су $x = \pm\sqrt{5+\sqrt{7}}$ и $x = \pm\sqrt{5-\sqrt{7}}$.

Све скупа, посматрани систем има 8 решења:

$$(x,y) \in \Bigg\{ (\pm 2\sqrt{2}, 0), (0, \pm 2), \left(\pm\sqrt{5+\sqrt{7}}, \mp\frac{3}{\sqrt{5+\sqrt{7}}}\right), \left(\pm\sqrt{5-\sqrt{7}}, \mp\frac{3}{\sqrt{5-\sqrt{7}}}\right) \Bigg\}.$$

Друго решење. Квадрирањем прве једначине и множењем с другом једначином унакрсно (леву с десном страном а десну с левом) добијамо

$$24^2(x^4+4y^4) = 64(3x^2+2xy+6y^2)^2.$$

После упрошћавања, ова једначина се своди на

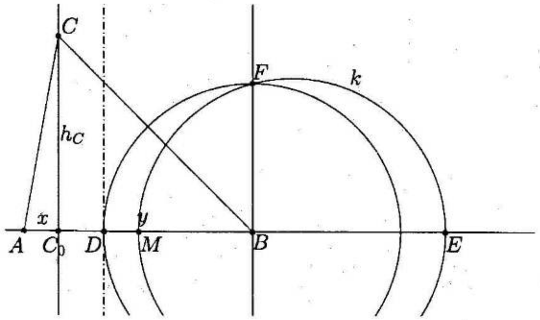
$$xy(3x^2+10xy+6y^2) = 0.$$

Одавде добијамо четири могућности: $x = 0$, $y = 0$, $x = y \cdot \frac{-5+\sqrt{7}}{3}$ или $x = y \cdot \frac{-5-\sqrt{7}}{3}$. Убацивањем ових четири могућности у било коју од полазних једначина добијамо од сваке могућности по два решења, што даје осам решења као малопре.

3. Приметимо да $n = 1$ јесте решење јер добијамо број $36 = 6^2$. Претпоставимо сада $n \geqslant 2$. Тада је сабирак $2 \cdot 3^n$ дељив са 9, а пошто бројеви 10 и 19 дају остатак 1 при дељењу са 9, тада и 10^n и 19^n дају остатак 1 при дељењу са 9. Према томе, за $n \geqslant 2$ број задат у поставци даје остатак 3 при дељењу са 9, тј. он је дељив са 3 а није дељив са 9, па не може бити потпун квадрат.

4. Јасно, за свако n важи $y_n \leqslant 2016$. С друге стране, за $n \geqslant 2$ важи $y_n = x_n^{2^{2^n}} \geqslant x_n^{2^{2^2}} = x_n^{16}$, па како имамо $2^{16} > 2016$, закључујемо да за свако $n \geqslant 2$ мора бити $x_n = 0$ или $x_n = 1$, а тиме и $y_n = 0$ или $y_n = 1$. Одавде следи $0 \leqslant y_2 + y_3 + \cdots + y_{1000} \leqslant 999$, а сада из прве једначине добијамо

$1017 \leqslant y_1 \leqslant 2016$. Међутим, како важи $y_1 = x_1^{2^{2^1}} = x_1^4$, једина могућност је $x_1 = 6$ и $y_1 = 6^4 = 1296$ (то је једини четврти степен који упада у добијени интервал за y_1). Према томе, $y_2+y_3+\cdots+y_{1000} = 2016-1296 = 720$. Дакле, тачно 720 бројева од $y_2, y_3, \ldots, y_{1000}$ једнаки су 1, а преостали 0 (као и одговарајући од $x_2, x_3, \ldots, x_{1000}$). Ово је могуће постићи на $\binom{999}{720}$ начина, што је решење задатка.



Др 2016 2Б 5

5. *Анализа.* Нека је C_0 подножје висине h_C из темена C. Обележимо $x = AC_0$, $y = BC_0$. Површина $\triangle ABC$ износи $\frac{h_C(x+y)}{2}$. Претпоставимо, без умањења општости, $AC \leqslant BC$. Тада на дужи C_0B треба одабрати тачку D такву да нормала у D на C_0B дели $\triangle ABC$ на два дела чије су површине $\frac{h_C(x+y)}{4}$. Један од тих делова је троугао хомотетичан са $\triangle C_0BC$, где је центар хомотетије теме B. Како имамо $P(\triangle C_0BC) = \frac{h_C y}{2}$, коефицијент посматране хомотетије износи $\sqrt{\frac{\frac{h_C(x+y)}{4}}{\frac{h_C y}{2}}} = \sqrt{\frac{x+y}{2y}}$. Према томе, $BD = BC_0\sqrt{\frac{x+y}{2y}} = y\sqrt{\frac{x+y}{2y}} = \sqrt{\frac{(x+y)y}{2}}$; на овај начин можемо конструисати тачку D као корен из производа дужи $\frac{x+y}{2}$ и y.

Конструкција. Нека је M средиште странице AB. Уочимо тачку E на правој AB такву да важи $A-B-E$ и $BE \cong C_0B$. Нека је k кружница над пречником ME, и нека нормала у тачки B на праву AB сече кружницу k у тачки F. На дужи C_0B уочимо тачку D такву да важи $BD \cong BF$. Нормала у тачки D на праву AB је тражена нормала.

Доказ. Из сличности $\triangle MBF \sim \triangle FBE$ добијамо $\frac{BF}{BM} = \frac{BE}{BF}$, тј. $BF^2 = BM \cdot BE = \frac{x+y}{2} \cdot y$; другим речима, $BD = BF = \sqrt{\frac{(x+y)y}{2}}$. Закључак сада следи из разматрања спроведеног у анализи.

Дискусија. Решење је увек јединствено.

Трећи разред – Б категорија

1. Израчунајмо прво вектор $\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{a})$:

$$\vec{a}\times(\vec{b}-\vec{a}) = (-3,-2,1)\times(4,3,2) = \begin{vmatrix} -3 & 4 & \vec{i} \\ -2 & 3 & \vec{j} \\ 1 & 2 & \vec{k} \end{vmatrix} = -7\vec{i}+10\vec{j}-\vec{k} = (-7,10,-1).$$

Скаларни производ вектора $(1,r,-2)$ и $(-7,10,-1)$ износи $1\cdot(-7)+10r+(-2)\cdot(-1) = 10r-5$. С друге стране, уколико ови вектори граде угао од 60°, њихов скаларни производ треба да износи

$$\sqrt{1^2+r^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{(-7)^2+10^2+(-1)^2}\cdot\cos 60^\circ = \sqrt{5+r^2}\cdot 5\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}.$$

Према томе, добијамо једначину $10r-5 = \sqrt{5+r^2}\cdot 5\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}$, што се своди на $4r-2 = \sqrt{30+6r^2}$. Квадрирањем ове једначине, уз услов $4r-2 \geqslant 0$, тј. $r \geqslant \frac{1}{2}$, добијамо $16r^2-16r+4 = 30+6r^2$, тј. $5r^2-8r-13 = 0$. Решимо ову једначину:

$$r_{1/2} = \frac{8\pm\sqrt{64+260}}{10} = \frac{8\pm 18}{10} = \frac{4\pm 9}{5},$$

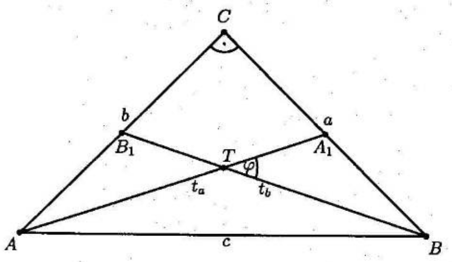
тј. $r_1 = \frac{13}{5}$ и $r_2 = -1$. Друго решење одбацујемо јер не испуњава услов $r \geqslant \frac{1}{2}$. Дакле, једино решење задатка је $r = \frac{13}{5}$.

