Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

18. јануар 2020.

Први разред – Б категорија

1. Доказати да ниједан број облика

$$2020\ldots20202$$

у децималном запису не може бити квадрат природног броја.

2. У једној школи се одржава турнир у стоном тенису на коме учествује 1001 ученик. У сваком кругу ученици су распоређени у парове; сваки пар игра меч и победник пролази у следећи круг (нема нерешених мечева). Ако у неком кругу има непаран број ученика, један жребом изабран ученик иде у наредни круг без борбе. Када остане само један ученик, он се проглашава победником и турнир се завршава.

Колико ће укупно мечева бити одиграно?

3. У пећини медитирају три монаха. Сваки од њих лаже два узастопна дана у недељи, а осталих дана говори истину. Никоја два монаха не лажу истог дана. У понедељак је један монах казао: „Јуче сам лагао”. Наредног дана надовезао се други монах: „А ја сам јуче лагао”. Ког дана у недељи ниједан монах не лаже?

4. Доказати да за ма које скупове A, B, C и D важи једнакост

$$\big((A\cup B)\setminus(C\cap D)\big)\setminus\big((A\cup C)\setminus(B\cap D)\big)=(B\setminus C)\setminus(A\setminus D).$$

5. Дужине трију висина у троуглу су 3, 4 и 5. Да ли је тај троугао оштроугли, правоугли или тупоугли?

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

18. јануар 2020.

Други разред – Б категорија

1. Шта је веће: $2^{100} + 3^{100}$ или 4^{100}?

2. У квадрату $ABCD$ странице 1, тачке M и N су редом средишта страница BC и CD. Израчунати полупречник r круга уписаног у троугао AMN.

3. За које вредности параметра m графици функција

$$y = 3x - m \quad \text{и} \quad y = (m+1)x^2 + x + 1$$

имају тачно једну заједничку тачку?

4. Наћи све парове природних бројева (a, b) у којима је $a > b$ и важи

$$\text{НЗС}(a, b) - \text{НЗД}(a, b) = 2019.$$

5. Три папагаја - Пера, Мика и Лаза - чуче за округлим столом. Један од њих увек лаже, а остала два увек говоре истину. Игра *Истине и лажи* започиње тако што један од њих дâ изјаву (папагај лажов би лагао, а остали би рекли истину). Следећи у смеру казаљке на сату треба да понови ту изјаву, затим следећи понови његову, и тако у круг редом. Међутим, при томе папагај лажов неће поновити изјаву свог претходника, већ ће изрећи њену негацију.

Испоставило се да су прва и 2019-та изјава гласиле истоветно: „Пера је лажов!". Да ли је Пера заиста лажов?

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

18. јануар 2020.

Трећи разред – Б категорија

1. Ако за неки коначан скуп A важи $|A \triangle \mathcal{P}(A)| = 1$, доказати да је $|A| \leqslant 1$.
(Са $X \triangle Y$ означена је *симетрична разлика* скупова X и Y, тј. $X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$.)

2. Претпоставимо да је x природан број такав да бројеви x и x^2 имају исти k-тоцифрени завршетак. Доказати да тада сви степени броја x имају исти k-тоцифрени завршетак.

3. Решити једначину:

$$4\sin^3 x = \sin x + \cos x.$$

4. У једној школи се одржава турнир у стоном тенису. У сваком кругу ученици су распоређени у парове; сваки пар игра меч и победник пролази у следећи круг (нема нерешених мечева). Ако у неком кругу има непаран број ученика, један жребом изабран ученик иде у наредни круг без борбе. Када остане само један ученик, он се проглашава победником и турнир се завршава.

Колико ће укупно мечева бити одиграно, ако је учествовало:

(а) 2020 ученика? (б) n ученика, где је n произвољан природан број?

5. Дат је једнакокраки трапез $ABCD$ са основицом AB и $AB : CD = 2 : 1$. Тачка M је средиште дијагонале AC, а тачка N пресек праве BM и дужи AD. Доказати да је

$$P(ABM) : P(NMCD) = 3 : 2.$$

($P(\mathcal{A})$ означава површину многоугла $\mathcal{A}$.)

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

18. јануар 2020.

