I RAZRED 22.11.2014.

1. Ako je $f(x)=ax+b$ i $f(f(x))=4x-3$, naći a i b, a zatim izračunati $f(f(f(x)))$.
2. Naći ostatak pri deljenju $2^{2014}+3^{2014}$ sa 5.
3. Rešiti jednačinu u skupu Z: $3a^2-2ab-b^2=3$.
4. U svakom temenu jednakostraničnog trougla stranice a konstruisana je kružnica poluprečnika $a/2$. Naći poluprečnik kružnice, unutar tog trougla, koja dodiruje sve tri date kružnice.
5. Dat je beskonačni niz brojeva: $-9,\ 18,\ -27,\ 36,\ -45,...$ Koliko uzastopnih brojeva tog niza treba sabrati (počev od prvog) da bi se dobio zbir: a) 117, b) 999998.

II RAZRED 22.11.2014.

1. Rešiti jednačinu u zavisnosti od parametra a: $\dfrac{ax^2}{x-1}=(a+1)^2$.
2. Ako je $x=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$, izračunati: x^3+3x.
3. Rešiti u skupu N: $x!+y!+z!=m!$. ($a!$ označava proizvod svih prirodnih brojeva od 1 do a, $5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5$)
4. Dat je prav ugao sa temenom C i na njegovoj simetrali tačka M, tako da je MC $=d$. Kroz tačku M je konstruisana proizvoljna prava p, koja na kracima tog ugla odseca odsečke dužine a i b. Dokazati da vrednost izraza $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ ne zavisi od izbora prave p, tj. naći vrednost tog izraza u zavisnosti od d.
5. Dva igrača igraju sledeću igru: oni naizmenično pišu različite cifre, sve dok ne dobiju desetocifren broj (prva cifra ne sme biti nula). U toj igri je pobednik prvi igrač, ako je taj broj deljiv sa 6. U suprotnom je pobednik drugi igrač. Koji od igrača može sigurno da pobedi i koja je njegova taktika?

III RAZRED 22.11.2014.

1. Rešiti sistem, za $a,b,c\neq 0$: $bx+ay=c,\ \ cx+az=b,\ \ cy+bz=a$.
2. Ako je $x+y>0$, dokazati $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^3\le\dfrac{x^3+y^3}{2}$.
3. Rastaviti polinom x^5+x+1 na dva faktora (barem prvog stepena) sa celobrojnim koeficijentima.
4. U kocku $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ivice a upisana je pravilna trostrana piramida $PQRC_1$, gde su P, Q i R redom središta ivica AB, AD i AA_1. Naći zapreminu te piramide.
5. Koliko postoji različitih (nepodudarnih) pravougaonika čiji je obim 2014, a stranice su mu celi brojevi.

IV RAZRED 22.11.2014.

1. Ako je $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$, $x\neq 0$, naći $f(x)$ i $f(f(x))$.
2. Izračunati: $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3...}}}}$.
3. Dokazati da se zbir $1+2+3+.....+n$ ne može završavati nekom od cifara: 2, 4, 7, 9.
4. Neka su $x,\ y,\ z$ redom, odstojanja unutrašnje tačke M trougla ABC od stranica $a,\ b,\ c$, dok su $h_a,\ h_b,\ h_c$ visine tog trougla. Dokazati: $\dfrac{x}{h_a}+\dfrac{y}{h_b}+\dfrac{z}{h_c}=1$.
5. Naći sva rešenja sistema u skupu C: $x^2+y^4=5,\ \ xy^2=2$.

REŠENJA (školsko takmičenje 22.11.2014.)

I-1. Ako je $f(x)=ax+b$, tada je $f(f(x))=a^2x+ab+b$, pa je iz uslova zadatka $a^2=4$ i $ab+b=-3$. Dalje imamo dva slučaja: 1) $a=2$, iz čega je $b=-1$, pa je $f(x)=2x-1$, a $f(f(f(x)))=8x-7$;
2) $a=-2$, iz čega je $b=3$, pa je $f(x)=-2x+3$, a $f(f(f(x)))=-8x+9$.