2. Први играч треба да прати следећу стратегију. У првом потезу он уписује X у централни квадратић. У сваком следећем потезу, уколико постоје два узастопна квадратића обележена словом X, или постоје два квадратића обележена словом X између којих је тачно један неозначен квадратић, тада први играч прави низ од три узастопна обележена квадратића и побеђује, а у супротном игра симетрично претходном потезу другог играча (симетрију посматрамо у односу на централни квадратић).

Докажимо да први играч заиста побеђује користећи ову стратегију. Очигледно, након било ког потеза првог играча (осим последњег) никада неће на табли остати два суседна обележена поља (заиста, уколико би се таква ситуација догодила, тада би, с обзиром на симетричну игру првог играча, и пре његовог потеза морала постојати два суседна обележена квадратића, али тада би први играч могао одмах да победи). Слично, након било ког потеза првог играча (осим последњег) никада неће на табли остати два обележена квадратића између којих је тачно један необележен. Према томе, први играч након свог потеза никада неће оставити другом шансу да победи, што завршава доказ.

3. Искористићемо идентитет $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$. Из њега и претпоставке $a^2+b^2+c^2 = k(ab+ac+bc), k \in \mathbb{N}$, следи $(k+$

$2)(ab+bc+ac) = (a+b+c)^2$. Будући да је $a+b+c$ прост број, рецимо p, а и $k+2$ и $ab+bc+ac$ су већи од 1, једино је могуће $k+2 = ab+bc+ac = p$. Но сада из $ab+bc+ac \geqslant a+b+c = p$ (на основу $a, b, c \geqslant 1$) следи да је једина могућност $a = b = c = 1$. Директно се проверава да су тада испуњени сви услови задатка.



Др 2016 3Б 4

4. Означимо катете $BC = a$ и $AC = b$, хипотенузу $AB = c$, и нека су A_1 и B_1 средишта страница BC и AC, T тежиште, а тежишне дужи $AA_1 = t_a$ и $BB_1 = t_b$. Из формуле $\cos^2\varphi = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}$ добијамо $\cos\varphi = \frac{4}{5}$. Применом косинусне теореме на $\triangle TA_1B$, $\triangle TB_1A$ и $\triangle TAB$ имамо: $\frac{a^2}{4} = \frac{t_a^2}{9} + \frac{4t_b^2}{9} - \frac{4t_a^2t_b^2\cos\varphi}{9}$, $\frac{b^2}{4} = \frac{t_b^2}{9} + \frac{4t_a^2}{9} - \frac{4t_a^2t_b^2\cos\varphi}{9}$ и $c^2 = \frac{4t_a^2}{9} + \frac{4t_b^2}{9} + \frac{8t_a^2t_b^2\cos\varphi}{9}$ (користили смо $\measuredangle A_1TB = \measuredangle ATB_1 = \varphi$ и $\measuredangle ATB = 180^\circ - \varphi$). Сада из Питагорине теореме добијамо $\frac{20t_b^2}{9} + \frac{20t_a^2}{9} - \frac{32t_a^2t_b^2\cos\varphi}{9} = \frac{4t_b^2}{9} + \frac{4t_a^2}{9} + \frac{8t_a^2t_b^2\cos\varphi}{9}$; сређујући овај израз, уз коришћење једнакости $\cos\varphi = \frac{4}{5}$, добијамо $\frac{16}{9}(t_a - t_b)^2 = 0$, тј. $t_a = t_b$. Дакле, $\triangle ABC$ је једнакокрак, па су његови углови 45°, 45° и 90°.

5. Претпоставимо, без умањења општости, $a \geqslant b$. Тада имамо

$$S(a,b) = \min\left(a, b, \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \min\left(b, \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \leqslant \min\left(b, \frac{2}{b}\right) = S(b,b).$$

Дакле, максимална вредност израза $S(a,b)$ достиже се за $a = b$. Даље, $S(b,b) = \min(b, \frac{2}{b}) \leqslant \sqrt{b \cdot \frac{2}{b}} = \sqrt{2}$, при чему се једнакост достиже за $b = \frac{2}{b} = \sqrt{2}$. Према томе, највећа могућа вредност за $S(a,b)$ износи $\sqrt{2}$ и достиже се за $a = b = \sqrt{2}$.

Четврти разред – Б категорија

1. Користићемо Вијетове формуле. Из $-\frac{c}{3} = x_1x_2x_3x_4x_5 = 4$ добијамо $c = -12$. Даље, како важи $P(1) = 0$ и $P(2) = 0$, добијамо $a + b - 12 = 0$ и $16a + 4b - 132 = 0$, одакле решавањем система добијамо $a = 7$ и $b = 5$. Сада полином $P(x)$ можемо записати у облику

$$P(x) = (x-1)(x-2)(3x^3 + 16x^2 + 7x - 6)$$

(ово добијамо делећи полином $P(x)$ са $(x-1)(x-2)$, будући да знамо да су 1 и 2 његове нуле). Како важи $3x^3 + 16x^2 + 7x - 6 = 3x^3 + 3x^2 + 13x^2 + 13x - 6x - 6 = (x+1)(3x^2 + 13x - 6)$, још једна нула је $x_3 = -1$. Последње две нуле налазимо решавајући преосталу квадратну једначину:

$$x_{4/5} = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{6} = \frac{-13 \pm \sqrt{241}}{6}.$$

2. Теткица може добити израз x^{1025} у 11 корака тако што допише, редом, изразе $x^2, x^4, x^8, x^{16}, \ldots, x^{1024}, x^{1025}$. Докажимо да она то не може извести у мање од 11 корака.

Заправо, показаћемо општије тврђење: ако су уочени бројеви n и k такви да важи $n \geqslant 2^k + 1$, теткици је потребно бар $k+1$ корака да би добила израз x^n. Тврђење доказујемо индукцијом по k. За $k = 0$ очигледно је тачно (за израз x^n, где важи $n \geqslant 2$, потребан је бар један корак). Претпоставимо сада да тврђење важи за број k, и узмимо $n \geqslant 2^{k+1} + 1$. Израз x^n добија се множењем израза x^a и x^b за неке a и b, $a, b \geqslant 1$, $a + b = n$. Претпоставимо, без умањења општости, $a \leqslant b$. Тада имамо $b \geqslant \frac{n}{2} = 2^k + \frac{1}{2}$, али како је b природан број, мора важити $b \geqslant 2^k + 1$. Дакле, да би теткица добила израз x^b, потребан јој је (по индуктивној хипотези) бар $k+1$ корак. Одатле, да би добила израз x^n потребна су јој бар $k+1+1 = k+2$ корака.

У постављеном задатку имамо $1025 = 2^{10} + 1$, па по горњем тврђењу за добијање израза x^{1025} потребно је бар 11 корака. Пример с почетка решења показује да је 11 корака и довољно, чиме је задатак решен.

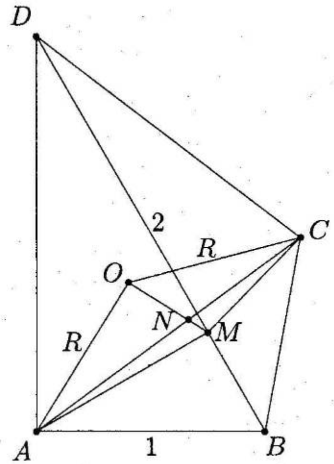
3. Приметимо да је немогуће $m \geqslant 4$: заиста, у том случају би, према постављеним условима, морало важити $2n = a^2$ и $4n = b^4$ за неке природне бројеве a и b, али дељењем ове две једнакости добијамо $2 = \frac{b^4}{a^2}$, тј. $\sqrt{2} = \frac{b^2}{a}$, што је немогуће јер $\sqrt{2}$ није рационалан број. Према томе, остаје $m \leqslant 3$. Покажимо да за $m = 3$ постоји одговарајућ број n. Треба да важи $2n = a^2$ и $3n = b^3$ за неке $a, b \in \mathbb{N}$. Први услов можемо испунити уколико n у својој простој факторизацији има непаран експонент двојке, и парне све остале експоненте; други услов можемо испунити уколико n у својој простој факторизацији има експонент тројке који даје остатак 2 при дељењу са 3, и све остале експоненте дељиве са 3. Једна могућност да ово постигнемо је да одаберемо $n = 2^3 \cdot 3^2 = 72$, чиме је задатак решен.

