Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

5. фебруар 2023.

Први разред - Б категорија

1. Дат је скуп $X = \{aca, konac, lopte, loto, prst\}$ и на том скупу две релације ϱ_1 и ϱ_2, које су дефинисане захтевом:

$$x \,\varrho_1\, y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{речи} \quad x \text{ и } y \quad \text{су исте дужине,}$$

$$x \,\varrho_2\, y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{речи} \quad x \text{ и } y \quad \text{се завршавају истим словом.}$$

(а) Да ли су дате релације рефлексивне, симетричне, антисиметричне и транзитивне?

(б) За сваку од релација ϱ_1 и ϱ_2 испитати да ли је релација еквиваленције, односно, да ли је иста релација поретка. У случају да је нека од њих релација еквиваленције, наћи све класе еквиваленције.

2. Одредити збир свих природних бројева n таквих да је број

$$\frac{n^2 + 2n + 51}{n^2 + 4n + 3}$$

такође природан.

3. Дат је једнакокраки троугао ABC са основицом AB. Симетрала крака BC сече праву AB у тачки D. На правој CD дата је тачка E тако да је $CE = AD$, при чему се тачка C налази између тачака D и E. Доказати да је троугао DBE једнакокраки.

4. У купеу једног старог воза налазе се две клупе, са по пет места, окренуте једна према другој. Од десет путника који треба да буду смештени у тај купе, њих четворо желе да седе у смеру кретања, док троје од њих желе да седе у смеру супротном од кретања воза. Преосталим путницима смештеним у поменути купе није важна позиција места за седење. На колико начина је могуће тих десет путника сместити у купе, тако да се нико не буни?

5. У скупу реалних бројева наћи сва решења једначине

$$\left|\frac{1}{2x}\right| + \left|\frac{2x-1}{2x}\right| + \left|\frac{2x-2}{2x}\right| = \frac{4}{3}.$$

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

5. фебруар 2023.

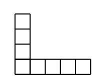
Други разред - Б категорија

1. Назовимо реалан број d *добрим* ако је за сваки реалан број x испуњено
$$\frac{2x^2 - 14x + 27}{x^2 - 7x + 13} \leqslant d.$$

   (а) Доказати да је број 8 добар.
   (б) Наћи све добре бројеве.

2. У зависности од реалног параметра a дискутовати колико решења има једначина
$$\Big| |x^2 + 7x + 6| - (x^2 + 7x + 10) \Big| = a.$$

3. Дат је троугао ABC. Нека су K_a, K_b и K_c квадрати конструисани у спољасњости троугла ABC над страницама BC, CA и AB, редом. Кружнице описане око квадрата K_b и K_c се секу у тачкама A и L. Доказати да права AL садржи пресек дијагонала квадрата K_a.

4. На колико начина можемо да упишемо бројеве $1, 2, \dots 8$ у поља фигуре са слике , тако да је сваки од бројева уписан у тачно једно поље фигуре и да, ако је број записан испод неког броја, онда је он већи од тог броја изнад њега, као и да број који је записан десно од неког броја мора бити мањи од броја који је непосредно лево од њега?

5. Да ли постоје природни бројеви a, b и c такви да је вредност израза $(a+b)(b+c)(c+a)$ једнака:

   (а) 2023^{2024};
   (б) 2024^{2023}?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

5. фебруар 2023.

Трећи разред - Б категорија

1. Поређати бројеве $a = \sin 2023^\circ$, $b = \sin 4046^\circ$, $c = \cos 2023^\circ$ и $d = \cos 4046^\circ$ по величини, тј. од најмањег ка највећем.

2. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\begin{vmatrix} 2023 & x+3 & 1+x \\ 4046 & 3x+6 & 4+x \\ 6069 & x+7 & 5+6x \end{vmatrix} \leqslant 0.$$

3. Дат је разнострани тангентни четвороугао $ABCD$ у коме је $AB = 2$ и $BC = 4$. Ако је унутрашњи угао у темену B тог четвороугла оштар и ако су дужине дијагонале AC и страница CD и DA три узастопна природна броја, не обавезно тим редом, одредити $\measuredangle CAD$.

4. Наћи максималан број елемената скупа $\{1, 2, \cdots, 13\}$ које можемо изабрати тако да међу изабранима не постоје нека три, рецимо a, b и c, $a \neq b$, тако да $a - b \mid c$.

