Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

27. фебруар 2021.

Први разред – Б категорија

1. Доказати да је за сваку цифру a број $\overline{2a2a2a21}$ сложен.

2. (а) Дат је ненегативан реалан број a. У скупу реалних бројева решити једначину

$$2021(x+|x|)=|x+a|.$$

(б) Може ли се број a одабрати тако да дата једначина има тачно једно реално решење?

3. У једном реду биоскопа је $2n$ седишта. Треба означити n седишта на којима ће седење бити дозвољено, при чему правило дистанце налаже да два посетиоца не смеју да седе један до другог. На колико начина се то може учинити?

4. На страницама AB и AC троугла ABC дате су тачке D и E, редом. Дужи BE и CD секу се у тачки P. Ако је $CE=CP$ и $AE=2\cdot DP$, доказати да је D средиште странице AB.

5. Наћи све природне бројеве n за које је $n\cdot 2^{n-3}+3$ квадрат целог броја.

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

27. фебруар 2021.

Други разред – Б категорија

1. Дат је негативан цео број c. Решити неједначину

$$\frac{-2x^2+2x+c}{x^2-3|x|+2} > 0.$$

2. Ако су a, b и c дужине страница неког троугла, доказати неједнакост

$$2a^2+2b^2 > c^2.$$

3. У затвору има 29 затвореника, заведених под редним бројевима од 1 до 29. Свака два затвореника са збиром редних бројева 30 су у сукобу, док су остали парови у добрим односима. На колико начина се може одабрати затворска фудбалска екипа од 11 затвореника међу којима никоја два нису у сукобу?

4. Дат је једнакостраничан троугао ABC странице 2. Тачка D на страници BC и тачка E на страници AC су такве да је $CD + CE = 3$. Ако је M средиште странице AB, израчунати угао DME.

5. **(а)** Колико (позитивних) делилаца има број $2^{28} \cdot 5^{49}$, укључујући број 1 и њега самог?
(б) Колико има природних бројева дељивих са 2021 који имају тачно 2021 делилаца?

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

27. фебруар 2021.

Трећи разред – Б категорија

1. У једном реду биоскопа је 9 седишта. Треба означити 4 седишта на којима ће седење бити дозвољено, при чему правило дистанце налаже да два посетиоца не смеју да седе један до другог. На колико начина се то може учинити?

2. У зависности од реалног параметра a у скупу реалних бројева решити систем једначина:

$$\begin{cases} \ln x + \ln y^2 + \ln z^3 = 0 \\ \ln x^2 + \ln y^3 + \ln z = a \\ \ln x^3 + \ln y^5 + a\ln z = 2a-4. \end{cases}$$

3. Доказати да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи неједнакост

$$\cos^{2020} x + \sin^{2021} x + \cos^{2022} x \leqslant 2.$$

4. Дат је једнакостраничан троугао ABC странице 1. Тачка D на страници BC је таква да је $BD = \frac{2}{3}$, а тачка E на страници AC таква да је $\sphericalangle ADE = 30^\circ$. Израчунати дужину дужи AE.

5. Одредити све парове природних бројева (x, y) такве да је

$$x^2 - 4y^2 = x - 2y + 2^{2021}.$$

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

27. фебруар 2021.

Четврти разред – Б категорија

1. Доказати да је број $2020^{2020} + 2021^{2021}$ сложен.

2. Дато нам је шест различитих лопти и три кутије. У прву кутију може да стане једна лопта, у другу три, а у трећу пет. На колико начина се ове лопте могу распоредити у кутије?

3. Доказати да једначина $x^{2021} = \sin x$ има тачно три реална решења.

4. Тачке P, A, B и C су такве да је $PA = 1$, $PB = 2$, $PC = 4$ и $\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC < 90°$. Права AP сече описану кружницу троугла ABC у тачки D различитој од A и C. Одредити дужину дужи AD.

5. Колико реалних решења (x, y) има систем једначина

$$\begin{cases} x^2 = 8y - 4a \\ y^2 = x - a \end{cases}$$

у зависности од реалног параметра a?