4. Приметимо: уколико је (x_0, y_0, z_0) решење датог система, тада је и $(-x_0, -y_0, z_0)$ решење тог система. Дакле, да би систем имао јединствено решење, оно мора бити облика $(0, 0, c)$ за неко $c \in \mathbb{R}$. Тада из постављеног система добијамо $c = a$, $c = b$ и $c^2 = 4$. Сада разликујемо два случаја.

Претпоставимо прво $a = b = c = 2$. Тада одузимањем прве једначине од друге добијамо $(z^2 - z)xy = 0$. Одавде видимо да потенцијална преостала решења датог система, осим $(0, 0, 2)$, можемо потражити за $z = 0$ или $z = 1$. У случају $z = 0$ прва једначина своди се на $0 = 2$, контрадикција. Узмимо сада $z = 1$. Систем се своди на $xy = 1$ и $x^2 + y^2 = 3$, што се даље своди на $y = \frac{1}{x}$ и $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$, а како је дискриминанта ове биквадратне једначине позитивна, овде добијамо још четири решења облика $(x_i, y_i, 1)$. Дакле, у случају $a = b = c = 2$ посматрани систем нема јединствено решење.

Претпоставимо сада $a = b = c = 2$. Као у претходном случају, преостала решења, осим $(0, 0, -2)$, можемо потражити за $z = 0$ или $z = 1$. Поново нема решења за $z = 0$, па узмимо $z = 1$. Систем се своди на $xy = -3$ и $x^2 + y^2 = 3$, што се даље своди на $y = -\frac{3}{x}$ и $x^4 - 3x^2 + 9 = 0$. Дискриминанта ове биквадратне једначине је негативна, па овде нема више решења.

Дакле једино за $a = b = -2$ систем има јединствено решење.



Др 2016 4Б 5

5. Нека је O центар те сфере, а R њен полупречник. Нека је M подножје висине $\triangle ABD$ из темена A на BD. Пошто је OA нормално на целу раван ABD, из теореме о три нормале следи $OM \perp BD$. Сада, користећи $OM \perp BD$ и чињеницу да је OC нормално на раван BDC, поново из теореме о три нормале добијамо $CM \perp BD$, тј. CM је висина $\triangle CBD$. Како важи $AO = CO = R$, $OM = OM$ и $\angle OMA = \angle OMC = 90°$, по ставу ССУ следи $\triangle AMO \cong \triangle CMO$, а одатле добијамо $AM = CM$. Како је $\triangle ABD$ правоугли и хипотенуза му је два пута дужа од катете, он је половина једнакостраничног троугла, па следи $AD = AB\sqrt{3} = \sqrt{3}$. Из истог разлога важи $BM = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}$ и $AM = BM\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а онда и $CM = AM = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Сада из правоуглог $\triangle CBM$ налазимо $BC = 1$, а потом из $\triangle ABC$ налазимо $AC = \sqrt{2}$ (због $AB = BC = 1$). Посматрајмо сада четвороугао $OAMC$ (који је делтоид), и означимо са N пресек дијагонала MO и AC. Јасно, $AN = NC = \frac{\sqrt{2}}{2}$, па из Питагорине теореме за $\triangle AMN$ добијамо $MN = \sqrt{AM^2 - AN^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$. Сада коначно уочимо сличност $\triangle ANM \sim \triangle ONA$ (заиста, $\angle ONA = \angle ANM = 90°$ и $\angle AMO = 90° - \angle MOA = 90° - \angle NOA = \angle NAO$), па из пропорционалности одговарајућих страница имамо $AM : MN = OA : AN$, тј. $\frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = R : \frac{\sqrt{2}}{2}$, одакле добијамо $OA = R = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Садржај

Краљево 1
Државна комисија 5
Општинско такмичење 7
Окружно такмичење 12
Државно такмичење 18
Решења задатака са општинског такмичења 24
Решења задатака са окружног такмичења 39
Решења задатака са државног такмичења 58

Име	Презиме	Школа	Место	Разред	Категорија	1	2	3	4	Σ	
Лазар	Корсић	Математичка гимназија	Београд	1	А	25	25	25	6	81	I награда
Анђела	Богдановић	Прва крагујевачка гимназија	Крагујевац	1	А	25	25	13	16	79	I награда
Ђорђе	Трифуновић	Ваљевска гимназија	Ваљево	1	А	25	25	0	21	71	II награда
Срђан	Кузмановић	Гимназија „Јован Јовановић Змај“	Нови Сад	1	А	25	25	-	18	68	II награда
Марина	Васиљевић	Математичка гимназија	Београд	1	А	25	25	-	18	68	II награда
Исидора	Бурмаз	Математичка гимназија	Београд	1	А	25	25	5	9	64	II награда
Дејан	Гјер	Гимназија „Јован Јовановић Змај“	Нови Сад	1	А	25	25	0	10	60	III награда
Иља	Узелац Бујишић	Математичка гимназија	Београд	1	А	21	25	5	7	58	III награда
Вукашин	Михајловић	Математичка гимназија	Београд	1	А	25	-	25	6	56	III награда
Игор	Пијевац	Гимназија „Јован Јовановић Змај“	Нови Сад	1	А	25	-	15	16	56	III награда
Урош	Малеш	Гимназија „Јован Јовановић Змај“	Нови Сад	1	А	18	25	5	7	55	III награда
Богдана	Ђорђевић	Гимназија „Светозар Марковић“	Ниш	1	А	25	10	0	19	54	III награда
Дуња	Прокић	Прва крагујевачка гимназија	Крагујевац	1	А	25	25	2	-	52	III награда
Тамара	Поњавић	Математичка гимназија	Београд	1	А	-	25	13	13	51	похвала
Владимир Виктор	Мирјанић	Математичка гимназија	Београд	1	А	25	-	25	0	50	похвала
Јелена	Илић	Математичка гимназија	Београд	1	А	-	25	10	15	50	похвала
Вук	Ђорђевић	Гимназија „Светозар Марковић“	Ниш	1	А	23	-	20	5	48	похвала
Драгана	Нинковић	Математичка гимназија	Београд	1	А	13	10	20	5	48	похвала
Алекса	Јелача	Математичка гимназија	Београд	1	А	25	-	15	7	47	похвала
Маја	Цветковић	Гимназија „Светозар Марковић“	Ниш	1	А	25	-	5	17	47	похвала
Илија	Кочинац	Математичка гимназија	Београд	1	А	5	25	-	10	40	похвала
Валентина	Њаради	Математичка гимназија	Београд	1	А	25	-	-	15	40	похвала
Богдан	Томић	Математичка гимназија	Београд	1	А	25	-	10	4	39	
Милена	Мићић	Математичка гимназија	Београд	1	А	25	-	5	8	38	
Александар	Станојчић	Математичка гимназија	Београд	1	А	20	-	-	18	38	
Михаило	Миленковић	Гимназија „Јован Јовановић Змај“	Нови Сад	1	А	25	-	0	12	37	
Миљана	Петковић	Гимназија „Светозар Марковић“	Ниш	1	А	-	25	0	12	37	
Алекса	Цакић	Математичка гимназија	Београд	1	А	25	-	-	12	37	
Лазар	Галић	Математичка гимназија	Београд	1	А	25	5	5	-	35	
Лука	Шојић	Гимназија „Јован Јовановић Змај“	Нови Сад	1	А	25	-	1	9	35	
Нина	Матић	Ваљевска гимназија	Ваљево	1	А	25	-	-	7	32	
Роналд	Сеги	Гимназија „Бољаи“	Сента	1	А	25	-	0	6	31	
Иван	Гогић	ОШ „Бранко Радичевић“	Београд	1	А	-	-	15	14	29	
Акош	Ружа	Гимназија „Бољаи“	Сента	1	А	24	0	0	4	28	
Јован	Тороmановић	Математичка гимназија	Београд	1	А	-	0	20	8	28	
Милош	Миловановић	Ваљевска гимназија	Ваљево	1	А	5	-	3	12	20	
Анђела	Мишковић	Ваљевска гимназија	Ваљево	1	А	-	-	-	18	18	
Норберт	Старек	Гимназија „Бољаи“	Сента	1	А	13	-	0	3	16	
Мирослав	Тодоровић	Гимназија „Светозар Марковић“	Ниш	1	А	-	-	2	14	16	
Андријана	Миковић	Прва крагујевачка гимназија	Крагујевац	1	А	-	-	0	13	13	
Милица	Ћирић	Гимназија	Краљево	1	А	-	-	0	7	7	
Сара	Биочанин	Прва крагујевачка гимназија	Крагујевац	1	А	-	-	0	-	0	
Катарина	Кривокућа	Математичка гимназија	Београд	1	А	-	-	-	-	0	
Павле	Стојановић	Гимназија	Краљево	1	А	-	-	0	-	0	
Ирина	Ђанковић	Математичка гимназија	Београд	1	А					-	

