I razred 25.11.2017.

1. Ako je $f(x-1)=\frac{x-1}{x}$, $f^2(x)=f\big(f(x)\big)$, … , naći $f^{2017}(1)$.

2. Postoje li tri uzastopna cela broja čiji je zbir kvadrata deljiv sa 1008? Obrazložiti!

3. Ana i Boris su pili limunadu u bioskopu. Boris je uzeo srednju, a Ana veliku koja je za 50% veća od srednje. Nakon što su oboje popili $\frac{3}{4}$ svoje limunade, Ana je dala Borisu $\frac{1}{3}$ od onoga što je njoj ostalo i još 0,5 dl. Pošto se film završio i sve su popili, zaključili su da su oboje popili istu količinu limunade. Koliko dl su zajedno popili?

4. Od 9 međusobno podudarnih pravougaonika, čije su dužina i širina prirodni brojevi, sastavljen je pravougaonik dimenzija 20x9. Kojih sve dimenzija mogu biti polazni pravougaonici?

5. Neka je S centar kružnice k poluprečnika 1. Temena A i B kvadrata ABCD leže na kružnici k, a stranica CD sadrži centar S. Odrediti dužinu stranice kvadrata ABCD.

II razred 25.11.2017.

1. Neka su a i b pozitivni realni brojevi za koje važi $a^2+b^2=8$ i $a^6+b^6=416$. Odrediti $a\cdot b$.

2. Dokazati da je vrednost izraza $\frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\cdot(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}$ prirodan broj.

3. Neka je $a=123456789$ i $N=a^3-2a^2-3a$. Dokazati da je N deljiv sa 540.

4. Kvadrat je podeljen na konačan broj manjih kvadrata čiji obimi su prirodni brojevi. Da li mora i obim početnog kvadrata biti prirodni broj? Obrazložiti!

5. Dat je kvadrat ABCD, stranice a. Temena A i C su centri dve kružnice koje prolaze kroz tačke B i D. Ako su preseci tih kružnica s dijagonalom AC tačke M i N, odrediti površinu četvorougla BMDN.

III razred 25.11.2017.

1. Odrediti racionalne brojeve a i b, tako da je $\sin 75^{\circ} \cdot \cos 15^{\circ} = a + \sqrt{b}$.

2. Odrediti sve kompleksne brojeve z, za koje važi $z^3 = \bar{z}$.

3. Neka je n prirodan broj. Temena pravilnog 2n-tougla naizmenično su obojena crvenom i plavom bojom, pa su nacrtane sve njegove stranice i sve dijagonale. Ako je broj svih duži koje spajaju temena iste boje jednak 3192, naći broj duži koje spajaju temena različitih boja.

4. Neka je ABCD pravougaonik takav da je AB:AD=2:3 i neka je tačka E na stranici AD takva da je AE=AB. Tačka F je na polupravoj AB (B je između A i F) tako da trougao AFE i četvorougao CDEF imaju jednake površine. Odrediti odnos AB:BF.

5. Data je kocka ABCDA'B'C'D' ivice dužine a. Ako je tačka P ortogonalna projekcija tačke B na prostornu dijagonalu AC', odrediti zapreminu piramide ABCDP.

IV razred 25.11.2017.

1. Ako je $f(x) = (x+1)^{64}$ i $a = \frac{2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt[4]{3}+1)(\sqrt[8]{3}+1)(\sqrt[16]{3}+1)}$, naći $f(a)$.

2. Odrediti sve parove prirodnih brojeva (m, n) koji zadovoljavaju jednačinu $mn^2 = 100(n+1)$.

3. Odrediti sve realne brojeve c za koje je jedno rešenje kvadratne jednačine $27x^2 - 12x + c = 0$ kvadrat drugog.

4. Broj koji se sastoji samo od cifara 2 i 3 nazivamo „veselim". Dakle, „veseli" brojevi su redom, po veličini, 2,3,22,23... Odrediti 2050. „veseli" broj.

5. Tačke A,B,C,D,E leže tim redom na kružnici čiji je prečnik AE. Odrediti $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDE$.