Четврти разред – Б категорија

1. Ако котангенси углова неког троугла чине аритметички низ, доказати да онда квадрати страница тог троугла такође чине аритметички низ.

2. Доказати да за природне бројеве a и b важи

$$\text{НЗД}(a,b) + \text{НЗС}(a,b) = a + b$$

ако и само ако је један од бројева a и b дељив другим.

3. Постоји ли полином са целим коефицијентима чија је једна нула $x_1 = \sqrt{2018} + \sqrt{2019}$?

4. Наћи сва решења једначине

$$P(x) = 2x^3 - (5+6i)x^2 + 9ix + 1 - 3i = 0,$$

ако је познато да је бар једно њено решење реално.

5. Пред Марком су три гомиле са 21, 45 и 33 колачића. Он на њима врши измене једног од следећа два типа, једну по једну:

(1°) одабере гомилу са парним бројем колачића (ако таква постоји) и подели је на два једнака дела, или

(2°) споји две гомиле у једну.

Ако Марко успе да направи гомилу са само једним колачићем, сме да га поједе. Може ли он икада појести колачић?

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

$AD(1+2\cos\alpha) = 2AB(1+2\cos\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}$. Према томе, $\frac{1}{2} = (1+2\cos\alpha)\sin\frac{\alpha}{2} = (3-4\sin^2\frac{\alpha}{2})\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{3\alpha}{2}$. Следи да је $\alpha = 20^\circ$ или $\alpha = 100^\circ$, при чему друго решење очигледно отпада.

Дакле, могуће вредности угла BAC су $2\arcsin\frac{1}{4}$, 36° и 20°.

4A.2. Број у i-тој врсти и j-тој колони ($1 \leqslant i \leqslant 3$, $1 \leqslant j \leqslant n$) означићемо са $a_{i,j}$. Додефинисаћемо $a_{i,j} = 0$ за све остале парове индекса i, j.

Нека је $d_{i,0} = d_{i,n+1} = 0$ и $d_{i,j} = a_{i-1,j} - a_{i,j} + a_{i+1,j}$ за $1 \leqslant j \leqslant n$. Услов задатка нам даје

$$d_{i,j-1} - d_{i,j} + d_{i,j+1} = 0 \quad \text{за} \quad 1 \leqslant i \leqslant 3 \ \text{ и } \ 1 \leqslant j \leqslant n \tag{$*$}$$

и важи

$$a_{1,j} = d_{2,j} + d_{3,j}, \quad a_{2,j} = d_{1,j} + d_{2,j} + d_{3,j}, \quad a_{3,j} = d_{1,j} + d_{2,j}.$$

Ако је $d_{1,1} = d_{2,1} = d_{3,1} = 0$, следи да је $d_{i,j} = 0$ и одатле $a_{i,j} = 0$ за све i, j. Према томе, услов задатка се своди на одабир бројева $d_{i,j}$ који нису сви нула и задовољавају $(*)$. Међутим, из $(*)$ следи да низ $d_{i,j}$ $(j = 0, 1, \dots)$ има облик $0, x, x, 0, -x, -x, 0, x, x, 0, \dots$, па како је $d_{i,n+1} = 0$, то може да не буде нула-низ само ако $3 \mid n+1$.

Према томе, одговор су сви бројеви n облика $n = 3k-1$, $k \in \mathbb{N}$.

4A.3. Растојањем даме од ивице зовемо растојање од центра свог тренутног поља до центра најближег ивичног поља. Доказаћемо индукцијом по k да дама која је на растојању $k \geqslant 1$ од ивице има $8 \cdot 9^{k-1}$ начина да стигне до ивице.

Ако је $k = 1$, дама може доћи до ивице потезом у било ком од 8 могућих смерова, што даје 8 начина. Нека је $k > 1$. Дама има 8 начина да стигне до ивице у једном потезу. Осим тога, за свако $i = 1, \dots, k-1$, има 8 начина да стигне до поља које је на растојању i од ивице, а одатле $8 \cdot 9^{i-1}$ начина до ивице. То јој укупно даје $8 + 8\sum_{i=1}^{k-1} 8 \cdot 9^{i-1} = 8 + 8(9^{k-1} - 1) = 8 \cdot 9^k$ начина, чиме је индукција закључена.