Име	Презиме	Школа	Место	Разред	Категорија	Шифра	1	2	3	4	Σ	
Никола	Јешић	Математичка гимназија	Београд	2	A	2A09	25	25	25	25	100	I награда
Момчило	Топаловић	Математичка гимназија	Београд	2	A	2A29	25	23	24	25	97	I награда
Игор	Медведев	Математичка гимназија	Београд	2	A	2A12	25	25	25	14	89	II награда
Павле	Мартиновић	Математичка гимназија	Београд	2	A	2A11	25	25	25	13	88	II награда
Александар	Милосављевић	Гимназија „Светозар Марковић“	Ниш	2	A	2A15	25	25	25	4	79	II награда
Урош	Миленковић	Математичка гимназија	Београд	2	A	2A14	-	20	25	25	70	III награда
Иван	Пешић	Математичка гимназија	Београд	2	A	2A20	25	20	22	-	67	III награда
Никола	Павловић	Гимназија „Јован Јовановић Змај“	Нови Сад	2	A	2A18	-	20	19	25	64	III награда
Марко	Медведев	Математичка гимназија	Београд	2	A	2A13	-	23	23	16	62	III награда
Лазар	Радојевић	Математичка гимназија	Београд	2	A	2A21	25	5	25	1	56	похвала
Богдан	Раонић	Математичка гимназија	Београд	2	A	2A23	25	2	21	6	54	похвала
Ђорђе	Ступар	Гимназија „Јован Јовановић Змај“	Нови Сад	2	A	2A27	25	5	16	6	52	похвала
Данило	Тонић	Гимназија	Краљево	2	A	2A28	23	23	-	3	49	похвала
Милан	Цупаћ	Математичка гимназија	Београд	2	A	2A31	18	5	25	-	48	похвала
Катарина	Николић	Математичка гимназија	Београд	2	A	2A16	1	2	17	25	45	похвала
Ева	Силађи	Гимназија „Јован Јовановић Змај“	Нови Сад	2	A	2A24	20	23	1	0	44	похвала
Стефан	Степановић	Математичка гимназија	Београд	2	A	2A25	25	5	13	-	43	
Анастасија	Илић	Математичка гимназија	Београд	2	A	2A07	25	5	12	-	42	
Катарина	Вукосављевић	Математичка гимназија	Београд	2	A	2A04	23	1	11	2	37	
Миломир	Стефановић	Прва крагујевачка гимназија	Крагујевац	2	A	2A26	1	1	1	23	26	
Јован	Павловић	Гимназија „Јован Јовановић Змај“	Нови Сад	2	A	2A17	0	5	18	2	25	
Андрија	Ђурић	Математичка гимназија	Београд	2	A	2A06	0	0	1	23	24	
Слободан	Јенко	Математичка гимназија	Београд	2	A	2A08	23	1	0	-	24	
Стефан	Пајовић	Гимназија	Краљево	2	A	2A19	4	2	17	1	24	
Младен	Башић	Гимназија	Краљево	2	A	2A01	13	2	6	-	21	
Срђан	Ранђеловић	Математичка гимназија	Београд	2	A	2A22	4	5	11	-	20	
Милица	Божанић	Математичка гимназија	Београд	2	A	2A03	0	5	9	2	16	
Тамаш	Берец	Гимназија „Бољаи“	Сента	2	A	2A02	-	2	3	8	13	
Матија	Додовић	Ваљевска гимназија	Ваљево	2	A	2A05	0	-	10	-	10	
Александар	Максимовић	Прва крагујевачка гимназија	Крагујевац	2	A	2A10	0	1	2	2	5	
Филип	Ћосовић	Прва крагујевачка гимназија	Крагујевац	2	A	2A30	0	-	2	-	2	

Име	Презиме	Школа	Место	Разред	Категорија	1	2	3	4	Σ	
Огњен	Тошић	Математичка гимназија	Београд	3	А	25	25	25	25	100	I награда
Даница	Зечевић	Математичка гимназија	Београд	3	А	25	25	23	14	87	II награда
Александар	Колинс	Математичка гимназија	Београд	3	А	25	25	11	22	83	II награда
Александар	Милошевић	Математичка гимназија	Београд	3	А	25	25	23	4	77	II награда
Алекса	Милојевић	Математичка гимназија	Београд	3	А	25	25	20	3	73	III награда
Никола	Раичевић	Математичка гимназија	Београд	3	А	25	25	12	5	67	III награда
Тадија	Митровић	Математичка гимназија	Београд	3	А	25	25	1	15	66	III награда
Данијел	Ђорђевић	Математичка гимназија	Београд	3	А	25	25	3	12	65	III награда
Милоје	Јоксимовић	Математичка гимназија	Београд	3	А	25	20	-	12	57	похвала
Филип	Ковачевић	Математичка гимназија	Београд	3	А	25	23	0	8	56	похвала
Дино	Ћеримагић	Математичка гимназија	Београд	3	А	25	25	1	5	56	похвала
Милош	Вујчић	Математичка гимназија	Београд	3	А	25	25	0	0	50	похвала
Владимир	Миленковић	Математичка гимназија	Београд	3	А	5	23	14	5	47	похвала
Бранислав	Шобот	Гимназија „Јован Јовановић Змај“	Нови Сад	3	А	25	7	11	4	47	похвала
Андрија	Новаковић	Гимназија	Краљево	3	А	0	25	22	-	47	похвала
Никола	Велов	Математичка гимназија	Београд	3	А	18	3	3	19	43	
Јана	Вучковић	Математичка гимназија	Београд	3	А	0	25	7	8	40	
Марко	Шушњар	Математичка гимназија	Београд	3	А	10	4	18	4	36	
Душан	Живановић	Гимназија „Светозар Марковић“	Ниш	3	А	0	12	8	15	35	
Никола	Бебић	Гимназија „Јован Јовановић Змај“	Нови Сад	3	А	0	7	17	-	24	
Едвин	Маид	Математичка гимназија	Београд	3	А	0	23	-	0	23	
Александар	Лукач	Гимназија „Јован Јовановић Змај“	Нови Сад	3	А	0	-	15	4	19	
Евелин	Сеги	Гимназија „Бољаи“	Сента	3	А	0	7	7	0	14	
Абигел	Фењвеши	Гимназија „Бољаи“	Сента	3	А	0	2	10	-	12	
Анастасија	Пантовић	Гимназија	Краљево	3	А	0	5	5	-	10	
Бранко	Неранчић	Гимназија „Јован Јовановић Змај“	Нови Сад	3	А	0	-	2	5	7	

