Školsko takmičenje iz matematike, 24.11.2018.

I razred

1. Date su bijekcije $f(x)=ax+2$ i $g(x)=3x+b,\ a,b\in R$. Ako je $f\big(g(x)\big)=12x+6$, naći $a\ i\ b$ i izračunati $g^{-1}\big(f^{-1}(x)\big)$.

2. Dati su skupovi $A=\{1,2,3,\dots,n\},\ B=\{2,4,6,\dots,n\}, C=\{1,3,5,\dots,n-1\}$, gde je $n\in N$ paran broj. Ako je zbir svih elemenata skupa B za 200 veći od zbira svih elemenata iz skupa C, naći zbir svih elemenata skupa A, zbir svih elemenata skupa B i zbir svih elemenata skupa C.

3. Dat je pravilan šestougao stranice 6. On je prekriven sa 6 podudarnih krugova čiji centri leže u temenima šestougla tako da se svaka dva susedna kruga međusobno dodiruju. Naći površinu dela šestougla koji nije prekriven.

4. Stranice pravouglog trougla su prirodni brojevi. Ako je dužina jedne katete 15, naći dužinu druge katete i hipotenuze. Naći sva rešenja!

5. Koliko najmanje uzastopnih decimala broja $\frac{11}{21}$ treba sabrati da bi se dobio broj veći ili jednak sa 2018? (npr. zbir decimala broja 0,237 je 12)

II razred

1. Na stranici AB, pravougaonika ABCD, odabrana je tačka E, a na stranici CD tačka F, tako da je četvorougao EBFD romb. Odrediti dužinu EF, ako su dužine AB=a i BC=b, $a>b$.

2. Ako je $a-b=3$ i $ab=1$, izračunati $\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}$ i $\frac{1}{a^6}+\frac{1}{b^6}$.

3. Odrediti sve prirodne brojeve $m\ i\ n$ tako da važi $m^5+n^2=1700$.

4. Ako je $x=2^{-1}(a+a^{-1})$, $a<-1$, izračunati vrednost izraza $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

5. Dokazati da jednačina $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)x^2-6x+a+b+c=0$ nema realna rešenja, gde su $a,b\ i\ c$ međusobno različiti pozitivni brojevi.

III razred

1. Dat je romb ABCD , AB=6, sa oštrim uglom kod temena A od 60°. Kroz teme B je postavljena prava paralelna dijagonali AC. Naći zapreminu tela koje se dobija rotacijom romba oko date prave.

2. Zbir dvocifrenog broja i broja koji ima iste cifre, ali u obrnutom redosledu, je potpun kvadrat. Naći sve takve brojeve.

3. Iz tačke D stranice AB (AD>BD), jednakostraničnog trougla ABC povučena je normala na stranicu BC, s podnožjem E. Zatim se iz E povuče normala na AC, s podnožjem F, a iz F normala na AB, s podnožjem u G. Površina četvorougla DEFG je $21\sqrt{3}$, a dužina stranice trougla ABC je 14. Naći dužinu $x=$ BD.

4. Izračunati zbir: $log_2tg1^\circ+log_2tg2^\circ+log_2tg3^\circ+\cdots+log_2tg89^\circ$.

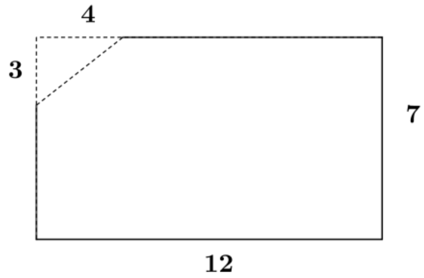
5. Izračunati: $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{2019}+\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2019}$.

IV razred

1. Ako je $f\left(\frac{2x+3}{x}\right) = (x+3)^2$ izračunati $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. Rešiti jednačinu: $2^{sin^2 x} = sinx$.

3. Od pravougaone ploče dužine stranica 12 i 7, odsečen je jedan ugao u obliku pravouglog trougla s katetama dužina 4 i 3, kao na slici. Iz preostalog dela treba iseći novu pravougaonu ploču. Kolika je najveća moguća površina te ploče i koje su njene dimenzije?