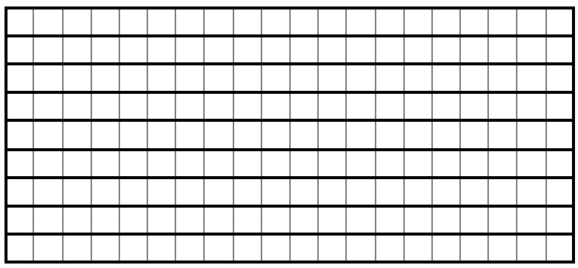
REŠENJA ZADATAKA SA ŠKOLSKOG TAKMIČENJA 25.11.2017.

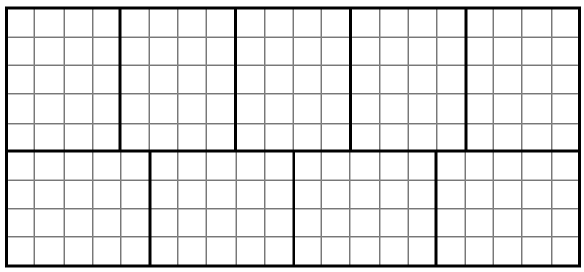
I-1. $f\left(f(x)\right) = f\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{1+\frac{x}{1+x}} = \frac{x}{1+2x}$, $f^3(x) = \frac{x}{1+3x}$,..., $f^{2017}(x) = \frac{x}{1+2017x}$, $f^{2017}(1) = \frac{1}{2018}$.

I-2. Ne postoji. Zbir tri uzastopna kvadrata se može zapisati kao $(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = 3n^2 + 2$, što nije deljivo sa 3, a 1008 jeste. (Može se zapisati i kao $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 3n^2 + 6n + 5$, a zaključak je isti.)

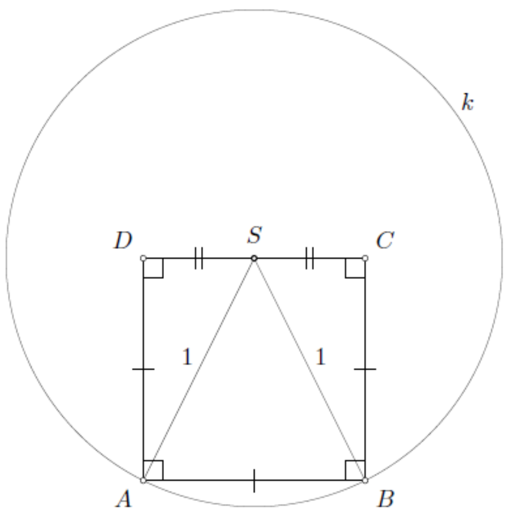
I-3. Neka je Boris imao x, a tada je Ana imala 1,5x. Boris je od Ane dobio $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1{,}5x + 0{,}5 = \frac{1}{8}x + 0{,}5$, što znači da je ukupno popio $x + \frac{1}{8}x + 0{,}5 = \frac{9}{8}x + 0{,}5$. Ana je popila ukupno $1{,}5x - \left(\frac{1}{8}x + 0{,}5\right) = \frac{11}{8}x - 0{,}5$. Tada je $\frac{9}{8}x + 0{,}5 = \frac{11}{8}x - 0{,}5$, pa je iz toga $x = 4$. Oni su ukupno popili $x + 1{,}5x = 2{,}5x = 10\ dl$ limunade.

I-4. Lako se zaključuje da je površina jednog pravougaonika 20. Pošto su u pitanju prirodni brojevi, imamo samo tri mogućnosti: 1x20, 2x10 ili 4x5. Prve dve su date na slikama, dok treća nije moguća jer će se bilo kakvim sastavljanjem dobiti da su i širina i dužina parni brojevi.





I-5. Pošto su A i B na kružnici, simetrala te duži prolazi kroz centar S, a to znači i da je S središte duži DC. Iz pravouglog trougla ASD je $a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 1^2$ (Pitagora), gde je a tražena stranica kvadrata. Iz toga je $a = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.



