	ПРВИ РАЗРЕД ПРЕЗИМЕ И ИМЕ	ШКОЛА	ЗАДАЦИ					З Б И Р	ПЛАСМАН
			1	2	3	4	5		
1	**Јанковић Даница**	**Гимназија "Урош Предић"**	**20**	**10**	**20**	**10**	**15**	**75**	I
2	**Виктор Живковић**	**ШЦ "Никола Тесла" Вршац**	**20**	**20**	**20**	**0**	**10**	**70**	II
3	**Чакован Наталија**	**Гимназија "Урош Предић"**	**10**	**20**	**20**	**0**	**10**	**60**	III
4	**Алексић Андреа**	**Гимназија "Урош Предић"**	**0**	**0**	**20**	**12**	**20**	**52**	похвала
5	**Ђуретановић Давид**	**Гимназија "Урош Предић"**	**2**	**0**	**20**	**10**	**20**	**52**	похвала
6	**Милтеновић Филип**	**Гимназија "Урош Предић"**	**5**	**0**	**10**	**10**	**20**	**45**	
7	**Косановић Маша**	**Гимназија "Урош Предић"**	**2**	**0**	**20**	**12**	**2**	**36**	
8	**Ракић Светлана**	**Гимназија "Урош Предић"**	**10**	**0**	**20**	**0**	**5**	**35**	
9	**Огњен Ђукић**	**ЕШ "Никола Тесла"**	**0**	**0**	**20**	**0**	**5**	**25**	
10	**Никола Ђунисић**	**ЕШ "Никола Тесла"**	**0**	**0**	**20**	**0**	**2**	**22**	
11	**Станковић Филип**	**Гимназија "Урош Предић"**	**0**	**0**	**20**	**0**	**0**	**20**	
12	**Бојана Слепчевић**	**ЕШ "Никола Тесла"**	**0**	**0**	**20**	**0**	**0**	**20**	
13	**Јарослав Весели**	**ЕШ "Никола Тесла"**	**5**	**0**	**5**	**0**	**0**	**10**	
14									
15									
23									
24									
25									
26									
27									
28									

	ДРУГИ РАЗРЕД ПРЕЗИМЕ И ИМЕ	ШКОЛА	ЗАДАЦИ					З Б И Р	ПЛАСМАН
			1	2	3	4	5		
1	Милановић Јован	ЕШ "Никола Тесла"	20	0	20	7	20	67	I
2	Грујичић Теодора	Гимназија "Урош Предић"	20	4	15	7	5	51	II
3	Месарош Давид	ЕШ "Никола Тесла"	20	0	0	5	20	45	III
4	Едвард Габријел Етински	Гимназија "Урош Предић"	20	0	0	10	10	40	похвала
5	Бакурски Аранђел	Гимназија "Урош Предић"	20	0	0	10	10	40	похвала
6	Секуловић Милош	Гимназија "Урош Предић"	20	0	0	7	10	37	
7	Станковић Огњен	Гимназија "Урош Предић"	20	0	0	7	10	37	
8	Лазар Фибишан	Вршачка гимназија	20	0	0	10	0	30	
9	Гојсовић Ивана	Гимназија "Урош Предић"	20	0	0	0	0	20	
10	Вукасовић Сергеј	Гимназија "Урош Предић"	0	0	0	7	0	7	

	ТРЕЋИ РАЗРЕД ПРЕЗИМЕ И ИМЕ	ШКОЛА	ЗАДАЦИ					З Б И Р	ПЛАСМАН
			1	2	3	4	5		
1	Зечевић Данило	Гимназија "Урош Предић"	20	20	20	2	20	82	I
2	Александар Ђорђевић	Вршачка гимназија	20	20	20	0	10	70	II
3	Јакшић Тијана	Гимназија "Урош Предић"	15	20	20	5	0	60	III
4	Пешић Иван	Гимназија "Урош Предић"	10	20	20	0	3	53	похвала
5	Миловановић Игор	Гимназија "Урош Предић"	2	10	20	0	20	52	похвала
6	Зарев Доротеја	Гимназија "Урош Предић"	20	20	2	0	0	42	
7	Благојевић Вељко	ЕШ "Никола Тесла"	5	20	0	0	0	25	
8	Марјановић Михило	Гимназија "Урош Предић"	20	0	5	0	0	25	
9	Станковић Николија	Гимназија "Урош Предић"	0	10	0	0	0	10	
10									
11									
12									

	ЧЕТВРТИ РАЗРЕД ПРЕЗИМЕ И ИМЕ	ШКОЛА	ЗАДАЦИ					З Б И Р	ПЛАСМАН
			1	2	3	4	5		
1	Бербић Дамир	Гимназија "Урош Предић"	20	15	20	10	20	85	I
2	Дебоговић Марина	Гимназија "Урош Предић"	5	20	20	10	20	75	II
3	Ђосић Ивана.	Гимназија "Урош Предић"	5	20	20	20	2	67	III
4	Бадрљица Милош	Гимназија "Урош Предић"	0	20	20	0	20	60	похвала
5	Врачар Алекса	Гимназија "Урош Предић"	0	20	20	10	5	55	похвала
6	Тирнанић Михајло	Гимназија "Урош Предић"	0	20	20	10	0	50	похвала
7	Елена Стојковски	ШЦ "Никола Тесла" Вршац	0	0	10	10	0	20	
8	Велимиров Лука	Гимназија "Урош Предић"	0	5	0	10	2	17	
9	Цвејић Лазар	Гимназија "Урош Предић"	0	0	0	10	0	10	
10	Марић Ђорђе	Гимназија "Урош Предић"						0	
11									

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

24. фебруар 2018.

Други разред – Б категорија

1. Колико постоји четвороцифрених природних бројева који се могу записати помоћу цифара $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, ако све цифре морају бити различите и збир цифара треба да износи 15?

2. Кружница k уписана у трапез $ABCD$, $AB \parallel CD$, додирује страницу AB у тачки E. Ако важи $AE = 15$, $BE = 10$ и $CD = 8$, одредити полупречник кружнице k.

3. Наћи најмањи природан број n такав да број n^2 почиње са 2019 (тј. да важи $n^2 = 2019\ldots$).