4. Ako je $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{6a_n}{a_n+3}$, $n \geq 1$ dokazati da je $a_n = \frac{3\cdot 2^{n-1}}{2^{n-1}+2}$, $n \geq 1$.

5. Jednakokraki trougao ABC s osnovicom BC=20, i kracima dužine 18, podeljen je dužinom DE na dva dela jednakih obima i površina. Tačka D je na osnovici, a tačka E na kraku AC i te tačke se ne poklapaju s temenima trougla. Odrediti dužinu x =DC.

Rešenja

I-1. $f\big(g(x)\big) = f(3x+b) = a(3x+b)+2 = 3ax+ab+2 = 12x+6$, pa je $3a = 12$ i $ab+2 = 6$, iz čega se lako dobija $a = 4$ i $b = 1$. Tada je: $f(x) = 4x+2$, a $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{4}$ i $g(x) = 3x+1$, a $g^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$. Na kraju, $g^{-1}\big(f^{-1}(x)\big) = g^{-1}\left(\frac{x-2}{4}\right) = \frac{\frac{x-2}{4}-1}{3} = \frac{x-6}{12}$.

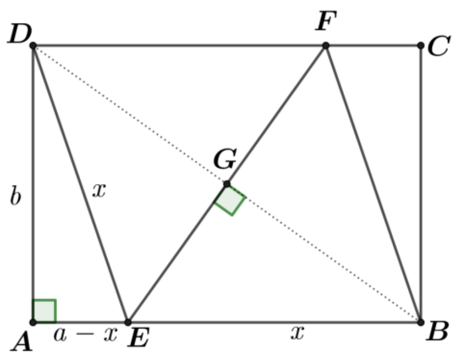
I-2. Redom gledano, svaki element skupa B je za jedan veći od svakog elementa skupa C, tako da je $n = 400$. Zbir elemenata skupa A je $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, tj. 80200, a zbir elemenata skupa B je $2+4+6+\cdots+400 = 2(1+2+3+\cdots+200) = 2\frac{200\cdot 201}{2} = 40200$, a iz toga dobijamo zbir elemenata skupa C, kao razliku ta dva zbira, a to je 40000. (Mogu se koristiti i formule $2+4+6+\cdots+2m = m(m+1)$ i $1+3+5+\cdots+2m-1 = m^2$, gde je m=200.)

I-3. Pošto je stranica šestougla 6, poluprečnici krugova su 3. Unutrašnji ugao šestougla je 120° pa se trećina površine svakog kruga nalazi unutar šestougla. Tražena površina je razlika površine šestougla i 6 „trećina“ krugova. $P = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} - 6\frac{r^2\pi}{3} = 18(3\sqrt{3}-\pi)$.

I-4. Neka je $a = 15$. Tada je $c^2 - b^2 = 225$, ili $(c-b)(c+b) = 225$. A pošto je $c-b < c+b$, postoje četiri mogućnosti: 1) $c-b = 1$, $c+b = 225$, što daje $c = 113$, $b = 112$; 2) $c-b = 3$, $c+b = 75$, što daje $c = 39$, $b = 36$; 3) $c-b = 5$, $c+b = 45$, što daje $c = 25$, $b = 20$; 4) $c-b = 9$, $c+b = 25$, što daje $c = 17$, $b = 8$

I-5. Dati razlomak je: $\frac{11}{21} = 0{,}523809523809\ldots$ Period ponavljanja cifara je 6, a zbir tih cifara je 27. Pošto je 2018:27=74,... treba sigurno uzeti barem 74 „paketa“ po 6 cifara, tj. 444 cifre čiji je zbir 1998, tako da možemo dodati još cifre 5, 2, 3, 8 čime dobijamo zbir 2016, pa zato još moramo dodati i 0 i 9, da bismo imali zbir veći (ili jednak) od 2018. Znači, treba uzeti 450 decimala.

II-1. Neka je $x = BE = DE$, stranica romba. Iz pravouglog trougla AED je $x^2 = (a-x)^2 + b^2$, pa je $x = \frac{a^2+b^2}{2a}$. Dalje je iz trougla ABD: $d = BD = \sqrt{a^2+b^2}$. Ako posmatramo površinu romba, tada je $P = x\cdot b = \frac{d\cdot EF}{2}$ (proizvod osnovice i visine ili proizvod dijagonala sa 2), pa je $EF = \frac{2xb}{d} = \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a}$.