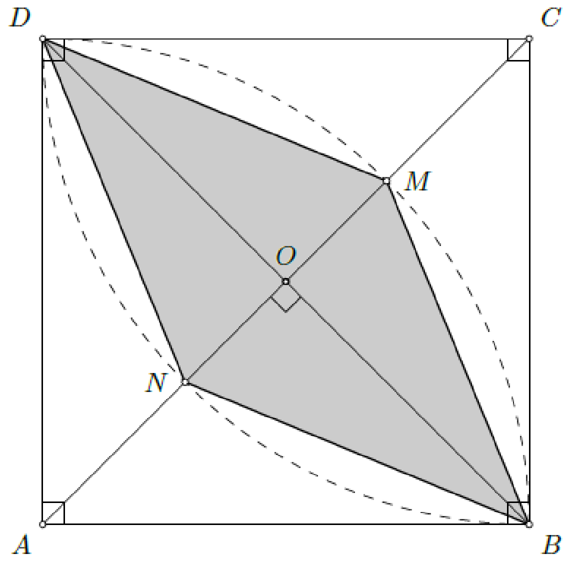
II-1. Ako se formula $a^2 + b^2 = 8$ podigne na treći stepen, dobije se $a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = 512$, pa posle grupisanja je $a^6 + b^6 + 3a^2b^2(a^2 + b^2) = 512$, i ubacivanja datih vrednosti, dobija se $a^2b^2 = 4$. Pošto su u pitanju pozitivni brojevi $ab = 2$. (Moglo se krenuti i od $(a^2)^3 + (b^2)^3 = 416$, pa se rastavi zbir kubova...)

II-2. $\frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\cdot(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[3]{(7+5\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)^3}}{\sqrt{3+2\sqrt{3}+1}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[3]{(7+5\sqrt{2})(2\sqrt{2}-6+3\sqrt{2}-1)}}{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[3]{(7+5\sqrt{2})(5\sqrt{2}-7)}}{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[3]{50-49}}{1} = 1$ (Može se primeniti i Lagranžova formula i prepoznati kub binoma pod prvim korenom...)

II-3. Prvo primetimo da je $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ i $N = a(a-3)(a+1)$. Potrebno je dokazati da je N deljivo sa 4, 5 i 27. Pošto je a neparan, tada su $a-3$ i $a+1$ parni, pa je N deljiv sa 4. Još je očigledno da je $a+1$ deljivo sa 5. Pošto je zbir cifara broja a deljiv sa 9, tada je i a deljiv sa 9, a takođe i $a-3$, pa je N deljiv i sa 27.

II-4. Obim početnog kvadrata mora biti prirodni broj. Posmatrajmo jednu stranicu početnog kvadrata. Nju čini konačan broj stranica manjih kvadrata čiji su obimi $O_1, O_2, \ldots, O_k \in N$. Tada je dužina te stranice $\frac{O_1}{4} + \frac{O_2}{4} + \cdots + \frac{O_k}{4}$, pa je obim kvadrata $4 \cdot \left(\frac{O_1}{4} + \frac{O_2}{4} + \cdots + \frac{O_k}{4}\right) = O_1 + O_2 + \cdots + O_k \in N$.

II-5. $AN = AC - NC = a\sqrt{2} - a = a(\sqrt{2} - 1) = CM$. Iz toga je $MN = AC - AN - CM = a(2 - \sqrt{2})$. $P = \frac{BD \cdot MN}{2}$, jer su dijagonale normalne, pa je $P = \frac{a\sqrt{2} \cdot a(2-\sqrt{2})}{2} = a^2(\sqrt{2} - 1)$.

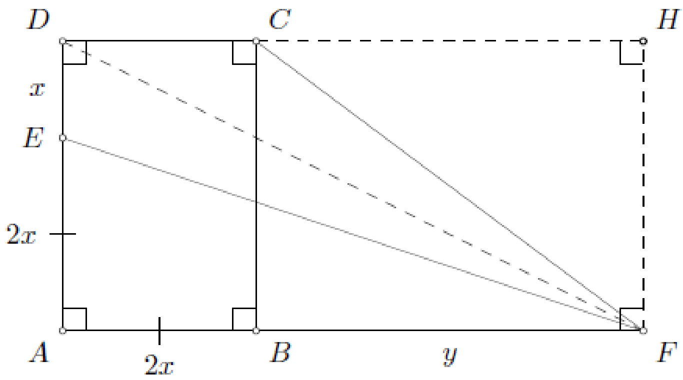


III-1. $sin75^\circ = sin(90^\circ - 15^\circ) = cos15^\circ$, pa je $sin75^\circ cos15^\circ = cos^2 15^\circ = \frac{1+cos30^\circ}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{16}}$. $a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{16}$.

