I RAZRED 26.11.2016.

1. Na skupu $A=\left\{\sqrt{2}\ ;\ \pi\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ 0{,}232323...\ ;\ 0\ ;\ \sqrt{3}+1\right\}$ definisana je relacija ρ :
$x\rho y \Leftrightarrow (x\in Q \wedge y\in Q)\vee(x\notin Q\wedge y\notin Q)$. Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije i naći klase.
2. U krug poluprečnika r upisani su kvadrat i jednakostranični trougao. Naći odnos površina kvadrata i trougla.
3. Brojevi 5777 i 8924 podeljeni istim prirodnim brojem n daju redom ostatke 20 i 36. Naći taj broj n.
4. Stočar je za svoje 24 krave obezbedio hranu za 18 nedelja. Koliko krava bi trebalo prodati posle 8 nedelja, da bi imao hrane za još 12 nedelja?
5. Ako je $f(5x+4)=\frac{1}{10x+2}$, $f(g(x))=\frac{1}{2x}$, naći $f(x)$ i $g(x)$, pa dokazati da je $g(x)$ bijekcija i naći $g^{-1}(x)$.

II RAZRED 26.11.2016.

1. Odrediti kvadratnu jednačinu čija su rešenja $\frac{a}{b}$, $\frac{a^2-b^2}{7a}$, gde su a i b rešenja sistema $a^3-b^3=37ab$, $a-b=12$.
2. Uprostiti izraz $\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}$ (tj. napisati ga u obliku $a+b\sqrt{3}$).
3. Naći celobrojne katete pravouglog trougla čija je hipotenuza $\sqrt{2006}$.
4. Dat je jednakostranični trougao stranice a . Iz svih središta stranica spuštene su normale na ostale dve stranice. Odrediti površinu šestougla ograničenog tim normalama.
5. Srediti izraz: $\frac{1+x^{-\frac{1}{2}}}{1-x^{-\frac{1}{2}}}+\frac{1-x^{-\frac{1}{2}}}{1+x^{-\frac{1}{2}}}-2\frac{1+x^{-1}}{1-x^{-1}}$.

III RAZRED 26.11.2016.

1. Ako je $x,y,z>0$, $xyz=1$, izračunati vrednost izraza $\frac{x+1}{xy+x+1}+\frac{y+1}{yz+y+1}+\frac{z+1}{zx+z+1}$.
2. Oko bazena u obliku pravilnog šestougla napravljena je staza širine 2m i površine 36m^2 . Naći obim bazena.
3. Data je kocka ivice a . Svaki ugao kocke je „odsečen“ tako da je svaka strana kocke postala pravilan osmougao. Naći površinu tako dobijenog tela.
4. Rešiti sistem jednačina: $x^2+xy=74$, $\log_{10}\sqrt{x}+\log_{10}\sqrt{y}=\frac{1}{2}$.
5. Na koliko načina možemo izabrati dva različita broja iz skupa $\{1,2,3,...,2001\}$ tako da njihov zbir bude paran?

IV RAZRED 26.11.2016.

1. Ako je $\frac{x_1}{x_1+3}=\frac{x_2}{x_2+5}=\frac{x_3}{x_3+7}=...=\frac{x_{2014}}{x_{2014}+4029}$ i $x_1+x_2+...+x_{2014}=2014$, naći x_1.
2. U pravougaoniku ABCD, M je središte CD, a BM je normalno na dijagonalu AC. Naći odnos AB: BC.
3. Nači sve prirodne brojeve a,b,c za koje važi: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>1$, $a>b>c>1$.
4. Odrediti sve proste brojeve p i q takve da je p^q+1 takođe prost.
5. Ako je $f(4)=6$, $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, $xf(x)=(x-3)f(x+1)$, naći $f(x)$, a zatim dokazati da je $f(4)\cdot f(7)\cdot f(10)\cdot ...\cdot f(2011)\cdot f(2014)=2013!$.

