Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20.02.2022.

Први разред – Б категорија

1. За $m, n \in \mathbb{N}$ нека је $m\,\rho\, n$ ако и само ако је mn потпун квадрат. Испитати да ли је релација ρ рефлексивна, симетрична, антисиметрична или транзитивна. Да ли је ρ релација еквиваленције? Да ли је ρ релација поретка?

2. Одредити све природне бројеве n и просте бројеве p за које важи

$$n^2 + p^4 = 100p^2 + 1.$$

3. Над странама квадрата странице a, у спољашњости квадрата, конструисани су међусобно подударни трапези, тако да темена тих трапеза чине темена правилног дванаестоугла. Ако је површина добијеног дванаестоугла 2022, одредити a.

4. Тамара има 8 различитих креда у боји. Она на табли записује све могуће датуме који се могу записати помоћу пет двојки и три нуле (један такав датум је и данас – 20.02.2022.) и притом сваку цифру записује другом бојом. Одредити укупан број различитих датума које Тамара може записати на табли, ако је одређено којих 5 боја ће се користити за записивање двојки, а самим тим и које 3 боје ће се користити за записивање нула. (При писању датума користе се све цифре, при чему се приликом писања редног броја дана и месеца, али не и године, записују и водеће нуле, ако оне постоје. Датуми $a_1a_2.a_3a_4.a_5a_6a_7a_8.$ и $b_1b_2.b_3b_4.b_5b_6b_7b_8.$ су различити ако за било које $i \in \{1, \ldots, 8\}$ цифре a_i и b_i нису исте или нису обојене истом бојом.)

5. За $a, b \in \mathbb{R}$ нека је $a * b = a + b$, $a \oplus b = \min\{a, b\} = \begin{cases} a, & \text{ако је } a \leqslant b \\ b, & \text{ако је } a > b \end{cases}$ и нека операција $*$ има приоритет у односу на операцију $\oplus$. У зависности од $c \in \mathbb{R}$ скицирати график функције

$$f(x) = x * x \oplus 3 * x \oplus c.$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20.02.2022.

Други разред – Б категорија

1. Одредити колико има четвороцифрених бројева у чијем се декадном запису појављују само цифре 1, 2 и 3 (не обавезно све три), а тако да се највећа цифра не појављује више од два пута.

2. Нека је D тачка странице AB троугла ABC. Симетрале $\sphericalangle ADC$ и $\sphericalangle CDB$ секу странице AC и BC у тачкама M и N, редом. Симетрале $\sphericalangle CAB$ и $\sphericalangle ABC$ секу дужи DM и DN у тачкама K и L, редом. Доказати да је $CM = CN$ ако и само ако су MN и KL паралелне.

3. Нека је $z \neq -1$ комплексан број. Доказати да је $z = \dfrac{1+ir}{1-ir}$ за неко $r \in \mathbb{R}$ ако и само ако је $|z| = 1$.

4. Одредити све $a \in \mathbb{R}$, такве да су

$$f(x) = ax^2 - 2(a+1)x - 1 \quad \text{и} \quad g(x) = (4a+1)x^2 - 2(2a+1)x - 2$$

квадратне функције, при чему $f(x)$ има две различите реалне нуле и графици тих функција имају тачно једну заједничку тачку.

5. Нека је $n \geqslant 2$ природан број. Одредити последњу цифру броја $2^{2^n} + 1$ у декадном запису.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20.02.2022.

Трећи разред – Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\frac{3^{x+1}+5^{x-1}}{5^x-3^x} \geqslant 2.$$

2. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$y = 4x^3+12x^2+12x+3, \quad x = 4y^3+12y^2+12y+3.$$

3. Нека су $R, a > 0$. У лопту полупречника R уписана је права купа висине $\frac{3R}{2}$. На којој удаљености од врха купе треба конструисати раван паралелну основи купе, тако да разлика између површине пресека те равни и лопте и површине пресека те равни и купе буде једнака $a^2\pi$?