Име	Презиме	Школа	Место	Разред	Категорија	1	2	3	4	Σ	
Никола	Садовек	Математичка гимназија	Београд	4	A	25	25	25	1	76	II награда
Никола	Алексић	Математичка гимназија	Београд	4	A	25	25	25	-	75	II награда
Алекса	Константинов	Математичка гимназија	Београд	4	A	25	23	25	-	73	III награда
Лука	Вукелић	Математичка гимназија	Београд	4	A	25	25	22	-	72	III награда
Никола	Спасић	Гимназија „Јован Јовановић Змај“	Нови Сад	4	A	23	25	-	21	69	III награда
Јанко	Ранђеловић	Гимназија „Светозар Марковић“	Ниш	4	A	25	22	-	18	65	III награда
Станислав	Тодоровић	Гимназија „Светозар Марковић“	Ниш	4	A	25	25	5	-	55	похвала
Данило	Тошовић	Математичка гимназија	Београд	4	A	25	25	5	0	55	похвала
Урош	Динић	Математичка гимназија	Београд	4	A	-	25	24	6	55	похвала
Никола	Мандић	Прва крагујевачка гимназија	Крагујевац	4	A	25	20	5	-	50	
Гаврило	Милићевић	Гимназија „Јован Јовановић Змај“	Нови Сад	4	A	25	10	-	-	35	
Миљан	Тодоровић	Математичка гимназија	Београд	4	A	8	25	-	0	33	
Коста	Бизетић	Математичка гимназија	Београд	4	A	-	20	-	-	20	
Балша	Кнежевић	Прва крагујевачка гимназија	Крагујевац	4	A	-	10	0	0	10	
Срђан	Марковић	Математичка гимназија	Београд	4	A	2	5	-	0	7	
Теодора	Смолчић	Ваљевска гимназија	Ваљево	4	A	1	0	2	-	3	
Јана	Врањеш	Математичка гимназија	Београд	4	A					-	

Име	Презиме	Школа	Место	Разред	Категорија	1	2	3	4	5	Σ	
Тијана	Јакшић	Гимназија „Урош Предић“	Панчево	1	Б	19	19	18	20	3	79	I награда
Анастасија	Волчановска	Гимназија	Јагодина	1	Б	13	19	16	10	20	78	I награда
Михаило	Миленковић	Пожаревачка гимназија	Пожаревац	1	Б	13	20	20	20	2	75	I награда
Марија	Томић	Гимназија	Лесковац	1	Б	13	19	18	20	1	71	I награда
Новица	Трифковић	XIV гимназија	Београд	1	Б	20	11	16	0	20	67	II награда
Алекса	Ђорђиев	XIII београдска гимназија	Београд	1	Б	13	14	15	20	-	62	II награда
Данило	Зечевић	Гимназија „Урош Предић“	Панчево	1	Б	20	20	20	-	-	60	II награда
Алекса	Стефановић	Гимназија	Пирот	1	Б	13	11	16	20	-	60	II награда
Часлав	Петронић	III београдска гимназија	Београд	1	Б	13	20	20	5	1	59	II награда
Никола	Богдановић	Гимназија	Параћин	1	Б	13	7	18	20	-	58	II награда
Славко	Крстић	Митровачка гимназија	Сремска Митровица	1	Б	19	19	20	0	-	58	II награда
Борис	Петровић	Гимназија „Јован Јовановић Змај“	Нови Сад	1	Б	2	7	18	20	10	57	III награда
Теодор	Сакал Францишковић	Гимназија „Светозар Марковић“	Суботица	1	Б	8	15	13	20	-	56	III награда
Александар	Гецић	Техничка школа	Кикинда	1	Б	20	14	20	-	-	54	III награда
Лука	Старчевић	Ужичка гимназија	Ужице	1	Б	13	19	-	20	-	52	III награда
Алекса	Елезовић	Рачунарска гимназија	Београд	1	Б	13	16	-	20	-	49	III награда
Богдан	Рајков	Гимназија „Јован Јовановић Змај“	Нови Сад	1	Б	13	20	16	-	-	49	III награда
Наташа	Лазаревић	Гимназија „Милош Савковић“	Аранђеловац	1	Б	15	13	-	20	-	48	III награда
Сара	Милановић	Гимназија	Нови Пазар	1	Б	13	15	0	20	-	48	III награда
Вељко	Тодић	Гимназија „Светозар Марковић“	Суботица	1	Б	0	8	20	20	0	48	III награда
Ивана	Милићевић	Гимназија „Бора Станковић“	Бор	1	Б	13	15	16	1	-	45	III награда
Душан	Цвијетић	Гимназија „Урош Предић“	Панчево	1	Б	20	11	5	2	5	43	похвала
Митар	Милинковић	Гимназија „Јован Јовановић Змај“	Нови Сад	1	Б	20	18	5	0	-	43	похвала
Илија	Марић	Гимназија „Јован Јовановић Змај“	Нови Сад	1	Б	13	14	16	0	-	43	похвала
Марко	Бркић	Рачунарска гимназија	Београд	1	Б	0	18	18	0	5	41	похвала
Миљана	Здравковић	Гимназија	Лесковац	1	Б	8	13	5	0	12	38	похвала
Емилија	Стојановић	IX гимназија „Михаило Петровић Алас“	Београд	1	Б	13	19	0	0	5	37	похвала
Коста	Младеновић	Гимназија	Пирот	1	Б	0	20	16	-	-	36	похвала
Миња	Вуковић	Гимназија „Светозар Марковић“	Суботица	1	Б	15	4	16	-	-	35	похвала
Марина	Гајчин	Гимназија „Никола Тесла“	Апатин	1	Б	-	14	18	0	-	32	похвала
Лазар	Крачуновић	XIII београдска гимназија	Београд	1	Б	0	12	3	17	-	32	похвала
Никола	Петрески	Шабачка гимназија	Шабац	1	Б	14	10	8	0	-	32	похвала
Лука	Симић	Рачунарска гимназија	Београд	1	Б	19	13	-	0	-	32	похвала
Теодора	Закић	V гимназија	Београд	1	Б	13	11	-	7	0	31	похвала
Александар	Стојадиновић	Гимназија „Светозар Марковић“	Ниш	1	Б	12	19	0	0	0	31	похвала
Душан	Игић	Гимназија „Светозар Марковић“	Ниш	1	Б	0	17	2	10	0	29	
Петар	Стојковић	Гимназија	Врњачка Бања	1	Б	13	6	0	10	-	29	
Бојан	Васић	Шабачка гимназија	Шабац	1	Б	13	14	0	-	-	27	
Милица	Ђорђевић	Средња школа „1300 каплара“	Љиг	1	Б	13	14	0	0	-	27	
Марко	Беслаћ	III београдска гимназија	Београд	1	Б	13	13	-	-	-	26	
Марко	Вучић	Пожаревачка гимназија	Пожаревац	1	Б	13	13	0	0	0	26	
Марија	Маринковић	Гимназија	Свилајнац	1	Б	13	13	0	0	-	26	
Ђорђе	Митровић	Прва нишка гимназија „Стеван Сремац“	Ниш	1	Б	0	10	16	0	-	26	
Петар	Станчић	Гимназија „Светозар Марковић“	Ниш	1	Б	13	12	-	0	-	25	
Јован	Димитријевић	СТШ „Никола Тесла“	Сурдулица	1	Б	15	9	0	-	0	24	
Михаило	Живадиновић	I београдска гимназија	Београд	1	Б	4	10	10	0	0	24	
Шћепан	Чукић	Гимназија	Смедерево	1	Б	0	10	13	0	-	23	
Стефан	Јелић	Ваљевска гимназија	Ваљево	1	Б	13	9	0	1	-	23	
Урош	Берић	Гимназија „Вељко Петровић“	Сомбор	1	Б	2	20	-	0	0	22	
Кристина	Јовановић	Гимназија	Јагодина	1	Б	13	9	0	-	0	22	
Игор	Васић	„Вук Караџић“	Лозница	1	Б	10	10	0	0	2	22	
Андреа	Ђорђевић	Гимназија „Светозар Марковић“	Ниш	1	Б	0	15	0	1	5	21	
Александра	Биочанин	Гимназија	Крушевац	1	Б	4	15	0	0	-	19	
Анђела	Глишовић	Техничка школа	Чачак	1	Б	-	11	-	8	0	19	
Бранислав	Ђурић	Ужичка гимназија	Ужице	1	Б	13	5	0	1	0	19	
Алекса	Јањић	„Вук Караџић“	Лозница	1	Б	-	6	10	2	-	18	
Давид	Јевтић	Средња школа „Никола Тесла“	Лепосавић	1	Б	13	5	-	-	-	18	
Марија	Аздејковић	Гимназија	Крушевац	1	Б	2	15	0	0	0	17	
Теодора	Ристоски	XII гимназија	Београд	1	Б	0	17	0	0	-	17	
Драган	Весић	Гимназија	Инђија	1	Б	8	0	8	0	-	16	
Момира	Здравковић	XIII београдска гимназија	Београд	1	Б	13	3	0	0	-	16	
Иван	Мештровић	Гимназија „Бранко Радичевић“	Стара Пазова	1	Б	0	5	10	0	0	15	
Александар	Ђорђевић	Гимназија „Б. Петров Браца“	Вршац	1	Б	7	7	-	0	-	14	
Урош	Карелеић	Свети Сава	Београд	1	Б	8	2	0	3	0	13	
Филип	Дробњаковић	Гимназија „Пиво Караматијевић“	Нова Варош	1	Б	-	11	-	0	-	11	
Стефанија	Николић	Гимназија	Лебане	1	Б	0	6	0	5	0	11	
Реља	Михић	Зрењанинска гимназија	Зрењанин	1	Б	0	10	0	-	0	10	
Милица	Вукобрат	Гимназија	Инђија	1	Б	9	-	-	0	-	9	
Ивона	Минић	Гимназија	Коршумлија	1	Б	0	4	3	0	0	7	
Марко	Тодоровић	Гимназија „Јован Јовановић Змај“	Нови Сад	1	Б	0	5	0	-	0	5	
Андреј	Павловић	XIII београдска гимназија	Београд	1	Б	0	3	0	-	0	3	
Иван	Стаменковић	Гимназија	Прокупље	1	Б	0	3	0	0	-	3	
Милан	Нојић	Гимназија	Шилово	1	Б						-	