4. У зависности од реалног параметра a, решити једначину

$$x = a - \sqrt{a^2 - x\sqrt{x^2 + a^2}}$$

у скупу реалних бројева.

5. Попуњавање таблице 3×3 бројевима од 1 до 9 називамо *магични квадрат* ако је сваки број искоришћен тачно једном, и притом су збирови у свакој врсти, свакој колони и на обе дијагонале сви међусобно једнаки. Одредити колико постоји различитих магичних квадрата 3×3. (Два магична квадрата сматрамо различитим ако бар на једном пољу имају уписане различите бројеве.)

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детально образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

24. фебруар 2018.

Четврти разред – Б категорија

1. Одредити површину фигуре која је у Декартовом координатном систему одређена неједначинама:

$$x^2 + y^2 \leqslant 4(x + y - 1);$$
$$y \leqslant \sqrt{x^2 - 4x + 4}.$$

2. Одредити колико постоји тројки (a, b, c) природних бројева не већих од 2018 таквих да су бројеви

$$24^a + 2^b + 2018^c \qquad \text{и} \qquad 10^c + 3^a + 2018^b$$

дељиви са 3.

3. На страници BC једнакостраничног $\triangle ABC$ уочена је тачка M. Доказати:

$$MB \cdot MC = AB^2 - AM^2.$$

4. Таблица $n \times n$ попуњава се бројевима 1, 0 и -1 на такав начин да збирови бројева у свакој врсти и у свакој колони (укупно $2n$ таквих збирова) сви буду међусобно различити. Да ли је ово могуће постићи за:

a) $n = 3$;

b) $n = 4$?

5. У зависности од реалног параметра a, испитати колико различитих реалних решења има једначина

$$x^3 - 3x = a.$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

24. фебруар 2018.

Трећи разред – Б категорија

1. На шаховском турниру учествује n шахиста. Свако је са сваким одиграо по k партија. Одредити све могуће вредности за n и k ако су укупно одигране 224 партије.

2. Колико решења једначине

$$\sin 3x - \sin x + \cos 2x = 1$$

лежи у интервалу $[2, 24]$?

3. Решити систем једначина

$$a + b = 8;$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 32$$

у скупу реалних бројева.

4. Основа пирамиде $SABCD$ је ромб $ABCD$, са углом од $60°$ у темену A. Дужина бочне ивице SA је једнака дужини странице тог ромба. Доказати:

$$SB^2 + SD^2 = SC^2.$$

5. Доказати да једначина

$$\sqrt{x^2 + 3x + 1} + \sqrt{y^2 - y + 3} = 2017$$

нема решења у скупу целих бројева.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

24. фебруар 2018.

Први разред – Б категорија

1. Дат је $\triangle ABC$, над чијом је страницом AC као над пречником конструисана кружница k. Кружница k пролази кроз средиште странице BC, а страницу AB сече у тачки D таквој да важи $AD = \frac{3}{2}DB$. Ако важи $AC = 60$, израчунати површину $\triangle ABC$.

2. На страницама AB и BC паралелограма $ABCD$ одабране су тачке K и M, редом, такве да важи $AK : KB = 2 : 3$ и $BM : MC = 2 : 1$. Наћи однос површина $\triangle BKM$ и $\triangle DKM$, тј. израчунати вредност $\dfrac{P(\triangle BKM)}{P(\triangle DKM)}$.

3. Комплет од 55 домина садржи све могуће комбинације два броја од 0 до 9, укључујући и домине на којима је два пута исти број. (На слици су приказане три домине: домина која садржи бројеве 3 и 4, домина која садржи бројеве 0 и 9, и домина која садржи два пута број 3.) Колико тачкица има укупно у целом комплету домина?

4. Нека су a, b и c природни бројеви.

a) Ако су ab и bc кубови природних бројева, доказати да је и a^2c куб природног броја.

b) Ако су a^4b, b^8c^5 и c^7a кубови природних бројева, доказати да су a, b и c кубови природних бројева.

5. У скупу реалних бројева решити једначину

$$|x - |2x - |3x - 1||| = 1.$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

не добијамо решење. Претпоставимо сада $b \geqslant 3$. Тада десна страна даје остатак 1 при дељењу са 8, па мора и лева, одакле следи да је a паран број, рецимо $a = 2a_1$. Тада следи $2^b = 5^{2a_1} - 1 = (5^{a_1} - 1)(5^{a_1} + 1)$. Свака заграда мора бити степен двојке, а како се разликују за тачно 2, једина могућност је да буде $5^{a_1} - 1 = 2$, што није могуће.

- $k = m + 1$:
Слично као и горе, мора бити $m + 1 \mid 10^c$. Претпоставимо прво $2^c \nmid m + 1$. Тада је $\frac{10^c}{m+1} + 1$ непаран број, па то мора бити и лева страна посматране једнакости, која износи $n(n-1)\cdots(m+3)(m+2)$. Ово је могуће само за $n = m+2$, тј. остаје $m+2 = \frac{10^c}{m+1} + 1$. Следи $(m+2)(m+1) = 10^c + (m+1)$, а одатле $(m+1)^2 = 10^c > k! = (m+1)!$, тј. $m + 1 > m!$. Одавде следи $m \leqslant 2$. За $m = 1$ имамо $k = 2$, а за $m = 2$ имамо $k = 3$, али како бројеви 12 и 26 нису факторијали ниједног природног броја, ни овде не добијамо решење.
Претпоставимо сада $2^c \mid m + 1$. Тада имамо $m + 1 \geqslant 2^c$ и

$$(2^c)^{n-m-1} < n(n-1)\cdots(m+3)(m+2) = \frac{10^c}{m+1} + 1 \leqslant 5^c + 1,$$

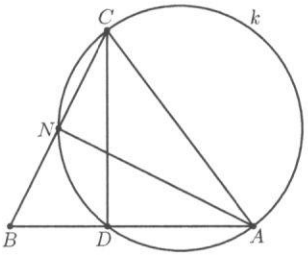
па следи $n - m - 1 \leqslant 2$ (за $n - m - 1 \geqslant 3$ горња неједнакост би се свела на $8^c < 5^c + 1$, што је немогуће), тј. $n \leqslant m + 3$, а ово имплицира $n = m + 3$ или $n = m + 2$. Случај $n = m + 2$ смо решавали малопре и нисмо нашли решења. Остаје $n = m + 3$. Тада имамо

$$(m+3)(m+2) = \frac{10^c}{m+1} + 1 > \frac{k!}{m+1} + 1 = \frac{(m+1)!}{m+1} + 1 = m! + 1,$$

тј. $m^2 + 5m + 5 > m!$. Ова неједнакост важи само за $m \leqslant 4$. Случајеве $m = 1$ и $m = 2$ смо испитали раније. За $m = 3$ имамо $k = 4$, а за $m = 4$ имамо $k = 5$, али како бројеви 624 и 24120 нису факторијали ниједног природног броја, опет не налазимо решење.