<u>I razred (rešenja)</u>

1. Očigledno je: $\sqrt{2},\pi,\sqrt{3}+1\notin Q$, $\frac{1}{3};0{,}232323...=\frac{23}{99};0\in Q$. Refleksivnost važi, jer je svaki broj iz skupa kao i on sam. Simetričnost važi, jer ako je jedan broj iz istog skupa kao i drugi, tada važi i obrnuto. Tranzitivnost važi, jer ako je prvi broj iz istog skupa kao i drugi, a drugi iz istog kao i treći, sva tri su iz istog skupa (pa je i prvi iz istog skupa kao i treći). Postoje dve klase: $\left\{\sqrt{2},\pi,\sqrt{3}+1\right\}$ i $\left\{\frac{1}{3};\frac{23}{99};0\right\}$.

2. Dijagonala kvadrata je prečnik datog kruga: $a\sqrt{2}=2r$, pa je $a=r\sqrt{2}$, gde je a stranica kvadrata. Od centra trougla pa do jednog njegovog temena je poluprečnik kruga, ili dve trećine visine trougla: $\frac{2}{3}\cdot\frac{b\sqrt{3}}{2}=r$, pa je $b=r\sqrt{3}$, gde je b stranica trougla. Tada je $P_k:P_t=a^2:\frac{b^2\sqrt{3}}{4}=2r^2:\frac{3r^2\sqrt{3}}{4}=8:3\sqrt{3}$.

3. Ako prvi broj smanjimo za 20, a drugi za 36, tada su oba deljiva sa n . $5757=a\cdot n$, $8888=b\cdot n$. Pošto je $5757=57\cdot 101$ i $8888=3\cdot 19\cdot 101$ očigledno je da je traženi broj 101.

4. Ako posmatramo trenutak posle 8 nedelja, imamo 24 krave koje imaju hrane za još 10 nedelja, a ako proda x krava, tada će $24-x$ krava imati hrane za 12 nedelja. U pitanju je obrnuta proporcija: $24:(24-x)=12:10$ iz koje je $x=4$. Znači, trebalo bi prodati 4 krave.

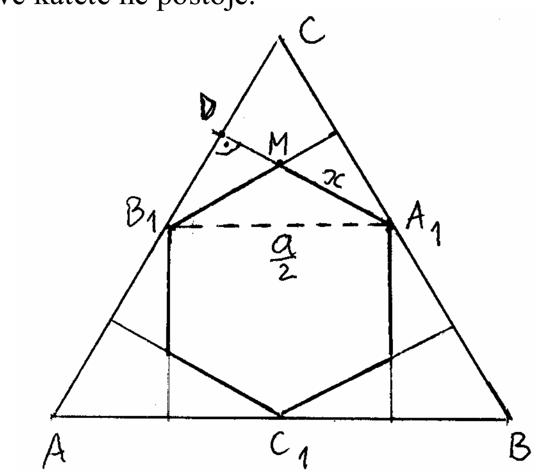
5. Ako uvedemo smenu $5x-4=t$ iz koje je $x=\frac{t-4}{5}$, imamo da je $f(t)=\frac{1}{10\cdot\left(\frac{t-4}{5}\right)+2}$, pa posle sređivanja je $f(t)=\frac{1}{2t-6}$ ili $f(x)=\frac{1}{2x-6}$. Tada je $f(g(x))=\frac{1}{2g(x)-6}$, a po zadatku je to $\frac{1}{2x}$. Sređivanjem izraza $\frac{1}{2g(x)-6}=\frac{1}{2x}$ dobijamo da je $g(x)=x+3$, a njena inverzna funkcija je $g^{-1}(x)=x-3$.

