Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

4. март 2023.

Први разред - Б категорија

1. Група ученика учествовала је на кросу. Проценат броја ученика који су испунили норму је не мањи од $96,8\%$, а није ни већи од $97,2\%$. Који је најмањи могући број ученика који су учествовали на том кросу?

2. Тачка E је средиште странице AB четвороугла $ABCD$. Тачке F и G су такве да важи $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AD}$. Ако је тачка H средиште CD, доказати да су тачке F, G и H колинеарне.

3. Дат је природан број n који има 6 различитих природних делилаца чији је збир једнак 22. Доказати да је n дељив са 420.

4. Нека је $\mathbb{N}_{13} = \{1, 2, 3 \ldots, 13\}$. Колико има бијекција $f\colon \mathbb{N}_{13} \to \mathbb{N}_{13}$ таквих да је $f(3) = 13$, при чему, за све $x \in \mathbb{N}_{13} \setminus \{3\}$, важи да су x и $f(x)$ различите парности?

5. Једна просторија је на почетку празна. Сваког минута или једна особа уђе у њу или две особе из ње изађу. Може ли после тачно 100 сати у просторији бити тачно 2023 особе?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

4. март 2023.

Други разред - Б категорија

1. Нека су a, b и c позитивни реални бројеви и нека је $a+b<c$. Доказати да вредност израза
$$\sqrt{a+b+c+2\sqrt{ac+bc}}+\sqrt{a+b+c-2\sqrt{ac+bc}}$$
не зависи од a и b.

2. Уколико постоји, испитати да ли је троугао чије су висине:
(а) $5\,\mathrm{cm}, 12\,\mathrm{cm}, 13\,\mathrm{cm}$; (б) $6\,\mathrm{cm}, 9\,\mathrm{cm}, 12\,\mathrm{cm}$;
оштроугли, правоугли или тупоугли.

3. Ако су сви коефицијенти квадратне једначине $ax^2+bx+c=0$ непарни цели бројеви, доказати да тада решења те једначине не могу бити рационални бројеви.

4. Доказати да се у три мерења на ваги са теразијама, од укупно 23 куглице, које су једнаке по свим атрибутима, осим што је тачно једна тежа од осталих, може пронаћи та тежа куглица.

5. У скупу реалних бројева решити неједначину
$$\sqrt{48}+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}-1}\geqslant\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}+1}.$$

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

4. март 2023.

Трећи разред - Б категорија

1. Решити систем неједначина

$$x \cdot \log_{0,5}(x^2 + 3x) + \log_3 9^x > 0$$
$$x + 4 > \frac{2\log_2 3 - 3\log_8 45}{\log_4 75 + \log_{0,25} 3}.$$

2. Троугао ротира, редом, око својих страница чије су дужине a и b. У функцији од a и b изразити однос запремина тако добијених тела.

3. Наћи све природне бројеве $n > 1$ за које важи $n! \mid n^n - 2023$.

4. На колико начина се могу ставити бела дама и црни скакач на празну шаховску таблу 8×8 тако да ниједна од те две фигуре не напада другу?

5. Површина троугла ABC је $289\,cm^2$. Нека су M, N и P тачке на правама BC, CA и AB, различите од тачака B, C и A, редом, тог троугла такве да важи $CB = CM$, $AC = AN$ и $BA = BP$. Одредити површину троугла MNP.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

4. март 2023.

Четврти разред - Б категорија

1. У зависности од реалног параметра m дискутовати колико реалних решења има једначина
$$|x^2 + x - 2| = x + m.$$

2. Доказати да је површина правилног осмоугла једнака производу дужина његове најмање и његове највеће дијагонале.

3. У скупу целих бројева решити једначину $x^3 + 24 = 2^x$.

4. Авио-компанија Ер-ДМС жели да 150 путника распореди на исто толико седишта у авиону, која су распоређена у 25 редова са по 6 седишта, 3 са сваке стране пролаза. При томе, неки путници путују у групама и Ер-ДМС жели да их распореди што ближе једне другима: две групе од четири путника, тако да двоје седе тачно испред друго двоје из групе; пет група од троје и осам група од двоје тако да седе на три, односно два, узастопна седишта у реду, непрекинута пролазом. На колико различитих начина Ер-ДМС може распоредити путнике у овај авион?

5. Нека је n природан број. Доказати да за $x > 1$ важи неједнакост
$$nx^{\frac{1}{n}} \leqslant x + n - 1.$$

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

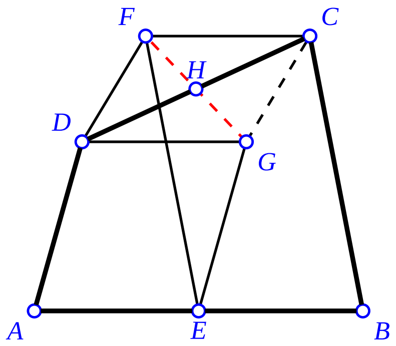
Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред - Б категорија

1. Како је $\dfrac{1}{31} > 0,03 > 0,004 = 0,972 - 0,968$, тј. $\dfrac{1}{31} + 0,968 > 0,972$, то за све рационалне бројеве облика $\dfrac{k}{l}$, $2 \leqslant l \leqslant 31$ и $1 \leqslant k \leqslant l-1$, а који су мањи од 1 су, takође, мањи и од $0,968$. Одавде налазимо да тражени број мора бити већи од 31. Како је $\dfrac{31}{32} = 0,96875$ у овом затвореном интервалу, добијамо да је тражени број 32.

2. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Из услова задатка имамо да је $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AD}$. Како је E средиште AB и H средиште CD имамо да је $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$ и $\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{DH} = \vec{0}$, па је $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH}$ и $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CH}$. Сабирањем ове 2 једнакости добијамо да је $2\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{EF}$, тј. $\overrightarrow{EH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$, па је тачка H средиште дужи FG.



(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Из услова задатка имамо да је $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow$ четвороугао $EFCB$ је паралелограм, па је и $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Слично, имамо да је $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow$ четвороугао $EGDA$ је паралелограм, па је и $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Стога је и $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{DG}$, па је и четвороугао $FCGD$ је паралелограм. Како се дијагонале паралелограма полове, добијамо да је тачка H и средиште дијагонале CD и дијагонале FG, чиме смо показали да су тачке F, G и H колинеарне.

3. Приметимо да је $1+2+3+4+5+6 = 21$ и $1+2+3+4+5+7 = 22$, а свака сума 6 различитих бројева је већа од 22, можемо закључити да су $1,2,3,4,5,7$ сви делиоци од n. Онда је n дељив и са НЗС$\{1,2,3,4,5,7\} = 420$.

4. Како је вредност $f(3) = 13$ већ дата, остаје да одредимо још вредности за $f(1), f(5), f(7), f(9), f(11)$ и $f(13)$ (то су све различити парни бројеви из $\mathbb{N}_{12}$), као и вредности за $f(2), f(4), f(6), f(8), f(10)$ и $f(12)$ (то су све различити непарни бројеви из $\mathbb{N}_{11}$). И једно и друго можемо одредити на $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ начина, па тражених функција има $(6!)^2 = 720^2 = 518\,400$.

5. У сваком минуту укупан број особа се промени за број који даје остатак 1 при дељењу са 3. Означимо са S_i број особа у просторији након i-тог минута. На почетку је $S_0 = 0$, а због описаног правила је $S_{i+1} \equiv S_i + 1 \pmod 3$. Зато је за свако $k \in \mathbb{N}$ испуњено $S_{3k} \equiv S_{3(k-1)} + 3 \equiv S_{3(k-1)} \equiv \cdots \equiv S_0 \equiv 0 \pmod 3$. Дакле, након 100 сати, тј. након 6000 минута, број особа у просторији мора бити дељив са 3. Међутим, како 3 не дели 2023, одговор на питање из задатка је одречан.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ
Други разред - Б категорија

1. Према условима задатка, дати израз, означимо га са I, можемо трансформисати на следећи начин:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{a+b+c+2\sqrt{c}\sqrt{a+b}} + \sqrt{a+b+c-2\sqrt{c}\sqrt{a+b}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{c}+\sqrt{a+b})^2} + \sqrt{(\sqrt{c}-\sqrt{a+b})^2} \\ &= \sqrt{c}+\sqrt{a+b}+\sqrt{c}-\sqrt{a+b} \\ &= 2\sqrt{c}. \end{aligned},$$

јер је $\sqrt{a+b} < \sqrt{c}$. Одавде је јасно да дати израз не зависи од a и b.

2. (а) Из $P = \frac{a\cdot 5}{2} = \frac{b\cdot 12}{2} = \frac{c\cdot 13}{2} \Rightarrow a = \frac{2P}{5}$, $b = \frac{2P}{12}$, $c = \frac{2P}{13}$. Како за ове странице не важи неједнакост троугла $a = \frac{2P}{5} = \frac{2P\cdot 25}{125} > b + c = \frac{2P}{12} + \frac{2P}{13} = \frac{2P\cdot 25}{156}$, такав троугао не постоји.
(б) Из $P = \frac{a\cdot 6}{2} = \frac{b\cdot 9}{2} = \frac{c\cdot 12}{2} \Rightarrow a = \frac{2P}{6}$, $b = \frac{2P}{9}$, $c = \frac{2P}{12}$. Како за ове странице важи неједнакост троугла, јер $a = \frac{2P}{6} = \frac{2P\cdot 6}{36} < b + c = \frac{2P}{9} + \frac{2P}{12} = \frac{2P\cdot 7}{36}$, такав троугао постоји (довољно је проверити само ову неједнакост, јер је a најдужа страница). Како важи $b^2 + c^2 = \frac{4P^2}{81} + \frac{4P^2}{144} = \frac{4P^2\cdot 25}{1296} < \frac{4P^2\cdot 36}{1296} = \frac{4P^2}{36} = a^2 \Rightarrow \triangle$ је тупоугли.

3. Означимо са D дискриминанту полазне квадратне једначине. Тада важи $D \geqslant 0$ и с обзиром да су решења исте рационални бројеви, то је $0 \leqslant \sqrt{D} = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, за неке узајамно просте природне бројеве p и q, тј. за неке природне бројеве p и q за које је НЗД$(p,q) = 1$. Стога, мора бити $D = \dfrac{p^2}{q^2}$, тј. $q^2 D = p^2$, одакле важи да $q \mid p^2$, тј. $q \mid p$, јер је НЗД$(p,q) = 1$, што је могуће само у случају $q = 1$. Дакле, $D = p^2$, па је дискриминанта D квадрат природног броја.