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

4А.4. Приметимо да је

$$M = a^2 + 2ab - 3b^2 - 2a + 2b = (a-b)(a+3b-2),$$

при чему су оба чиниоца исте парности. Следи да $4 \mid M$ ако и само ако су a и b исте парности, док $7 \mid M$ ако и само ако је $a \equiv b$ или $a + 3b \equiv 2 \pmod 7$.

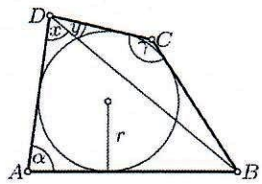
Претпоставимо да има седам бројева. Бар четири од њих су исте парности: рецимо, четири непарна. Бар два од та четири при дељењу са 7 дају остатке из једног од скупова $\{0,3,2\}$, $\{1,5,6\}$ и $\{4\}$. Како је $0+3\cdot3 \equiv 3+3\cdot2 \equiv 2+3\cdot0 \equiv 2$ и $1+3\cdot5 \equiv 5+3\cdot6 \equiv 6+3\cdot1 \equiv 2 \pmod 7$, та два броја можемо означити са a и b тако да је $a \equiv b$ или $a + 3b \equiv 2 \pmod 7$.

С друге стране, ако је дато шест бројева $0, 1, 4, 7, 8, 11$, ни за које a и b неће важити $a + 3b \equiv 2 \pmod 7$. Зато M може бити дељиво са 7 само ако је $a \equiv b \pmod 7$, али тада је $a \not\equiv b \pmod 2$, па опет $28 \nmid M$. Овим је показано да је одговор $k = 7$.

4А.5. Из тангентности четвороугла $ABCD$ следи $AB+CD = BC+DA$, тј. $DA = 3$. Ако означимо $\alpha = \sphericalangle DAB$, и $\gamma = \sphericalangle BCD$, из једнакости $P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{CBD}$ добијамо $\frac{1}{2}(4+3+2+3)r = \frac{1}{2}(3\cdot 4\sin\alpha + 3\cdot 2\sin\gamma)$, одакле је $r = \sin\alpha + \frac{1}{2}\sin\gamma$.

Даље, косинусна теорема у троугловима ABD и CBD нам даје $BD^2 = 25 - 24\cos\alpha = 13 - 12\cos\gamma$, одакле је $\cos\gamma = 2\cos\alpha - 1$. Одавде имамо $\sin\gamma = 2\sqrt{\cos\alpha - \cos^2\alpha}$, па је најзад

$$r = \sin\alpha + \sqrt{\cos\alpha - \cos^2\alpha}.$$



Ако је $r > \sqrt{2}$, онда је $\cos\alpha - \cos^2\alpha > (\sqrt{2} - \sin\alpha)^2$, што се своди на $2\sqrt{2}\sin\alpha + \cos\alpha > 3$, а ово је еквивалентно немогућој неједнакости $\sin(\alpha + \varphi) > 1$, где је $\varphi = \arcsin\frac{1}{3}$.

С друге стране, услов $r > 1$ се своди на $1 - \sin\alpha < \sqrt{\cos\alpha - \cos^2\alpha}$, што се квадрирањем своди на $2 - \cos\alpha < 2\sin\alpha$ и даље на $\cos\alpha(4 - 5\cos\alpha) > 0$. Одмах имамо $\cos\alpha = \frac{1+\cos\gamma}{2} > 0$, па остаје да се докаже да је $\cos\alpha < \frac{4}{5}$. Означимо $x = \sphericalangle ADB$ и $y = \sphericalangle CDB$. По косинусној теореми у троугловима ABD и CBD имамо $\cos x + \cos y = \frac{BD^2-7}{6BD} + \frac{BD^2-5}{4BD} = \frac{5BD^2-29}{12BD}$, па како је $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} > 0$, следи $BD^2 > \frac{29}{5}$. Сада косинусна теорема у троуглу ABD даје $\cos\alpha = \frac{25-BD^2}{24} < \frac{25-\frac{29}{5}}{24} = \frac{4}{5}$.

1Б.1. Како је збир цифара датог броја једнак $9 + 3a$, што је дељиво са 3, дати број је и сам дељив са 3, а већи је од 3, што значи да је сложен.

1Б.2. (а) Разликујемо два случаја (који не морају бити дисјунктни).