Централно поље је на растојању n од ивице, те тада дама има $8 \cdot 9^{n-1}$ начина.

4A.4. Не умањујући општост, претпоставићемо да је НЗД$(a, b, c, d) = 1$.

Сабирањем датих једначина и одузимањем $2(ab + cd)$ од обеју страна добијамо

$$(a-b)^2 + (c-d)^2 = 3(ab + cd).$$

Одавде следи да су $a - b$ и $c - d$ дељиви са 3, а тада је десна страна дељива са 9, тј. $3 \mid ab + cd \equiv a^2 + c^2 \pmod 3$. Међутим, сада и a и c, а самим тим и b и d, морају бити дељиви са 3, што је противно полазној претпоставци.

4A.5. Нека је $a_1 + a_2 + \dots + a_n = x_n a_{n+1}$ за $n \in \mathbb{N}$, где су по услову x_n непарни бројеви. Тада је $x_n a_{n+1} = (a_1 + \dots + a_{n-1}) + a_n = x_{n-1}a_n + a_n = (x_{n-1}+1)a_n$, тј. $a_{n+1} = \frac{x_{n-1}+1}{x_n} \cdot a_n$. Индукцијом следи

$$a_{n+1} = \frac{(x_1+1)(x_2+1)\cdots(x_{n-1}+1)}{x_1 x_2 \cdots x_n} \cdot a_1 = \frac{2^{n-1}}{x_n} \cdot \frac{\frac{x_1+1}{2} \cdot \frac{x_2+1}{2} \cdots \frac{x_{n-1}+1}{2}}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} \cdot a_1.$$

Како је бројилац $x_1 z_2 \cdots x_n$ непаран и бројеви $\frac{x_1+1}{2}, \dots, \frac{x_{n-1}+1}{2}$ цели, следи да $2^{n-1} \mid a_{n+1}$, те је

$$y_n = \frac{x_n a_{n+1}}{2^{n-1}} = a_1 \prod_{i=1}^{n-1} \frac{x_i + 1}{2x_i}$$

природан број. Међутим, како је $\frac{x_i+1}{2x_i} \leqslant 1$ за све i, низ (y_n) не расте, одакле закључујемо да је он почев од неког члана константан. Дакле, за свако довољно велико i, нпр. за $i \geqslant N$, важи $\frac{x_i+1}{2x_i} = 1$, тј. $x_i = 1$, што је еквивалентно са $a_{n+1} = 2a_n$.

1Б.1. Претпоставимо да је $x^2 = 2020\dots202$ за неки природан број x. Број x мора бити паран, тј.

$x = 2y$, па имамо $4y^2 = 2020\dots202$. Дељењем са 2 следи $2y^2 = 1010\dots101$, што је немогуће, јер је лева страна парна, а десна непарна.

Друго решење. Квадрат целог броја увек се завршава једном од цифара 0, 1, 4, 9, 6 или 5. Никад се не завршава цифром 2.

1Б.2. У првом кругу одиграно је 500 мечева (након чега остаје 501 ученик), у другом 250 (остаје 251 ученик), у трећем 125 (остаје 126 ученика), у четвртом 63, а надаље редом $31, 16, 8, 4, 2, 1$ мечева. Укупан број мечева је $500+250+125+63+31+16+8+4+2+1 = 1000$.

Друго решење. У сваком мечу испада по један ученик. Да би остао само један ученик, треба да их испадне 1000, тј. да буде одиграно 1000 мечева.

1Б.3. Ако први монах лаже понедељком, из његове изјаве тада следи да недељом говори истину, што значи да уторком лаже. У том случају изјава другог монаха је истинита, па и он лаже понедељком, што је немогуће. Према томе, први монах заиста јесте лагао у недељу, а пошто у понедељак није лагао, јесте у суботу.

Други монах је у уторак рекао да лаже понедељком. Ако је то истина, онда он лаже и недељом, што је немогуће. Према томе, он је лагао у уторак, а лаже и средом. За трећег монаха остаје као једина могућност да лаже четвртком и петком. Понедељком не лаже ниједан.