Покажимо, у даљем, да при датим условима, дискриминанта полазне једначине мора дати остатак 5 по модулу 8. У том циљу, нека је $a = 2n-1$, $b = 2m-1$ и $c = 2k-1$, за неке целе бројеве m, n и k. Тада важи

$$D = (2m-1)^2 - 4(2n-1)(2k-1),$$

те како је $(2m-1)^2 = 4m^2 - 4m + 1 = 4m(m-1) + 1 \equiv 1 \pmod 8$, јер је број $m(m-1)$ паран, и $4(2n-1)(2k-1) \equiv 4 \pmod 8$, то је $D \equiv 5 \pmod 8$. Лако се показује да квадрати целих бројева при дељењу са 8 не могу давати остатак 5. Могу дати само остатке 0, 1 или 4, одакле закључујемо да дискиминанта дате квадратне једначине не може бити потпун квадрат, одакле следи да су решења квадратне једначине ирационални бројеви.

4. Ако бисмо од 3 објекта једнака по свим атрибутима, осим што је један тежи од осталих, тражили најтежи објекат, довољно је само једно мерење. То можемо извести тако што можемо ставити по један објекат на сваки од тасова. У слуцају неравнотеже, тражени објекат је онај на тасу који претеже, свакако. У супротном, тражени објекат је онај који није ни на једном од тасова.

Ако бисмо имали 9 куглица од којих је једна тежа од осталих, потребна су нам два мерења да пронадемо управо ту тежу. Заиста, 9 куглица можемо поделити у три групе од по три куглице и применити два пута претходно разматрану стратегију. У случају са 23 куглице, можемо направити три групе тако да у њима имамо редом 9, 9 и 5 куглица и онда на вагу ставити, рецимо, прве две групе. Ако наступи неравнотежа, задатак се своди на разматрани случај са 9 куглица. У супротном, додавањем 4 мерене куглице у трећу групу, задатак се опет своди на случај са укупно 9 куглица. Како нам је за случај са 9 куглица потребно тачно 2 мерења, довољан број мерења да пронађемо најтежу је 3.

5. Неједначина је дефинисана за $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1]$, јер мора бити $1 - x \geqslant 0$ и $\sqrt{1-x} \neq 1$. Пребацивањем израза са десне стране на леву, након сређивања, добијамо

$$\frac{\sqrt{1-x} - 2\sqrt{3}\,x}{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)} \geqslant 0.$$

Очигледно је да знак израза у имениоцу зависи само од знака израза $\sqrt{1-x} - 1$, јер је за савако $x \leqslant 1$ испуњено $\sqrt{1-x} + 1 \geqslant 1$. Стога, размотримо два случаја.

1°: $\sqrt{1-x} - 1 > 0$, тј. $1 < \sqrt{1-x}$, тј. $1 < 1 - x$, тј. $x < 0$

У овом случају неједначина постаје $\sqrt{1-x} - 2\sqrt{3}\,x \geqslant 0$, односно $2\sqrt{3}\,x \leqslant \sqrt{1-x}$, што је тачно за све $x < 0$.

2°: $\sqrt{1-x} - 1 < 0$, тј. $\sqrt{1-x} < 1$, тј. $1 - x < 1$, тј. $x \in (0, 1]$, због области дефинисаности неједначине

У овом случају неједначина постаје $\sqrt{1-x} - 2\sqrt{3}\,x \leqslant 0$, односно $\sqrt{1-x} \leqslant 2\sqrt{3}\,x$, тј. $12x^2 + x - 1 \geqslant 0$. Анализом добијене квадратне функције тривијално налазимо да мора бити $x \in (-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{4}, +\infty)$, те како је у овом случају $x \in (0, 1]$, то је $x \in [\frac{1}{4}, 1]$.

Коначно, узимајући у обзир добијено у оба случаја, долазимо до закључка да је скуп решења полазне неједначине скуп $(-\infty, 0) \cup [\frac{1}{4}, 1]$.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ
Трећи разред - Б категорија

1. Услов да је први логаритам дефинисан је $x^2+3x>0$, односно, $x\in(-\infty,-3)\cup(0,+\infty)$.

Прву неједначину можемо написати у облику $x\cdot\big(\log_{0.5}(x^2+3x)+2\big)>0$. Производ два броја је позитиван уколико су оба броја позитивни или оба броја негативни, одакле добијамо два система са по две неједначине:

$$(x>0,\,\log_{0.5}(x^2+3x)+2>0)\quad\text{и}\quad(x<0,\,\log_{0.5}(x^2+3x)+2<0).$$

Једначина $\log_{0.5}(x^2+3x)+2>0\ \Leftrightarrow\ \log_{0.5}(x^2+3x)>-2=\log_{0.5}4$, па кад се ослободимо логаритма (због $0.5<1$ мења се знак!), добијамо квадратну неједначину $x^2+3x-4<0$, која има решење $x\in(-4,1)$. Решење првог система, тј. система неједначина ($x>0$, $\log_{0.5}(x^2+3x)+2>0$), је $x\in(0,1)$.

Слично, $\log_{0.5}(x^2+3x)+2<0\ \Leftrightarrow\ \log_{0.5}(x^2+3x)<-2=\log_{0.5}4$, па кад се ослободимо логаритма (због $0.5<1$ мења се знак!), добијамо квадратну неједначину $x^2+3x-4>0$, која има решење $x\in(-\infty,-4)\cup(1,+\infty)$. Решење другог система, тј. система неједначина ($x<0$, $\log_{0.5}(x^2+3x)+2<0$), је $x\in(-\infty,-4)$.