5. У групи од 2023 ученика сваки од њих или увек говори истину или увек лаже. Познато је да сваки ученик зна којој категорији припада он сам, а којој припадају остали ученици, као и да се свих 2023 ученика могу, један иза другог, распоредити у ред тако да свако, осим првог у реду, може да саопшти: "Ја сам из лажова." Колико таквих редова, од 2023 ученика, је у том случају могуће направити?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

5. фебруар 2023.

Четврти разред - Б категорија

1. У четвороуглу $ABCD$ важи да $AB||CD$. Доказати да важи
$$\frac{PA}{PB} = \left(\frac{PD}{PC}\right)^2,$$
где је P тачка на страници AB таква да је $\measuredangle DAB = \measuredangle DPC = \measuredangle CBA$.

2. Нека је a највећа вредност функције $y = \sin(\sin x)$, $x \in \mathbb{R}$, а b однос најдуже странице и пречника описане кружнице око троугла чије су странице дужина 7, 8 и 13. Шта је веће a или b?

3. Ако је $\log 2 = a$ и $\log 3 = b$, одредити $\log_5 216$ у функцији од a и b ($\log x = \log_{10} x$, $x > 0$).

4. Наћи максималан број елемената скупа $\{1, 2, \cdots, 23\}$ које можемо изабрати тако да међу изабранима не постоје нека три, рецимо a, b и c, $a \neq b$, тако да $a - b \mid c$.

5. На колико начина на класичну шаховску таблу можемо на различита поља распоредити белог и црног краља тако да се не нападају?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.
Решења задатака детаљно образложити.

Друштво математичара Србије

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред - Б категорија

1. (а) На скупу $X = \{aca, konac, lopte, loto, prst\}$ релација

$$x\,\varrho_1\,y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{речи} \quad x \text{ и } y \quad \text{су исте дужине}$$

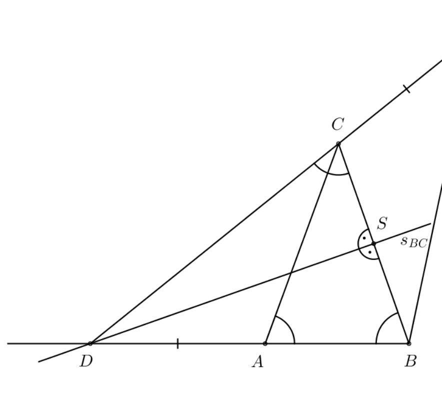
је релација еквиваленције, што се тривијално провери, али није релација поретка, јер очигледно није антисиметрична. Класе еквиваленције релације ϱ_1, на скупу X, су: $\{aca\}$, $\{loto, prst\}$ и $\{konac, lopte\}$.
(б) На истом скупу X, релација

$$x\,\varrho_2\,y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{речи} \quad x \text{ и } y \quad \text{се завршавају истим словом}$$

је уједно и релација еквиваленције и релација поретка, јер у скупу X не постоје две речи које се завршавају истим словом, те се релација ϱ_2 своди на једнакост. Класе еквиваленције су тада једночлани скупови $\{aca\}$, $\{konac\}$, $\{lopte\}$, $\{loto\}$ и $\{prst\}$.

2. Растављањем датог разломка добијамо $\dfrac{n^2+2n+51}{n^2+4n+3} = 1+2\dfrac{24-n}{n^2+4n+3}$. Дакле, треба да одредимо све природне бројеве n тако да n^2+4n+3 дели $24-n$, као и да је број $1+2\dfrac{24-n}{n^2+4n+3}$ такође природан. Прво закључујемо да $\dfrac{24-n}{n^2+4n+3} = \dfrac{24-n}{(n+3)(n+1)} \geqslant 0$, па је $n \leqslant 24$. За $n = 24$ важе услови задатка. Провером се тривијално проверава да природни бројеви 1 и 2 не задовољавају услове. За $n \geqslant 3$ ће важити да је $n^2+4n+3 \geqslant 24$, док је $24-n \leqslant 21$, па не може важити да $n^2+4n+3 \mid 24-n$. Дакле, једино решење је $n = 24$, колики је тражени збир.