Име	Презиме	Школа	Место	Разред	Категорија	1	2	3	4	5	Σ	
Јован	Ђорђевић	Гимназија „Јосиф Панчић“	Бајина Башта	2	Б	20	20	3	20	20	83	I награда
Давид	Ђукић	„Вук Караџић“	Лозница	2	Б	12	20	20	16	5	73	I награда
Здравко	Бјелић	Гимназија „Сава Шумановић“	Шид	2	Б	20	15	17	20	0	72	I награда
Душан	Богојевић	XIV гимназија	Београд	2	Б	-	18	20	20	-	58	II награда
Магдалена	Јовићевић	Гимназија „Бора Станковић“	Ниш	2	Б	16	10	3	19	5	53	II награда
Алекса	Врачар	Гимназија „Урош Предић“	Панчево	2	Б	19	10	3	20	0	52	II награда
Ласло	Ури	Гимназија „Вељко Петровић“	Сомбор	2	Б	16	-	20	15	0	51	III награда
Софија	Ђурић	Гимназија	Смедерево	2	Б	20	10	3	17	0	50	III награда
Стеван	Матавуљ	IX гимназија „Михаило Петровић Алас“	Београд	2	Б	10	15	0	20	5	50	III награда
Јелена	Васиљевић	XIII београдска гимназија	Београд	2	Б	14	17	-	14	-	45	III награда
Михајло	Никитовић	XIII београдска гимназија	Београд	2	Б	5	18	20	0	0	43	III награда
Бодин	Бизетић	IX гимназија „Михаило Петровић Алас“	Београд	2	Б	16	5	0	20	-	41	III награда
Анђела	Илић	Гимназија	Лесковац	2	Б	17	20	3	-	0	40	похвала
Весна	Јовановић	Прва крагујевачка гимназија	Крагујевац	2	Б	20	15	3	2	0	40	похвала
Дамир	Бербић	Гимназија „Урош Предић“	Панчево	2	Б	16	20	3	0	0	39	похвала
Теодора	Петровић	I београдска гимназија	Београд	2	Б	2	12	3	20	-	37	похвала
Владимир	Јовин	Гимназија „Јован Јовановић Змај“	Нови Сад	2	Б	-	15	20	0	0	35	похвала
Маша	Кнежевић	Гимназија „Светозар Марковић“	Суботица	2	Б	7	20	3	-	5	35	похвала
Миља	Пејчић	Гимназија „Бора Станковић“	Ниш	2	Б	20	12	3	-	0	35	похвала
Емилија	Ђорђевић	Гимназија	Смедерево	2	Б	20	10	3	-	0	33	похвала
Лука	Ћирић	Гимназија	Зајечар	2	Б	18	10	3	-	-	31	
Петар	Петрашиновић	Гимназија	Крушевац	2	Б	6	12	10	2	-	30	
Срђан	Шуковић	Средња школа „Ђура Јакшић“	Српска Црња	2	Б	20	5	3	1	0	29	
Јордан	Грујић	Гимназија	Краљево	2	Б	4	20	3	1	0	28	
Душан	Личина	XIII београдска гимназија	Београд	2	Б	-	17	3	-	8	28	
Вељко	Рвовић	Гимназија „Душан Васиљев“	Кикинда	2	Б	8	0	20	0	-	28	
Вук	Бибић	Гимназија „Бора Станковић“	Ниш	2	Б	20	5	0	2	0	27	
Евгенија	Јовић	Неготинска гимназија	Неготин	2	Б	12	12	3	-	-	27	
Маја	Ђаковић	Гимназија	Крушевац	2	Б	16	10	-	-	-	26	
Софија	Јањић	Зрењанинска гимназија	Зрењанин	2	Б	9	15	0	-	-	24	
Адам	Никачевић	Гимназија „Пиво Караматијевић“	Нова Варош	2	Б	1	1	3	18	-	23	
Алберт	Макан	Зрењанинска гимназија	Зрењанин	2	Б	4	10	3	-	0	17	
Тијана	Алексић	Прва крагујевачка гимназија	Крагујевац	2	Б	4	5	3	0	2	14	
Бранко	Павловић	Прва крагујевачка гимназија	Крагујевац	2	Б	1	10	3	-	-	14	
Милица	Гњатовић	Земунска гимназија	Земун	2	Б	10	0	3	0	0	13	
Никола	Кајтез	Гимназија „Јован Јовановић Змај“	Нови Сад	2	Б	8	2	3	-	-	13	
Немања	Стојановић	Гимназија „Јован Скерлић“	Владичин Хан	2	Б	-	10	3	0	0	13	
Сара	Мартиновски	Гимназија	Чачак	2	Б	-	10	0	0	0	10	
Никола	Симић	Шабачка гимназија	Шабац	2	Б	6	0	3	-	0	9	
Жељко	Марковић	ЕСТШ „Никола Тесла“	Краљево	2	Б	3	-	0	-	0	3	