Коначно, спајањем решења ова два система добијамо да је решење прве логаритамске неједначине једнако $x\in(-\infty,-4)\cup(0,1)$.

Сређивањем израза у другој неједначини полазног система добијамо да је

$$\frac{2\log_2 3-3\log_8 45}{\log_4 75+\log_{0.25}3}=-1,$$

те се ова неједначина своди на $x+4>-1$ и она има решење $x>-5$.

Укупно решење добијамо као пресек ова два решења: $x\in(-5,-4)\cup(0,1)$.

2. Нека је ABC дати троугао. Означимо са a и b, редом, дужине страница BC и CA, а са β и γ унутрашње углове у теменима B и C тог троугла, редом. Претпоставимо, прво, да троугао ротира око своје a странице, тј. око странице BC. У случају да је тачно један од углова β или γ једнак 90°, у том процесу ћемо добити обртно тело (обичну праву купу), које има полупречник основе једнак $h_a=\frac{2P}{a}$ и висину једнаку a. Уколико су β и γ оштри углови, независно од величине угла у темену A, добићемо две купе, истих полупречника основа једнаких h_a (основе су наслоњене једна на другу), чији је збир висина једнак, управо, a. У случају да је неки од (тачно један) углова β или γ туп, приликом ротације ће се формирати тело идентично телу које настаје када из једне купе „извадимо" мању купу, истог полупречника основе, с тим што је разлика висина тих купа једнака a. У сваком од ова три случаја добијамо исту запремину обртног тела: $V_a=\frac{1}{3}\left(\frac{2P}{a}\right)^2\cdot a=\dfrac{4P^2\pi}{3a}$. Аналогно се добија и да је запремина обртног тела које добијамо када троугао ротира око своје странице b једнака $V_b=\dfrac{4P^2\pi}{3b}$. Одалте имамо да је тражени однос $V_a:V_b=\dfrac{4P^2\pi}{3a}:\dfrac{4P^2\pi}{3b}=\dfrac{1}{a}:\dfrac{1}{b}$, тј. $V_a:V_b=b:a$.

3. Из почетног услова имамо да је $n^n\equiv 2023 \pmod n$, одакле следи $n\mid 2023=7\cdot 17^2$. Такође, уколико је $n\geqslant 14$, тада би важило $0\equiv n^n\equiv 2023 \pmod{49}$, што није могуће. Из претходних запажања преостаје још испитати случај $n=7$, што и јесте решење полазног проблема. Заиста, да би важило $2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=7!\mid 7^7-2023$, треба показати да

$16 \mid 7^7 - 2023$, $9 \mid 7^7 - 2023$, као и да $5 \mid 7^7 - 2023$, јер, свакако, $7 \mid 7^7 - 2023$. Стога, треба упоредити остатке при дељењу бројева 7^7 и 2023 са 16, 9 и 5.

Имамо да број 48 даје остатак 0 при дељењу са 16, одакле следи да 7^2 даје остатак 1 при дељењу са 16. Дакле, 7^7 мора дати остатак 7 при дељењу са 16, а то је уједно и остатак при дељењу броја 2023 са 16, јер $16 \mid 2016$. Слично, остатак при дељењу броја 7^7 са 9 је 7, јер $9 \mid (7^3 - 1) = 342$, што је уједно и остатак при дељењу броја 2023 са 9 (знамо да $9 \mid 2016$). Коначно, 7^4 при дељењу са 5 даје остатак 1, одакле следи да 7^7 даје остатак 3 при дељењу са 5. Како је остатак при дељењу броја 2023 са 5 једнак 3, то $5 \mid 7^7 - 2023$.

4. На следећим сликама је у свако поље шаховске табле уписан број колико поља напада дама са тог поља (слика лево) и колико поља напада скакач са тог поља (слика 2. слева) – то је исто и са колико поља би скакач нападао даму уколико се налази на том пољу.

8	21	21	21	21	21	21	21	21
7	21	23	23	23	23	23	23	21
6	21	23	25	25	25	25	23	21
5	21	23	25	27	27	25	23	21
4	21	23	25	27	27	25	23	21
3	21	23	25	25	25	25	23	21
2	21	23	23	23	23	23	23	21
1	21	21	21	21	21	21	21	21
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*

8	2	3	4	4	4	4	3	2
7	3	4	6	6	6	6	4	3
6	4	6	8	8	8	8	6	4
5	4	6	8	8	8	8	6	4
4	4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	8	8	8	8	6	4
2	3	4	6	6	6	6	4	3
1	2	3	4	4	4	4	3	2
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*

8	23	24	25	25	25	25	24	23
7	24	27	29	29	29	29	27	24
6	25	29	33	33	33	33	29	25
5	25	29	33	35	35	33	29	25
4	25	29	33	35	35	33	29	25
3	25	29	33	33	33	33	29	25
2	24	27	29	29	29	29	27	24
1	23	24	25	25	25	25	24	23
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*