1Б.4. Леву страну једнакости означићемо са $\mathcal{L}$, а десну са $\mathcal{R}$. За $X \subseteq U = A \cup B \cup C \cup D$, са $\overline{X} = U \setminus X$ означавамо комплемент скупа X (у односу на U). Тада за $X, Y \subseteq U$ важи $X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$. Користећи познате особине комплемената имамо

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= (A \cup B) \cap \overline{(C \cap D)} \cap \overline{\big((A \cup C) \cap \overline{(B \cap D)}\big)} = (A \cup B) \cap (\overline{C} \cup \overline{D}) \cap \big(\overline{(A \cup C)} \cup (B \cap D)\big) \\
&= (A \cup B) \cap \big[\big((\overline{C} \cup \overline{D}) \cap (\overline{A} \cap \overline{C})\big) \cup \big((\overline{C} \cup \overline{D}) \cap (B \cap D)\big)\big] \\
&= (A \cup B) \cap \big[(\overline{A} \cap \overline{C}) \cup (\overline{C} \cap B \cap D)\big] = \big((A \cup B) \cap (\overline{A} \cap \overline{C})\big) \cup \big((A \cup B) \cap (\overline{C} \cap B \cap D)\big) \\
&= (\overline{C} \cap B \cap \overline{A}) \cup (\overline{C} \cap B \cap D) = (\overline{C} \cap B) \cap (\overline{A} \cup D) = (B \setminus C) \cap \overline{(A \setminus D)} = \mathcal{R}.
\end{aligned}$$

Друго решење. Једнакост доказујемо помоћу таблице припадности:

A	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
B	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
C	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
D	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
$A \cup B$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$C \cap D$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$A \cup C$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$B \cap D$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
$(A \cup B) \setminus (C \cap D)$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$
$(A \cup C) \setminus (B \cap D)$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\boldsymbol{\mathcal{L}}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$B \setminus C$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$A \setminus D$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\boldsymbol{\mathcal{R}}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$

1Б.5. Подсетимо се да је троугао са страницама a, b и c, где је $a \leqslant b \leqslant c$:

- оштроугли ако је $a^2 + b^2 > c^2$;
- правоугли ако је $a^2 + b^2 = c^2$;
- тупоугли ако је $a^2 + b^2 < c^2$.

Означимо са P површину датог троугла, а са a, b и c редом странице које одговарају висинама 5, 4 и 3. Тада је $5 \cdot a = 4 \cdot b = 3 \cdot c = 2P$, тј. $a = \frac{2P}{5}$, $b = \frac{2P}{4}$ и $c = \frac{2P}{3}$. При томе је $a < b < c$. Како је

$$a^2 + b^2 = \frac{4P^2}{25} + \frac{4P^2}{16} = \frac{41P^2}{100} < \frac{4P^2}{9} = c^2,$$

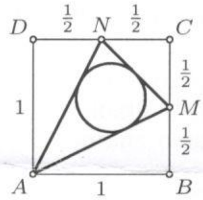
дати троугао је тупоугли.

2Б.1. Веће је 4^{100}. Заиста, $2^{100} + 3^{100} < 2 \cdot 3^{100} < \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot 3^{100} < \left(\frac{4}{3}\right)^{100} \cdot 3^{100} = 4^{100}$.

2Б.2. Са $P_{\mathcal{A}}$ означаваћемо површину многоугла $\mathcal{A}$, а са $O_{\mathcal{A}}$ његов обим.

По Питагориној теореми је $AM = AN = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ и $MN = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, па је $O_{AMN} = \frac{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}$, док је $P_{AMN} = P_{ABCD} - P_{AMB} - P_{AND} - P_{CMN} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$. Следи да је

$$r = \frac{2P_{AMN}}{O_{AMN}} = \frac{3/2}{2\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{12}.$$



2Б.3. Апсциса x пресечне тачке задовољава једначину $3x - m = (m+1)x^2 + x + 1$, тј.

$$(m+1)x^2 - 2x + m + 1 = 0. \tag{$*$}$$

Дакле, ова једначина треба да има само једно реално решење.

(1°) Ако је $m \neq -1$, онда дискриминанта $D = 4 - 4(m+1)^2$ једначине $(*)$ мора да буде нула, одакле је $m = 0$ или $m = -2$.

За $m = 0$ дате функције су $y = 3x$ и $y = x^2 + x + 1$, а додирна тачка $(1, 3)$;

за $m = -2$ то су $y = 3x + 2$ и $y = -x^2 + x + 1$, а додирна тачка $(-1, -1)$.