Дакле, природни бројеви m и k тражени у поставци не постоје.

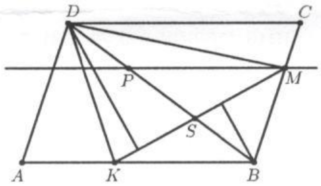
Први разред – Б категорија



Ок 2018 1Б 1

1. Нека је N средиште странице BC, уједно и пресек k са BC. Имамо $\measuredangle ANC = \measuredangle ANB = 90^\circ$, јер је AC пречник кружнице k. По ставу СУС имамо $\triangle ANC \cong \triangle ANB$, па следи $AB = AC = 60$. Сада имамо $60 = AD + DB = \frac{3}{2}DB + DB = \frac{5}{2}DB$, па следи $DB = 24$ и $AD = \frac{3}{2} \cdot 24 = 36$. Важи и $\measuredangle ADC = 90^\circ$ (поново јер је AC пречник), па сада из Питагорине теореме добијамо $CD = \sqrt{60^2 - 36^2} = 12\sqrt{5^2 - 3^2} = 48$. Како је CD висина на AB у $\triangle ABC$, његова површина износи $\frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{60 \cdot 48}{2} = 1440$.

2. *Прво решење.* Нека је S пресек дијагонале DB и дужи KM. Како $\triangle BKM$ и $\triangle DKM$ имају заједничку страницу KM, однос њихових површина заправо представља однос њихових висина спуштених на KM. Висине спуштене из B, односно D на KM односе се као SB и DS (према Талесовој теореми), па заправо треба наћи $\frac{SB}{DS}$.



Ок 2018 1Б 2

Означимо $\vec{x} = \overrightarrow{DC}$ и $\vec{y} = \overrightarrow{DA}$. Сада из $\overrightarrow{DB} = \vec{x} + \vec{y}$ и $\overrightarrow{DS} = k\overrightarrow{DB}$ за неко k, $0 < k < 1$ (а онда $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DS} = (1-k)\overrightarrow{DB}$), имамо

$$\overrightarrow{DS} = k\vec{x} + k\vec{y}.$$

С друге стране, како је S на дужи KM, то за неки реалан број m, $0 < m < 1$, важи $\overrightarrow{DS} = m\overrightarrow{DK} + (1-m)\overrightarrow{DM}$. С обзиром на $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AK} = \vec{y} + \frac{2}{5}\vec{x}$ и $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CM} = \vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y}$, увршћавањем овога у претходну једнакост добијамо

$$\overrightarrow{DS} = m\left(\vec{y} + \frac{2}{5}\vec{x}\right) + (1-m)\left(\vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y}\right) = \left(\frac{2m}{5} + 1 - m\right)\vec{x} + \left(m + \frac{1-m}{3}\right)\vec{y} = \frac{5-3m}{5}\vec{x} + \frac{2m+1}{3}\vec{y}.$$

Дакле, следи $k\vec{x} + k\vec{y} = \frac{5-3m}{5}\vec{x} + \frac{2m+1}{3}\vec{y}$, па како су вектори $\vec{x}$ и $\vec{y}$ неколинеарни, мора важити $k = \frac{5-3m}{5}$ и $k = \frac{2m+1}{3}$. Одатле имамо $\frac{5-3m}{5} = \frac{2m+1}{3}$, тј. $15 - 9m = 10m + 5$, па израчунавамо $m = \frac{10}{19}$. Најзад, $k = \frac{2 \cdot \frac{10}{19} + 1}{3} = \frac{13}{19}$ и

$$\frac{P(\triangle BKM)}{P(\triangle DKM)} = \frac{SB}{DS} = \frac{1-k}{k} = \frac{\frac{6}{19}}{\frac{13}{19}} = \frac{6}{13}.$$

Друго решење. Као и у претходном решењу, тражимо $\frac{SB}{DS}$. Провуцимо кроз M праву паралелну са AB, и нека је P пресечна тачка те праве са BD. Посматрајући праве BD и BC, према Талесовој теореми имамо $\frac{MP}{CD} = \frac{MB}{CB} = \frac{2}{3}$, тј. $MP = \frac{2}{3}CD$, и $\frac{DP}{DB} = \frac{CM}{CB} = \frac{1}{3}$, тј. $DP = \frac{1}{3}DB$. Посматрајући праве BD и KM, према Талесовој теореми имамо $\frac{BS}{PS} = \frac{BK}{PM} = \frac{\frac{3}{5}AB}{\frac{2}{3}CD} = \frac{9}{10}$. Означимо $BS = 9x$ и $PS = 10x$. Имамо $BS + PS = BP = DB - DP = \frac{2}{3}DB$, тј. $19x = \frac{2}{3}DB$, па следи $x = \frac{2}{57}DB$. Одатле израчунавамо $BS = 9x = \frac{6}{19}DB$ и $DS = DB - BS = \frac{13}{19}DB$, па коначно

$$\frac{P(\triangle BKM)}{P(\triangle DKM)} = \frac{SB}{DS} = \frac{\frac{6}{19}DB}{\frac{13}{19}DB} = \frac{6}{13}.$$

3. Израчунајмо најпре укупан број тачкица на доминама на којима се јављају два различита броја. Посматрајмо све уређене парове различитих бројева од 0 до 9. Сваки број се на првој координати јавља тачно 9 пута (за све могуће вредности друге координате различите од тог броја), па збир свих првих координата износи $9 \cdot (0 + 1 + 2 + \cdots + 9) = 9 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 405$; слично, збир свих других координата износи такође 405, па збир свих бројева који се јављају у овим уређеним паровима износи 910. Приметимо да се домине на којима се јављају два различита броја могу представити управо оваквим уређеним паровима, при чему смо сваку домину на тај начин рачунали два пута (домину на којој су бројеви a и b рачунали смо и као пар (a, b), и као пар (b, a)); дакле, укупан број тачкица на оваквим доминама је тачно половина малопре израчунате вредности, тј. износи 405.

