I RAZRED 28.11.2015.

1. Ako je $f\left(2x-1\right)=\dfrac{2x-1}{2x-2}$, $x\neq 1$, naći: $f\left(x\right)$, $f^{2}\left(x\right)$ (što je, ustvari, $f\left(f\left(x\right)\right)$) i $f^{2015}\left(\sqrt{2}\right)$.

2. Rešiti u skupu Z: $x^4=y^4+15$. Naći sva rešenja.

3. Proizvod dva dvocifrena broja zapisan je samo pomoću četvorki. Koji su to brojevi? Naći sva rešenja.

4. Ako je skup $S\subset N$, tada označimo sa: $zbir\left(S\right)$ zbir svih elemenata tog skupa, npr. $S=\{1,3,4\}$, tada je $zbir\left(S\right)=8$. Ako je $A=\{1,2,3,...,100\}$, $B=\{1,3,5,...,2015\}$ i $C=\{2,4,6,...,2016\}$, izračunati:
a) $zbir\left(A\right)$; b) $zbir\left(C\right)-zbir\left(B\right)$.

5. Paralelogram ABCD se može podeliti na 4 jednakostranična trougla stranice 2cm. Naći dužine dijagonala tog paralelograma.

II RAZRED 28.11.2015.

1. Koja cifra se nalazi na 2015. mestu iza zareza u decimalnom zapisu broja $\dfrac{469}{1998}$? Objasni!

2. Dokazati da je zbir kubova tri uzastopna prirodna broja deljiv zbirom ta tri broja.

3. Odrediti realan parametar m tako da za rešenja jednačine $x^2+\left(m-3\right)x+1-2m=0$ važi $\dfrac{x_1}{2x_2}+\dfrac{x_2}{2x_1}=-3$, i za najveće takvo m naći rešenja date jednačine.

4. Srediti izraz za $n\in N$: $\dfrac{\left(2^{n-1}+1\right)^2-4^{n-1}}{4^n+2^{n+1}+1}\cdot\dfrac{4^n-1}{2^n-1}$.

5. Nad stranicama jednakostraničnog trougla ABC stranice a spolja su konstruisani kvadrati ABLK, BCNM, CAQP. Odrediti obim i površinu šestougla KLMNPQ.

III RAZRED 28.11.2015.

1. Odrediti sva celobrojna rešenja jednačine $x^3-y^3=91$.

2. Ako je $a^2+2b^2=3c^2$, dokazati da je $\left(\dfrac{a+b}{b+c}+\dfrac{b-c}{b-a}\right)\cdot\dfrac{a+2b+3c}{a+c}$ prirodni broj.

3. Nad stranicama kvadrata dužine 1, spolja su konstruisani međusobno podudarni jednakokraki trapezi tako da su sva temena tih trapeza ujedno i temena pravilnog dvanaestougla. Naći obim i površinu tog dvanaestougla.

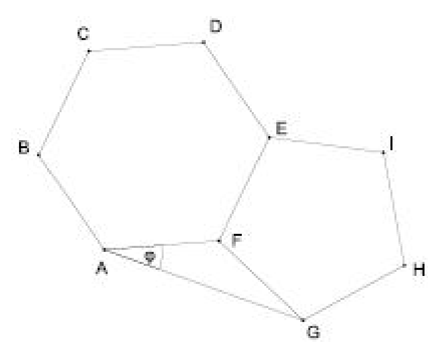
4. Stazu oblika pravougaonika širine 1,5m i dužine 20m treba popločati jednakim pločama oblika jednakokrako-pravouglog trougla sa katetom 50cm, tako da katete budu paralelne stranicama tog pravougaonika. Odrediti broj načina na koji je moguće popločati tu stazu.

5. Dužina visine pravilne četvorostrane prizme je H. Dijagonale dveju susednih bočnih strana povučenih iz istog temena zaklapaju ugao α. Odrediti dužinu osnovne ivice a.

IV RAZRED 28.11.2015.