III-2. Ako se ubaci $z = a + bi$ dobija se $a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i = a - bi$, pa izjednačavanjem realnih i imaginarnih delova dobijaju se dve jednačine $a(a^2 - 3b^2 - 1) = 0$ i $b(3a^2 - b^2 + 1) = 0$. Imamo četiri slučaja: 1) $a = 0$, $b = 0$, $z = 0$; 2) $a = 0$, $3a^2 - b^2 + 1 = 0$, iz čega je $b^2 = 1$, pa je $z = i$ ili $z = -i$; 3) $b = 0$, $a^2 - 3b^2 - 1 = 0$, iz čega je $a^2 = 1$, pa je $z = 1$ ili $z = -1$; 4) $a^2 - 3b^2 - 1 = 0$, $3a^2 - b^2 + 1 = 0$, iz čega je sabiranjem jednačina $a^2 = b^2$, pa ubacivanjem u prvu, dobija se $b^2 = -\frac{1}{2}$, što nije moguće $(a, b \in R)$.

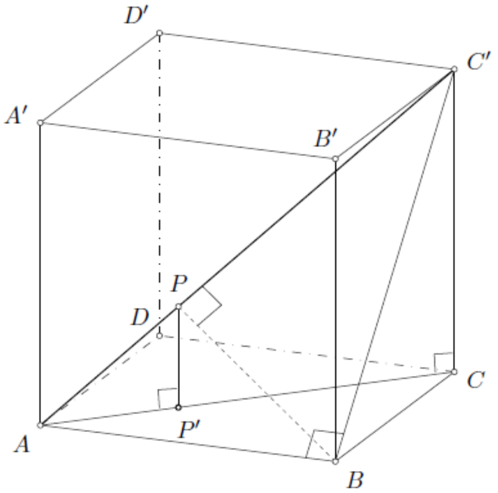
III-3. Broj duži koje spajaju plava temena je $\frac{n(n-1)}{2}$, kao i broj duži koje spajaju crvena. To znači da je $n(n-1) = 3192 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19 = 56 \cdot 57$, pa je jedino pozitivno rešenje $n = 57$. Broj duži koje spajaju temena različitih boja je $n^2 = 57^2 = 3249$.

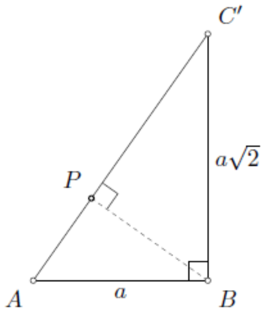
III-4. Uzimajući u obzir oznake kao na slici, imamo $P_{AEF} = \frac{2x \cdot (2x+y)}{2} = 2x^2 + xy$, $P_{DEF} = \frac{x \cdot (2x+y)}{2} = \frac{2x^2+xy}{2}$, $P_{CDF} = \frac{2x \cdot 3x}{2} = 3x^2$.



Po uslovu zadatka je $P_{AEF} = P_{DEF} + P_{CDF}$, pa je $2x^2 + xy = \frac{2x^2+xy}{2} + 3x^2$ iz čega se sređivanjem dobija $xy = 4x^2$, tj. $y = 4x$. Tada je odnos $AB: BF = 2x: y = 1: 2$.

III-5. Prema podacima na slici $\Delta ACC' \sim \Delta AP'P$, pa je dovoljno naći duž AP, da bi se iz proporcije dobila duž PP' koja je visina tražene piramide. U pravouglom trouglu ABC' je $AB = a$, $BC' = a\sqrt{2}$, $AC' = a\sqrt{3}$, pa je iz površine tog trougla $BP = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Trougao ABP je pravougli, pa je $AP^2 = a^2 - \frac{6a^2}{9} = \frac{3a^2}{9}$, tj. $AP = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
Tada je $PP': CC' = AP: AC' = 1: 3$, iz čega je $PP' = \frac{a}{3}$. $V_{ABCDP} = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^3}{9}$.