Укупан број тачкица на доминама на којима се с обе стране налази исти број износи $2 \cdot (0 + 1 + 2 + \cdots + 9) = 2 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 90$. Дакле, решење задатка је $405 + 90 = 495$.

4. У доказу користимо следеће једноставно запажање: ако су x и y природни бројеви такви да су x и xy кубови природних бројева, тада је и y куб природног броја.

а) Ако су ab и bc кубови природних бројева, тада је куб природног броја и $(ab)^2bc$, тј.a^2b^3c. Тада по запажању с почетка следи да је и a^2c куб природног броја.

b) С обзиром на $a^4b = a^3 \cdot ab$, а како су a^4b и a^3 кубови природних бројева, следи да је и ab куб природног броја. Слично, из $b^8c^5 = b^6c^3 \cdot b^2c^2$ добијамо да је b^2c^2 куб природног броја, а из $c^7a = c^6 \cdot ca$ добијамо да је ca куб природног броја (јер су b^8c^5 и b^6c^3, односно c^7a и c^6, кубови природних бројева). Сада из $ab \cdot b^2c^2 = ab^3c^2$ следи да је ab^3c^2 куб природног броја (јер су то оба чиниоца на левој страни), а онда је и ac^2 куб природног броја. Даље, како су ac и ac^2 кубови природних бројева, следи да је и c куб природног броја. Коначно, a је куб природног броја јер су c и ac кубови природних бројева, а b је куб природног броја јер су сада a и ab кубови природних бројева.

5. Претпоставимо прво $x \leqslant \frac{1}{3}$. Тада имамо $|3x - 1| = 1 - 3x$, па се једначина своди на

$$1 = |x - |2x - |3x - 1||| = |x - |2x - (1 - 3x)|| = |x - |5x - 1||.$$

За $x \leqslant \frac{1}{5}$ имамо $|5x - 1| = 1 - 5x$, па се једначина даље своди на $1 = |x - |5x - 1|| = |x - (1 - 5x)| = |6x - 1|$, тј. $6x - 1 = \pm 1$, а ово има решења $x = \frac{1}{3}$ и $x = 0$, од којих прво одбацујемо јер не испуњава услов $x \leqslant \frac{1}{5}$; за $x > \frac{1}{5}$ имамо $|5x - 1| = 5x - 1$, па се једначина даље своди на $1 = |x - |5x - 1|| = |x - (5x - 1)| = |1 - 4x|$, тј. $1 - 4x = \pm 1$, а ово има решења $x = 0$ и $x = \frac{1}{2}$, која оба одбацујемо јер нису у интервалу $\frac{1}{5} < x \leqslant \frac{1}{3}$.

Претпоставимо сада $x > \frac{1}{3}$. Тада имамо $|3x - 1| = 3x - 1$, па се једначина своди на

$$1 = |x - |2x - |3x - 1||| = |x - |2x - (3x - 1)|| = |x - |1 - x||.$$

За $x \leqslant 1$ имамо $|1-x| = 1-x$, па се једначина даље своди на $1 = |x-|1-x|| = |x-(1-x)| = |2x-1|$, тј. $2x-1 = \pm 1$, а ово има решења $x = 1$ и $x = -1$, од којих друго одбацујемо јер не испуњава услов $x > \frac{1}{3}$; за $x > 1$ имамо $|1 - x| = x - 1$, па се једначина даље своди на $1 = |x - |1 - x|| = |x - (x - 1)| = |1| = 1$, па су у овом случају решења сви бројеви који испуњавају услов $x > 1$.

Дакле, решења једначине су $x = 0$ и сви реални бројеви x за које важи $x \geqslant 1$.

Други разред – Б категорија

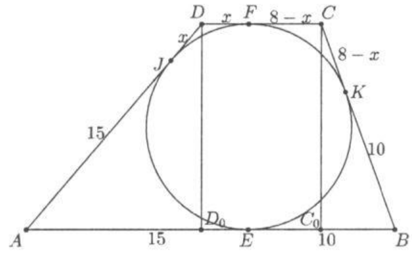
1. Приметимо да збир свих дозвољених цифара износи $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$. Пошто треба саставити четвороцифрен број од неких међу овим цифрама чији збир треба да износи 15, треба одбацити неке три цифре које имају збир 6. Очигледно, оне могу бити само нешто од: $\{0, 1, 5\}$, $\{0, 2, 4\}$ или $\{1, 2, 3\}$.

У првом случају можемо користити цифре $2, 3, 4, 6$, и њих можемо разместити на $4! = 24$ начина. У другом случају можемо користити цифре $1, 3, 5, 6$, и њих можемо разместити на $4! = 24$ начина. У трећем случају можемо користити цифре $0, 4, 5, 6$, а приликом њиховог размештања морамо пазити на то да 0 не сме бити на првом месту; дакле, за најлевљу цифру бирамо једну од $4, 5, 6$, а онда преостале три можемо разместити на $3! = 6$ начина, па у овом случају имамо укупно $3 \cdot 6 = 18$ бројева.

Дакле, решење задатка је $24 + 24 + 18 = 66$.

2. Нека кружница k додирује странице AD, CD и BC у тачкама J, F и K, редом. Нека су C_0 и D_0 подножја нормала из C и D на AB, редом.