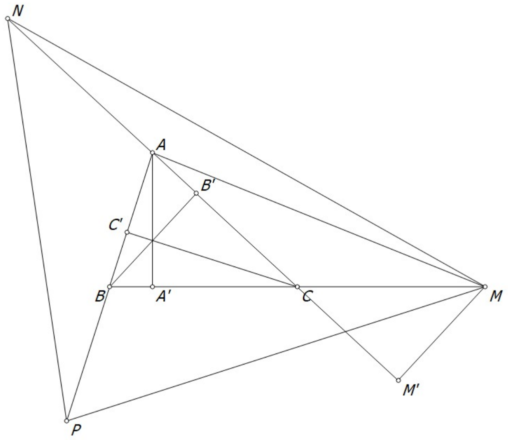
8	40	39	38	38	38	38	39	40
7	39	36	34	34	34	34	36	39
6	38	34	30	30	30	30	34	38
5	38	34	30	28	28	30	34	38
4	38	34	30	28	28	30	34	38
3	38	34	30	30	30	30	34	38
2	39	36	34	34	34	34	36	39
1	40	39	38	38	38	38	39	40
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*

Када саберемо ове бројеве добијамо слику 3. слева, а ту је у свако поље уписан број поља које напада дама са тог поља или би дама била нападнута ако би ту био скакач (приметимо да су ова поља дисјунктна, зато их само сабирамо). На последњој слици (скроз десно) је број поља на којима може бити скакач тако да нит њега напада дама нит он даму (то укупно 64 поља одузмемо 1 поље где се налази дама и d поља која напада дама са тог поља и s поља са којих скакач напада даму на том пољу, тј. $63 - (d + s)$, тј. од 63 одузмемо број са 3. слике лево).

Укупан број начина да се ставе бела дама и црни скакач на шаховску таблу 8×8 тако да ниједна од те 2 фигуре није нападнута је једнак збиру свих бројева са слике скроз десно, а то је једнако:

$4 \cdot 40 + 8 \cdot 39 + 16 \cdot 38 + 4 \cdot 36 + 16 \cdot 34 + 12 \cdot 30 + 4 \cdot 28 = 2\,240.$

5. Уколико је XYZ троугао у равни, са P_{XYZ} ћемо означити његову површину. Докажимо да је P_{MNP} једнако 2023 cm^2. Заиста, нека су A', B' и C' подножја висина из темена A, B и C троугла ABC, која одговарају страницама BC, CA и AB, редом, и нека је M', такође, подножје висине из темена M троугла CMN, које одговара страници NC. Означимо са a, b и c дужини страница BC, CA и AB, тим редом, троугла ABC. Како је $NC = 2b$, то је $P_{CMN} = b \cdot MM'$. Са друге стране, ако посматрамо троуглове BCB' и MCM', закључићемо, одмах, да су подударни (УСУ), јер је $BB' || MM'$. Следи, $BB' = MM'$, па је $P_{CMN} = b \cdot BB' = 2P_{ABC}$.



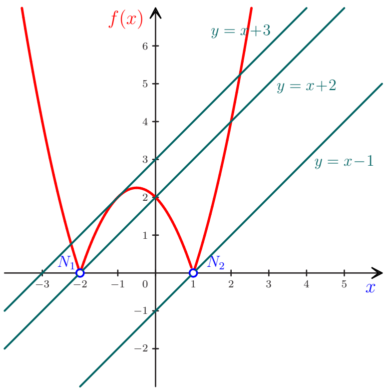
Аналогно се показује да је $P_{ANP} = c \cdot CC' = 2P_{ABC}$, као и $P_{BPM} = a \cdot AA' = 2P_{ABC}$. Дакле, $P_{MNP} = P_{ABC} + P_{CMN} + P_{ANP} + P_{BPM} = 7P_{ABC} = 2023\ cm^2$.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Четврти разред - Б категорија

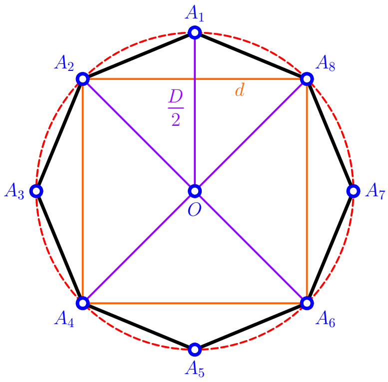
1. Квадратна функција $f(x) = x^2 + x - 2$ има нуле $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$, а теме параболе је тачка $T(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4})$.
Фунција $g(x) = -f(x) = -x^2 - x + 2$ има исте нуле, а теме параболе јој је $T'(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4})$.
Стога је $|x^2 + x - 2| = \begin{cases} x^2 + x - 2, & x \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty) \\ -x^2 - x + 2, & x \in (-2, 1). \end{cases}$
Одредимо за које вредности параметра m права $y = x + m$ пролази кроз неку од тачака $N_1(-2, 0)$ и $N_2(1, 0)$ или је тангента на параболу $y = -x^2 - x + 2$.
Када убацимо координате тачке $N_1(-2, 0)$ у једначину праве $y = x + m$ добијамо $m = 2$.
Када убацимо координате тачке $N_2(1, 0)$ у једначину праве $y = x + m$ добијамо $m = -1$.
Одредимо m тако да права $y = x + m$ и парабола $y = -x^2 - x + 2$ имају 1 заједничку тачку (тад је та права тангента параболе): $x + m = -x^2 - x + 2$, тј. добијамо квадратну једначину $x^2 + 2x + m - 2 = 0$ која има дискирминанту $D = 4 - 4(m - 2) = 12 - 4m$. Да би имали јединствено решење мора бити $D = 0$, па добијамо $m = 3$.
Ове 3 праве, $y = x + 2$, $y = x - 1$ и $y = x + 3$ су гранични случајеви за то колико пресечних тачака имају права $y = x + m$ и график функције $y = |x^2 + x - 2|$. То је све представљено на наредној слици.