3. Нека је S средиште крака BC и s_{BC} симетрала истог. Троуглови DBS и DSC су



подударни, на основу става СУС ($BS = SC$, $\sphericalangle DSB = 90^\circ = \sphericalangle DSC$, $DS = DS$). Из ове подударности следи да је $DB = DC$ и $\sphericalangle DBS = \sphericalangle DCS$. Са друге стране, $\sphericalangle DBS = \sphericalangle ABC = \sphericalangle CAB$, зато што је ABC једнакокраки троугао. Како је $\sphericalangle ECB = 180^\circ - \sphericalangle DCS = 180^\circ - \sphericalangle DBS = 180^\circ - \sphericalangle CAB = \sphericalangle DAC$, добијамо, на основу става СУС, да су троуглови DAC и CBE подударни ($AD = CE$, $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ECB$, $AC = BC$). Из подударности ових троуглова следи да је $DC = BE$, а с обзиром да је је $DB = DC$, добија се да је $BE = DB$, одакле произилази да је троугао DBE једнакокраки.

4. Четворо путника, који ыхеле да седе у правцу кретања воя, моыхемо распоредити на $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ начина, док троје њих, који ћ седети са супротне стране купеа, можемо сместити на $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ начина. Преостала три путника можемо распоредити било где, тј. на $3! = 6$ начина. Дакле, укупан број размештаја је $120 \cdot 60 \cdot 6 = 43200$ начина.

Напомена. Задатак смо могли да урадимо и директно. Наиме, четири путника, који би седели у правцу кретања воза, треба да распоредимо на 5 могућих места. Укупан број таквих могућности је $4! \cdot \binom{5}{4} = 24 \cdot 5 = 120$. За сваку такву могућност, троје путника, на супротну страну, можемо сместити, аналогно, на $3! \cdot \binom{5}{3} = 6 \cdot 10 = 60$ начина. Дакле, укупан број могућности је $3! \cdot 120 \cdot 60 = 43200$, јер преостала три путника можемо сместити на $3! = 6$ начина.

5. Разликоваћмо четири случаја.
1° $x < 0$:

Једначина постаје $-\dfrac{1}{2x} + \dfrac{2x-1}{2x} + \dfrac{2x-2}{2x} = \dfrac{4}{3}$, тј. $\dfrac{4x-4}{2x} = \dfrac{4}{3}$, тј. $x = 3$, што није решење у овом случају.
2° $0 < x \leqslant \dfrac{1}{2}$:

Једначина постаје $\dfrac{1}{2x} - \dfrac{2x-1}{2x} - \dfrac{2x-2}{2x} = \dfrac{4}{3}$, тј. $\dfrac{-4x+4}{2x} = \dfrac{4}{3}$, тј. $x = \dfrac{3}{5}$, што, такође, није решење у овом случају.
3° $\dfrac{1}{2} < x \leqslant 1$:

Једначина постаје $\dfrac{1}{2x} + \dfrac{2x-1}{2x} - \dfrac{2x-2}{2x} = \dfrac{4}{3}$, тј. $\dfrac{2}{2x} = \dfrac{4}{3}$, тј. $x = \dfrac{3}{4}$, што јесте решење у овом случају.
4° $x > 1$:

Једначина постаје $\dfrac{1}{2x} + \dfrac{2x-1}{2x} + \dfrac{2x-2}{2x} = \dfrac{4}{3}$, тј. $\dfrac{4x-2}{2x} = \dfrac{4}{3}$, тј. $x = \dfrac{3}{2}$, што јесте решење у овом случају.

Дакле, једина решења су $x = \dfrac{3}{4}$ или $x = \dfrac{3}{2}$.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Други разред - Б категорија