<u>II razred (rešenja)</u>

1. Ako se rastavi razlika kubova, dobija se $(a-b)(a^2+ab+b^2)=37ab$, a posto je $a-b=12$, posle sređivanja je $12a^2-25ab+12b^2=0$ što je ekvivalentno sa $(3a-4b)(4a-3b)=0$ iz čega je $a=\frac{4}{3}b$ ili $a=\frac{3}{4}b$. Iz prve jednakosti dobija se $a=48$, $b=36$, a iz druge $a=-36$, $b=-48$ (ubacujući u jednakost $a-b=12$). Tada je za prvi slučaj $x_1=\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$, $x_2=\frac{a^2-b^2}{7a}=3$, pa je tražena jednačina $3x^2-13x+12=0$, dok je za drugi $x_1=\frac{3}{4}$, $x_2=4$, pa je jednačina $4x^2-19x+12=0$.

2. $\dfrac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{3}\right)^3}}=\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{1+\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$.

3. Ako su katete tog pravouglog trougla a i b, tada važi $a^2+b^2=2006$. Ili su obe katete parni brojevi ili su obe neparni brojevi. Razmotrimo prvi slučaj: $a=2k$, $b=2n$, $k,n\in N$, $4k^2+4n^2=2006$, a to nije moguće jer 2006 nije deljivo sa 4. Drugi slučaj: $a=2k+1$, $b=2n+1$, $k,n\in N$ daje $4k^2+4k+1+4n^2+4n+1=2006$, a posle sređivanja (i deljenja sa 4), dobija se $k(k+1)+n(n+1)=501$, što je ponovo nemoguće, jer su oba sabirka sa leve strane jednakosti parni brojevi. Zaključak je da takve katete ne postoje.



4. Očigledno je u pitanju pravilan šestougao. Posmatrajmo trougao B_1A_1C. Njegova stranica je $\dfrac{a}{2}$, a važi

$x=A_1M=\dfrac{2}{3}A_1D=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. Tada je površina šestougla $P=6\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$, a posle zamene dobijene vrednosti za x je $P=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

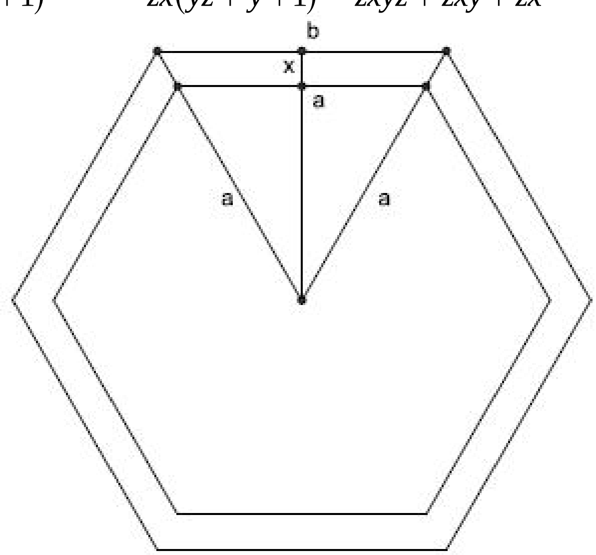
5. Posle uvođenja smene $x^{-\frac{1}{2}}=t$, dobija se $\dfrac{1+t}{1-t}+\dfrac{1-t}{1+t}-2\dfrac{1+t^2}{1-t^2}=\dfrac{(1+t)^2+(1-t)^2-2\left(1+t^2\right)}{(1-t)(1+t)}=\ldots=0$.

III razred (rešenja)

1. Ako se u prvom imeniocu razlomka ubaci umesto jedinice xyz i u trećem se to uradi dva puta dobija se

$$\frac{x+1}{x(y+1+zy)}+\frac{y+1}{yz+y+1}+\frac{z+1}{zx(1+yz+y)}=\frac{zx+z+zxy+zx+z+1}{zx(yz+y+1)}=\frac{2(zx+z+1)}{zx(yz+y+1)}=\frac{2(zx+z+1)}{zxyz+zxy+zx}=$$

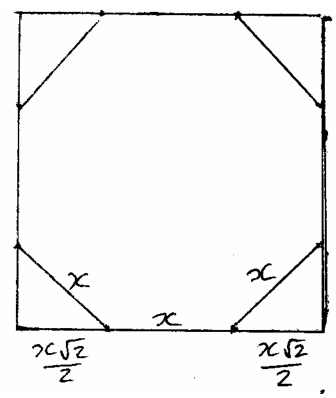
$\dfrac{2(zx+z+1)}{z+1+zx}=2$ (koristeći više puta da je $xyz=1$).