I-2. I način (preko ostataka po modulu 5): $2^{2014}+3^{2014}\equiv_5 (2^2)^{1007}+(3^2)^{1007}\equiv_5 (-1)^{1007}+(-1)^{1007}\equiv_5 -2\equiv_5 3$.
II način: Pratiti periodičnost ostataka pri deljenju sa 5 brojeva 2^n, $n\in N$: 2,4,3,1,2,4,3,1,... Slično i za 3^n, $n\in N$: 3,4,2,1,3,4,2,1,... Ostatak će biti 4+4=8, tj. 3.

I-3. Dati izraz se može napisati kao: $(3a+b)(a-b)=3$, pa imamo 4 mogućnosti:
1) $\begin{matrix}3a+b=1\\ a-b=3\end{matrix}$, što daje rešenje $a=1$, $b=-2$; 2) $\begin{matrix}3a+b=3\\ a-b=1\end{matrix}$, $a=1$, $b=0$; 3) $\begin{matrix}3a+b=-1\\ a-b=-3\end{matrix}$, $a=-1$, $b=2$;
4) $\begin{matrix}3a+b=-3\\ a-b=-1\end{matrix}$, $a=-1$, $b=0$. Rešenje je: $(a,b)\in\{(1,-2),(1,0),(-1,2),(-1,0)\}$

I-4. Centar tražene kružnice je u centru jednakostraničnog trougla, i rastojanje do jednog od temena trougla je $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ (dve trećine visine), a to je zbir nepoznatog poluprečnika i poluprečnika $\frac{a}{2}$. To znači da je $r=\frac{a\sqrt{3}}{3}-\frac{a}{2}=\frac{2a\sqrt{3}-3a}{6}$.

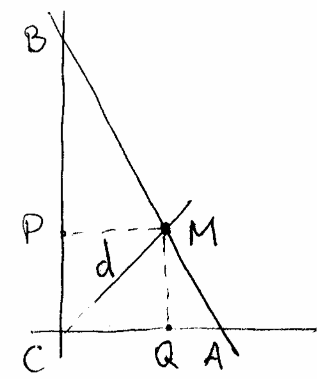
I-5. Pratimo zbirove prva dva, prva tri člana, itd. Tada dobijamo niz: 9, -18, 18, -27, 27, -36... Njegovi pozitivni članovi su svi različiti i povećavaju se za 9 (za svaka dva sledeća člana početnog niza u zadatku). Pošto je 117:9=13, treba sabrati prvih 26 članova početnog niza, a pošto 999998 nije deljiv sa 9 ne može se dobiti taj rezultat.

II-1. Prvo, važi da je $x\neq 1$. Dalje, množenjem jednačine sa $(a+1)^2$, dobija se: $ax^2-(a+1)^2x+(a+1)^2=0$. Ako je $a=0$, jednačina postaje: $-x+1=0$, pa je $x=1$, što je nemoguće zbog početnog uslova. Ako je $a\neq 0$, tada je $x_1=a+1$, $x_2=\frac{a+1}{a}$. (Paziti da se na vreme iz diskriminante izdvoji $(a+1)^2$.)

II-2. Može se označiti da je $a=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$ i $b=\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$, pa je $x=a-b$, a $x^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ ili $x^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$. Pošto je $a^3-b^3=\sqrt{5}+2-(\sqrt{5}-2)=4$, a $ab=\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=1$, imamo da je $x^3=4-3x$, pa je $x^3+3x=4$.

II-3. Neka je najveći od brojeva x,y,z, na primer z. Tada je $x!+y!+z!\leq 3\cdot z!$, a ako je $z\geq 3$, tada je i $3\cdot z!<(z+1)!$ (a jasno je da je $3z!>z!$), pa zadatak nema rešenja. Preostaje da ispitamo slučajeve kada je najveći od brojeva jednak 2. Lako se dobija jedino rešenje: $x=2$, $y=2$, $z=2$, $m=3$.

II-4. I način: Neka je $PB = x$, $QA = y$, a $BC = a$ i $AC = b$. (Vidi sliku!)