Име	Презиме	Школа	Место	Разред	Категорија	1	2	3	4	5	Σ	
Никола	Булатовић	Гимназија „Урош Предић“	Панчево	3	Б	16	20	20	20	20	96	I награда
Николина	Бунијевац	XIII београдска гимназија	Београд	3	Б	20	0	20	20	20	80	II награда
Дарко	Сретеновић	IV гимназија	Београд	3	Б	20	0	20	20	20	80	II награда
Лазар	Смиљковић	Гимназија	Трстеник	3	Б	16	20	20	20	0	76	II награда
Војислав	Томашевић	IX гимназија „Михаило Петровић Алас“	Београд	3	Б	16	0	20	20	19	75	II награда
Ивона	Биочанин	Прва крагујевачка гимназија	Крагујевац	3	Б	20	2	15	18	19	74	II награда
Николина	Купрешанин	Зрењанинска гимназија	Зрењанин	3	Б	10	20	20	20	0	70	II награда
Марта	Бошњак	Гимназија „Урош Предић“	Панчево	3	Б	16	5	20	20	5	66	II награда
Лазар	Стевановић	Гимназија „Свети Сава“	Пожега	3	Б	16	0	20	20	10	66	II награда
Дејан	Јовановић	Гимназија „Јосиф Панчић“	Бајина Башта	3	Б	20	0	20	5	18	63	III награда
Никола	Бугарин	Гимназија „Бора Станковић“	Бор	3	Б	18	5	20	20	-	63	III награда
Александар	Љамзин	IV гимназија	Београд	3	Б	12	0	20	10	19	61	III награда
Филип	Царевић	Гимназија	Чачак	3	Б	16	0	19	20	6	61	III награда
Ленка	Бестовачки	Гимназија „20. октобар“	Бачка Паланка	3	Б	16	5	19	20	-	60	III награда
Вукашин	Пиштељић	Свети Сава	Београд	3	Б	20	0	20	1	19	60	III награда
Јована	Јелчић	Пожаревачка гимназија	Пожаревац	3	Б	0	20	20	0	18	58	III награда
Душан	Крмар	Гимназија „Јован Јовановић Змај“	Нови Сад	3	Б	10	20	20	0	6	56	III награда
Филип	Милисављевић	Гимназија „Бора Станковић“	Ниш	3	Б	10	0	18	10	14	52	III награда
Данијела	Станојевић	Гимназија	Јагодина	3	Б	16	0	12	20	-	48	похвала
Вукашин	Божић	Шабачка гимназија	Шабац	3	Б	20	0	20	-	6	46	похвала
Богдан	Бојовић	Гимназија	Крушевац	3	Б	5	0	20	20	1	46	похвала
Мила	Петковић	Гимназија „Бора Станковић“	Ниш	3	Б	3	-	20	20	2	45	похвала
Алека	Симић	XIII београдска гимназија	Београд	3	Б	10	5	20	-	8	43	похвала
Александар	Париповић	Гимназија „Милена Павловић-Барили“	Београд	3	Б	2	0	20	20	1	43	похвала
Андреја	Ђорђевић	Гимназија	Јагодина	3	Б	20	0	2	20	-	42	похвала
Дејана	Мандић	Рачунарска гимназија	Београд	3	Б	10	0	20	10	1	41	похвала
Драгица	Стојиљковић	Гимназија „Бора Станковић“	Врање	3	Б	20	0	20	1	-	41	похвала
Анђелија	Стојановић	Пожаревачка гимназија	Пожаревац	3	Б	16	0	4	20	0	40	похвала
Душан	Петровић	Гимназија „Јован Јовановић Змај“	Нови Сад	3	Б	16	0	3	20	-	39	
Богдан	Бебић	XIV гимназија	Београд	3	Б	16	0	19	2	1	38	
Михаило	Грбић	Гимназија	Зајечар	3	Б	15	0	12	8	2	37	
Михаило	Дедић	Ужичка гимназија	Ужице	3	Б	16	0	18	0	-	34	
Радосав	Пантић	Гимназија „Јован Јовановић Змај“	Нови Сад	3	Б	16	-	17	0	-	33	
Никола	Кабашај	Митровачка гимназија	Сремска Митровица	3	Б	5	10	17	0	-	32	
Ивана	Вушковић	Гимназија	Књажевац	3	Б	5	0	19	5	-	29	
Јанко	Пашајлић	Гимназија	Рашка	3	Б	20	0	5	0	4	29	
Даница	Бабић	Гимназија	Краљево	3	Б	10	0	18	0	-	28	
Сима	Спасојевић	Шабачка гимназија	Шабац	3	Б	20	0	7	-	-	27	
Дејан	Богдановић	Средња техничка школа	Сомбор	3	Б	16	2	7	0	1	26	
Данило	Ђорђевић	Гимназија	Лесковац	3	Б	16	0	2	6	2	26	
Ђорђе	Зубац	Гимназија	Косовска Митровица	3	Б	16	-	-	-	10	26	
Јелена	Цупаћ	Гимназија „Вељко Петровић“	Сомбор	3	Б	16	0	7	2	1	26	
Милица	Божовић	Гимназија	Косовска Митровица	3	Б	5	-	-	20	-	25	
Алекса	Стојковић	Гимназија „Исидора Секулић“	Нови Сад	3	Б	3	0	20	2	0	25	
Маша	Нешић	Гимназија „Бора Станковић“	Ниш	3	Б	16	0	1	0	6	23	
Никола	Барјактаревић	I београдска гимназија	Београд	3	Б	16	0	-	-	4	20	
Лаура	Гујаш Олдал	Гимназија „Светозар Марковић“	Суботица	3	Б	10	5	2	1	-	18	
Недељко	Ђукић	Гимназија	Прокупље	3	Б	10	0	8	0	0	18	
Марија	Недељковић	Гимназија	Нови Пазар	3	Б	15	0	0	0	-	15	
Милан	Јокановић	ЕТШ „Михајло Пупин“	Нови Сад	3	Б	10	0	2	-	-	12	
Јована	Казимировић	Неготинска гимназија	Неготин	3	Б	0	-	2	10	-	12	
Драган	Манић	Гимназија	Велика Плана	3	Б	12	0	-	0	-	12	
Даница	Јевремовић	Средња школа „Никола Тесла“	Лепосавић	3	Б	5	-	5	1	-	11	
Теодора	Пејашиновић	ЕТШ „Михајло Пупин“	Нови Сад	3	Б	5	-	-	-	-	5	
Теодора	Стефановић	Гимназија „Стеван Јаковљевић“	Власотинце	3	Б	5	0	0	0	0	5	
Ненад	Бировљевић	Шабачка гимназија	Шабац	3	Б	-	0	0	-	4	4	
Урош	Јеремић	IX гимназија „Михаило Петровић Алас“	Београд	3	Б	-	0	2	-	0	2	
Оливера	Сандо	Зрењанинска гимназија	Зрењанин	3	Б						-	