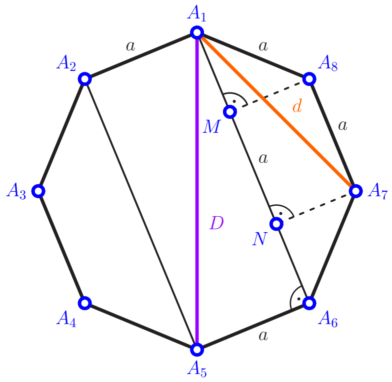


За $m < -1$ нема решења; за $m = -1$ има 1 решење, за $-1 < m < 2$ и $m > 3$ има 2 решења; за $m = 2$ и $m = 3$ има 3 решења; за $2 < m < 3$ има 4 решења.

Напомена. Може се гледати и колико пресечних тачака има график
$|x^2 + x - 2| - x = \begin{cases} x^2 - 2, & x \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty) \\ -x^2 - 2x + 2, & x \in (-2, 1). \end{cases}$ са правом $y = m$, где је $m \in \mathbb{R}$.

2. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Из квадрата $A_2A_4A_6A_8$, странице d и дијагонале D, добијамо везу $D = d\sqrt{2}$.
Површина делтоида $OA_2A_1A_8$ је $\dfrac{d \cdot \frac{D}{2}}{2} = \dfrac{d \cdot D}{4}$, док је површина целог осмоугла $4 \cdot \dfrac{d \cdot D}{4} = d \cdot D$, чиме смо показали да је површина правилног осмоугла једнака производу дужина његове најмање и највеће дијагонале.





(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Површина P осмоугла је збир површина 2 подударна трапеза $A_1A_8A_7A_6$ и $A_2A_3A_4A_5$ и правоугаоника $A_1A_2A_5A_6$. Нека је a страница правилног осмоугла. Тада је дијагонала A_1A_6 једнака $A_1A_6 = A_1M + MN + NA_6$. Висина трапеза $h = A_8M = \dfrac{a}{\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, а основице трапеза су $A_1A_6 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} + a + \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = a + a\sqrt{2} = a(1+\sqrt{2})$ и $A_8A_7 = a$, па је површина трапеза $P_{A_1A_8A_7A_6} = \dfrac{A_1A_6 + A_8A_7}{2} \cdot A_8M = \left(a + \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Површина правоугаоника $A_1A_2A_5A_6$ је $P_{A_1A_2A_5A_6} = A_1A_2 \cdot A_1A_6 = a \cdot \left(a + a\sqrt{2}\right)$, па је површина целог осмоугла $P = 2P_{A_1A_8A_7A_6} + P_{A_1A_2A_5A_6} = 2a^2(1+\sqrt{2})$.

Из правогулог троугла $\triangle A_1A_6A_5$ налазимо дијагоналу $A_1A_5{}^2 = A_1A_6{}^2 + A_5A_6{}^2 = a^2 + a^2(1+\sqrt{2})^2 = a^2(4+2\sqrt{2})$, тј. највећа дијагонала је $D = A_1A_5 = a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. Из правогулог троугла $\triangle A_1NA_7$ налазимо дијагоналу

$$A_1A_7{}^2 = A_1N^2 + NA_7{}^2 = \left(a + \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2(2+\sqrt{2}),$$

тј. најмања дијагонала је $d = A_1A_7 = a\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Дакле, производ највеће и најмање дијагонале полазног осмоугла је

$$D \cdot d = a\sqrt{4+2\sqrt{2}} \cdot a\sqrt{2+\sqrt{2}} = a^2\sqrt{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 = 2a^2(1+\sqrt{2}) = P,$$

што је и требало доказати.

3. Тривијално се проверава да $x = 10$ јесте решење полазне једначине. Очигледно, ако је $x \in \mathbb{Z}$ решење дате једначине, да мора важити $x \geqslant 0$, јер за $x < 0$ лева страна једначине је цео број, док је десна рационалан, који није цео.

Такође, лако проверавамо (једноставним убацивањем вредности) да цели бројеви $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ и 9 нису решења полазне једначине (лева страна је у свим тим случајевима строго већа од десне).

Нека је сада $x = n \geqslant 11$. Како је $n \in \mathbb{Z}$ и $n \geqslant 11$, то је n природан број не мањи од 11. Тривијалном применом принципа математичке индукције доказујемо да за свако $n \geqslant 11$ важи $6(n+1) < 2^n$. Заиста, за $n = 11$ тврђење се своди на $72 < 2^{11} = 2048$, што је тачно. Ако бисмо претпоставили да исто важи за неко $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 11$ (индуктивна хипотеза), тада ће важити $6(n+2) = 6n + 12 = 6(n+1) + 6 < 2^n + 6 < 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$, јер је за $n \geqslant 11$ испуњено $6 < 2048 \leqslant 2^n$. Дакле, за свако $n \geqslant 11$ важи $6(n+1) < 2^n$.