4. Природни бројеви од 1 до 360 подељени су у 9 подскупова суседних бројева:

$$A_1 = \{1, 2, \dots 40\}, A_2 = \{41, 42, \dots 80\}, \dots, A_9 = \{321, 322, \dots 360\}.$$

Нека је S_i збир бројева у A_i, за $1 \leqslant i \leqslant 9$. Да ли је могуће распоредити бројеве $S_1, S_2 \dots, S_9$ у квадрат 3×3, тако да он буде магичан? (Квадрат 3×3 је магичан ако је збир бројева уписаних у поља сваке његове врсте, сваке његове колоне и обе његове дијагонале исти.)

5. У скупу природних бројева решити једначину

$$x^{20}+2^{y^2+y} = 2022^z.$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20.02.2022.

Четврти разред – Б категорија

1. Нека је

$$x = \frac{(1+i)^{2022}}{(1-i)^{2010}}, \quad y = 3^{\log_9 25} \quad \text{и} \quad z = \frac{27\arcsin\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{2}}.$$

Ако је $n = xyz$, одредити број делилаца броја n.

2. Одредити све природне бројеве n, такве да је број $n^2 + n + 2024$ дељив са 2022.

3. Одредити све $p \in \mathbb{R}$ за које једначина

$$8 + 4p(x-1) = \big(x - |x|\big)x$$

има јединствено решење у скупу реалних бројева.

4. У тетраедру $SABC$ је $SA \perp SB$, а подножје нормале из S на раван ABC је ортоцентар $\triangle ABC$. Доказати да важи

$$\big(AB + BC + CA\big)^2 \leqslant 6 \cdot \big(AS^2 + BS^2 + CS^2\big).$$

5. Бројеви од 1 до 8 уписани су у темена осмоугла $A_1A_2\ldots A_8$ (сваки број у једно теме и у свако теме један број) и за сваку страницу осмоугла и дијагонале A_1A_5, A_2A_6, A_3A_7 и A_4A_8 је израчунат збир бројева уписаних у крајевима те дужи. Нека је m најмањи од добијених бројева.

(а) Одредити највећу могућу вредност броја m.

(б) Одредити укупан број начина на који се бројеви од 1 до 8 могу уписати у темена осмоугла, тако да вредност броја m буде вредност одређена у делу (а).

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – Б категорија

1. Ако је $m \in \mathbb{N}$, онда је m^2 потпун квадрат, тј. $m\,\rho\,m$, па је релација ρ рефлексивна. Ако су $m, n \in \mathbb{N}$ такви да је $m\,\rho\,n$, онда је mn потпун квадрат, па је то и nm, односно важи $n\,\rho\,m$, те је ρ симетрична релација. Како је $18\,\rho\,2$ и $2\,\rho\,18$, а притом је $2 \neq 18$, следи да ρ није антисиметрична релација. Ако су $m, n, k \in \mathbb{N}$ такви да је $m\,\rho\,n$ и $n\,\rho\,k$, онда је $mn = p^2$ и $nk = q^2$ за неке $p, q \in \mathbb{N}$, па је $mk = \left(\frac{pq}{n}\right)^2$. Притом, како је $mk \in \mathbb{N}$, следи $\frac{pq}{n} \in \mathbb{N}$, па је $m\,\rho\,k$, тј. ρ је транзитивна релација.

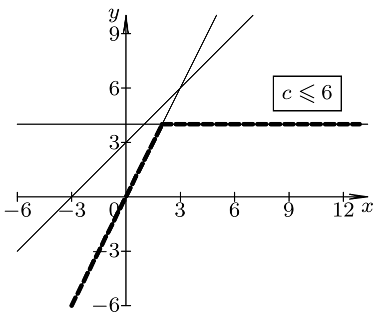
Из добијеног следи да је ρ релација еквиваленције, а није релација поретка.

2. Из наведеног услова је $n^2 - 1 = 100p^2 - p^4$, односно $(n-1)(n+1) = p^2(10-p)(10+p)$. Следи $p \leqslant 10$, па како је p прост, мора бити $p \in \{2, 3, 5, 7\}$. За те вредности p, добија се $n^2 = 385$, $n^2 = 820$, $n^2 = 1\,876$, $n^2 = 2\,500 = 50^2$, редом, од којих прве три немају решења у скупу природних бројева. Дакле, једино решење наведене једначине је $(n, p) = (50, 7)$.