2. Ako je stranica manjeg šestougla a, a većeg b, tada površina trapeza čije su to osnovice iznosi 6 (šestina površine staze), $\dfrac{a+b}{2}x=6$, a pošto je $x=2$, $a+b=6$. Ako sad gledamo površinu trapeza kao razliku površina dva trougla, imamo $\dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}-\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=6$, pa je iz toga $b^2-a^2=8\sqrt{3}$, tj. $(a-b)(a+b)=8\sqrt{3}$, pa je, koristeći $a+b=6$,

$b-a=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Rešavajući sistem te dve jednačine dobija se

$a=\frac{9-2\sqrt{3}}{3}$, pa je obim bazena $O=\left(18-4\sqrt{3}\right)m$.



3. Potrebno je naći stranicu tog osmougla x. Površina se sastoji od 6 osmouglova i 8 jednakostraničnih trouglova (dobijenih odsecanjem malih piramida) stranice x.

Tada je $\frac{x\sqrt{2}}{2}+x+\frac{x\sqrt{2}}{2}=a$, iz čega se lako dobija da je $x\left(\sqrt{2}+1\right)=a$, tj. posle racionalisanja $x=a\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Površina jednog osmougla je $P_1=a^2-4\cdot\frac{\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2}$, $P_1=a^2-x^2=2a^2\left(\sqrt{2}-1\right)$,

a površina trougla je $P_2=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\left(3-2\sqrt{2}\right)\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{6}\right)}{4}$. Tada je

$P=6P_1+8P_2=12a^2\left(\sqrt{2}-1\right)+2a^2\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{6}\right)$ ili $P=2a^2\left(6\sqrt{2}-6+3\sqrt{3}-2\sqrt{6}\right)$.

4. Iz druge jednačine slede uslovi zadatka: $x>0$ i $y>0$. Sređivanjem te jednačine dobija se $\log_{10}\sqrt{xy}=\frac{1}{2}$, pa je $\sqrt{xy}=\sqrt{10}$, $xy=10$. Ubacivanjem u prvu jednačinu dobija se $x^2=64$, pa je $x=8$ (zbog uslova ne može biti $x=-8$), a $y=\frac{5}{4}$.

5. U datom skupu ima 1000 parnih i 1001 neparan broj. Postoje dve mogućnosti: da saberemo dva parna ili dva neparna broja. Dva parna broja možemo odabrati na $\frac{1000\cdot 999}{2}=499500$ načina (što je $\binom{1000}{2}$), a dva neparna broja na $\binom{1001}{2}=\frac{1001\cdot 1000}{2}=500500$. Ukupan broj načina je $499500+500500=1000000$.

IV razred (rešenja)

1. Iz prve jednakosti dobija se $x_2=\frac{5}{3}x_1$, a iz jednakosti prvog i trećeg razlomka je $x_3=\frac{7}{3}x_1$, itd. Tako da ubacivanjem u drugi uslov dobijamo $x_1+\frac{5}{3}x_1+\frac{7}{3}x_1+...+\frac{4029}{3}x_1=2014$, pa množenjem sa 3 dobijamo $x_1\left(3+5+7+...+4029\right)=3\cdot 2014$, dalje je $x_1\cdot 2014\cdot 4032=3\cdot 2014$, (2014 parova sa zbirom 4032), pa je $x_1=\frac{3}{2016}=\frac{1}{672}$.