Име	Презиме	Школа	Место	Разред	Категорија	1	2	3	4	5	Σ	
Нађа	Обреновић	Гимназија	Краљево	4	Б	20	20	20	20	5	85	I награда
Никола	Благојевић	Гимназија „Бора Станковић“	Ниш	4	Б	20	20	20	20	0	80	I награда
Немања	Дивнић	Гимназија	Варварин	4	Б	20	20	20	10	5	75	I награда
Никола	Максић	I београдска гимназија	Београд	4	Б	10	20	20	8	14	72	II награда
Ђорђе	Богдановић	Средња школа Младост	Петровац	4	Б	20	15	20	7	10	72	II награда
Стефан	Стојановић	Гимназија	Велика Плана	4	Б	20	15	20	10	0	65	II награда
Гојко	Вучинић	IX гимназија „Михаило Петровић Алас“	Београд	4	Б	20	20	20	4	-	64	II награда
Јована	Петковић	Гимназија „Јован Скерлић“	Владичин Хан	4	Б	20	20	20	4	-	64	II награда
Петар	Матко	Гимназија	Смедерево	4	Б	16	20	20	5	0	61	II награда
Марко	Тошић	„Вук Караџић“	Лозница	4	Б	20	18	0	18	5	61	II награда
Душан	Јовановић	Гимназија	Јагодина	4	Б	20	15	20	0	5	60	III награда
Петар	Колић	Рачунарска гимназија	Београд	4	Б	20	15	20	5	0	60	III награда
Лука	Марић	ЕТШ „Михајло Пупин“	Нови Сад	4	Б	20	20	19	1	-	60	III награда
Ђорђе	Николашевић	IX гимназија „Михаило Петровић Алас“	Београд	4	Б	20	15	20	5	0	60	III награда
Стефан	Пушица	Гимназија „Пиво Караматијевић“	Нова Варош	4	Б	17	20	18	5	-	60	III награда
Неда	Делић	Гимназија „Вељко Петровић“	Сомбор	4	Б	20	15	20	4	0	59	III награда
Јован	Јаћовић	Гимназија	Крушевац	4	Б	20	15	10	7	5	57	III награда
Милош	Новаковић	XIV гимназија	Београд	4	Б	20	12	20	5	0	57	III награда
Ратко	Амановић	Паланачка гимназија	Смедеревска Паланка	4	Б	16	15	20	5	0	56	III награда
Марко	Векарић	IX гимназија „Михаило Петровић Алас“	Београд	4	Б	20	15	13	5	3	56	III награда
Михаило	Обрадовић	Гимназија	Горњи Милановац	4	Б	20	20	10	5	0	55	III награда
Ђорђе	Ђелић	Гимназија „Бора Станковић“	Врање	4	Б	19	12	18	0	5	54	похвала
Владана	Стојиљковић	Гимназија „Бора Станковић“	Врање	4	Б	20	15	13	5	0	53	похвала
Милош	Голуб	Гимназија „Светозар Марковић“	Нови Сад	4	Б	20	12	20	0	0	52	похвала
Милица	Лазић	XIV гимназија	Београд	4	Б	20	8	18	4	0	50	похвала
Лука	Поповић	Гимназија	Пирот	4	Б	10	18	20	1	-	49	похвала
Вук	Радосављевић	IX гимназија „Михаило Петровић Алас“	Београд	4	Б	10	18	20	1	0	49	похвала
Филип	Блашковић	Гимназија „Душан Васиљев“	Кикинда	4	Б	19	20	3	1	5	48	похвала
Марко	Скакун	Митровачка гимназија	Сремска Митровица	4	Б	8	20	0	-	20	48	похвала
Јован	Ђумић	IX гимназија „Михаило Петровић Алас“	Београд	4	Б	20	20	0	1	5	46	похвала
Новак	Мартиновић	XIV гимназија	Београд	4	Б	11	20	13	1	0	45	похвала
Јован	Стојковић	Гимназија „Бора Станковић“	Врање	4	Б	20	0	19	1	5	45	похвала
Димитра	Јездимировић	Гимназија „Светозар Марковић“	Ниш	4	Б	10	12	18	4	0	44	похвала
Катарина	Милићевић	Ужичка гимназија	Ужице	4	Б	14	-	10	0	20	44	похвала
Дарко	Арнаут	Гимназија „Вељко Петровић“	Сомбор	4	Б	20	12	10	0	-	42	
Енес	Гичевић	Гимназија „Јездимир Ловић“	Сјеница	4	Б	14	15	8	5	0	42	
Милош	Мићовић	XIII београдска гимназија	Београд	4	Б	20	15	0	5	2	42	
Милоје	Ђукановић	„Вук Караџић“	Лозница	4	Б	20	15	0	5	-	40	
Агота	Кереши	Техничка школа	Ада	4	Б	20	15	0	5	0	40	
Филип	Станковић	Гимназија	Ивањица	4	Б	20	15	-	5	-	40	
Петар	Давидовић	Шабачка гимназија	Шабац	4	Б	20	20	0	0	-	40	
Андреј	Скала	Гимназија „Јован Јовановић Змај“	Нови Сад	4	Б	19	12	8	0	-	39	
Алекса	Илић	Гимназија	Лесковац	4	Б	8	20	5	5	-	38	
Митра	Степић	Земунска гимназија	Земун	4	Б	20	12	0	6	0	38	
Ана	Пастор	IX гимназија „Михаило Петровић Алас“	Београд	4	Б	20	12	0	5	-	37	
Ђорђе	Степановић	Ваљевска гимназија	Ваљево	4	Б	20	12	0	5	0	37	
Јана	Стојановић	Гимназија	Чачак	4	Б	20	15	0	2	0	37	
Младен	Живковић	Војна гимназија	Београд	4	Б	19	15	0	0	2	36	
Стефан	Аћимовић	Гимназија „Б. Петров Браца“	Вршац	4	Б	20	15	0	0	0	35	
Маја	Лаковић	Гимназија	Врњачка Бања	4	Б	18	15	0	2	0	35	
Иван	Прелић	I београдска гимназија	Београд	4	Б	13	20	0	2	0	35	
Јелена	Јанковић	Гимназија	Зајечар	4	Б	19	15	0	0	0	34	
Стеван	Јокић	I београдска гимназија	Београд	4	Б	20	12	0	2	0	34	
Василије	Бецић	XIII београдска гимназија	Београд	4	Б	11	15	0	7	0	33	
Данијел	Радуловић	Митровачка гимназија	Сремска Митровица	4	Б	12	15	0	5	0	32	
Лука	Ивановић	Ваљевска гимназија	Ваљево	4	Б	10	15	0	5	0	30	
Милан	Станковић	Гимназија	Пирот	4	Б	20	0	0	5	2	27	
Кристијан	Илић	Гимназија	Пирот	4	Б	9	12	0	5	0	26	
Илма	Гицић	Гимназија „Јездимир Ловић“	Сјеница	4	Б	20	0	0	5	0	25	
Сара	Милојевић	Прва крагујевачка гимназија	Крагујевац	4	Б	8	12	0	5	0	25	
Стефан	Стојановић	Гимназија	Лесковац	4	Б	20	0	0	5	0	25	
Лидија	Хусар	Гимназија „Светозар Марковић“	Суботица	4	Б	5	15	0	5	0	25	
Јована	Митровић	Гимназија „Бора Станковић“	Ниш	4	Б	7	12	0	2	-	21	
Владимир	Мојовић	Гимназија	Ивањица	4	Б	9	12	0	0	0	21	
Данило	Радојковић	Гимназија „Бора Станковић“	Бор	4	Б	20	0	0	0	0	20	
Јелена	Вукићевић	Гимназија	Књажевац	4	Б	7	12	0	0	0	19	
Ђорђе	Ђурић	Гимназија „Милош Савковић“	Аранђеловац	4	Б	6	0	10	1	0	17	
Стефан	Софијанић	Земунска гимназија	Земун	4	Б	7	0	10	0	0	17	
Емилија	Симић	Средња школа	Блаце	4	Б	6	0	0	5	2	13	