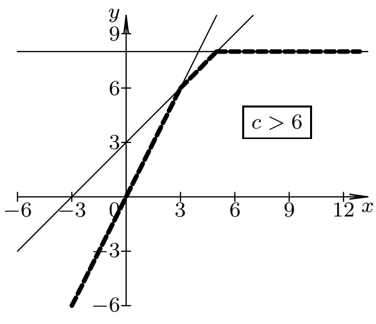
3. Нека је R полупречник описаног круга уоченог дванаестоугла. Тај круг је и описани круг квадрата, па је $a\sqrt{2} = 2R$, односно $a = R\sqrt{2}$. Уочени дванаестоугао се састоји од 12 једнакокраких труглова, дужине крака R, а угла између крака једнаког $30°$. Ако је OAB један такав троугао, $OA = OB = R$, $\sphericalangle BOA = 30°$ и D подножје нормале из B на OA, онда је $\triangle BOD$ половина једнакостраничног троугла странице R (важи $\sphericalangle DBO = 60°$, $\sphericalangle ODB = 90°$), па је $BD = \frac{R}{2}$. Следи да је површина $\triangle BOA$ једнака $\frac{R \cdot \frac{R}{2}}{2} = \frac{R^2}{4}$, па је површина дванаестоугла једнака $12 \cdot \frac{R^2}{4} = 3R^2$. Следи $2022 = 3R^2$, одакле је $R^2 = 674$, па је $a = R\sqrt{2} = 2\sqrt{337}$.

4. Нека су d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 боје које се користе зе бојење двојки, а n_1, n_2, n_3 боје које се користе за бојење нула. По условима, месец мора бити фебруар, а прва цифра године мора бити 2 (тј. датум је облика $a_1a_2.02.2a_6a_7a_8.$). Међу преосталим цифрама су 2 нуле и 3 двојке, уз једино ограничење при њиховом распоређивању да не може бити $a_1 = a_2 = 0$, па се распоред цифара може извршити на $\binom{5}{2} - 1$ начина. Након тога се расподела боја d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 на цифре 2 врши на $5!$ начина, а, независно од тога, расподела боја n_1, n_2, n_3 на цифре 0 на $3!$ начина. Следи да је број различитих датума $5! \cdot 3! \cdot \left(\binom{5}{2} - 1\right) = 6\,480$.

5. Важи $f(x) = 2x \oplus (x+3) \oplus c = \min\{2x, x+3, c\}$. Праве $y = 2x$ и $y = x+3$ се секу у тачки $(3, 6)$ и важи $\min\{2x, x+3\} = \begin{cases} 2x, & \text{ако је } x < 3 \\ x+3, & \text{ако је } x \geqslant 3 \end{cases}$, $\min\{2x, c\} = \begin{cases} 2x, & \text{ако је } x < \frac{c}{2} \\ c, & \text{ако је } x \geqslant \frac{c}{2} \end{cases}$ и



Окр–22–1Б5-1



Окр–22–1Б5-2

$\min\{x+3, c\} = \begin{cases} x+3, & \text{ако је } x < c-3 \\ c, & \text{ако је } x \geqslant c-3 \end{cases}$. Следи да је

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ако је } x \in (-\infty, \frac{c}{2}) \\ c, & \text{ако је } x \in [\frac{c}{2}, \infty) \end{cases}, \text{ уколико је } c \leqslant 6,$$

$$\text{односно } f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ако је } x \in (-\infty, 3) \\ x+3, & \text{ако је } x \in [3, c-3) \\ c, & \text{ако је } x \in [c-3, \infty) \end{cases}, \text{ уколико је } c > 6.$$

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Други разред – Б категорија

1. Највећа цифра таквог четвороцифреног броја не може бити 1, пошто би онда она морала да се појави 4 пута. Уколико је највећа цифра таквог броја 2, она се појављује 1 или 2 пута, а преостале цифре су једнаке 1, па таквих бројева има $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}=10$. Уколико је највећа цифра таквог броја 3, она се појављује 1 или 2 пута, а преостале цифре су или 1 или 2 и притом нема ограничења приликом избора да ли је у питању цифра 1 или 2, па таквих бројева има $\binom{4}{1}\cdot 2^3+\binom{4}{2}\cdot 2^2=56$. Дакле, бројева са наведеним особинама има $10+56=66$ (Тангента, М1605).