1. Neka je $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$ i $g\left(\dfrac{1}{x}\right)=x-\sqrt{1+x^2}$. Izračunati $f\left(x\right)$, $g\left(x\right)$ i $f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)$ ako je $x<0$.

2. Na slici su dati pravilni šestougao ABCDEF i pravilni petougao EFGHI, gde je $AB=a$. Naći $\measuredangle FAG=\varphi$ i dokazati da je obim trougla AGF veći od $\dfrac{7a}{2}$.



3. U skupu R rešiti: $\sqrt{x^x}=x^{\sqrt{x}}$.

4. U trouglu ABC je $a=5$, $b=7$ i $c=8$. Naći h_c i β.

5. Drvena kocka je obojena u crveno i zatim je isečena na n^3 $\left(n>2\right)$ jednakih kockica. Ako je poznato da je broj kockica, kojima je tačno jedna strana obojena, jednak broju kockica kojima nije nijedna strana obojena, naći broj n.

I razred (rešenja)

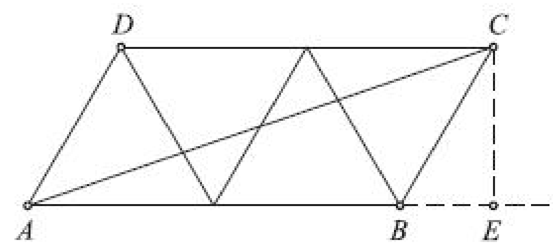
1. Ako uvedemo smenu $2x-1=t$, dobija se $x=\frac{t+1}{2}$, pa ubacivanjem u polaznu formulu dobija se $f(x)=\frac{x}{x-1}$. Dalje je $f(f(x))=f\left(\frac{x}{x-1}\right)=...=x$. Očigledno je $f^{2015}(x)=f^{2013}(x)=...=f(x)$, pa je $f^{2015}(\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=2+\sqrt{2}$, posle racionalisanja.

2. Ako prebacimo nepoznate na levu stranu jednakosti i rastavimo, dobijamo $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)=15$. Ako posmatramo izraz x^2+y^2, koji je očigledno veći od nule, on može biti jednak 1, 3, 5, ili 15. Razmatranjem svih slučajeva, vidimo da je jedino moguće da je $x^2+y^2=5$, što daje rešenja koja treba proveriti i u polaznoj jednačini: $(x,y)\in\{(2,1),(2,-1),(-2,1),(-2,-1)\}$.

3. Pošto je najmanji dvocifren broj 10, a najveći 99, tada za tražene brojeve x i y važi $100\le xy\le 9801$, što znači da su u pitanju tri ili četiri četvorke. U prvom slučaju imamo da je $444=2^2\cdot 3\cdot 37$, pa je jedno rešenje $12\cdot 37$, dok u drugom $4444=2^2\cdot 11\cdot 101$, pa ovde nema rešenja.

4. a) $zbir(A)=1+2+3+...+100=\frac{100\cdot 101}{2}=5050$. b) Pošto je svaki element iz skupa C za jedan veći od svakog elementa iz B (redom gledano), a oba skupa imaju po 1008 elemenata, $zbir(C)-zbir(B)=1008$.

5. Vidi sliku! $BC=2$, $CE=\sqrt{3}$, pa je Pitagorinom teoremom $AC=\sqrt{AE^2+EC^2}=2\sqrt{7}$. Slično je $BD=2\sqrt{3}$.



II razred (rešenja)

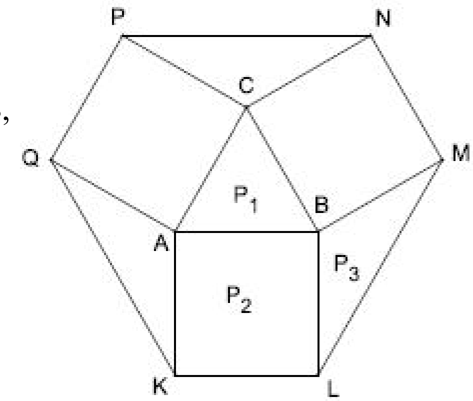
1. $\frac{469}{1998}=0{,}2347347347...$ pa je 2015. cifra 3, jer je $2014=1+671\cdot 3$, a to je sledeća cifra.