(2°) Ако је $m = -1$, дате функције су $y = 3x + 1$ и $y = x + 1$, а (једини) пресек тачка $(0, 1)$.

Према томе, одговор је $m \in \{-2, -1, 0\}$.

2Б.4. Означимо $d = \text{НЗД}(a, b)$ и $a = da_1$, $b = db_1$, при чему је $\text{НЗД}(a_1, b_1) = 1$. Тада је $\text{НЗС}(a, b) = da_1b_1$, па дата једначина постаје $da_1b_1 - d = 2019$, тј. $d(a_1b_1 - 1) = 2019 = 3 \cdot 673$ (број 673 је прост). Имамо следеће могућности.

(1°) $d = 1$, $a_1b_1 = 2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Пошто је $\text{НЗД}(a_1, b_1) = 1$, пар $(a_1, b_1) = (a, b)$ може бити $(2020, 1)$, $(505, 4)$, $(404, 5)$ или $(101, 20)$.

(2°) $d = 3$, $a_1b_1 = 674 = 2 \cdot 337$. Пар (a_1, b_1) може бити $(674, 1)$ или $(337, 2)$, а одговарајући парови (a, b) су $(2022, 3)$ и $(1011, 6)$.

(3°) $d = 673$, $a_1b_1 = 4$. Мора бити $(a_1, b_1) = (4, 1)$, па је $(a, b) = (2692, 673)$.

(4°) $d = 2019$, $a_1b_1 = 2$. Мора бити $(a_1, b_1) = (2, 1)$, па је $(a, b) = (4038, 2019)$.

Укупно има 8 решења: $(2020, 1)$, $(505, 4)$, $(404, 5)$, $(101, 20)$, $(2022, 3)$, $(1011, 6)$, $(2692, 673)$ и $(4038, 2019)$.

2Б.5. Истинитост изјаве се мења само приликом оглашавања лажљивог папагаја. Приликом 2019 изјава након прве (закључно са 2020-том) сваки папагај (па и лажљиви) би се огласио тачно $\frac{2019}{3} = 673$ пута, те ће 2020-та изјава представљати негацију прве - "Пера није лажов". Међутим, то значи да је папагај који је изрекао 2020-ту изјаву негирао 2019-ту, те је он лажов, а то је исти онај папагај који је започео игру.

Остаје да приметимо да Пера није онај који је започео игру. Наиме, Пера за себе не би рекао да је лажов, био он лажов или не. Према томе, Пера није лажов.

3Б.1. Ако је $|A| = k$, онда је $|\mathcal{P}(A)| = 2^k$ и одатле $1 = |\mathcal{P}(A) \setminus A| \geqslant |2^k - k|$.

Међутим, за $k \geqslant 2$ важи $2^k - k \geqslant 2$. Ово се лако доказује индукцијом по k, јер је $2^2 - 2 = 2$ и $2^{k+1} - (k+1) = (2^k - k) + (2^k - 1) > 2^k - k$ за све k. Према томе, $k \geqslant 2$ је немогуће, те мора бити $k \leqslant 1$.

3Б.2. По услову задатка је разлика $x^2 - x$ дељива са 10^k. Следи да је, за свако $n = 2, 3, \dots$, разлика $x^{n+1} - x^n = x^{n-1}(x^2 - x)$ такође дељива са 10^k, што значи да бројеви x^n и x^{n+1} имају исти k-тоцифрени завршетак. Одавде следи (нпр. индукцијом по n) да сви бројеви $x, x^2, x^3, x^4, \dots$ имају исти k-тоцифрени завршетак.