2. Тачке K и L, редом, су центри уписаних кругова у $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$, па су CK и CL симетрале $\sphericalangle DCA$ и $\sphericalangle BCD$, редом. Следи $\frac{CD}{CM}=\frac{DK}{KM}$ и $\frac{CD}{CN}=\frac{DL}{LN}$, па је $CM=CN$ ако и само ако је $\frac{DK}{KM}=\frac{DL}{LN}$, тј. ако и само ако је $KL \parallel MN$ (Тангента, М1436).

3. Ако је $z=\frac{1+ir}{1-ir}$, за $r\in\mathbb{R}$, онда је $\overline{1+ir}=1-ir\neq 0$, па је $|1+ir|=|1-ir|\neq 0$, одакле је $|z|=1$. Ако је $z=\frac{1+ir}{1-ir}$ и $z\neq -1$, онда је $r=\frac{1}{i}\cdot\frac{z-1}{z+1}$, па ако је $|z|=1$, онда је $\overline{z}=\frac{1}{z}$, одакле је $\overline{r}=-\frac{1}{i}\cdot\frac{\frac{1}{z}-1}{\frac{1}{z}+1}=\frac{1}{i}\cdot\frac{z-1}{z+1}=r$, односно $r\in\mathbb{R}$ (Тангента, М1692).

4. Како квадратна функција $f(x)$ има две различите реалне нуле, њена дискриминанта D_f је позитивна, тј. важи $D_f=4(a+1)^2+4a=4a^2+12a+4>0$. Тачка (x_0,y_0) је заједничка тачка графика функција $f(x)$ и $g(x)$ ако и само ако је $y_0=f(x_0)=g(x_0)$, тј. ако и само ако је x_0 реална нула функције $g(x)-f(x)=(3a+1)x^2-2ax-1$. Ако је $a\neq-\frac{1}{3}$, то је квадратна функција чија је дискриминанта $4a^2+4(3a+1)=4a^2+12a+4=D_f>0$, па она има две различите реалне нуле, што по услову задатка није случај. Ако је $a=-\frac{1}{3}$, онда је $D_f=\frac{4}{9}>0$, па $f(x)$ има две различите реалне нуле, док је $g(x)-f(x)=\frac{2}{3}\cdot x-1$, па графици функција $f(x)$ и $g(x)$ имају тачно једну заједничку тачку. Дакле, једина таква вредност је $a=-\frac{1}{3}$.

5. За $n\geqslant 2$ важи $4\mid 2^n$, па како је $2^4\equiv 1 \pmod 5$, следи $2^{2^n}+1\equiv 2 \pmod 5$. Како је и $2^{2^n}+1\equiv 1 \pmod 2$, следи $2^{2^n}+1\equiv 7 \pmod{10}$, односно последња цифра броја $2^{2^n}+1$ је 7.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Трећи разред – Б категорија

1. Неједначина је дефинисана за $x \neq 0$. Ако је $x < 0$, именилац разломка са леве стране неједначине је негативан, а бројилац позитиван, па је та страна неједначине негативна. Како је друга страна неједначине позитивна, у овом случају нема решења. Ако је $x > 0$, ако је $y = \left(\frac{5}{3}\right)^x > 1$, неједначина је еквилалентна са $\frac{3+\frac{y}{5}}{y-1} \geqslant 2$, тј. са $y \leqslant \frac{25}{9} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$, па је њено решење $x \in (0, 2]$.

2. Наведени систем је еквивалентан са $y + 1 = 4(x + 1)^3$, $x + 1 = 4(y + 1)^3$, одакле је $y + 1 = 2^8 \cdot (y + 1)^9$, па је или $y + 1 = 0$ или $(y + 1)^8 = \frac{1}{2^8}$, а последње у скупу реалних бројева значи да је $y + 1 \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$. Дакле, решење система у скупу реалних бројева је $(x, y) \in \left\{(-1, -1), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)\right\}$.