2. $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=...=3n^3+6n=3n(n^2+2)$, a $3n$ je zbir početna tri broja.

3. Korišćenjem Vijetovih formula i sređivanjem date veze između rešenja dobija se: $\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{2x_1x_2}=-3$, ili $\frac{(m-3)^2-2(1-2m)}{2(1-2m)}=-3$, uz uslov $m\neq\frac{1}{2}$. Daljim sređivanjem dobija se kvadratna jednačina $m^2-14m+13=0$ čija su rešenja $m=1$, $m=13$. Ako je $m=13$, tada početna jednačina postaje $x^2+10x-25=0$, a njena rešenja su $x_{1,2}=-5\pm 5\sqrt{2}$.

4. Posle nužnih transformacija, skraćivanja i prepoznavanja kvadrata binoma, početni izraz postaje:

$$\frac{4^{n-1}+2\cdot 2^{n-1}+1-4^{n-1}}{2^{2n}+2\cdot 2^{n}+1}\cdot\frac{\left(2^{n}-1\right)\left(2^{n}+1\right)}{2^{n}-1}=\frac{2^{n}+1}{\left(2^{n}+1\right)^{2}}\cdot\left(2^{n}+1\right)=1 .$$



5. Vidi sliku! Kada se povuče visina trougla označenog sa P_3 (iz tačke B, kod koje je ugao od 120^{o}) time se taj trougao podeli na dva pravougla trougla, čijim spajanjem dobijamo jednakostraničan trougao podudaran početnom P_1. Površina figure je $P=3a^{2}+4\dfrac{a^{2}\sqrt{3}}{4}=a^{2}\left(3+\sqrt{3}\right)$, a obim $O=3a+3a\sqrt{3}=3a\left(1+\sqrt{3}\right)$, jer je $ML=2h=a\sqrt{3}$.

III razred (rešenja)

1. Posle rastavljanja, dobija se $(x-y)\left(x^{2}+xy+y^{2}\right)=91=7\cdot 13$, a pošto je $x>y$, tj. $x-y>0$, postoje četiri mogućnosti 1) $x-y=1$, $x^{2}+xy+y^{2}=91$, što daje rešenja $(6,5)$ i $(-5,-6)$;

2) $x-y=7$, $x^{2}+xy+y^{2}=13$, što daje rešenja $(4,-3)$ i $(3,-4)$; dok slučajevi

3) $x-y=13$, $x^{2}+xy+y^{2}=7$ i 4) $x-y=91$, $x^{2}+xy+y^{2}=1$ nemaju rešenja.

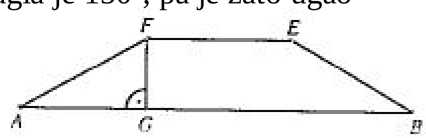
2. Svođenjem na zajednički, izraza u zagradi, dobija se:

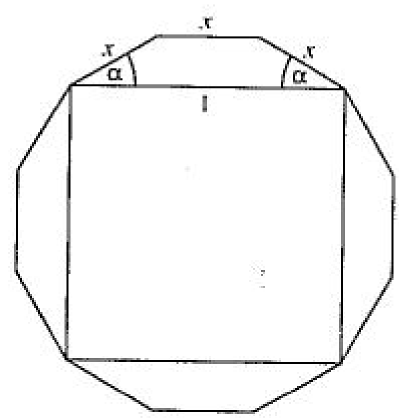
$$\frac{b^{2}-a^{2}+b^{2}-c^{2}}{(b+c)(b-a)}\cdot\frac{a+2b+3c}{a+c}=\frac{2b^{2}-a^{2}-c^{2}}{(b+c)(b-a)}\cdot\frac{a+2b+3c}{a+c}=$$ (a posle korišćenja $2b^{2}=3c^{2}-a^{2}$)