- Ако је $x \leqslant 0$, онда је $x + |x| = x - x = 0$, па једначина постаје $|x + a| = 0$, тј. $x = -a$.
- Ако је $x \geqslant 0$, онда је $x + |x| = 2x$ и $|x + a| = x + a$ (јер је $a \geqslant 0$), па једначина постаје $4042x = x + a$ и има решење $x = \frac{a}{4041}$.

Све у свему, решења једначине су $x = -a$ и $x = \frac{a}{4041}$.

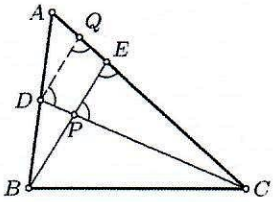
(б) По делу (а), дата једначина има само једно решење ако је $-a = \frac{a}{4041}$, тј. за $a = 0$.

1Б.3. Ако прво или последње место није означено, мора се означити свако друго седиште, па тада постоје само две могућности.

Нека је сада означено и прво и последње седиште. Имамо n означених седишта и између њих $n-1$ „празнина", од којих се једна састоји од два празна седишта, а све остале од по једног. Позиција празнине са два седишта може се одабрати на $n-1$ начина, што даје $n-1$ могућности.

Дакле, укупно има $n+1$ могућности.

1Б.4. Нека је Q тачка на дужи AE таква да је $DQ \parallel PE$. Пошто је троугао CPE једнакокрак, важи $\sphericalangle CDQ = \sphericalangle CPE = \sphericalangle CEP = \sphericalangle CQD$, па је $DQEP$ једнакокраки трапез; отуда је $QE = DP = \frac{1}{2}AE$. Дакле, Q је средиште дужи AE. Следи да је DQ средња линија у троуглу ABE, што значи да је D средиште дужи AB.



1Б.5. Једино решење је $n = 2$: тада је $n \cdot 2^{n-3} + 3 = 2^2$. Директном провером налазимо да за $n \leqslant 4$ других решења нема.

Претпоставимо да је $n \geqslant 5$ и $n \cdot 2^{n-3} + 3 = x^2$. Број x мора бити непаран, а тада су $x+1$ и $x-1$ парни, па је x^2-1 дељиво са 4. Међутим, $x^2 - 1 = n \cdot 2^{n-3} + 2$ очигледно није дељиво са 4, па у овом случају нема решења.

2Б.1. Бројилац $-2x^2 + 2x + c$ је негативан за свако x. Заиста, пошто је $c \leqslant -1$, дискриминанта бројиоца је $4 + 8c < 0$. Према томе, x је решење дате неједначине ако и само ако је и именилац $x^2 - 3|x| + 2$ негативан.

Остаје да испитамо именилац: он је једнак $|x|^2 - 3|x| + 2 = (|x|-1)(|x|-2)$ и негативан је када је $1 < |x| < 2$, тј. за $x \in (-2,-1) \cup (1,2)$. Овај скуп је решење неједначине.

2Б.2. Пошто је $c < a + b$, довољно је доказати неједнакост $2a^2 + 2b^2 \geqslant (a+b)^2$. Међутим, она је тривијална:

$$2a^2 + 2b^2 - (a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geqslant 0.$$

Напомена. Дужина тежишне дужи која одговара страници a је $t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$. Тако је једнакост из задатка заправо еквивалентна неједнакости $t_a^2 \geqslant 0$.

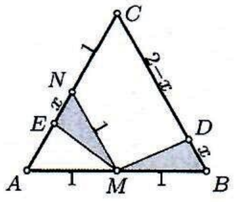
2Б.3. Из сваког од парова $\{1,29\}, \{2,28\}, \ldots, \{14,16\}$ може се одабрати највише по један играч.

(1°) Ако је затвореник број 15 у екипи, треба изабрати још 10 парова и из сваког од тих парова по једног играча. Парови се могу одабрати на $\binom{14}{10}$ начина, а играчи из њих на 2^{10} начина. То је укупно $2^{10}\binom{14}{10}$ начина.

(2°) Ако затвореник 15 није у екипи, треба одабрати 11 парова и из сваког пара по једног играча, а то се може учинити на $2^{11}\binom{14}{11}$ начина.