Нека је r полупречник кружнице k. Означимо $x = DJ$. На основу једнакости тангентних дужи из тачке на кружницу, имамо $AJ = AE = 15$, $BK = BE = 10$, $DF = DJ = x$ и $CK = CF = 8-x$. Важи и $D_0E = DF = x$ и $C_0E = CF = 8-x$. Из Питагорине теореме примењене на $\triangle ADD_0$ и $\triangle BCC_0$ имамо $AD_0^2 + DD_0^2 = AD^2$ и $BC_0^2 + CC_0^2 = BC^2$, тј.



Ок 2018 2Б 2

$$(15 - x)^2 + (2r)^2 = (15 + x)^2$$

и

$$(10 - (8 - x))^2 + (2r)^2 = (10 + (8 - x))^2.$$

Прва једначина се своди на $225 - 30x + x^2 + 4r^2 = 225 + 30x + x^2$, тј. $4r^2 = 60x$, а одатле следи $x = \frac{r^2}{15}$. Друга једначина се своди на $4 + 4x + x^2 + 4r^2 = 324 - 36x + x^2$, тј. $40x + 4r^2 = 320$, а одатле следи $x = \frac{320-4r^2}{40} = \frac{80-r^2}{10}$. Дакле, важи $\frac{r^2}{15} = \frac{80-r^2}{10}$, што се своди на $10r^2 = 1200 - 15r^2$, а одатле израчунавамо $r = \sqrt{\frac{1200}{25}} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

3. Како $\sqrt{2019}$ није природан број ($44^2 = 1936 < 2019 < 2025 = 45^2$), следи да је број n^2 бар петоцифрен. Претпоставимо $n^2 = \overline{2019a}$. Како имамо $142^2 = 20164 < \overline{2019a} < 20449 = 143^2$, такво n не постоји. Претпоставимо сада $n^2 = \overline{2019ab}$, тј. $2019 \cdot 10^2 = 201900 \leqslant n^2 < 202000 = 2020 \cdot 10^2$. Одатле имамо $n \geqslant \sqrt{2019} \cdot 10 > 440$ и $n < \sqrt{2020} \cdot 10 < 450$, али онда испитивањем овог интервала у потрази за n које испуњава задате услове установљавамо $449^2 = 201601 < \overline{2019ab} < 202500 = 450^2$, па такво n не постоји. Претпоставимо сада $n^2 = \overline{2019abc}$, тј. $20190 \cdot 10^2 = 2019000 \leqslant n^2 < 2020000 = 20200 \cdot 10^2$. Одатле имамо $n \geqslant \sqrt{20190} \cdot 10 > 1420$ и $n < \sqrt{20200} \cdot 10 < 1430$. Сада испитивањем овог интервала у потрази за n које испуњава задате услове већ за $n = 1421$ добијамо $1421^2 = 2019241$.

Дакле, најмањи такав природан број n је $n = 1421$.

4. Постављена једначина је еквивалентна са $\sqrt{a^2 - x\sqrt{x^2 + a^2}} = a - x$. Одатле имамо услов $a \geqslant x$, а након квадрирања једначина се своди на $a^2 - x\sqrt{x^2 + a^2} = a^2 - 2ax + x^2$, тј. $x\sqrt{x^2 + a^2} = 2ax - x^2$. Једна могућност је $x = 0$ (што јесте решење кад год је испуњен услов $a \geqslant x$, тј. $a \geqslant 0$); иначе нам после скраћивања са x остаје $\sqrt{x^2 + a^2} = 2a - x$, а ово се након квадрирања, уз постављање услова $2a - x \geqslant 0$, тј. $a \geqslant \frac{x}{2}$, своди на $x^2 + a^2 = 4a^2 - 4ax + x^2$, тј. $4ax = 3a^2$. У случају $a = 0$ ово је испуњено увек, тј. тада су решења сви бројеви x за које важи $a \geqslant x$ и $a \geqslant \frac{x}{2}$, тј. $x \leqslant 0$. Претпоставимо сада $a \neq 0$. Тада из последње једначине добијамо још решење $x = \frac{3a}{4}$; ово јесте решење полазне једначине ако су испуњени услови $a \geqslant x$ и $a \geqslant \frac{x}{2}$, тј. $a \geqslant \frac{3a}{4}$ и $a \geqslant \frac{3a}{8}$, а они се своде на $\frac{a}{4} \geqslant 0$ и $\frac{5a}{8} \geqslant 0$, тј. (поново) $a \geqslant 0$.

Дакле, резимирајмо: за $a = 0$ решење једначине је цео интервал $x \in (-\infty, 0]$, за $a > 0$ једначина има два решења, $x = 0$ и $x = \frac{3a}{4}$, а за $a < 0$ једначина нема решења.

5. Посматрајмо магични квадрат као на слици лево. Пошто важи $a + b + c + \cdots + i = 1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45$ и $a + b + c = d + e + f = g + h + i$, следи $a + b + c = d + e + f = g + h + i = 15$, и такође збирови у свакој врсти и на обе дијагонале износе 15. Приметимо сада:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Ок 2018 2Б 5

$$60 = 4 \cdot 15 = (b + e + h) + (d + e + f) + (a + e + i) + (c + e + g) = (a + b + c + \cdots + i) + 3e = 45 + 3e,$$

одакле следи $e = 5$.

Претпоставимо да је број 9 смештен у угао; без умањења општости, $a = 9$. Тада из $15 = a + b + c = a + d + g$ следи $b + c = d + g = 6$. Међутим, приметимо да два броја могу давати збир 6 само ако су то бројеви 2 и 4 (заиста, могућности $3+3$ отпада јер бројеви морају бити различити, а могућност $1+5$ отпада јер је број 5 већ искоришћен за e), па смо заправо добили контрадикцију.

Према томе, број 9 не може бити смештен у углу, па мора бити на средини неке странице. Узмимо нпр. $b = 9$. Тада слично као малопре добијамо $a + c = 6$, тј. $a = 2$ и $c = 4$ или обратно. Коју год од ове две могућности да одаберемо (а међусобно су аналогне), лако видимо да се остатак магичног квадрата може попунити на јединствен начин (на слици десно је приказано попуњавање за $a = 2$ и $c = 4$.