$$\frac{2\left(c^{2}-a^{2}\right)}{(b+c)(b-a)}\cdot\frac{a+2b+3c}{a+c}=\frac{2(c-a)(c+a)}{(b+c)(b-a)}\cdot\frac{a+2b+3c}{a+c}=\frac{2(c-a)(a+2b+3c)}{(b+c)(b-a)}=$$ (posle oslobađanja od zagrada)

$$\frac{2\left(ac+2bc+3c^{2}-a^{2}-2ab-3ac\right)}{b^{2}+bc-ab-ac}=\frac{2\left(2b^{2}+2bc-2ab-2ac\right)}{b^{2}+bc-ab-ac}=4$$ (uz $3c^{2}-a^{2}=2b^{2}$) .

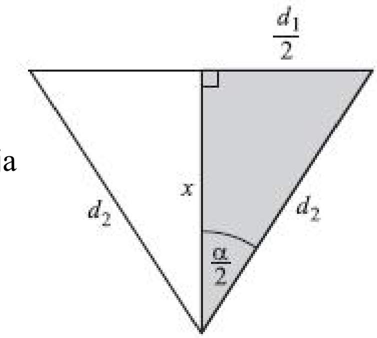
3. Vidi slike! Unutrašnji ugao dvanaestougla je 150^{o}, pa je zato ugao na osnovici trapeza 30^{o} , a iz toga je $AG=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1-x}{2}$, kao polurazlika osnovica. Iz te jednačine se lako dobija da je $x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, pa je obim: $O=12x=6\left(\sqrt{3}-1\right)$. Površina jednog od trapeza je $P_{1}=\dfrac{1+x}{2}\cdot\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{8}$, gde je $FG=\dfrac{x}{2}$, pa je $P=1+4P_{1}=\dfrac{3}{2}$.

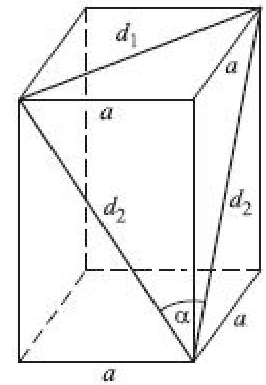




4. Ukupan broj ploča koje treba upotrebiti je 240, tako da svake dve sa zajedničkom dijagonalom čine kvadrat. To znači da se svake dve ploče u jednom kvadratu mogu spojiti na dva načina (duž jedne ili druge dijagonale), pa je broj načina za popločavanje 2^{120} .

5. Vidi slike! Iz izdvojenog trougla je $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{d_1}{2d_2}$, ili





$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{a^2+H^2}}$, pa je posle kvadriranja i sređivanja

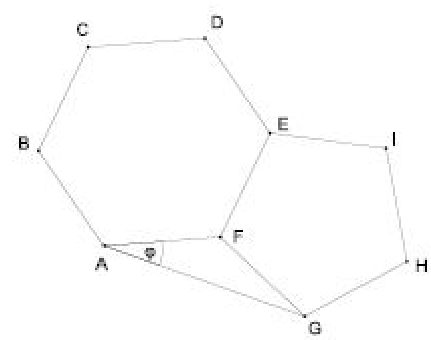
$$a=\frac{H\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{H\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}}.$$

Drugi način: kosinusnom teoremom na izdvojenom jednakokrakom trouglu. $\cos\alpha=\frac{d_2^{\,2}+d_2^{\,2}-d_1^{\,2}}{2d_2d_2}$, a posle sređivanja dobija se $a^2=\frac{H^2(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha}$, tj. $a=H\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}}$.

IV razred (rešenja)

1. Posle smene $\frac{1}{x}=t$, ($\underline{t<0}$ jer je i $\underline{x<0}$) dobija se $f(t)=\frac{1}{t}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}=\frac{1}{t}+\frac{\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2}}=\frac{1}{t}+\frac{\sqrt{t^2+1}}{-t}$, pa je $f(x)=\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}$. Na sličan način je i $g(x)=\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$, pa je $f(x)\cdot g(x)=-1$.