Tada je $PCQM$ kvadrat stranice $\frac{d\sqrt{2}}{2}$. Iz sličnosti $\Delta BPM \sim \Delta MQA$, važi

$x : \frac{d\sqrt{2}}{2} = \frac{d\sqrt{2}}{2} : y$, a pošto je $x = a - \frac{d\sqrt{2}}{2}$ i $y = b - \frac{d\sqrt{2}}{2}$ dobija se:

$\left(a - \frac{d\sqrt{2}}{2}\right) : \frac{d\sqrt{2}}{2} = \frac{d\sqrt{2}}{2} : \left(b - \frac{d\sqrt{2}}{2}\right)$. Sređivanjem proporcije imamo:

$ab - \frac{ad\sqrt{2}}{2} - \frac{bd\sqrt{2}}{2} + \frac{d^2}{2} = \frac{d^2}{2}$, pa je $\frac{d\sqrt{2}}{2}(a+b) = ab$, ili $\frac{d\sqrt{2}}{2} = \frac{ab}{a+b}$.

Ako posmatramo recipročne vrednosti obeju strana, dobija se: $\frac{\sqrt{2}}{d} = \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

II način (grubom silom): Iz sličnosti $\Delta BPM \sim \Delta MQA$, važi $x : \frac{d\sqrt{2}}{2} = \frac{d\sqrt{2}}{2} : y$, pa je $y = \frac{d^2}{2x}$. Dalje je

$a = x + \frac{d\sqrt{2}}{2}$, $b = y + \frac{d\sqrt{2}}{2} = \frac{d^2}{2x} + \frac{d\sqrt{2}}{2} = \frac{d}{2}\left(\frac{d}{x} + \sqrt{2}\right)$. Iz toga je $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x + \frac{d\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{\frac{d}{2}\left(\frac{d}{x} + \sqrt{2}\right)} =$

$$= \frac{2}{2x + d\sqrt{2}} + \frac{2}{d\left(\frac{d + x\sqrt{2}}{x}\right)} = \frac{2}{\sqrt{2}\left(x\sqrt{2} + d\right)} + \frac{2x}{d\left(d + x\sqrt{2}\right)} = \frac{2d + 2x\sqrt{2}}{d\sqrt{2}\left(d + x\sqrt{2}\right)} = \frac{2\left(d + x\sqrt{2}\right)}{d\sqrt{2}\left(d + x\sqrt{2}\right)} = \frac{2}{d\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{d}$$

III način (preko površina): $P_{\Delta ABC} = P_{\Delta CMB} + P_{\Delta AMC}$, pa je $\frac{ab}{2} = \frac{a\frac{d\sqrt{2}}{2}}{2} + \frac{b\frac{d\sqrt{2}}{2}}{2}$, a iz toga je $ab = \frac{d\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

Dalje, kao u I načinu...

II-5. Zbir cifara tog desetocifrenog broja je 45, pa je on deljiv sa 3, a da bi bio deljiv sa 6, potrebno je da bude još paran. To znači da poslednja cifra mora da bude parna. Pobedu odnosi prvi igrač ako stalno bira neparne cifre.

III-1. Rešimo pomoću determinanti: $D = \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix} = -2abc$; $D_x = \begin{vmatrix} c & a & 0 \\ b & 0 & a \\ a & c & b \end{vmatrix} = a^3 - ac^2 - ab^2 = a\left(a^2 - c^2 - b^2\right)$,

$Dy = \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ c & b & a \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = b\left(b^2 - a^2 - c^2\right)$; $D_z = \begin{vmatrix} b & a & c \\ c & 0 & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix} = c\left(c^2 - a^2 - b^2\right)$. Pošto je $a, b, c \neq 0$, $x = \frac{D_x}{D} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$,

$y = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$, $z = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

III-2. Posle stepenovanja na treći, dobija se: $\frac{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}{8} \leq \frac{x^3 + y^3}{2}$, a posle množenja sa 8, sređivanja, i skraćivanja sa 3, imamo: $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 \geq 0$. Grupisanjem članova i daljim rastavljanjem je: $(x+y)(x-y)^2 \geq 0$, što je uvek tačno zbog uslova $x + y > 0$.

III-3.

$$x^5 + x + 1 = x^5 - x^2 + x^2 + x + 1 = x^2\left(x^3 - 1\right) + \left(x^2 + x + 1\right) = x^2(x-1)\left(x^2 + x + 1\right) + \left(x^2 + x + 1\right) = \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^3 - x^2 + 1\right)$$

III-4. Lako se vidi da je ΔPQR jednakostraničan sa stranicom $PR=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, i da je u pitanju piramida kod koje su sve bočne ivice jednake. Dužinu bočne ivice PC_1 možemo izračunati, npr. iz pravouglog trougla PBC_1: $PC_1=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3a}{2}$. Visina te piramide se računa ponovo Pitagorinom teoremom, preko bočne ivice (kao hipotenuze) i dve trećine visine osnove (kao jednom katetom): $H=\sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2}=\frac{5a\sqrt{3}}{6}$.