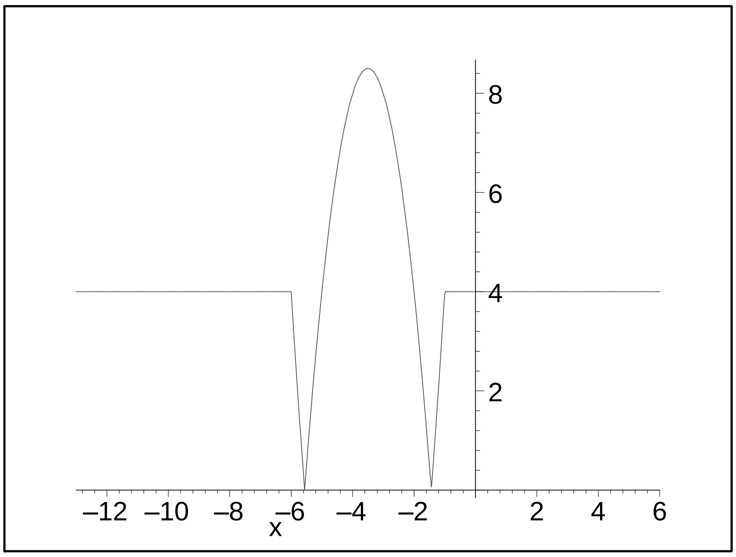
1. (a) За $d = 8$ треба да покажемо да је $\dfrac{2x^2 - 14x + 27}{x^2 - 7x + 13} - 8 \leqslant 0$ за све реалне бројеве x.
То се своди на $\dfrac{-6x^2 + 42x - 77}{x^2 - 7x + 13} \leqslant 0$, тј. на $\dfrac{6x^2 - 42x + 77}{x^2 - 7x + 13} \geqslant 0$. За обе квадратне функције је $D < 0$ (-84 и -3), а како су коефицијенти уз x^2 позитивни то важи и $6x^2 - 42x + 77 \geqslant 0$ и $x^2 - 7x + 13 \geqslant 0$, па смо показали да важи и $\dfrac{2x^2 - 14x + 27}{x^2 - 7x + 13} - 8 \leqslant 0$, тј. да је број $d = 8$ "добар".

б) Слично као у претходном делу задатка, неједнакост $\dfrac{2x^2 - 14x + 27}{x^2 - 7x + 13} - d \leqslant 0$ се своди на

$$\frac{(d-2)x^2 + (14 - 7d)x + (13d - 27)}{x^2 - 7x + 13} \geqslant 0.$$

За квадратну функцију $x^2 - 7x + 13$ смо већ показали да је увек позитивна, а $(d-2)x^2 + (14 - 7d)x + (13d - 27)$ је увек ненегативна ако је њен коефицијент $A = d - 2 > 0$, а дискриминанта $D = -3d^2 + 16f - 20 \leqslant 0$. Имамо да $A = d - 2 > 0$ важи за $d > 2$, док је $D = -3d^2 + 16f - 20 \leqslant 0$ за $d \in (-\infty, 2) \cup (\frac{10}{3}, +\infty)$, па то важи за $d \in (\frac{10}{3}, +\infty)$.
Остаје још да се провери за $d = 2$ шта се дешава јер тад немамо у бројиоцу квадратну функцију. Тад треба да важи $\dfrac{2x^2 - 14x + 27}{x^2 - 7x + 13} \leqslant 2$, што се своди на $\dfrac{-1}{x^2 - 7x + 13} - 8 \geqslant 0$, што је увек негативно (а треба да буде позитино). Зато $d = 2$ не укључујемо у решење.

2. За $a < 0$ и $a > \frac{17}{2}$ нема решења, док за $a = \frac{17}{2}$ има једно решење. За $a = 0$ и $4 < a < \frac{17}{2}$ има два решења, али за $0 < a < 4$ налазимо да једначина има четири решења. КОначно, за $a = 4$ има бесконачно много решења. На слици је дат график функције $f(x) = \big||x^2 + 7x + 6| - (x^2 + 7x + 10)\big|$.



3. Приметимо да је $\sphericalangle ALC = \sphericalangle ALB = 135°$, тако да је $\sphericalangle BLC = 90°$. Следи да је AL симетрала угла BLC. Нека је X пресек дијагонала квадрата K_a. Тада је четвороугао $BLCX$ тетиван и $BX = CX$, па је LX симетрала угла BLC. Дакле, A, L, X су колинеарне.

4. У ћошку мора да буде највећи број, тј. 8. Када изаберемо којих три броја су изнад њега, њих морамо да ставимо од већих ка мањим на горе, а преоста четири броја треба да стављамо слева у десно, исто од већих ка мањим. Дакле, избором која три броја су изнад постављеног у ћошку све је одређено, а то можемо да урадимо на $\binom{7}{3} = 35$ начина.