II-2. Kvadriranjem jednačine $a-b=3$ dobija se $a^2-2ab+b^2=9$, pa je $a^2+b^2=11$. Dalje je $\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}=\frac{b^3-a^3}{(ab)^3}=\frac{(b-a)(b^2+ba+a^2)}{1}=-3\cdot(11+1)=-36.$ $\frac{1}{a^6}+\frac{1}{b^6}=\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}\right)^2+2\frac{1}{a^3}\frac{1}{b^3}=(-36)^2+2=1298$.

II-3. Pošto je $m^5<1700$, a $5^5=3125$, imamo četiri slučaja: 1) $m=1\Rightarrow n^2=1699$, što nema rešenja; 2) $m=2\Rightarrow n^2=1668$, što nema rešenja; 3) $m=3\Rightarrow n^2=1457$, što nema rešenja; 4) $m=4\Rightarrow n^2=676$, pa je $n=26$. Jedino rešenje je $(m,n)=(4{,}26)$.

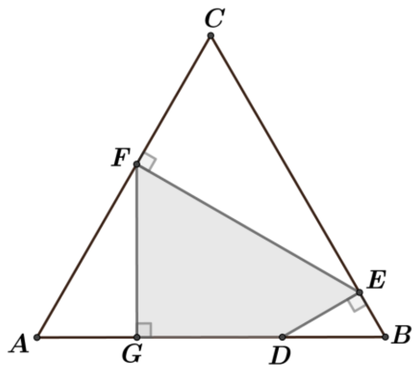
II-4. Posle sređivanja je $x=\frac{a^2+1}{2a}$, a vrednost izraza $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2-1}=\sqrt{\frac{a^4+2a^2+1-4a^2}{4a^2}}=\sqrt{\frac{(a^2-1)^2}{4a^2}}=\left|\frac{a^2-1}{2a}\right|=\frac{1-a^2}{2a}$, jer je $a<-1$. Tada je početni izraz $\frac{\frac{a^2+1}{2a}+\frac{1-a^2}{2a}}{\frac{a^2+1}{2a}-\frac{1-a^2}{2a}}=\frac{\frac{2}{2a}}{\frac{2a^2}{2a}}=\frac{1}{a^2}$.

II-5. Dovoljno je izračunati vrednost diskriminante $D=36-4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)$ i ispitati da li je $D<0$. Posle sređivanja se dobija $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)>9$ ili $\frac{a+b+c}{3}>\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$, što je poznata nejednakost između aritmetičke i harmonijske sredine, a znak jednakosti ne važi jer su u pitanju različiti brojevi.

III-1. Telo se sastoji od dve zarubljene kupe iz kojih su isečene dve kupe, pa je $V=2(V_{zk}-V_k)$. Dalje je $V_{zk}=\frac{H\pi}{3}(R^2+Rr+r^2)$, gde je $H=\frac{a\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$, $R=a=6$ i $r=\frac{a}{2}=3$, pa je $V_{zk}=63\pi\sqrt{3}$, a zapremina kupe je $V_k=\frac{r^2\pi H}{3}=9\pi\sqrt{3}$. Tada je $V=2\left(63\pi\sqrt{3}-9\pi\sqrt{3}\right)=108\pi\sqrt{3}$.

III-2. Označimo traženi broj sa $\overline{xy}=10x+y$. Tada je $\overline{xy}+\overline{yx}=n^2$ ili $10x+y+10y+x=n^2$. Posle sređivanja imamo $11(x+y)=n^2$, pa zbir cifara traženog broja mora biti 11 (ili barem 4·11, što je nemoguće), što nam daje osam rešenja: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 i 92.