Konačno, zapremina je $V=\frac{B\cdot H}{3}=\frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{5a\sqrt{3}}{6}}{3}=\frac{5a^3}{48}$.

III-5. Treba rešiti jednačinu $2a+2b=2014$ u skupu Z. Posle deljenja sa 2 je: $a=1007-b$, pa $1\le b\le 1006$, a to znači da postoji 1006 rešenja. Ali, pošto su podudarni pravougaonici čije su stranice a,b i b,a broj rešenja je 503.

IV-1. Uvedimo smenu: $x+\frac{1}{x}=t$. Tada je $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$, pa je $f(t)=t^2-2$, tj. $f(x)=x^2-2$ i $f(f(x))=$ $=f(x^2-2)=x^4-4x^2+2$.

IV-2. I način: $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3\ldots}}}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{8}}\cdot 3^{\frac{1}{16}}\cdot\ldots=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\ldots}\cdot 3^{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots}$. Zbirovi u eksponentima su beskonačni geometr. nizovi, pa je $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\ldots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$, a slično je i $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$, pa je rezultat $2^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{12}$.

II način: $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3\ldots}}}}=x$, $\frac{x^2}{2}=\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3\ldots}}}$, $\frac{x^4}{12}=\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3\ldots}}}}=x$, pa je $x^3=12$, tj. $x=\sqrt[3]{12}$.

IV-3. Poznato je da je $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Pretpostavimo da se taj broj može završavati nekom od cifara 2,4,7,9. Tada se broj $n(n+1)$ može završavati sa ciframa 4 ili 8, što je nemoguće za proizvod dva uzastopna prirodna broja (završeci mogu biti samo: 0,2 ili 6).

IV-4. Ako tačku M spojimo sa temenima trougla dobijamo tri trougla čije su površine: $P_1=\frac{ax}{2}$, $P_2=\frac{by}{2}$, $P_3=\frac{cz}{2}$, pa je $P_\Delta=\frac{ax}{2}+\frac{by}{2}+\frac{cz}{2}$. A pošto je i $h_a=\frac{2P_\Delta}{a}$, $h_b=\frac{2P_\Delta}{b}$, $h_c=\frac{2P_\Delta}{c}$, ubacivanjem u početni izraz je: $\frac{x}{h_a}+\frac{y}{h_b}+\frac{z}{h_c}=\frac{x}{\frac{2P_\Delta}{a}}+\frac{y}{\frac{2P_\Delta}{b}}+\frac{z}{\frac{2P_\Delta}{c}}=\frac{ax}{2P_\Delta}+\frac{by}{2P_\Delta}+\frac{cz}{2P_\Delta}=\frac{1}{P_\Delta}\left(\frac{ax}{2}+\frac{by}{2}+\frac{cz}{2}\right)=\frac{1}{P_\Delta}P_\Delta=1$.

IV-5. Iz druge jednačine imamo: $y^2=\frac{2}{x}$ (jasno je da su $x,y\ne 0$), pa ubacivanjem u prvu je $x^2+\frac{4}{x^2}=5$. Uz smenu $x^2=t$, dobija se $t^2-5t+4=0$, čija su rešenja $t_1=1$ i $t_2=4$. Ako je $x^2=1$, može biti da je $x=1$, što daje $y^2=2$, tj. $y=\pm\sqrt{2}$; ili $x=-1$ što daje $y^2=-2$, tj. $y=\pm i\sqrt{2}$. Ako je $x^2=4$, može biti da je $x=2$, što daje $y^2=1$, tj. $y=\pm 1$; ili $x=-2$ što daje $y^2=-1$, tj. $y=\pm i$. Rešenje sistema u skupu C je: $(x,y)\in\{(1,\sqrt{2}),(1,-\sqrt{2}),(-1,i\sqrt{2}),(-1,-i\sqrt{2}),(2,1),(2,-1),(-2,i),(-2,-i)\}$.