3Б.3. Из дате једначине квадрирањем следи $(4\sin^3 x - \sin x)^2 = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, што након развијања даје једначину по $\sin x$:

$$0 = 16\sin^6 x - 8\sin^4 x + 2\sin^2 -1 = (2\sin^2 x - 1)(8\sin^4 x + 1).$$

Други фактор је строго позитиван, па мора бити $2\sin^2 x - 1 = 0$, тј. $\sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(1°) У случају $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ полазна једначина даје $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, тј. $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;

(2°) у случају $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ полазна једначина даје $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, тј. $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Према томе, опште решење је $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Друго решење. Дељењем са $\cos x$ дату једначину можемо записати као $\operatorname{tg} x(4\sin^2 x - 1) = 1$. Како је $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1}$, одавде добијамо еквивалентну једначину по $\operatorname{tg} x$:

$$\operatorname{tg} x\left(\frac{4\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} - 1\right) = 1, \quad \text{тј.} \quad 3\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 1 = 0,$$

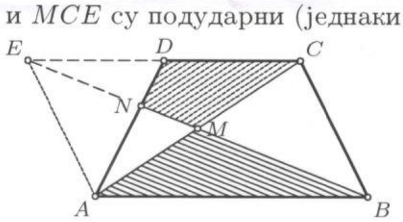
што се факторише као $(\operatorname{tg} x - 1)(3\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x + 1) = 0$. Једино реално решење је $\operatorname{tg} x = 1$, тј. $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$.

3Б.4. (б) У сваком мечу испада по један ученик. Да би остао само један ученик, треба да их испадне $n-1$, тј. да буде одиграно $n-1$ мечева.

Одавде следи и део (а): за $n = 2020$ биће одиграно 2019 мечева.

Друго решење дела (а). У првом кругу бива одиграно 1010 мечева, а пролази 1010 ученика. У другом кругу биће одиграно 505 мечева и остаће исто толико ученика. У наредним круговима биће одиграно редом 252, 126, 63, 32, 16, 8, 4, 2 и 1 мечева, што је укупно 2019.

3Б.5. Нека се праве BM и CD секу у тачки E. Троуглови MAB и MCE су подударни (једнаки углови и $MA = MC$), па је $CE = AB = 2CD$, тј. $DE = CD$. Следи да је тачка N тежиште троугла ACE, па је $EN = \frac{2}{3}EM$.



Ако је сада $P(MAB) = P(MCE) = P$, имамо $P(EDN) = \frac{2}{3}P(EDM) = \frac{1}{3}P(ECM) = \frac{1}{3}P$ и $P(CDNM) = P(ECM) - P(EDN) = \frac{2}{3}P$, одакле следи тврђење.

4Б.1. Углове троугла означавамо уобичајено са α, β, γ, а странице наспрам њих редом a, b, c. По косинусној теореми је $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, а по синусној $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$. Одавде је

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{R}{2abc}(b^2+c^2-a^2) \quad \text{и слично} \quad \operatorname{ctg}\beta = \frac{R}{2abc}(c^2+a^2-b^2), \ \operatorname{ctg}\gamma = \frac{R}{2abc}(a^2+b^2-c^2).$$

Сада, ако је нпр. $\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha$, тј. $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma = 2\operatorname{ctg}\beta$, множењем са $\frac{2abc}{R}$ добијамо $(b^2+c^2-a^2) + (a^2+b^2-c^2) = 2(c^2+a^2-b^2)$, тј. $a^2 + c^2 = 2b^2$, па a^2, b^2 и c^2 заиста чине аритметички низ.

4Б.2. Означимо $d = \text{НЗД}(a,b)$ и $a = da_1$, $b = db_1$, при чему је $\text{НЗД}(a_1,b_1) = 1$. Тада је $\text{НЗС}(a,b) = da_1b_1$, па дата једнакост постаје

$$da_1b_1 + d = da_1 + db_1, \quad \text{тј.} \quad 0 = da_1b_1 - da_1 - db_1 + d = d(a_1-1)(b_1-1).$$

Следи да је $a_1 = 1$ или $b_1 = 1$, тј. $a = d \mid b$ или $b = d \mid a$.

4Б.3. Приметимо да је $\left(x_1 - \sqrt{2018}\right)^2 = 2019$, тј. $x_1^2 - 1 = 2x_1\sqrt{2018}$.
Квадрирањем добијамо $(x_1^2-1)^2 - 4 \cdot 2018x_1^2 = x_1^4 - 8074x_1^2 + 1 = 0$, па је x_1 нула полинома

$$P(x) = x^4 - 8074x^2 + 1.$$

Напомена. Четири нуле добијеног полинома $P(x)$ су $x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{2018} \pm \sqrt{2019}$.