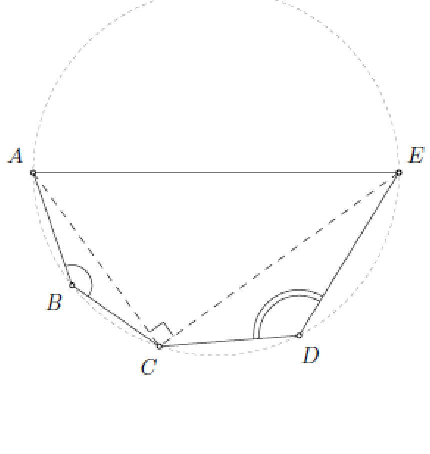
IV-1. Ako se izraz $a = \frac{2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt[4]{3}+1)(\sqrt[8]{3}+1)(\sqrt[16]{3}+1)}$ racionališe sa $\sqrt[16]{3} - 1$, posle par koraka se dobija $a = \sqrt[16]{3} - 1$, pa je $f(\sqrt[16]{3} - 1) = (\sqrt[16]{3})^{64} = 3^4 = 81$.

IV-2. Pošto su n i $n+1$ uzajamno prosti brojevi, n^2 deli 100, a to daje sledeće mogućnosti: $n = 1$, $m = 200$; $n = 2$, $m = 75$; $n = 5$, $m = 24$; $n = 10$, $m = 11$.

IV-3. Neka su p i p^2 rešenja date jednačine. Iz prve Vijetove formule je $x_1 + x_2 = p + p^2 = \frac{12}{27}$, pa su rešenja te jednačine $p_1 = \frac{1}{3}$ i $p_2 = -\frac{4}{3}$, a iz druge $x_1 \cdot x_2 = p^3 = \frac{c}{27}$, pa imamo dva rešenja $c_1 = 1$ ili $c_2 = -64$.

IV-4. Postoje dva jednocifrena „vesela“ broja, četiri dvocifrena,..., 2^n n-tocifrena. Ukupan broj sa desetocifrenim brojevima je $2 + 4 + 8 + \cdots + 1024 = 2046$ (geometrijski niz) , a to znači da je 2047. „veseli“ broj 22222222222, dok je 2050. broj 22222222233.

IV-5. Četvorougao $ABCE$ je tetivan, pa je $< ABC = 180^{\circ} - < AEC$. Slično, četvorougao $ACDE$ je tetivan, pa je $< CDE = 180^{\circ} - < CAE$. Ugao ACE je ugao nad prečnikom pa je prav, pa je $< AEC + < CAE = 90^{\circ}$. Iz tih jednakosti je $< ABC + < CDE = 270^{\circ}$.



REZULTATI ŠKOLSKOG TAKMIČENJA IZ MATEMATIKE, 25.11.2017.

I RAZRED

Mesto	Prezime i Ime	Razred	1.z.	2.z	3.z.	4.z.	5.z.	Ukupno
1.	Stanković Filip	I-6	20	20	20	20	20	100
2.	Čakovan Natalija	I-6	20	3	20	15	20	78
3.	Janković Danica	I-7	20	10	2	10	20	62
4.	Miltenović Filip	I-6	0	2	20	15	20	57
5.	Đuretanović David	I-5	20	5	18	10	0	53
6.	Rakić Svetlana	I-8	20	15	2	10	0	47
7.	Aleksić Andrea	I-8	20	0	0	10	10	40
8.	Kosanović Maša	I-6	0	3	15	20	0	38
9.	Marinković Miloš	I-8	5	0	3	10	15	33
9.	Vujić Nemanja	I-6	0	3	0	10	20	33
11.	Nešić Nemanja	I-8	20	0	0	10	0	30
12.	Jerković Milica	I-7	5	3	3	10	0	21
12.	Veljković Damjan	I-7	5	3	3	10	0	21
14.	Krsmanović Nikola	I-5	0	3	10	0	5	18
14.	Cvejić Tamara	I-6	0	3	0	15	0	18
16.	Joković Mateja	I-6	0	1	0	10	0	11
17.	Tisevski Anđela	I-1	5	0	0	0	0	5
18.	Parun Filipov Tigran	I-6	0	0	3	0	0	3