REZULTATI ŠKOLSKOG TAKMIČENJA IZ MATEMATIKE, 22.11.2014.

I RAZRED

Mesto	Prezime i Ime	Razred	1.z.	2.z	3.z.	4.z.	5.z.	Ukupno
1.	Debogović Marina	I-5	12	20	20	20	18	90
2.	Tirnanić Mihajlo	I-7	12	20	2	20	20	74
3.	Marić Đorđe	I-8	12	20	0	20	20	72
4.	Ćosić Ivana	I-6	12	20	7	20	12	71
5.	Gujaničić Katarina	I-5	12	20	20	0	18	70
6.	Barbu Milica	I-6	12	20	0	20	10	62
7.	Krneta Milica	I-6	12	20	5	15	2	54
8.	Cvejović Pavle	I-8	20	18	5	0	10	53
9.	Berbić Damir	I-5	12	8	0	20	10	50
10.	Vračar Aleksa	I-5	12	15	2	8	10	47
11.	Pušeljić Aleksa	I-8	2	15	2	5	20	44
12.	Badrljica Miloš	I-8	0	20	2	0	20	42
12.	Ljuboja Boško	I-8	0	20	2	5	15	42
14.	Miletić Milan	I-3	0	20	0	0	20	40
15.	Cvejić Lazar	I-8	12	0	0	15	10	37
16.	Koreni Zvonko	I-8	0	18	2	0	10	30
17.	Joković Nikola	I-8	0	0	0	0	10	10

II RAZRED

Mesto	Prezime i Ime	Razred	1.z.	2.z	3.z.	4.z.	5.z.	Ukupno
1.	Bošnjak Marta	II-5	18	20	5	15	20	78
2.	Đorđević Mihailo	II-6	12	20	5	20	0	57
3.	Marinković Ivana	II-8	18	5	0	0	20	43
4.	Stanković Stevan	II-7	5	5	5	0	20	35
4.	Simović Aleksandra	II-8	5	0	5	5	20	35
6.	Vojinović Dunja	II-5	0	20	0	0	0	20
6.	Tanko Andrej	II-8	0	0	0	0	20	20
8.	Borzanović Kristina	II-5	0	0	5	0	0	5
9.	Milekić Jovana	II-5	2	0	0	0	0	2

III RAZRED

Mesto	Prezime i Ime	Razred	1.z.	2.z	3.z.	4.z.	5.z.	Ukupno
1.	Ostojić Jovana	III-7	20	20	0	20	20	80
2.	Ristović Isidora	III-8	20	20	0	18	20	78
3.	Matijašević Uroš	III-8	20	18	0	18	20	76
4.	Šešun Teodora	III-8	20	20	0	15	20	75
5.	Đurić Dušan	III-7	12	15	0	20	20	67
6.	Trimovski Marko	III-7	20	20	0	5	20	65
6.	Vukolić Ana	III-6	20	20	0	5	20	65
8.	Bolesnikov Nikola	III-8	20	18	0	5	20	63
9.	Krnjajić Tamara	III-4	20	15	0	5	20	60
10.	Tarajić Magdalena	III-6	0	20	0	15	20	55
11.	Minić Jelena	III-6	20	5	0	2	20	47
12.	Stamenkovski Stefan	III-6	20	18	0	5	0	43
13.	Mršić Marko	III-8	20	0	0	20	0	40
13.	Cvetković Miloš	III-5	0	15	0	5	20	40
15.	Dimitrijević Denis	III-8	0	15	0	5	18	38
16.	Dimitrijević Anja	III-8	20	10	0	5	0	35
17.	Jakšić David	III-7	2	18	0	5	5	30
17.	Rapajić Branko	III-5	0	5	0	5	20	30
19.	Stojadinov Aleksa	III-6	0	0	0	5	20	25
20.	Milošev Miroslav	III-5	0	2	0	2	20	24
21.	Davidović Vladimir	III-8	0	5	0	2	15	22
22.	Tadić Sara	III-6	0	0	0	5	0	5

IV RAZRED

Mesto	Prezime i Ime	Razred	1.z.	2.z	3.z.	4.z.	5.z.	Ukupno
1.	Zarubica Miljan	IV-5	20	20	20	20	18	98
2.	Nikolovska Nevena	IV-8	5	0	20	20	5	50