Коришћењем претходно показаног, тј. неједнакости $6(n+1) < 2^n$, $n \geqslant 11$, слично се показује да за свако $n \geqslant 11$ важи и $3n^2 + 3n + 1 < 2^n$. Заиста, за $n = 11$ неједнакост постаје $397 < 2^{11} = 2048$, која је тачна. Ако би неједнакост важила за неко природно $n \geqslant 11$, тј. ако би било $3n^2+3n+1<2^n$, тада би, на основу претходно доказане неједнакости, важило и $3(n+1)^2+3(n+1)+1=3n^2+3n+1+6n+6=3n^2+3n+1+6(n+1)<2^n+2^n=2\cdot 2^n=2^{n+1}$, одакле, на основу принципа математичке индукције, следи да је за свако природно $n\geqslant 11$ испуњено $3n^2+3n+1<2^n$.

Коначно, користићи, поново, примнцип математичке индукције, докажимо на крају да ће за свако $n\geqslant 11$ важити $n^3+24<2^n$. За $n=11$ је тврђење тривијално тачно, јер је $1355<2^{11}=2048$. Ако би за неко $n\geqslant 11$, $n\in\mathbb{N}$, важило $n^3+24<2^n$ (индуктивна хипотеза), тада ће, на основу индуктивне хипотезе и друге показане наједнакости, за следићи природан број, тј. за $n+1$, бити испуњено $(n+1)^3+24=n^3+3n^2+3n+25=n^3+24+(3n^2+3n+1)<2^n+2^n=2\cdot 2^n=2^{n+1}$. Дакле, $n^3+24<2^n$, за свако природно $n\geqslant 11$, одакле следи да полазна једначина нема решења у скупу природних бројева који нису мањи од 11.

Из свега показаног, једино решење једначине је $x=10$.

4. У авиону постоји $25*2=50$ група од по три седишта која ћемо звати тројкама. Приметимо да ако један путник из неке групе седи на седишту у некој тројци, онда бар још један путник из те групе мора седети у тој тројци. Према томе, у произвољној тројци могу седети путници из највише једне групе.

Посматрајмо једну групу од четворо. Њени путници седе у две тројке једној иза друге. Број начина да изаберемо предњу од те две тројке је 48 (јер не можемо бирати оне у последњем реду). Ако је та тројка баш у првом или претпоследњем реду, онда предњу тројку друге групе можемо одабрати на 46 начина, док иначе ту тројку можемо одабрати на 45 начина. Остале тројке бирамо како желимо међу слободнима. Притом у двема тројкама групе од четворо можемо на два начина изабрати четири седишта која заузима та група и слично за тројке група од двоје. Укупно, дакле, имамо $\big((4\cdot 45+44\cdot 46)\cdot 2^2\cdot(4!)^2\big)\cdot\big(\binom{46}{5}\cdot(3!)^5\big)\cdot\big(\binom{41}{8}\cdot 2^8\cdot(2!)^8\big)\cdot 111!=2204\cdot 2^{10}\cdot 2!^8\cdot 3!^5\cdot 4!^2\cdot 111!\cdot\binom{46}{5}\binom{41}{8}$ начина да распоредимо путнике у авион (јер након распоређивања група остаје 111 нераспоређених путника).

5. (ПРВО РЕШЕЊЕ) Применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине добијамо

$$\frac{x+n-1}{n}=\frac{x+\overbrace{1+1+\ldots+1}^{n-1}}{n}\geqslant\sqrt[n]{x}.$$

Множењем последње неједнакости са n добијамо тражену неједнакост.

(ДРУГО РЕШЕЊЕ) Посматрајмо функцију $f(x)=nx^{\frac{1}{n}}-x+1$, $x>1$. Тада је $f'(x)=x^{\frac{1}{n}-1}-1$, за свако $x>1$. Како је за $x>1$ очигледно $f'(x)\leqslant 0$, за било које $n\in\mathbb{N}$, то је f опадајућа на $(1,+\infty)$, па важи $f(x)\leqslant f(1)=n$, за свако $x>1$.

(ТРЕЋЕ РЕШЕЊЕ) Нека је $n=1$. Тада је неједнакост тривијално испуњена, јер се своди на једнакост, тј. на $x\leqslant x$, што је тачно, за свако $x>1$. Нека је, даље, $n\geqslant 2$. Дата неједнакост је еквивалентна са $n(x^{\frac{1}{n}}-1)\leqslant x-1$, за свако $n\geqslant 2$ и $x>1$. Познато је да важи

$$y^n-1=(y-1)(y^{n-1}+\ldots+y+1),$$

за свако $n\in\mathbb{N}$ и $y\in\mathbb{R}$, одакле, за $y=x^{\frac{1}{n}}$, добијамо

$$x-1=(x^{\frac{1}{n}}-1)(x^{\frac{n-1}{n}}+\ldots+x^{\frac{1}{n}}+1).$$

Како је $x>1$, то је $x^{\frac{i}{n}}>1$, за свако $i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$, па је

$$x^{\frac{n-1}{n}}+\ldots+x^{\frac{1}{n}}+1>n,$$

одакле следи да је

$$x-1=(x^{\frac{1}{n}}-1)(x^{\frac{n-1}{n}}+\ldots+x^{\frac{1}{n}}+1)>n(x^{\frac{1}{n}}-1),$$

тј. $nx^{\frac{1}{n}} < x + n - 1$, за свако $n \geqslant 2$ и $x > 1$.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ - 4. МАРТ 2023.