2. Označimo $AB = a$, $BC = b$, $AC = d$, $BM = x$ i neka je $AC \cap BM = \{S\}$. Tada je ΔABS sličan ΔCMS (svi uglovi su im jednaki). A pošto je $CM = \frac{a}{2}$, sve stranice su dva puta manje, tj. $BS = \frac{2}{3}x$ i $AS = \frac{2}{3}d$. Pošto je $d^2 = a^2 + b^2$ i $x^2 = \frac{a^2}{4} + b^2$ (iz ΔBCM), tada je iz ΔABS : $\left(\frac{2}{3}d\right)^2 + \left(\frac{2}{3}x\right)^2 = a^2$, pa ubacivanjem prethodnih jednakosti dobijamo, posle sređivanja, $2b^2 = a^2$, ili $AB : BC = a : b = \sqrt{2}$.

3. Ako je $c = 2, \; b = 3, \; a = 4$, zadovoljen je uslov zadatka, kao i za $c = 2, \; b = 3, \; a = 5$, a povećavanjem vrednosti a ili b zbir je manji od 1. Za $c = 3, \; b = 4, \; a = 5$ dobijamo zbih takođe manji od 1, tako da, sem ova dva navedena, nema više rešenja

4. Ako je p neparan, dati izraz je paran, ali veći od 2, tako da nema rešenja. To znači da je $p = 2$. Jedan par brojeva koji je rešenje je $(p,q) = (2,2)$. Ako je $q > 2$, tada je traženi zbir deljiv sa tri: $2^q + 1 = (2+1)(2^{q-1} - 2^{q-2} + 2^{q-3} ... + 1)$, pa ne može biti prost. Jedino rešenje je $(p,q) = (2,2)$.

5. Ako ubacimo u datu formulu $x = 4$, dobićemo $f(5) = 24$, slično i za $x = 5$ dobićemo $f(6) = 60$. Ako te vrednosti ubacimo u osnovni izraz $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ dobijamo sistem tri jednačine sa tri nepoznate čija su rešenja $a = -6$, $b = 11$ i $c = -6$, pa je tražena funkcija $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ili rastavljeno $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$. Tada je $f(4) = 3 \cdot 2 \cdot 1$, $f(7) = 6 \cdot 5 \cdot 4$,..., $f(2014) = 2013 \cdot 2012 \cdot 2011$, pa je očigledno $f(4) \cdot f(7) \cdot f(10) \cdot ... \cdot f(2011) \cdot f(2014) = 2013!$ (Može se i ubaciti $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ u datu formulu i metodom neodređenih koeficijenata naći $a = -6$, $b = 11$ i $c = -6$).

REZULTATI ŠKOLSKOG TAKMIČENJA IZ MATEMATIKE, 26.11.2016.

I RAZRED

Mesto	Prezime i Ime	Razred	1.z.	2.z	3.z.	4.z.	5.z.	Ukupno
1.	Bakurski Aranđel	I-6	20	20	20	20	20	100
2.	Grujičić Teodora	I-7	20	20	5	20	20	85
3.	Kovač Daniel	I-7	20	20	12	20	5	77
4.	Arbutina Ognjen	I-6	18	12	20	20	0	70
5.	Stanković Ognjen	I-5	10	0	20	20	15	65
6.	Ristić Laura	I-7	0	0	20	20	18	58
6.	Sekulović Miloš	I-5	20	20	0	0	18	58
6.	Jovanović Momčilo	I-7	20	18	20	0	0	58
9.	Mitrović Lana	I-7	20	12	0	20	5	57
10.	Petrov Anđela	I-8	18	12	0	20	0	50
10.	Kotur Sofija	I-6	20	10	0	20	0	50
10.	Gojsović Ivana	I-6	0	20	20	10	0	50
10.	Jovanović Milan	I-7	20	12	0	0	18	50
14.	Đurđević Marko	I-6	0	5	15	20	0	40
15.	Brkić Miona	I-6	20	18	0	0	0	38
16.	Bosilj Kristina	I-6	0	0	0	20	0	20
17.	Miković Danilo	I-7	5	0	0	5	0	10
17.	Rakonjac Nikola	I-6	0	0	0	10	0	10
17.	Marković Vladimir	I-8	0	5	5	0	0	10
20.	Babić Bogdan	I-6	0	0	0	5	0	5