Дакле, у средини увек мора бити број 5, а затим број 9 можемо уписати на средину неке странице, што даје 4 могућности за број 9. Након уписивања броја 9, за његова два суседа имамо још избор који од њих ће бити 2 а који 4, што су још 2 могућности, а даље попуњавање магичног квадрата је једнозначно одређено. Према томе, различитих магичних квадрата 3×3 укупно има $4 \cdot 2 = 8$.

Трећи разред – Б категорија

1. Број парова различитих шахиста је $\frac{n(n-1)}{2}$, па како је свако са сваким одиграо по k партија, следи $\frac{n(n-1)}{2}k = 224$, тј. $n(n-1)k = 448 = 2^6 \cdot 7$. Међу бројевима n и $n-1$ један мора бити непаран, а једини непарни делиоци броја 448 су 1 и 7. Немогуће је $n = 1$, јер би тада производ на левој страни износио 0. За $n - 1 = 1$ имамо $n = 2$ и тада $k = 224$, тј. на турниру су играла само двојица шахиста и одиграли су 224 партије. Случај $n = 7$ је такође немогућ јер тада имамо $n - 1 = 6$, а десна страна није дељива са 3. Коначно, за $n - 1 = 7$ имамо $n = 8$ и тада $k = \frac{448}{8\cdot 7} = 8$, тј. на турниру је играло 8 шахиста и свако је са сваким одиграо по 8 партија.

Дакле, могуће је $n = 2$ и $k = 224$, или $n = 8$ и $k = 8$.

2. Једначину трансформишемо у $\sin 3x - \sin x = 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$, тј. $2\sin x \cos 2x = 2\sin^2 x$. Једна могућност је $\sin x = 0$, тј. $x = k\pi$ за $k \in \mathbb{Z}$. У случају $\sin x \neq 0$ после скраћивања са $2\sin x$ остаје $\cos 2x = \sin x$, тј. $1 - 2\sin^2 x = \sin x$. Уведимо смену $\sin x = t$. Тада добијамо квадратну једначину $2t^2 + t - 1 = 0$, а њена решења су $t_{1/2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1\pm 3}{4}$, тј. $t_1 = \frac{1}{2}$ и $t_2 = -1$. Дакле, $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = -1$, тј. $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ или $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ за $k \in \mathbb{Z}$.

Преостаје још пребројати колико се од пронађених решења налази у интервалу $[2, 24]$. Због $0 < 2 < \pi$ и $7\pi < 24 < 8\pi$ имамо 7 решења облика $x = k\pi$ (за $1 \leqslant k \leqslant 7$). Даље, због $\frac{\pi}{6} < 2 < \frac{13\pi}{6}$ и $\frac{37\pi}{6} < 24 < \frac{49\pi}{6}$ имамо 3 решења облика $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ (за $1 \leqslant k \leqslant 3$). Затим, због $0 < 2 < \frac{5\pi}{6}$ и $\frac{41\pi}{6} < 24 < \frac{53\pi}{6}$ имамо 4 решења облика $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ (за $0 \leqslant k \leqslant 3$). Најзад, због $-\frac{\pi}{2} < 2 < \frac{3\pi}{2}$ и $\frac{15\pi}{2} < 24 < \frac{19\pi}{2}$ имамо 4 решења облика $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (за $1 \leqslant k \leqslant 4$).

Дакле, укупан број решења у траженом интервалу износи $7 + 3 + 4 + 4 = 18$.

3. Из прве једначине следи $b = 8 - a$, па увршртавањем овога у другу добијамо

$$32 = a^2 + (8-a)^2 + c^2 = a^2 + 64 - 16a + a^2 + c^2 = 2a^2 - 16a + 64 + c^2,$$

тј. $2a^2 - 16a + 32 + c^2 = 0$. Међутим, приметимо да леву страну можемо трансформисати као $2a^2 - 16a + 32 + c^2 = 2(a^2 - 8a + 16) + c^2 = 2(a-4)^2 + c^2$, па да би ово било једнако нули, мора важити $a - 4 = 0$ и $c = 0$. Дакле, једино решење задатог система је $a = 4$, $b = 8 - a = 4$ и $c = 0$.

4. *Прво решење.* Нека је O пресек дијагонала ромба $ABCD$, и нека је a његова страница. Означимо $\measuredangle SOA = \alpha$, $\measuredangle SOC = \pi - \alpha$, $\measuredangle SOB = \beta$, $\measuredangle SOD = \pi - \beta$. Применом косинусне теореме на $\triangle SOB$, $\triangle SOD$, $\triangle SOA$ и $\triangle SOC$, редом, добијамо:

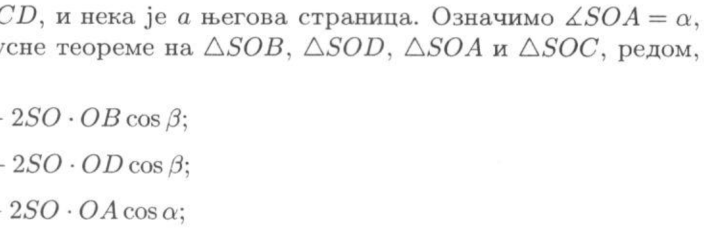
$$SB^2 = SO^2 + OB^2 - 2SO \cdot OB \cos\beta;$$
$$SD^2 = SO^2 + OD^2 + 2SO \cdot OD \cos\beta;$$
$$SA^2 = SO^2 + OA^2 - 2SO \cdot OA \cos\alpha;$$
$$SC^2 = SO^2 + OC^2 + 2SO \cdot OC \cos\alpha.$$

Сабирањем прве две једнакости и друге две једнакости, уз увршртавање $OB = OD = \frac{a}{2}$, $OA = OC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и $SA = a$, добијамо $SB^2 + SD^2 = 2SO^2 + \frac{a^2}{2}$ и $a^2 + SC^2 = 2SO^2 + \frac{3a^2}{2}$. Из друге једнакости следи $SC^2 = 2SO^2 + \frac{a^2}{2}$, па упоређивањем с првом добијамо $SB^2 + SD^2 = SC^2$.