5. (а) Такви бројеви не постоје. Заиста, како је $(a+b)+(b+c)+(c+a) = 2(a+b+c)$ паран број, барем један од бројева $a+b, b+c$ и $c+a$ је паран, па је њихов производ такође паран број.
(б) Такви бројеви постоје. Ставимо да је, на пример, $(a+b) = (c+a) = 2024^{1011}$ и $b+c = 2024$. Тада је $b = c = 1012$, али и $a = 2024^{1011} - 1012$.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Трећи разред - Б категорија

1. Како је $2023 = 5\cdot 360 + 223 = 22\cdot 90 + 43$ и $4046 = 11\cdot 360 + 86$ имамо да је $a = \sin 2023^\circ = -\sin 43^\circ$, $b = \sin 4046^\circ = \sin 86^\circ$, $c = \cos 2023^\circ = -\cos 43^\circ$ и $d = \cos 4046^\circ = \cos 86^\circ$. Даље, како је за $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ функција синус растућа функција, а косинус опадајућа и како је $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$ имамо $0 < d = \cos 86^\circ < \cos 45^\circ = \sin 45^\circ < \sin 86^\circ = b$. Слично добијамо и да је $c = -\cos 43^\circ < -\cos 45^\circ = -\sin 45^\circ < -\sin 43^\circ = a < 0$.
Коначно, дати бројеви поређани по величини од мањих ка већим су: $c < a < 0 < d < b$.

2. Ако прву врсту помножимо са -2 и додамо другој врсти и помножимо са -3 и додамо трећој добијамо: $\begin{vmatrix} 2023 & x+3 & 1+x \\ 4046 & 3x+6 & 4+x \\ 6069 & x+7 & 5+6x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2023 & x+3 & 1+x \\ 0 & x & 2-x \\ 0 & -2x-2 & 2+3x \end{vmatrix} = 2023(x^2+4x+4) =$ $2023(x+2)^2 \leqslant 0$, што важи само за $x = -2$.

3. Према косинусној теореми, примењеној на ΔABC, налазимо да је

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cos\angle ABC < AB^2 + BC^2 = 20$$

$$AC^2 > AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC = 4,$$

где прву неједнакост добијамо јер је $\angle ABC$ оштар, па је његов косинус позитиван. Према томе, $2 < AC < 2\sqrt{5}$, па је $AC = 3$ или $AC = 4$, због тога што је дужина AC природан број.

С друге стране, из услова тангентности $ABCD$ налазимо $AB + CD = BC + DA$, односно $CD - DA = BC - AB = 2$, па дужина дијагонале AC мора бити средњи од три узастопна природна броја. Ако је $AC = 3$, налазимо $CD = 4$ и $DA = 3$ што није могуће због различитости дужина страница четвороугла. Ако је, пак, $AC = 4$, налазимо $CD = 5$ и $DA = 3$, па у ΔCAD важи $CD^2 = 25 = 16 + 9 = AC^2 + AD^2$, те је према Питагориној теореми он правоугли, односно $\sphericalangle CAD = 90^\circ$.

4. Одговор: 7.
Приметимо да ако изабаремо бројеве $1, 3, \cdots, 13$, сви су непарни, тако да је разлика $a - b$ парна, те тада она никад не може да дели c јер је и он непаран.
Ако изаберемо 8 бројева, онда ће морати да постоје нека два, рецимо a и b, $a > b$, које смо изабрали и који су суседни, односно за које је $a - b = 1$, па за било које c које изаберемо ће важити $a - b | c$.

5. Свака особа ће рећи за особу испред себе да је лажов ако и само ако те две особе су из различите групе (лажови и истинољубци). Нумеришимо редове, од почетка до краја, са 1,2,...,2023. Једну групу чине људи на парним, а други на непарним местима. Због непарности броја 2023, те две групе имају различит број чланова и ако је на једном распореду на парним, на свим осталима је, такође, је на парним местима. Исто важи и за непарна места, за која имамо 1012! начина за распоред, док за парна места имамо 1011! начина. Стога, укупан број распореда је $1011! \cdot 1012!$.

Друштво математичара Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Четврти разред - Б категорија

1. Како је $AB \| DC$, то је $\sphericalangle APD = \sphericalangle PDC$ и $\sphericalangle BPC = \sphericalangle PCD$. Такође, $\sphericalangle DAP = \sphericalangle DPC = \sphericalangle CBP$, па је $\triangle DPC \sim \triangle PAD \sim \triangle CBP$. Тада је $\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{PD}{DC} \Rightarrow PA = \dfrac{PD^2}{DC}$, као и $\dfrac{DC}{PC} = \dfrac{PC}{PB}$, те је $PB = \dfrac{PC^2}{DC}$.