ПРВИ РАЗРЕД

	УЧЕНИК	ШКОЛА	1.	2.	3.	4.	5.	Σ	ПЛАСМАН
1.	Милица Чучковић	Гимназија „Урош Предић“	20	20	20	0	20	80	I награда
2.	Предраг Златановић	Гимназија „Урош Предић“	0	0	20	10	20	50	III награда
3.	Тијана Зимоња	Гимназија „Борислав Петров Браца“ Вршац	0	20	20	0	10	50	III награда
4.	Ленка Гавриловић	Гимназија „Урош Предић“	0	0	20	5	20	45	похвала
5.	Јана Кесић	Гимназија „Борислав Петров Браца“ Вршац	0	5	20	0	20	45	похвала
6.	Петра Нишевић	Гимназија „Урош Предић“	0	0	20	0	20	40	
7.	Вук Станојевић	Гимназија „Борислав Петров Браца“ Вршац	0	0	20	0	20	40	
8.	Теодора Ђоровић	Гимназија „Урош Предић“	0	10	0	5	20	35	
9.	Стефан Милтеновић	Гимназија „Урош Предић“	0	0	0	0	20	20	

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ - 4. МАРТ 2023.

ДРУГИ РАЗРЕД

	УЧЕНИК	ШКОЛА	1.	2.	3.	4.	5.	Σ	ПЛАСМАН
1.	Симона Милошевић	Гимназија „Урош Предић“	20	17	20	20	5	82	I награда
2.	Александра Станојковић	Гимназија „Урош Предић“	20	17	0	20	18	75	II награда
3.	Јована Павлов	Гимназија „Урош Предић“	20	5	20	20	5	70	II награда
4.	Милица Проле	Гимназија „Урош Предић“	20	10	10	0	10	50	III награда
5.	Давид Колоски	ЕТШ „Никола Тесла“	20	3	0	20	5	48	III награда
6.	Филип Глишић	Гимназија „Урош Предић“	20	0	2	20	5	47	III награда
7.	Давид Јовановић	Гимназија „Урош Предић“	0	0	0	20	15	35	похвала
8.	Марија Миленовић	Гимназија „Урош Предић“	20	7	0	0	5	32	похвала
9.	Мартина Тутић	Гимназија „Урош Предић“	0	0	0	20	5	25	
10.	Угљеша Средић	Гимназија „Борислав Петров Браца“ Вршац	20	0	0	0	5	25	
11.	Ана Коршон	Гимназија „Борислав Петров Браца“ Вршац	20	4	0	0	0	24	
12.	Урош Ковачевић	Белоцркванска гимназија	0	0	2	20	0	22	
13.	Лазар Забркић	Белоцркванска гимназија	0	0	0	20	0	20	
14.	Вукашин Вујичин	Школски центар „Никола Тесла“ Вршац	0	0	0	20	0	20	
15.	Ангелина Станојловић	Белоцркванска гимназија	0	0	2	10	0	12	

16.	Хелена Бучалина	Гимназија „Урош Предић“	0	0	0	10	0	10	
17.	Тамара Радловачки	Гимназија „Борислав Петров Браца“ Вршац	0	0	0	5	5	10	
18.	Вукашин Жарков	Школски центар „Никола Тесла“ Вршац	2	0	0	0	5	7	
19.	Милош Митић	ЕТШ „Никола Тесла“	0	2	0	0	0	2	

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ - 4. МАРТ 2023.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

	УЧЕНИК	ШКОЛА	1.	2.	3.	4.	5.	Σ	ПЛАСМАН
1.	Вељко Васић	Гимназија „Урош Предић“	20	20	20	15	0	75	I награда
2.	Милица Гагић	Гимназија „Урош Предић“	20	20	10	20	0	70	II награда
3.	Љубодраг Радмиловић	Гимназија „Урош Предић“	20	10	20	5	0	55	III награда
4.	Лука Стошић	Гимназија „Урош Предић“	10	20	15	0	0	45	похвала
5.	Немања Милтеновић	Гимназија „Урош Предић“	0	0	10	15	20	45	похвала
6.	Немања Вуксић	ЕТШ „Никола Тесла“	15	20	5	0	0	40	похвала
7.	Милош Црногорац	Белоцркванска гимназија	0	0	0	5	0	5	
8.	Лука Томашевић	Гимназија „Борислав Петров Браца“ Вршац	/	/	/	/	/	/	

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ - 4. МАРТ 2023.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

	УЧЕНИК	ШКОЛА	1.	2.	3.	4.	5.	Σ	ПЛАСМАН
1.	Илија Серафимовић	Гимназија „Урош Предић“	20	20	20	10	20	90	I награда
2.	Александар Катић	Гимназија „Урош Предић“	15	20	5	20	20	80	II награда
3.	Огњен Стојшић	Гимназија „Урош Предић“	20	0	10	20	20	70	III награда
4.	Лана Ђерић	Гимназија „Урош Предић“	20	20	0	5	20	65	III награда
5.	Дамјан Мучибабић	Гимназија „Урош Предић“	15	10	2	15	20	62	III награда
6.	Дамјан Минић	Гимназија „Урош Предић“	0	20	20	0	20	60	III награда
7.	Јована Стефановић	Гимназија „Урош Предић“	0	20	0	15	20	55	похвала
8.	Игор Цвијић	Школски центар „Никола Тесла“ Вршац	10	0	5	10	20	45	похвала
9.	Стефан Илић	Гимназија „Урош Предић“	0	20	0	3	10	33	
10.	Богдан Јовановић	ЕТШ „Никола Тесла“	0	0	5	0	20	25	
11.	Димитрије Пуја	Школски центар „Никола Тесла“ Вршац	0	0	0	15	10	25	