II RAZRED

Mesto	Prezime i Ime	Razred	1.z.	2.z	3.z.	4.z.	5.z.	Ukupno
1.	Grujičić Teodora	II-7	20	20	15	20	10	85
2.	Edvard Gabrijel Etinski	II-5	20	20	5	5	20	70
3.	Lukić Marko	II-8	12	20	0	20	15	67
4.	Bakurski Aranđel	II-6	18	3	5	20	20	66
5.	Gojsović Ivana	II-6	18	10	15	15	2	60
6.	Sekulović Miloš	II-5	2	0	5	20	20	47
7.	Stanković Ognjen	II-5	20	0	5	20	0	45
8.	Kovač Daniel	II-7	20	0	0	20	3	43
9.	Đurđević Marko	II-6	20	0	5	10	5	40
10.	Vukasović Sergej	II-7	20	2	10	0	3	35
11.	Krstić Vladimir	II-5	20	0	2	3	2	27
12.	Kotur Sofija	II-6	0	0	3	15	5	23
13.	Radovanović Nikola	II-7	20	0	0	0	0	20
14.	Uglišin Kosta	II-6	10	2	0	2	2	16
15.	Jovanović Momčilo	II-7	0	3	5	2	2	12
16.	Rakonjac Nikola	II-6	2	2	0	5	0	9
17.	Grujin Elena	II-6	0	2	0	0	1	3
18.*	Petrov Anđela	II-8	0	0	0	0	0	0

III RAZRED

Mesto	Prezime i Ime	Razred	1.z.	2.z	3.z.	4.z.	5.z.	Ukupno
1.	Pešić Ivan	III-7	20	15	20	20	20	95
2.	Vari Jovan	III-7	20	20	20	20	0	80
3.	Zečević Danilo	III-5	18	15	20	18	0	71
4.	Stanković Nikolija	III-6	20	10	10	0	10	50
5.	Tršek Lazar	III-6	0	0	20	0	20	40
6.	Vrhovac Katarina	III-6	20	0	10	0	2	32
7.	Zarev Doroteja	III-8	15	5	2	0	0	22
8.	Bojić Marija	III-7	5	0	0	5	0	10
9.	Černicin Aleksandar	III-8	0	0	3	3	0	6
10.	Grujić Dejana	III-8	2	0	0	2	0	4
12.*	Jakšić Tijana	III-6	0	0	0	0	0	0
13.*	Milovanović Igor	III-7	0	0	0	0	0	0

IV RAZRED

Mesto	Prezime i Ime	Razred	1.z.	2.z	3.z.	4.z.	5.z.	Ukupno
1.	Vračar Aleksa	IV-5	20	15	20	10	20	85
2.	Debogović Marina	IV-5	20	8	20	20	0	68
2.	Berbić Damir	IV-5	20	8	20	20	0	68
4.	Badrljica Miloš	IV-8	20	3	20	20	0	63
4.	Ćosić Ivana	IV-6	20	8	20	0	15	63
6.	Velimirov Luka	IV-5	0	3	10	20	20	53
7.	Jocić Lara	IV-5	20	10	20	0	2	52
8.	Marić Đorđe	IV-8	0	20	10	20	0	50
9.	Cvejić Lazar	IV-8	0	10	8	20	8	46
10.	Gujaničić Katarina	IV-5	20	0	3	20	0	43
11.	Cvetković Aleksa	IV-8	0	0	0	20	0	20
11.	Pušeljić Aleksa	IV-8	0	8	8	2	2	20
13.*	Tirnanić Mihajlo	IV-7	0	0	0	0	0	0

* - UČENICI IMAJU DIREKTAN PLASMAN NA OPŠTINSKO TAKMIČENJE ZBOG OSVOJENE NAGRADE NA OKRUŽNOM TAKMIČENJU PRETHODNE GODINE