3. Ако је r_k полупречник основе, а h_k висина купе, по услову задатка је $h_k = \frac{3R}{2}$. На основу осног пресека купе следи да је R полупречник описаног круга једнакокраког троугла, дужине основице $2r_k$ и висине која одговара основици h_k, па је $R^2 = r_k^2 + |h_k - R|^2$, одакле је $r_k = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Ако је d тражено растојање и r_1 полупречник круга који се добија у пресеку тражене равни и лопте, следи $r_1^2 = R^2 - |R - d|^2 = 2Rd - d^2$, а ако је r_2 полупречник круга који се добија у пресеку тражене равни и купе, следи $\frac{d}{r_2} = \frac{h_k}{r_k} = \sqrt{3}$, па је $r_2 = \frac{d}{\sqrt{3}}$. Следи $a^2\pi = r_1^2\pi - r_2^2\pi$, односно $a^2 = 2Rd - d^2 - \frac{d^2}{3}$, тј. $4d^2 - 6Rd + 3a^2 = 0$. Дискриминанта добијене квадратне једначине је $4 \cdot (9R^2 - 12a^2)$, па ако је $a > \frac{R\sqrt{3}}{2}$ не постоји раван са наведеним својством, ако је $a = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ ту раван треба конструисати на растојању $d = \frac{3R}{4}$ од врха купе, а ако је $a < \frac{3R}{4}$, онда је $0 < \frac{3R-\sqrt{9R^2-12a^2}}{4} < \frac{3R+\sqrt{9R^2-12a^2}}{4} < \frac{3R}{2}$, па постоји две равни са наведеним својством, за $d \in \left\{\frac{3R-\sqrt{9R^2-12a^2}}{4}, \frac{3R+\sqrt{9R^2-12a^2}}{4}\right\}$ (Тангента 70, Писмени задаци, задатак III-1).

4. За свако $1 \leqslant i \leqslant 9$ важи $S_i = S_1 + (i-1) \cdot 1600$, одакле је $\sum_{i=1}^{9} S_i = 9S_1 + 36 \cdot 1600$, па збир у свакој колони (а самим тим и врсти и дијагонали) магичног квадрата мора бити $3S_1 + 12 \cdot 1600$. Следи да се конструкција траженог магичног квадрата своди на конструкцију магичног квадрата чији су елементи $0, 1, \ldots, 8$. Такав магични квадрат постоји, на пример

1	6	5
8	4	0
3	2	7

, а то доводи до магичног квадрата са траженим особинама

S_2	S_7	S_6
S_9	S_5	S_1
S_4	S_3	S_8

(Тангента, M1485).

5. Ако је $x \in \mathbb{N}$, онда је или $x^2 \equiv 0 \pmod{3}$ или $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$, па је остатак при дељењу броја x^{20} са 3 или 0 или 1. Ако је $y \in \mathbb{N}$, онда је $y^2 + y = y(y+1)$ паран број, а како је $2^2 \equiv 1 \pmod{3}$, број 2^{y^2+y} даје остатак 1 при дељењу са 3. Следи да је остатак при дељењу броја $x^{20} + 2^{y^2+y}$ са 3 или 1 или 2. Са друге стране, за свако природно z број 2022^z је дељив са 3, па наведена једначина нема решења.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Четврти разред – Б категорија

1. Важи $y = 3^{\log_{3^2} 5^2} = 3^{\log_3 5} = 5$, $z = \frac{27 \cdot \frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{2}} = 9$, а како је $(1+i)^2 = 2i$ и $(1-i)^2 = -2i$, следи $x = \frac{(2i)^{1011}}{(-2i)^{1005}} = -2^6 i^6 = 2^6$. Дакле, $n = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5$ је природан број, а број његових делилаца је $(6+1)(2+1)(1+1) = 42$.

2. Ако је $n \equiv 0 \pmod 3$ или $n \equiv 2 \pmod 3$, онда је $n(n+1) \equiv 0 \pmod 3$, а ако је $n \equiv 1 \pmod 3$, онда је $n(n+1) \equiv 2 \pmod 3$, па $n^2 + n + 2024$ при дељењу са 3 даје остатак или 2 или 1. Следи да за произвољно природно n број $n^2 + n + 2024$ није дељив са 3, па није ни са $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$.