II RAZRED

Mesto	Prezime i Ime	Razred	1.z.	2.z	3.z.	4.z.	5.z.	Ukupno
1.	Stanković Nikolija	II-6	20	20	0	20	20	80
2.	Vari Jovan	II-7	5	20	12	20	20	77
3.	Pešić Ivan	II-7	0	18	18	20	20	76
4.	Cvijetić Dušan	II-5	20	5	0	20	20	65
5.	Vrhovac Katarina	II-6	18	5	0	15	20	58
6.	Jakšić Tijana	II-6	5	5	0	20	20	50
7.	Tršek Lazar	II-6	5	0	15	5	20	45
8.	Černicin Aleksandar	II-8	18	0	0	0	20	38
9.	Milovanović Igor	II-7	10	20	5	0	0	35
10.	Lukić Tijana	II-6	5	5	0	0	20	30
10.	Zečević Danilo	II-5	5	5	0	20	0	30
12.	Grujić Dejana	II-8	5	5	15	0	0	25
13.	Zarev Doroteja	II-8	5	5	0	5	0	15

III RAZRED

Mesto	Prezime i Ime	Razred	1.z.	2.z	3.z.	4.z.	5.z.	Ukupno
1.	Debogović Marina	III-5	20	20	20	18	20	98
2.	Gujaničić Katarina	III-5	20	5	12	18	20	75
3.	Berbić Damir	III-5	20	5	10	18	20	73
3.	Velimirov Luka	III-5	20	0	15	20	18	73
5.	Ćosić Ivana	III-6	20	0	10	20	20	70
6.	Farkaš Erni	III-8	10	20	5	18	5	58
7.	Vračar Aleksa	III-5	0	15	15	18	0	48
8.	Pušeljić Aleksa	III-8	0	5	10	18	10	43
9.	Badrljica Miloš	III-8	10	0	5	0	10	25
10.	Cvetković Aleksa	III-8	0	0	0	18	5	23
11.	Cvejović Pavle	III-8	0	0	0	0	20	20
12.	Cvejić Lazar	III-8	5	10	0	0	0	15
13.*	Milinković Milica*	III-7	0	10	0	0	0	10
14.	Lukić Maša	III-8	0	5	0	0	0	5
15.	Dejanović Dejan	III-7	2	0	0	0	0	2
16.*	Tirnanić Mihajlo*	III-7	0	0	0	0	0	0

IV RAZRED

Mesto	Prezime i Ime	Razred	1.z.	2.z	3.z.	4.z.	5.z.	Ukupno
1.	Anđelković Anastasija	IV-1	20	10	5	10	15	60
1.	Tanko Andrej	IV-8	0	20	20	20	0	60
1.	Đorđević Mihailo	IV-6	20	0	20	20	0	60
4.	Ivanović Jovana	IV-6	20	0	20	0	10	50
5.	Simović Aleksandra	IV-8	0	5	20	10	0	35
6.	Jurasović Ana	IV-8	0	5	20	0	0	25
7.	Krstić Nikola	IV-8	0	0	5	5	0	10
8.*	Bošnjak Marta*	IV-5	0	0	0	0	0	0
9.*	Bulatović Nikola*	IV-6	0	0	0	0	0	0

* - UČENICI IMAJU DIREKTAN PLASMAN NA OPŠTINSKO TAKMIČENJE ZBOG OSVOJENE NAGRADE NA OKRUŽNOM TAKMIČENJU PRETHODNE GODINE