Укупно има $2^{10}\binom{14}{10} + 2^{11}\binom{14}{11} = 1\,770\,496$ начина.

2Б.4. Означимо $BD = x$ и посматрајмо средиште N странице AC. Тада је $CD = 2 - x$, $CE = 1 + x$ и $NE = x$. При томе је $\sphericalangle MBD = \sphericalangle MNE = 60°$ и $MB = MN = 1$, одакле следи да су троуглови MBD и MNE подударни. Закључујемо да је $\sphericalangle BMD = \sphericalangle NME$ и, најзад, $\sphericalangle DME = \sphericalangle BMN = 120°$.



2Б.5. **(а)** Сваки делилац d броја $2^{28} \cdot 5^{49}$ је облика $d = 2^x \cdot 5^y$, где је $0 \leqslant x \leqslant 28$ и $0 \leqslant y \leqslant 49$. Експонент x се може одабрати на 29 начина, а експонент y на 50 начина. Следи да се број d може одабрати на $29 \cdot 50 = 1450$ начина, тј. одговор је 1450.

(б) Подсетимо се познате формуле за број делилаца $\tau(n)$ природног броја $n = p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k}$, где су $p_1, \ldots, p_k$ различити прости, а $r_1, \ldots, r_k$ природни бројеви:

$$\tau(n) = (r_1+1)(r_2+1)\cdots(r_k+1).$$

Број n је дељив са $2021 = 43 \cdot 47$. Ако је његова канонска факторизација $n = 43^a \cdot 47^b \cdot p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k}$, онда он има $\tau(n) = (a+1)(b+1)(r_1+1)\cdots(r_k+1) = 2021 = 43 \cdot 47$ делилаца. Како су сви чиниоци $a+1$, $b+1$ и r_i+1 већи од 1, ово је могуће само ако је $\{a,b\} = \{42,46\}$ и $k = 0$. Дакле, тражених бројева n има само два: $43^{46} \cdot 47^{42}$ и $43^{42} \cdot 47^{46}$.

Напомена. Дајемо доказ формуле за $\tau(n)$. Сваки делилац броја n има облик $d = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k}$, где је $0 \leqslant s_i \leqslant r_i$ за свако $i = 1, \ldots, k$. Сваки од експонената s_i може се изабрати на $r_i + 1$ начина. То нам даје укупно $\tau(n) = (r_1 + 1) \cdots (r_k + 1)$ могућности за делилац d.

3Б.1. Нумеришући седишта бројевима од 1 до 9, можемо ручно да пребројимо дозвољене распореде: 1357, 1358, 1359, 1368, 1369, 1379; 1468, 1469, 1479; 1579; 2468, 2469, 2479; 2579; 3579. Укупно 15 могућности.

Друго решење. Урадићемо општији задатак, у коме у реду од n седишта означавамо k тако да не буду два суседна означена.

Пошто се десно од сваког означеног седишта мора налазити једно празно, додајмо празну $(n+1)$-ву столицу на крај реда. Овако се ред састоји од k парова седишта (лево означено и десно празно) и $n + 1 - 2k$ празних седошта - укупно $n + 1 - k$ „објеката" које треба распоредити, а то се може учинити на $\binom{n+1-k}{k}$ начина.

3Б.2. Дати систем је линеаран по $X = \ln x$, $Y = \ln y$ и $Z = \ln z$. Решавамо га Гаусовим методом. Са $J_a + r \cdot J_b$ означавамо додавање a-тој једначини b-те помножене са r:

$$\begin{cases} X + 2Y + 3Z = 0 \\ 2X + 3Y + \ \ Z = a \\ 3X + 5Y + aZ = 2a - 4 \end{cases} \xrightarrow[J_3 - J_2]{J_2 - 2J_1,\ J_3 - 3J_1} \begin{cases} X + 2Y + \quad 3Z = 0 \\ \quad -Y - \quad 5Z = a \\ \qquad (a-4)Z = a - 4. \end{cases}$$

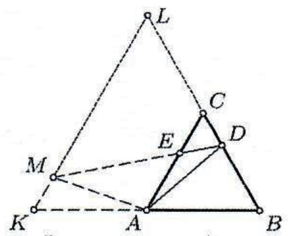
Ако је $a \neq 4$, следи $Z = 1$, а одатле $Y = -a - 5$ и $X = 2a + 7$, тј. $(x, y, z) = (e^{2a+7}, e^{-a-5}, e)$.