Дељењем претходних једнакости тврђење тривијално следи.

2. Како је $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 < \frac{\pi}{2}$, највећа вредност a је $a = \sin(1)$, а из Косинусне теореме, примењене на троугао са страницама $7cm$, $8cm$ и $a = 13cm$, добијамо да је $\cos\alpha = \dfrac{13^2 - 7^2 - 8^2}{2 \cdot 7 \cdot 8} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{2\pi}{3}$, док из Синусне теореме, налазимои да је $b = \dfrac{a}{2R} = \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Како је $a = \sin 1 = \sin\dfrac{\pi}{\pi} < \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\dfrac{2\pi}{3} = b$, добијамо да је веће b.

3. Ако је $\log 2 = a \Rightarrow \log_2 10 = \frac{1}{a}$, тј. $\log_2 2 + \log_2 5 = \frac{1}{a} \Rightarrow \log_2 5 = \frac{1}{a} - 1 = \frac{1-a}{a} \Rightarrow \log_5 2 = \frac{a}{1-a}$.
Када $\log 3 = b$ поделимо са $\log 2 = a$ добијамо да је $\log_2 3 = \frac{b}{a}$, односно $\log_3 2 = \frac{a}{b}$.
$\log 3 = b \Rightarrow \log_3 10 = \frac{1}{b}$, тј. $\log_3 2 + \log_3 5 = \frac{1}{b} \Rightarrow \log_3 5 = \frac{1}{b} - \frac{a}{b} = \frac{1-a}{b} \Rightarrow \log_5 3 = \frac{b}{1-a}$.
Коначно, $\log_5 216 = \log_5(2^3 \cdot 3^3) = 3\log_5 2 + 3\log_5 3 = 3 \cdot \frac{a}{1-a} + 3 \cdot \frac{b}{1-a} = \frac{3a+3b}{1-a}$.

4. Одговор: 12.
Приметимо да ако изабаремо бројеве $1, 3, \cdots, 23$, сви су непарни, тако да је разлика $a - b$ парна, те тада она никад не може да дели c јер је и он непаран.
Ако изаберемо 13 бројева, онда ће морати да постоје нека два, рецимо a и b, $a > b$, које смо изабрали и који су суседни, односно за које је $a - b = 1$, па за било које c које изаберемо ће важити $a - b | c$.

5. Фиксирајмо белог краља. Претпоставимо, прво, да је он у једном у четири могућа ћошка табле. За сваку такву позицију, црног краља можемо поставити на осталих 60 поља. Дакле, уколико је бели краљ у неком од ћошкова, укупан број могућности је 240.
Претпоставимо да је сада бели краљ на ивици табле, али не и у ћошковима табле. Тада, црног краља можемо сместити на осталих 58 поља табле. Дакле, у овом случају, укупан број могућности је $24 \cdot 58 = 1392$.
Коначно, претпоставимо да бели краљ није у ћошковима табле, нити на ивичним пољима, већ негде у средини табле. За њега ћемо имати тачно 36 могућности, док, за сваку од њих, црног краља можемо сместити на осталих 55 слободних поља. Дакле, у овом случају је укупан број могућности 1980. Дакле, према условима задатка, укупно распореда је 3612.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ - 5. ФЕБРУАР 2023.

ПРВИ РАЗРЕД

	УЧЕНИК	ШКОЛА	1.	2.	3.	4.	5.	Σ	ПЛАСМАН
1.	Стефан Милтеновић	Гимназија „Урош Предић“	20	20	10	0	20	70	**I**
2.	Милица Чучковић	Гимназија „Урош Предић“	15	20	5	20	2	62	**II**
3.	Ленка Гавриловић	Гимназија „Урош Предић“	10	3	0	20	15	48	**III**
4.	Петра Нишевић	Гимназија „Урош Предић“	10	20	5	10	0	45	**III**
5.	Теодора Ђоровић	Гимназија „Урош Предић“	15	5	5	10	0	35	**П**
6.	Предраг Златановић	Гимназија „Урош Предић“	18	0	5	10	0	33	**П**
7.	Стефан Живанов	ЕТШ „Никола Тесла“	0	2	0	2	5	9	
8.	Михајло Мунћан	ЕТШ „Никола Тесла“	0	0	0	2	0	2	
9.	Лазар Јовановић	ЕТШ „Никола Тесла“	0	2	0	0	0	2	
10.	Лука Цвјетић	ЕТШ „Никола Тесла“	0	0	0	2	0	2	
11.									
12.									
13.									
14.									