III-3. Svaki od trouglova DBE, ECF i FAG je polovina jednakostraničnog trougla. Tada je $BE=\frac{x}{2}$, a $CE=14-\frac{x}{2}$, a iz toga je $CF=\frac{1}{2}CE=7-\frac{x}{4}$, $FA=14-CF=14-\left(7-\frac{x}{4}\right)=7+\frac{x}{4}$. Dalje je $P_{DEFG}=P_{ABC}-P_{DBE}-P_{ECF}-P_{FAG}=\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{DB^2\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{CE^2\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{FA^2\sqrt{3}}{4}=\frac{14^2\sqrt{3}}{4}-\frac{x^2\sqrt{3}}{8}-\frac{\left(14-\frac{x}{2}\right)^2\sqrt{3}}{8}-\frac{\left(7+\frac{x}{4}\right)^2\sqrt{3}}{8}=21\sqrt{3}$, pa se iz poslednje jednakosti dobija (posle sređivanja) jednačina $x^2-8x+16=0$, čije je jedino rešenje $x=4$.



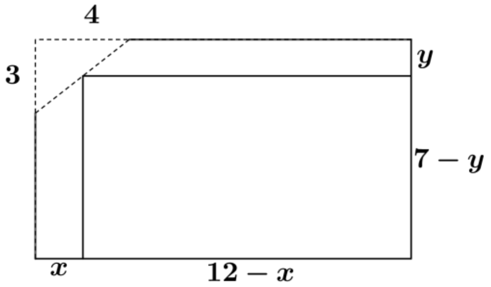
III-4. $log_2tg1°+log_2tg2°+log_2tg3°+\cdots+log_2tg89°=log_2(tg1°\cdot tg2°\cdot\ldots\cdot tg89°)=log_2\left((tg1°\cdot tg89°)\cdot(tg2°\cdot tg88°)\cdot\ldots\cdot(tg44°\cdot tg46°)\cdot tg45°\right)=log_2 1=0$, jer je $tg\alpha\cdot tg(90°-\alpha)=tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$, (a poznato je da je $tg45°=1$).

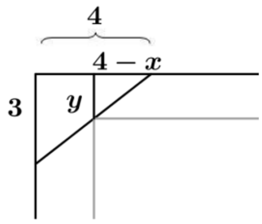
III-5. $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{2019}+\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2019}=\left(\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3\right)^{673}+\left(\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3\right)^{673}=(-1)^{673}+(-1)^{673}=-2$. (Može se koristiti i činjenica da su to rešenja kvadratne jednačine $x^2-x+1=0$, pa množenjem sa $x+1$ dobijamo $x^3+1=0$ ili $x^3=-1$)

IV-1. Ako uvedemo smenu $\frac{2x+3}{x}=t$, dobija se $x=\frac{3}{t-2}$, pa je $f(t)=\left(\frac{3}{t-2}+3\right)^2=\left(\frac{3t-3}{t-2}\right)^2$ ili $f(x)=\left(\frac{3x-3}{x-2}\right)^2$, pa je $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$.

IV-2. Pošto je $2^{sin^2x}>0$, mora biti $0<sinx\leq 1$ (desna strana jednakosti). Očigledno je da $sinx=1$ ne zadovoljava jednačinu, a iz $0<sinx<1$ sledi $0<sin^2x<1$, tj. $2^0<2^{sin^2x}<2^1$, pa zadatak nema rešenja, jer je leva strana jednačine veća, a desna manja od 1.

IV-3. Označimo x i y kao na levoj slici. Tada je površina traženog pravougaonika $P = (12-x)(7-y)$. Iz sličnosti trouglova na desnoj slici je $3:4 = y:(4-x)$ iz čega je $y = 3 - \frac{3}{4}x$ i $P = (12-x)\left(4+\frac{3}{4}x\right) = -\frac{3}{4}x^2 + 5x + 48$. Najveća vrednost kvadratne funkcije se postiže za $x = -\frac{5}{2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{10}{3}$, a tada je $y = \frac{1}{2}$.





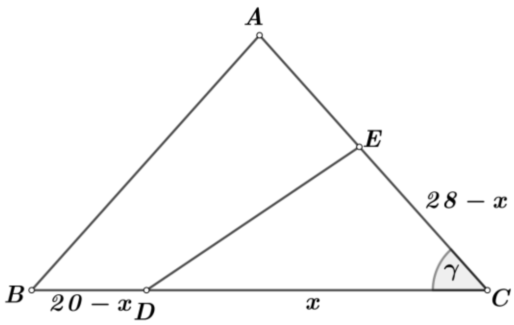
Najveća vrednost površine je $P = \frac{169}{3}$, a dimenzije nove ploče su: $12 - x = \frac{26}{3}$ i $7 - y = \frac{13}{2}$.