Друго решење. Уведимо векторе $\vec{s} = \overrightarrow{AS}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$. Имамо $|\vec{s}| = |\vec{b}| = |\vec{d}| = a$, као и $\vec{b}\cdot\vec{d} = a^2\cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$. Такође, $\overrightarrow{SB} = \vec{b} - \vec{s}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{d} - \vec{s}$ и $\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AS} = \vec{b} + \vec{d} - \vec{s}$. Одатле:

$$SB^2 = \overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{SB} = (\vec{b} - \vec{s})\cdot(\vec{b} - \vec{s}) = \vec{b}\cdot\vec{b} - 2\vec{b}\cdot\vec{s} + \vec{s}\cdot\vec{s} = 2a^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{s};$$
$$SD^2 = \overrightarrow{SD}\cdot\overrightarrow{SD} = (\vec{d} - \vec{s})\cdot(\vec{d} - \vec{s}) = \vec{d}\cdot\vec{d} - 2\vec{d}\cdot\vec{s} + \vec{s}\cdot\vec{s} = 2a^2 - 2\vec{d}\cdot\vec{s};$$
$$SC^2 = \overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SC} = (\vec{b} + \vec{d} - \vec{s})\cdot(\vec{b} + \vec{d} - \vec{s}) = 3a^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{d} - 2\vec{b}\cdot\vec{s} - 2\vec{d}\cdot\vec{s} = 4a^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{s} - 2\vec{d}\cdot\vec{s}.$$

Дакле, како десне стране прве две једнакости у збиру дају десну страну треће, то важи и за леве стране, чиме је тврђење доказано.



Ок 2018 3Б 4

Треће решење. Нека је S_0 подножје нормале из темена S на раван $ABCD$. Тада имамо $SB^2 = SS_0^2 + S_0B^2$, $SC^2 = SS_0^2 + S_0C^2$ и $SD^2 = SS_0^2 + S_0D^2$, па се једнакост коју треба доказати своди на $SS_0^2 + S_0B^2 + SS_0^2 + S_0D^2 = SS_0^2 + S_0C^2$, тј.

$$SS_0^2 + S_0B^2 + S_0D^2 = S_0C^2.$$

Нека је a дужина странице ромба $ABCD$ (а тада имамо и $SA = a$). Такође, нека су X и Y подножја нормала из тачке S_0 на праве AB и CD, редом. Радићемо случај када се S_0 налази између тачака X и Y (у супротном се ради слично). Нека је D' подножје висине из D у једнакостраничном $\triangle ABD$. Приметимо, $AX+CY=AD'+D'X+CY=AD'+DY+CY=\frac{a}{2}+a=\frac{3a}{2}$. Сада можемо рачунати:

$$\begin{aligned}SS_0^2+S_0B^2+S_0D^2&=(SA^2-AS_0^2)+(S_0X^2+XB^2)+(S_0Y^2+YD^2)\\&=a^2-(AS_0^2-S_0X^2)+(a-XA)^2+S_0Y^2+(a-YC)^2\\&=a^2-AX^2+a^2-2aXA+XA^2+S_0Y^2+a^2-2aYC+YC^2\\&=3a^2-2a(XA+YC)+(S_0Y^2+YC^2)=3a^2-a\cdot 3a+S_0C^2=S_0C^2,\end{aligned}$$

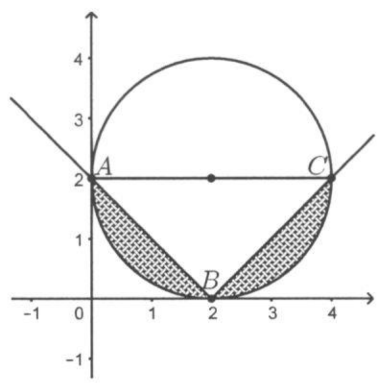
што је и требало доказати.

5. Изразе под кореновима можемо записати као $x(x+3)+1$ и $y(y-1)+3$. Одатле, за ма какве целе бројеве x и y, ови изрази су непарни (јер су производи $x(x+3)$ и $y(y-1)$ парни, будући да им је увек један чинилац паран а други непаран).

Означимо $x^2+3x+1=a$ и $y^2-y+3=b$. Имамо $\sqrt{a}+\sqrt{b}=2017$, тј. $\sqrt{a}=2017-\sqrt{b}$. Квадрирањем ове једнакости добијамо $a=2017^2-4034\sqrt{b}+b$, тј. $\sqrt{b}=\frac{2017^2+b-a}{4034}$. Одавде видимо да је $\sqrt{b}$ рационалан број, а пошто је b цео број, из ова два закључка следи да је и $\sqrt{b}$ цео број. На исти начин доказујемо и да је $\sqrt{a}$ цео број. Међутим, како су a и b непарни бројеви, то су и $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ непарни бројеви, али у том случају је $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ паран број, па овај збир не може бити једнак 2017, контрадикција. Дакле, полазна једначина нема целобројна решења.

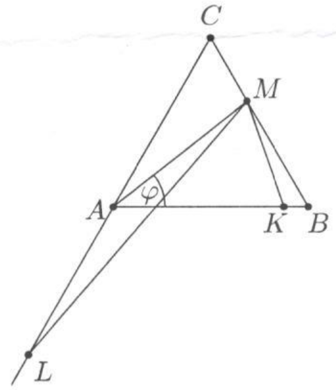
Четврти разред – Б категорија

1. Прва неједначина се своди на $x^2-4x+4+y^2-4y\leqslant 0$, тј. $(x-2)^2+(y-2)^2\leqslant 4=2^2$. Скуп тачака које ово испуњавају представљају круг с центром у $(2,2)$ и полупречника 2. Друга неједначина се своди на $y\leqslant\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$; дакле, посматрана фигура представља део малочас описаног круга који се налази испод графика функције $y=|x-2|$, тј. састоји се од два кружна одсечка (видети слику). Ако обележимо тачке $A(0,2)$, $B(2,0)$ и $C(4,2)$, сада лако видимо да се тражена површина може израчунати одузимајући од половине површине круга површину једнакокрако-правоуглог $\triangle ABC$ (чија је катета једнака $2\sqrt{2}$), тј. износи $\frac{\pi\cdot 2^2}{2}-\frac{(2\sqrt{2})^2}{2}=2\pi-4$.