3. Ако је $x \geqslant 0$, једначина је еквивалентна са $2 + p(x-1) = 0$. Ако је $p = 0$, нема решења, а ако је $p \neq 0$, следи $x = 1 - \frac{2}{p}$, па једначина има решење на $[0, \infty)$ ако и само ако је $p \in (-\infty, 0) \cup [2, \infty)$.

Слично, ако је $x < 0$, једначина је еквивалентна са $2x^2 - 4px + 4(p-2) = 0$. Дискриминанта добијене квадратне једначине је $16(p^2 - 2p + 4) > 0$, па та једначина има два реална решења. Ако је $p < 2$, по Вијетовим правилима производ решења добијене квадратне једначине је $2(p-2) < 0$, па је једно од тих решења негативно, одакле следи да је и решење полазне једначине. Ако је $p \geqslant 2$, решења су истог знака, а по Вијетовим правилима збир решења добијене квадратне једначине је $2p$, па како су истог знака, оба су позитивна, тј. полазна једначина нема решења.

Дакле, ако је $p < 0$ једначина има једно негативно и једно ненегативно решење, ако је $p \in [0, 2)$, једначина нема ненегативних, а има једно негативно решење, а ако је $p \geqslant 2$, једначина има једно ненегативно, а нема негативних решења, тј. тражене вредности параметра су $p \in [0, \infty)$.

Коментар. Изрази $y = 4(px + 2 - p)$ за $p \in \mathbb{R}$ представљају праве које садрже тачку $(1, 8)$, тако да је захтев задатка одређивање које од уочених правих секу график функције $f(x) = \big(|x| - x\big)x$ тачно једном.

4. Ако је H ортоцентар $\triangle ABC$, онда је $AH \perp BC$, па према теореми о три нормале важи $BC \perp SM$, где је M подножје нормале из A на BC. Дакле, BC је нормална на раван ASM. Следи, $SA \perp BC$, а како је и $SA \perp SB$, SA је нормална на раван SBC. Следи $SA \perp SC$, а аналогно је и $SB \perp SC$. Према Питагориној теореми је $SA^2 + SB^2 = AB^2$, $SB^2 + SC^2 = BC^2$ и $SC^2 + SA^2 = CA^2$, па је наведена неједнакост еквивалентна са $(AB + BC + CA)^2 \leqslant 3(AB^2 + BC^2 + CA^2)$, тј. са $AB^2 + BC^2 + CA^2 \geqslant AB \cdot BC + BC \cdot CA + CA \cdot AB$, односно са $(AB - BC)^2 + (BC - CA)^2 + (CA - AB)^2 \geqslant 0$, што је тачно. Једнакост се достиже ако и само ако је $\triangle ABC$ једнакостраничан (уз услове задатка, онда су $\triangle SAB$, $\triangle SBC$ и $\triangle SCA$ једнакокрако–правоугли) (Тангента, M1443).

5. (а) Свако теме је крајња тачка три посматране дужи (две странице и једне дијагонале). У неко од темена је уписан број 1, па се дужима које полазе из тог темена придружују вредности не мање од $1 + 8 = 9$, $1 + 7 = 8$ и $1 + 6 = 7$, те m не може бити веће од 7. Са друге стране, ако се у темена $A_1, A_2, \ldots, A_8$ упишу, редом, бројеви $1, 6, 5, 2, 7, 3, 4, 8$, добија се $m = 7$.

(б) Због симетрије, укупан број тражених распореда је 8 пута већи од распореда у којима је у теме A_1 уписан број 1. Ако је у A_1 уписан број 1, како су на дужима A_1A_2, A_1A_5 и A_1A_8 израчунати збирови не мањи од 7, у темена A_2, A_5 и A_8 су уписани бројеви 6, 7 и 8 (у неком редоследу). Уколико би број 2 био уписан у теме A_3, онда у темена A_4 и A_7 морају бити уписани бројеви не мањи од 5, а то није могуће, пошто су бројеви $6, 7, 8$ већ уписани у друга темена, па не постоји два неуписана броја не мања од 5. По симетрији број 2 не може бити уписан ни у теме A_7, па следи да је уписан или у A_4 или у A_6. Због симетрије, распореда у којима је број 2 уписан у теме A_4 има колико и распореда у којима је број 2 уписан у теме A_6, па је довољно одредити колико има распореда код којих је број