Ако је $a = 4$, трећа једначина постаје $0 = 0$, па узимањем $Z = t$ добијамо $Y = -5t - 4$ и $X = 7t + 8$, тј. $(x, y, z) = (e^{7t+8}, e^{-5t-4}, e^t)$ за произвољно $t \in \mathbb{R}$.

3Б.3. Пошто је $\cos x \leqslant 1$ и $\sin x \leqslant 1$, важи

$$\cos^{2020} x + \sin^{2021} x + \cos^{2022} x \leqslant \cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x = 1 + \cos^2 x \leqslant 2.$$

3Б.4. Нека су K и L тачке такве да су A и C редом средишта дужи BK и BL. Одаберимо тачку M на дужи KL тако да је $KM = \frac{1}{3} = CD$. Имамо $CD = \frac{1}{3}$, $DL = \frac{4}{3}$ и $ML = \frac{5}{3}$.



Како је $AK = AC = 1$ и $\sphericalangle AKM = \sphericalangle ACD = 60°$, троуглови AKM и ACD су подударни. Следи да је $AM = AD$ и $\sphericalangle KAM = \sphericalangle CAD$, тј. $\sphericalangle MAD = \sphericalangle KAC = 120°$. То значи да је троугао MAD једнакокрак, па је $\sphericalangle ADM = 30° = \sphericalangle ADE$.

Сада на основу Талесове теореме имамо $\frac{CE}{LM} = \frac{DC}{DL} = \frac{1}{4}$, па је $CE = \frac{5}{12}$, тј. $AE = \frac{7}{12}$.

Друго решење. Нека је F подножје нормале из тачке D на AC. Тада је $CF = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{6}$, $AF = \frac{5}{6}$ и $DF = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Ако означимо $FE = x$, имамо $\operatorname{tg} \sphericalangle ADF = \frac{AF}{DF} = \frac{5}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{tg} \sphericalangle EDF = \frac{EF}{DF} = \frac{6x}{\sqrt{3}}$ и

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} 30° = \operatorname{tg} \sphericalangle ADE = \operatorname{tg}(\sphericalangle ADF - \sphericalangle EDF) = \frac{\frac{5}{\sqrt{3}} - \frac{6x}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{6x}{\sqrt{3}}} = \frac{5 - 6x}{(1 + 10x)\sqrt{3}}.$$

Следи да је $5 - 6x = 1 + 10x$, тј. $x = \frac{1}{4}$, тако да је $AE = AF - x = \frac{7}{12}$.

3Б.5. Пошто је $x^2 - 4y^2 = (x - 2y)(x + 2y)$, дата једначина се може записати као

$$(x - 2y)(x + 2y - 1) = 2^{2021}.$$

Следи да је $x + 2y - 1 = 2^a$ и $x - 2y = 2^b$, где су $a > b \geqslant 0$ цели бројеви и $a + b = 2021$. Међутим, $2^a + 2^b = 2x - 1$ је непаран број, а дељив је са 2^b, па мора бити $b = 0$. Тада је $a = 2021$, одакле коначно добијамо $x = 2^{2020} + 1$ и $y = 2^{2019}$.

4Б.1. Пошто је $2020 \equiv 1$ и $2021 \equiv -1 \pmod 3$, важи $2020^{2020} + 2021^{2021} \equiv 1^{2020} + (-1)^{2021} = 1 + (-1) = 0$. Следи да је дати број дељив са 3, а већи је од 3, па је сложен.

4Б.2. Разликоваћемо два случаја.

(1°) Прва кутија је празна. Тада друга кутија садржи једну, две или три куглице. Тако се садржај друге кутије (а самим тим и треће) може одабрати на $\binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} = 6 + 15 + 20 = 41$ начин.

(2°) Прва кутија садржи једну куглицу. Ова куглица се може изабрати на 6 начина. Друга кутија садржи ниједну, једну, две или три куглице, па се њен садржај може одабрати на $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 26$ начина.