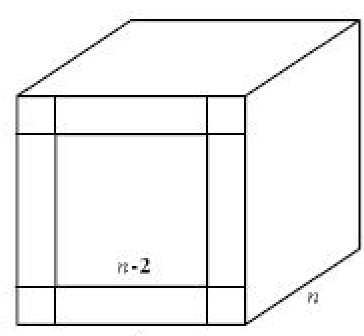
2. Vidi sliku! Unutrašnji ugao pravilnog šestougla je 120^{o}, a petougla 108^{o}, pa je $\angle AFG=360^\circ-120^\circ-108^\circ=132^\circ$. Pošto je ΔAGF jednakokraki, lako se dobija da je $\varphi=24^\circ$. Ako u trouglu ΔAGF povučemo visinu iz tačke F (npr. FM), tada je $\cos\varphi=\frac{AM}{AF}=\frac{AM}{a}=\frac{AG}{2a}$. Iz toga je $AG=2a\cos\varphi$, pa je obim $O=2a+2a\cos\varphi$, a pošto je $24^\circ<30^\circ$, tada je $\cos 24^\circ>\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, pa je $O>2a+a\sqrt{3}=a(2+\sqrt{3})>3{,}5a$.



3. Uz uslov $x>0$, je $x^{\frac{x}{2}}=x^{\sqrt{x}}$, pa je ili $x=1$ ili su stepeni jednaki: $\frac{x}{2}=\sqrt{x}$, što posle sređivanja daje $x=4$ ili $x=0$ što nije dozvoljeno uslovom, tako da je $x\in\{1,4\}$.

4. Pomoću Heronovog obrasca je $P=10\sqrt{3}=\frac{c\cdot h_c}{2}$, pa je $h_c=\frac{5\sqrt{3}}{2}$. Dalje je $\sin\beta=\frac{h_c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ iz čega je $\beta=60^\circ$.

5. Vidi sliku! Postoji na svakoj strani kocke $(n-2)^2$ kockica čija je jedna strana obojena, tj. ukupno $6(n-2)^2$ kockica. Neobojenih je $(n-2)^3$. tada je $6(n-2)^2=(n-2)^3$, pa je $n-2=6$, $n=8$.



REZULTATI ŠKOLSKOG TAKMIČENJA IZ MATEMATIKE, 28.11.2015.

I RAZRED

Mesto	Prezime i Ime	Razred	1.z.	2.z	3.z.	4.z.	5.z.	Ukupno
1.	Jakšić Tijana	I-6	18	20	20	20	20	98
2.	Stanković Nikolija	I-6	20	20	12	20	20	92
3.	Zečević Danilo	I-5	20	10	20	15	20	85
4.	Cvijetić Dušan	I-5	18	12	20	20	10	80
5.	Vari Jovan	I-7	8	10	20	20	20	78
6.	Zarev Doroteja	I-8	20	15	20	10	10	75
6.	Marjanović Mihailo	I-8	20	20	15	20	0	75
8.	Tršek Lazar	I-6	12	10	15	15	10	62
9.	Pešić Ivan	I-7	10	5	15	10	20	60
10.	Vrhovac Katarina	I-6	5	0	0	20	20	45
10.	Černicin Aleksandar	I-8	5	5	10	15	10	45
12.	Lukić Tijana	I-6	8	0	3	20	10	41
13.	Runić Milica	I-5	5	0	15	20	0	40
14.	Vranić Magdalena	I-6	0	3	10	10	10	33
15.	Mrvoš Bogdan	I-5	0	10	0	10	5	25
16.	Dimčić Anastasija	I-6	5	5	3	10	0	23
17.	Hans Izabela	I-6	3	0	5	0	10	18
18.	Knežević Nikola	I-7	0	3	0	10	0	13
19.	Antič Ivana	I-6	3	2	0	0	0	5
20.	Jović Dimitrije	I-8	3	0	0	0	0	3
20.	Breti Mateja	I-7	3	0	0	0	0	3