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ - 5. ФЕБРУАР 2023.

ДРУГИ РАЗРЕД

	УЧЕНИК	ШКОЛА	1.	2.	3.	4.	5.	Σ	ПЛАСМАН
1.	Јована Павлов	Гимназија „Урош Предић“	20	18	5	20	5	68	**I**
2.	Александра Станојковић	Гимназија „Урош Предић“	20	10	5	20	10	65	**I**
3.	Симона Милошевић	Гимназија „Урош Предић“	0	20	0	20	0	40	**II**
4.	Давид Колоски	ЕТШ „Никола Тесла“	0	10	0	20	5	35	**III**
5.	Милица Проле	Гимназија „Урош Предић“	15	15	0	5	0	35	**III**
6.	Марија Миленовић	Гимназија „Урош Предић“	10	5	0	20	0	35	**III**
7.	Давид Јовановић	Гимназија „Урош Предић“	5	2	5	20	0	32	**П**
8.	Мартина Тутић	Гимназија „Урош Предић“	10	0	0	20	0	30	**П**
9.	Хелена Бучалина	Гимназија „Урош Предић“	3	3	0	20	0	26	
10.	Милош Митић	ЕТШ „Никола Тесла“	0	5	5	15	0	25	
11.	Филип Глишић	Гимназија „Урош Предић“	0	5	5	15	0	25	
12.	Ивона Ратковић	Гимназија „Урош Предић“	3	3	5	2	0	13	
13.	Марко Ђулибрк	ЕТШ „Никола Тесла“	5	0	2	5	0	12	
14.	Данило Жежељ	Гимназија „Урош Предић“	5	2	5	0	0	12	
15.	Огњен Милошевић	Гимназија „Урош Предић“	2	5	0	0	0	7	
16.	Стефан Миздраг	ЕТШ „Никола Тесла“	5	0	0	0	0	5	

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ - 5. ФЕБРУАР 2023.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

	УЧЕНИК	ШКОЛА	1.	2.	3.	4.	5.	Σ	ПЛАСМАН
1.	Лука Стошић	Гимназија „Урош Предић“	20	20	15	20	0	75	**I**
2.	Љубодраг Радмиловић	Гимназија „Урош Предић“	20	20	0	20	10	70	**II**
3.	Вељко Васић	Гимназија „Урош Предић“	20	20	15	5	10	70	**II**
4.	Милица Гагић	Гимназија „Урош Предић“	20	20	0	20	10	70	**II**
5.	Немања Милтеновић	Гимназија „Урош Предић“	10	20	0	20	10	60	**III**
6.	Немања Вуксић	ЕТШ „Никола Тесла“	20	20	0	0	0	40	**П**
7.	Стефан Димић	ЕТШ „Никола Тесла“	20	0	0	0	0	20	
8.	Алекса Недељковић	ЕТШ „Никола Тесла“	10	10	0	0	0	20	
9.									
10.									
11.									
12.									
13.									
14.									

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ - 5. ФЕБРУАР 2023.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

	УЧЕНИК	ШКОЛА	1.	2.	3.	4.	5.	Σ	ПЛАСМАН
1.	Илија Серафимовић	Гимназија „Урош Предић“	20	20	20	20	20	100	**I**
2.	Дамјан Мучибабић	Гимназија „Урош Предић“	20	20	20	20	18	98	**I**
3.	Јована Стефановић	Гимназија „Урош Предић“	20	20	20	15	10	85	**II**
4.	Александар Катић	Гимназија „Урош Предић“	5	20	20	20	20	85	**II**
5.	Лана Ђерић	Гимназија „Урош Предић“	0	20	20	10	10	60	**III**
6.	Стефан Илић	Гимназија „Урош Предић“	20	0	20	0	20	60	**III**
7.	Богдан Јовановић	ЕТШ „Никола Тесла“	0	0	20	0	20	40	**П**
8.	Огњен Стојшић	Гимназија „Урош Предић“	0	0	20	20	0	40	**П**
9.	Дамјан Минић	Гимназија „Урош Предић“	5	5	20	0	10	40	**П**
10.	Сергеј Докић	Гимназија „Урош Предић“	0	0	0	0	20	20	
11.									
12.									
13.									
14.									