Према томе, одговор је $41 + 6 \cdot 26 = 197$.

4Б.3. Једно решење је $x = 0$. За $x \neq 0$ дата једначина је еквивалентна са $f(x) = 1$, где је $f(x) = \frac{\sin x}{x^{2021}}$. Функција f је парна, па ако је x решење једначине, онда је то и $-x$. Зато је довољно показати да на интервалу $(0, \infty)$ једначина има јединствено решење.

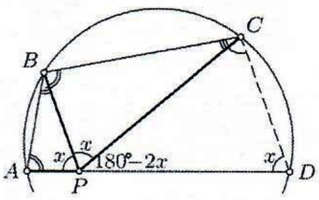
Јасно је да је $f(x) < 1$ за $x > 1$. С друге стране, за $x \in (0, 1]$ важи $x < \operatorname{tg} x < 2021 \operatorname{tg} x$, па је

$$f'(x) = \frac{(x - 2021 \operatorname{tg} x)\cos x}{x^{2022}} < 0.$$

То значи да је функција f строго опадајућа на интервалу $(0, 1]$. При томе је $f(\frac{\pi}{6}) < 1 < f(1)$, те на том интервалу једначина $f(x) = 1$ заиста има тачно једно решење.

Напомена. Осим $x = 0$, решења дате једначине су приближно $x = \pm 0{,}99991457$.

4Б.4. Означимо $\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = x$. Тада је $\sphericalangle CPD = 180^\circ - 2x$.



Даље, пошто је $\frac{PA}{PB} = \frac{PB}{PC} = \frac{1}{2}$, троуглови APB и BPC су слични, па је $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABP + \sphericalangle PBC = \sphericalangle ABP + \sphericalangle PAB = 180^\circ - x$ и одатле $\sphericalangle ADC = x$, тј. $\sphericalangle PDC = x$. Одавде такође налазимо $\sphericalangle PCD = 180^\circ - \sphericalangle CPD - \sphericalangle PDC = x$. Следи да је троугао PCD једнакокрак, па је $PD = PC = 4$ и, најзад, $AD = 5$.

4Б.5. Множењем друге једнашине са 4 и одузимањем од прве добија се $x^2 - 4y^2 = 8y - 4x$, тј. $(x - 2y)(x + 2y) = -4(x - 2y)$.

(1°) Ако је $x = 2y$, систем се своди на једначину $y^2 - 2y + a = 0$, тј. $(y - 1)^2 = 1 - a$. За $a < 1$, $a = 1$ и $a > 1$ редом имамо два, једно, односно ниједно решење.

(2°) Ако је $x + 2y = -4$, онда скраћивањем следи $x + 2y = -4$, тј. $x = -2y - 4$ и $y^2 = -2y - 4 - a$. Одавде је $(y + 1)^2 = -3 - a$, док је $x = y^2 + a$. За $a < -3$, $a = -3$ и $a > -3$ редом имамо два, једно, односно ниједно решење.

Једино решење које се може појавити у оба случаја је $(x, y) = (-2, -1)$, а тада је $a = x - y^2 = -3$. Све у свему, систем има четири решења за $a < -3$, два за $-3 \leqslant a < 1$, једно за $a = 1$ и ниједно за $a > 1$.

ПРВИ РАЗРЕД

	УЧЕНИК	ШКОЛА	1.	2.	3.	4.	5.	Σ	ПЛАСМАН
1.	Гагић Милица	Гимназија „Урош Предић“ Панчево	20	20	20	2	10	72	I
2.	Васић Вељко	Гимназија „Урош Предић“ Панчево	20	20	20	2	5	67	II
3.	Милтеновић Немања	Гимназија „Урош Предић“ Панчево	20	20	5	2	4	51	III
4.	Вуксић Немања	ЕТШ „Никола Тесла“ Панчево	20	20	2	2	3	47	П
5.	Радмиловић Љубодраг	Гимназија „Урош Предић“ Панчево	20	20	5	0	1	46	П
6.	Димић Стефан	ЕТШ „Никола Тесла“ Панчево	0	3	0	0	0	3	
7.	Златановић Катарина	Гимназија „Урош Предић“ Панчево	/	/	/	/	/	/	/