II RAZRED

Mesto	Prezime i Ime	Razred	1.z.	2.z	3.z.	4.z.	5.z.	Ukupno
1.	Aleksa Vračar	II-5	20	20	20	20	20	100
2.	Debogović Marina	II-5	20	18	20	20	20	98
3.	Badrljica Miloš	II-8	20	20	20	15	20	95
4.	Pušeljić Aleksa	II-8	0	20	20	20	18	78
4.	Berbić Damir	II-5	0	20	18	20	20	78
6.	Milinković Milica	II-7	10	20	20	0	20	70
7.	Cvejović Pavle	II-8	0	20	18	20	5	63
8.	Gujaničić Katarina	II-5	0	20	18	20	0	58
9.	Farkaš Erni	II-8	20	0	15	0	20	55
10.	Ćosić Ivana	II-6	0	0	13	20	20	53
11.	Cvejić Lazar	II-8	20	0	0	0	10	30
12.	Stanković Dušan	II-8	20	0	3	2	0	25
12.	Koreni Zvonko	II-8	15	0	0	5	5	25
14.	Delić Mina	II-7	0	0	18	0	0	18
14.	Krneta Milica	II-6	0	0	18	0	0	18
16.	Brkić Aleksa	II-6	0	0	12	0	0	12
17.	Drndarski Emilija	II-8	0	0	5	0	5	10
18.	Cvetković Aleksa	II-8	0	0	5	0	0	5
19.*	Tirnanić Mihajlo*	II-7	0	0	0	0	0	0

III RAZRED

Mesto	Prezime i Ime	Razred	1.z.	2.z	3.z.	4.z.	5.z.	Ukupno
1.	Bošnjak Marta	III-5	20	20	20	20	20	100
2.	Anđelković Anastasija	III-1	18	20	0	5	5	48
3.	Stanković Stevan	III-7	8	20	0	2	0	30
4.	Šipka Jovan	III-5	8	5	0	8	3	24
5.	Tanko Andrej	III-8	3	0	5	10	0	18
6.	Pavlović Nevena	III-5	0	10	0	5	0	15
7.	Jurasović Ana	III-8	3	5	2	0	0	10
8.	Rakonjac Ivan	III-7	0	3	2	0	0	5
8.	Matović Luka	III-7	0	5	0	0	0	5
10.*	Bulatović Nikola*	III-6	0	0	0	0	0	0
11.*	Đorđević Mihailo*	III-6	0	0	0	0	0	0

IV RAZRED

Mesto	Prezime i Ime	Razred	1.z.	2.z	3.z.	4.z.	5.z.	Ukupno
1.	Matijašević Uroš	IV-8	20	10	18	20	0	68
2.	Trimovski Marko	IV-7	10	18	18	20	0	66
3.	Ristović Isidora	IV-8	10	10	8	20	15	63
3.	Tarajić Magdalena	IV-6	20	20	8	15	0	63
5.	Gađanski Božić Aleksa	IV-7	10	10	18	0	20	58
6.	Šešun Teodora	IV-8	10	10	8	20	0	48
7.	Ostojić Jovana	IV-7	15	15	3	12	0	45
8.	Minić Jelena	IV-6	10	20	3	0	10	43
8.	Dimitrijević Anja	IV-8	10	5	8	20	0	43
10.	Vukolić Ana	IV-6	15	5	0	20	0	40
11.	Cvetković Miloš	IV-5	0	5	5	20	5	35
12.	Markov Milica	IV-6	0	5	3	20	0	28
13.	Jakšić David	IV-7	10	0	5	0	10	25
14.	Matijević Ognjen	IV-5	10	0	3	10	0	23
15.	Dimitrijević Denis	IV-8	10	0	12	0	0	22
16.	Krnjaić Tamara	IV-4	5	5	5	0	0	15
17.	Bolesnikov Nikola	IV-8	10	0	3	0	0	13

* - UČENICI IMAJU DIREKTAN PLASMAN NA SLEDEĆI NIVO TAKMIČENJA