4Б.4. Нека је x_1 реално решење дате једначине. Имагинарни део броја $P(x_1)$ је $-6x_1^2 + 9x_1 - 3$, па је $0 = -6x_1^2 + 9x_1 - 3 = -3(2x_1-1)(x_1-1)$, одакле следи $x_1 = 1$ или $x_1 = \frac{1}{2}$. Лако се проверава да је заиста $P(\frac{1}{2}) = 0$, те је $x_1 = \frac{1}{2}$. Сада дељењем са $2x - 1 = 2(x - \frac{1}{2})$ налазимо

$$P(x) = (2x-1)\big(x^2 - (2+3i)x - 1 + 3i\big).$$

Остаје да се реши једначина $f(x) = x^2 - (2+3i)x - 1 + 3i = 0$. Допуњавањем до квадрата добијамо $f(x) = \left(x - 1 - \frac{3}{2}i\right)^2 + \frac{1}{4}$, одакле следи $\left(x - 1 - \frac{3}{2}i\right)^2 = -\frac{1}{4}$, тј. $x = 1 + \frac{3}{2}i \pm \frac{1}{2}i$.
Тако добијамо сва три решења: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1 + i$ и $x_3 = 1 + 2i$.

Напомена. Једначина $f(x) = 0$ се може решити и применом уобичајене формуле за решења квадратне једначине: $x_{2,3} = \frac{2+3i+\sqrt{(2+3i)^2-4(3i-1)}}{2} = \frac{2+3i\pm\sqrt{-1}}{2} = \frac{2+3i\pm i}{2}$. Ипак, то је у овом решењу избегнуто јер, строго узевши, квадратни корен на скупу $\mathbb{C}$ није дефинисан.

4Б.5. Гомилу на којој је број колачића дељив са три назваћемо *тројном*.

У почетном стању све гомиле су тројне. Ово својство ће заувек остати на снази. Заиста, поделом тројне гомиле на два једнака дела, као и спајањем двеју тројних гомила, опет се добијају тројне гомиле. Како "гомила" са само једним колачићем није тројна, Марко је неће моћи направити.

	ПРВИ РАЗРЕД ПРЕЗИМЕ И ИМЕ	ШКОЛА	**ЗАДАЦИ**					**З Б И Р**	**ПЛАСМАН**
			1	**2**	**3**	**4**	**5**		
1	Ђерић Лана	Гимназија "Урош Предић" Панчево	20	20	20	20	15	95	I
2	Слијепчевђ Михајло	Гимназија "Урош Предић" Панчево	20	20	20	20	5	85	I
3	Станојковић Александар	Гимназија "Урош Предић" Панчево	20	20	20	0	20	80	I
4	Илијевски Бојан	Гимназија "Урош Предић" Панчево	20	20	20	0	15	75	II
5	Серафимовић Илија	Гимназија "Урош Предић" Панчево	15	20	20	0	18	73	II
6	Мучибабић Дамјан	Гимназија "Урош Предић" Панчево	20	20	5	20	5	70	II
7	Мајкић Јана	Гимназија "Урош Предић" Панчево	20	20	5	20	0	65	III
8	Јовановић Богдан	ЕТШ "Никола Тесла"	20	20	20	0	0	60	III
9	Рођан Александра	Гимназија "Урош Предић" Панчево	20	20	20	0	0	60	III
10	Катић Аликсандар	Гимназија "Урош Предић" Панчево	2	20	20	5	5	52	Похвала
11	Стефановић Јована	Гимназија "Урош Предић" Панчево	2	20	20	0	5	47	Похвала
12	Миленовић Павле	Гимназија "Урош Предић" Панчево	0	20	20	5	0	45	Похвала
13	Блаж Емилија	ЕТШ "Никола Тесла"	0	20	20	0	0	40	Похвала
14	Дамјановић Игор	ЕТШ "Никола Тесла"	0	20	5	0	5	30	
15	Јокић Милутин	Гимназија "Урош Предић" Панчево	0	10	20	0	0	30	
16	Чижик Игор	ЕТШ "Никола Тесла"	0	20	0	0	0	20	
17	Додевски Ена	ЕТШ "Никола Тесла"	0	10	0	0	0	10	