Ок 2018 4Б 1

2. Имамо $24^a+2^b+2018^c\equiv 2^b+2^c\equiv(-1)^b+(-1)^c\pmod 3$ и $10^c+3^a+2018^b\equiv 1^c+2^b\equiv 1+(-1)^b\pmod 3$. Дакле, други број је дељив са 3 ако и само ако је b произвољан паран број. Сада, користећи да је b паран број, видимо да је први број дељив са 3 ако и само ако је c непаран број. Дакле, тражени услов испуњавају све тројке (a,b,c) где је a произвољан природан број не већи од 2018, b произвољан паран број не већи од 2018, и c произвољан непаран број не већи од 2018. Према томе, таквих тројки има $2018\cdot 1009\cdot 1009=2\cdot 1009^3$.



Ок 2018 4Б 3

3. *Прво решење.* Тражена једнакост се може трансформисати у $MB\cdot MC=(AB-AM)(AB+AM)$, тј. $\frac{MB}{AB-AM}=\frac{AB+AM}{MC}$. Означимо са K тачку на страници AB такву да важи $AK=AM$, а са L тачку на продужетку странице AC преко тачке A такву да важи $AL=AM$. Тада се жељена једнакост своди на $\frac{MB}{BK}=\frac{CL}{MC}$. Дакле, довољно је доказати сличност $\triangle MBK\sim\triangle LCM$.

Означимо $\measuredangle BAM=\varphi$. Тада имамо $\measuredangle MAC=60^\circ-\varphi$. Како је $\triangle ALM$ једнакокрак а његов спољашњи угао код темена A износи $60^\circ-\varphi$, следи $\measuredangle AML=\measuredangle ALM=30^\circ-\frac{\varphi}{2}$. У $\triangle MLC$ имамо још $\measuredangle LCM=60^\circ$, па налазимо и трећи угао: $\measuredangle LMC=180^\circ-(30^\circ-\frac{\varphi}{2})-60^\circ=90^\circ+\frac{\varphi}{2}$. Како је $\triangle AKM$ једнакокрак и угао наспрам основице износи φ, следи $\measuredangle AKM=\measuredangle AMK=90^\circ-\frac{\varphi}{2}$, одакле директно добијамо $\measuredangle BKM=90^\circ+\frac{\varphi}{2}$. Дакле, како за $\triangle MBK$ и $\triangle LCM$ важи $\measuredangle LMC=90^\circ+\frac{\varphi}{2}=\measuredangle BKM$ и $\measuredangle LCM=60^\circ=\measuredangle MBK$, следи $\triangle MBK\sim\triangle LCM$, што је и требало доказати.

Друго решење. Означимо $a=AB=AC=BC$. Применом косинусне теореме на $\triangle ABM$ добијамо: $AM^2=a^2+BM^2-2a\cdot BM\cos 60^\circ=a^2+BM^2-a\cdot BM$. Одатле имамо $a^2-AM^2=a\cdot BM-BM^2=BM\cdot(a-BM)=MB\cdot MC$, што је и требало доказати.

4. а) Одговор: није могуће.

Сви могући збирови који се могу појавити у врстама и колонама су следећи: $-3,-2,-1,0,1,2,3$. Како се, по услову задатка, мора јавити шест различитих збирова, то се тачно један од ових 7 бројева неће појавити као збир (а сви остали ће се појавити тачно по једном). Приметимо, даље, да рачунајући суму свих тих шест збирова који се појављују, заправо сваки број у таблици рачунамо по два пута (једном у његовој врсти, други пут у његовој колони), па та укупна сума мора бити паран број. Како на горњој листи могућих збирова имамо 4 непарна и 3 парна броја, да би сума неких 6 од тих 7 бројева била парна, следи да број који се не појављује мора бити паран.

Дакле, збир неке врсте или колоне мора бити једнак 3, и збир неке врсте или колоне мора бити једнак -3. Без умањења општости, нека је збир бројева у првој врсти једнак 3, тј. у првој врсти су све јединице. Сада, очигледно, ни у једној колони не можемо имати збир -3, па се збир -3 мора појавити у некој врсти; нека је то, без умањења општости, друга врста, тј. у другој врсти су сви бројеви једнаки -1. Дакле, у свакој колони засад имамо збир 0, па да би (након уписивања бројева у трећој врсти) сва ова три збира била различита, у трећој врсти морају бити различити бројеви, тј. бројеви 1, 0 и -1 (сваки по једном). Међутим, тада збир бројева у трећој врсти износи 0, а такође у једној колони имамо збир $1 + (-1) + 0 = 0$, контрадикција.

b) Одговор: могуће је. Приказујемо једно такво попуњавање таблице.

1	1	1	1
1	1	1	-1
1	0	-1	-1
0	-1	-1	-1

Ок 2018 4Б 4

5. Решења посматране једначине су нуле полинома $f(x) = x^3 - 3x - a$. Како је овај полином трећег степена, он има највише 3 реалне нуле. С обзиром на $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ и $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, а како је полином непрекидна функција, следи да $f(x)$ мора имати бар једну нулу. Извод ове функције је $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$, па како извод има нуле у тачкама $x = -1$ и $x = 1$, негативан је на интервалу $(-1, 1)$, а позитиван иначе, закључујемо да $f(x)$ расте на интервалима $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$, опада на $(-1, 1)$, има локални максимум за $x = -1$, а локални минимум за $x = 1$. На сваком од интервала $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ и $(1, \infty)$ полином $f(x)$ може имати највише по једну нулу, због монотоности на тим интервалима. Полином ће имати укупно три различите реалне нуле ако и само ако важи $f(-1) > 0$ и $f(1) < 0$ тј. $2 - a > 0$ и $-2 - a < 0$, имаће две различите реалне нуле (од тога једну двоструку) ако и само ако важи $f(-1) = 0$ или $f(1) = 0$, а иначе (тј. ако и само ако су вредности $f(-1)$ и $f(1)$ различите од 0 и међусобно истог знака) само једну реалну нулу.

Дакле, посматрана једначина има три различита реална решења за $a \in (-2, 2)$, два различита реална решења за $a \in \{-2, 2\}$, а само једно реално решење за $a \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.