ДРУГИ РАЗРЕД

	УЧЕНИК	ШКОЛА	1.	2.	3.	4.	5.	Σ	ПЛАСМАН
1.	Мучибабић Дамјан	Гимназија „Урош Предић“ Панчево	20	20	10	20	10	80	I
2.	Серафимовић Илија	Гимназија „Урош Предић“ Панчево	20	20	10	5	20	75	II
3.	Француски Петар	Гимназија „Борислав Петров Браца“ Вршац	20	20	0	20	10	70	III
4.	Слијепчевић Михајло	Гимназија „Урош Предић“ Панчево	20	20	10	0	10	60	П
5.	Ђерић Лана	Гимназија „Урош Предић“ Панчево	15	20	0	20	0	55	П
6.	Катић Александар	Гимназија „Урош Предић“ Панчево	15	20	0	0	15	50	
7.	Стефановић Јована	Гимназија „Урош Предић“ Панчево	5	5	10	5	0	25	
8.	Минић Дамјан	Гимназија „Урош Предић“ Панчево	0	5	0	5	0	10	
8.	Величковић Вук	Гимназија „Борислав Петров Браца“ Вршац	0	5	0	5	0	10	
10.	Стојисављевић Мила	Гимназија „Борислав Петров Браца“ Вршац	/	/	/	/	/	/	

ТРЕЋИ РАЗРЕД

	УЧЕНИК	ШКОЛА	1.	2.	3.	4.	5.	Σ	ПЛАСМАН
1.	Тршек Мина	Гимназија „Урош Предић“ Панчево	20	0	20	10	10	60	I
2.	Милованов Марко	ЕТШ „Никола Тесла“ Панчево	0	15	5	5	20	45	II
3.	Нешковић Наташа	Гимназија „Урош Предић“ Панчево	20	0	0	10	10	40	III
3.	Ранковић Филип	Гимназија „Урош Предић“ Панчево	20	0	0	0	20	40	III
5.	Трајковић Лука	ЕТШ „Никола Тесла“ Панчево	5	0	20	0	10	35	
5.	Влаховић Данило	Гимназија „Борислав Петров Браца“ Вршац	0	10	20	5	0	35	
5.	Дакић Душан	Гимназија „Борислав Петров Браца“ Вршац	0	0	20	10	5	35	
5.	Ђошић Милош	ЕТШ „Никола Тесла“ Панчево	20	0	5	0	10	35	
9.	Павловић Дејан	ЕТШ „Никола Тесла“ Панчево	20	0	0	5	0	25	
9.	Цуканић Вељко	ЕТШ „Никола Тесла“ Панчево	5	0	5	5	10	25	
9.	Стојановић Михајло	Гимназија „Борислав Петров Браца“ Вршац	20	0	0	5	0	25	
12.	Томановић Ања	Гимназија „Урош Предић“ Панчево	10	0	0	0	10	20	
13.	Пешко Јана	Гимназија „Урош Предић“ Панчево	/	/	/	/	/	/	

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

	УЧЕНИК	ШКОЛА	1.	2.	3.	4.	5.	Σ	ПЛАСМАН
1.	Живковић Виктор	Школски центар „Никола Тесла“ Вршац	20	20	20	5	3	68	I
2.	Ђуретановић Давид	Гимназија „Урош Предић“ Панчево	20	15	20	0	0	55	II
3.	Чакован Наталија	Гимназија „Урош Предић“ Панчево	0	20	20	0	10	50	III
4.	Јанковић Даница	Гимназија „Урош Предић“ Панчево	0	15	10	0	15	40	П
5.	Алексић Андреа	Гимназија „Урош Предић“ Панчево	0	20	10	2	0	32	
6.	Милтеновић Филип	Гимназија „Урош Предић“ Панчево	0	20	3	2	0	25	
7.	Ракић Светлана	Гимназија „Урош Предић“ Панчево	0	15	0	0	5	20	
8.	Јоковић Матеја	Гимназија „Урош Предић“ Панчево	3	0	3	2	5	13	
9.	Антић Ана	ЕТШ „Никола Тесла“ Панчево	0	2	0	0	0	2	