	ДРУГИ РАЗРЕД ПРЕЗИМЕ И ИМЕ	ШКОЛА	**ЗАДАЦИ**					**З Б И Р**	**ПЛАСМАН**
			1	**2**	**3**	**4**	**5**		
1	Ранковић Филип	Гимназија "Урош Предић"	20	20	0	15	20	75	I
2	Томановић Ања	Гимназија "Урош Предић"	20	5	15	10	20	70	I
3	Тршек Мина	Гимназија "Урош Предић"	20	20	0	5	20	65	II
4	Милованов Марко	ЕТШ "Никола Тесла"	20	10	0	15	20	65	II
5	Нешковић Наташа	Гимназија "Урош Предић"	20	20	0	0	20	60	II
6	Трајковић Лука	ЕТШ "Никола Тесла"	20	15	0	5	10	50	III
7	Ђошић Милош	ЕТШ "Никола Тесла"	20	15	15	0	0	50	III
8	Пешко Јана	Гимназија "Урош Предић"	20	15	0	5	0	40	Похвала
9	Цуканић Вељко	ЕТШ "Никола Тесла"	20	0	0	0	20	40	Похвала
10	Ђордан Михаило	Гимназија "Урош Предић"	20	10	0	0	0	30	
11	Јеремић Милош	ЕТШ "Никола Тесла"	20	5	0	0	0	25	
12	Гвозденовић Селена	Гимназија "Урош Предић"	0	15	0	0	0	15	
13	Павловић Дејан	ЕТШ "Никола Тесла"	0	15	0	0	0	15	
								0	

	ТРЕЋИ РАЗРЕД ПРЕЗИМЕ И ИМЕ	ШКОЛА	ЗАДАЦИ					З Б И Р	ПЛАСМАН
			1	2	3	4	5		
1	Алексић Андреа	Гимназија "Урош Предић" Панчево	5	20	0	15	20	60	I
2	Јанковић Даница	Гимназија "Урош Предић" Панчево	0	20	0	15	0	35	II
3	Ђуретановић Давид	Гимназија "Урош Предић" Панчево	0	2	20	10	0	32	III
4	Милтеновић Филип	Гимназија "Урош Предић" Панчево	0	5	15	5	2	27	Похвала
5	Чаковач Наталија	Гимназија "Урош Предић" Панчево	0	2	20	2	2	26	Похвала
6	Антић Ана	ЕТШ "Никола Тесла" Панчево	0	2	15	5	0	22	Похвала
7	Весели Јарослав	ЕТШ "Никола Тесла" Панчево	0	0	2	15	0	17	
8	Гроздић Александар	ЕТШ "Никола Тесла" Панчево	0	0	0	15	0	15	
9	Ракић Светлана	Гимназија "Урош Предић" Панчево	0	0	5	5	0	10	
10	Спасић Анастасија	ЕТШ "Никола Тесла" Панчево	0	5	0	2	0	7	
11	Ристовски Огњен	ЕТШ "Никола Тесла" Панчево	0	0	0	5	0	5	
12	Младеновић Милан	ЕТШ "Никола Тесла" Панчево	0	0	0	5	0	5	

	ЧЕТВРТИ РАЗРЕД ПРЕЗИМЕ И ИМЕ	ШКОЛА	ЗАДАЦИ					З Б И Р	ПЛАСМАН
			1	2	3	4	5		
1	Етински Едвард Габријел	Гимназија "Урош Предић"	10	10	0	20	20	60	I
2	Секуловић Милош	Гимназија "Урош Предић"	2	10	5	15	20	52	II
3	Бакурски Аранђел	Гимназија "Урош Предић"	0	10	0	20	20	50	II
4	Станковић Огњен	Гимназија "Урош Предић"	0	10	0	15	20	45	III
5	Вукасовић Сергеј	Гимназија "Урош Предић"	0	10	0	15	20	45	III
6	Лабус Никола	ЕТШ "Никола Тесла"	0	10	0	20	10	40	Похвала
7	Котур Софија	Гимназија "Урош Предић"	0	10	5	0	20	35	Похвала
8	Ивана Гојсовић	Гимназија "Урош Предић"	0	0	0	0	20	20	
9	Месарош Давид	ЕТШ "Никола Тесла"	0	0	0	0	5	5	
10									
11									
12									
13									
14									