2 уписан у теме A_4. Онда су на дужима A_4A_5 и A_4A_8 израчунати бројеви не мањи од 7, што је испуњено на дужи A_4A_8 (пошто се у A_8 налази један од бројева $6, 7, 8$), а да би било испуњено и на дужи A_3A_4, у темену A_3 мора бити уписан број 5. Коначно, након описаног поступка, како год се упишу бројеви 3 и 4 у темена A_6 и A_7 добија се је одговарајуће m једнако 7. Заиста, бројеви израчунати на дужима A_5A_6, A_2A_6, A_3A_7, A_7A_8 су не мањи од $3 + 5 = 8$, а број израчунат на дужи A_6A_7 је $3 + 4 = 7$.

Дакле, укупан број тражених распореда је $8 \cdot 3! \cdot 2 \cdot 2 = 192$ (8 због распореда броја 1, 3! због распореда цифара $6, 7, 8$ у одговарајућа темена након одређивања темена у које је уписан број 1, „прво” 2 због распореда броја 2, а „друго” 2 због распореда бројева 3 и 4).

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20.2.2022.

ПРВИ РАЗРЕД

БРОЈ	ИМЕ И ПРЕЗИМЕ	1.	2.	3.	4.	5.	Σ	ПЛАСМАН
1.	Станојковић Александра	15	20	20	20	5	80	I
2.	Павлов Јована	18	15	5	15	0	53	III
3.	Миленовић Марија	2	20	0	20	2	44	похвала
4.	Колоски Давид	0	20	0	20	2	42	похвала
5.	Јовановић Давид	0	18	0	20	0	38	похвала
6.	Жежељ Данило	2	20	0	15	0	37	похвала
7.	Милошевић Огњен	5	2	0	20	0	27	
8.	Јанковић Алекса	10	0	0	5	0	15	
9.	Ратковић Ивона	0	0	0	10	0	10	
10.	Ковач Немања	1	0	0	0	0	1	

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20.2.2022.

ДРУГИ РАЗРЕД

БРОЈ	ИМЕ И ПРЕЗИМЕ	1.	2.	3.	4.	5.	Σ	ПЛАСМАН
1.	Гагић Милица	20	15	20	5	20	80	I
2.	Васић Вељко	20	0	20	0	20	60	III
3.	Црногорац Милош	18	2	5	0	5	30	похвала
4.	Радмиловић Љубодраг	20	2	2	0	5	29	похвала
5.	Димић Стефан	10	2	0	0	5	17	
6.	Јовановић Милош	10	0	0	0	5	15	
7.	Милтеновић Немања	/	/	/	/	/	/	/
8.	Јованов Јован	/	/	/	/	/	/	/

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20.2.2022.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

БРОЈ	ИМЕ И ПРЕЗИМЕ	1.	2.	3.	4.	5.	Σ	ПЛАСМАН
1.	Серафимовић Илија	20	20	20	20	20	100	I
2.	Мучибабић Дамјан	20	20	20	10	20	90	I
3.	Стојшић Огњен	15	0	0	20	15	50	III
4.	Минић Дамјан	20	10	5	0	10	45	похвала
5.	Катић Александар	15	5	5	20	0	45	похвала
6.	Ђерић Лана	10	3	0	20	10	43	похвала

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20.2.2022.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

БРОЈ	ИМЕ И ПРЕЗИМЕ	1.	2.	3.	4.	5.	Σ	ПЛАСМАН
1.	Нешковић Наташа	20	20	20	15	12	87	I
2.	Милованов Марко	18	20	20	0	20	78	II
3.	Тршек Мина	20	15	5	2	0	42	похвала
4.	Томановић Ања	15	0	10	5	12	42	похвала
5.	Влаховић Данило	18	20	0	0	0	38	
6.	Гајић Реља	15	0	5	0	15	35	
7.	Пешко Јана	15	5	5	5	0	30	
8.	Ранковић Филип	0	0	2	0	0	2	
9.	Јанкуловић Кристијан	/	/	/	/	/	/	/