IV-4. Dokaz indukcijom:

1) za $n = 1$ je $a_1 = \frac{3\cdot 2^0}{2^0+2} = 1$.

2) Dokažimo indukcijski korak, da ako formula važi za n, da važi i za n+1: $a_{n+1} = \frac{6\cdot\frac{3\cdot 2^{n-1}}{2^{n-1}+2}}{\frac{3\cdot 2^{n-1}}{2^{n-1}+2}+3} = \frac{18\cdot 2^{n-1}}{6\cdot 2^{n-1}+6} = \frac{18\cdot 2^n\cdot\frac{1}{2}}{6\cdot 2^n\cdot\frac{1}{2}+6} = \frac{9\cdot 2^n}{3\cdot 2^n+6} = \frac{3\cdot 2^n}{2^n+2}$, što je trebalo dokazati.

IV-5. Neka je $x = DC$ i γ ugao kod temena C. Pošto je obim trougla ABC podeljen na dva jednaka dela, važi da je $DC + CE = 28$, pa je $CE = 28 - x$. Dalje je $P_{DCE} = \frac{1}{2}x\cdot(28-x)\cdot sin\gamma$ i $P_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 20\cdot 18\cdot sin\gamma$, a pošto je $P_{ABC} = 2P_{CDE}$, dobija se $x\cdot(28-x) = 180$ ili $x^2 - 28x + 180 = 0$, pa su rešenja $x = 10$, što je nemoguće (jer se tada poklapaju tačke A i E) i $x = 18$, što je jedino rešenje.



ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ, Гимназија „Урош Предић“, 24.11.2018.

ПРВИ РАЗРЕД

Место	Презиме и име	Одељење	1.з.	2.з.	3.з.	4.з.	5.з.	Укупно
1.	Ранковић Филип	I-8	20	20	20	20	20	100
2.	Нешковић Наташа	I-8	20	20	20	18	20	98
3.	Томановић Ања	I-6	20	20	20	15	20	95
4.	Тршек Мина	I-8	20	20	20	10	20	90
4.	Гајић Рења	I-8	20	20	20	10	20	90
6.	Ђордан Михаило	I-8	20	0	20	10	20	70
7.	Зечевић Марко	I-7	0	20	3	10	20	53
8.	Симић Бојан	I-6	0	0	10	0	20	30
9.	Бабин Ања	I-5	0	0	0	0	20	20
10.	Дедауцић Огњен	I-6	10	0	2	5	0	17
11.	Мијајлевић Тамара	I-7	10	2	0	0	0	12
12.	Стојоска Наталија	I-6	10	0	0	0	0	10
13.	Ђукановић Стефан	I-6	0	0	0	0	5	5
14.	Биговић Милош	I-5	0	0	0	0	2	2

ДРУГИ РАЗРЕД

Место	Презиме и име	Одељење	1.з.	2.з.	3.з.	4.з.	5.з.	Укупно
1.	Чакован Наталија	II -6	20	20	20	10	20	90
2.	Милтеновић Филип	II -6	20	20	20	10	5	75
2.	Алексић Андреа	II -8	20	20	20	10	5	75
4.	Косановић Маша	II -6	0	10	20	15	5	50
4.	Јанковић Даница	II -7	5	10	20	15	0	50
6.	Ђуретановић Давид	II -5	0	18	20	0	5	43
7.	Станковић Филип	II -6	0	20	0	10	5	35
7.	Младеновски Марко	II -8	0	20	0	10	5	35
9.	Цвејић Тамара	II -6	0	15	10	8	0	33
10.	Вујић Немања	II -6	0	15	0	8	2	25
11.	Урошевић Марко	II -5	0	20	0	0	0	20
12.	Петровић Ања	II -6	0	10	0	0	0	10

ТРЕЋИ РАЗРЕД

Место	Презиме и име	Одељење	1.з.	2.з.	3.з.	4.з.	5.з.	Укупно
1.	Етински Едвард Габријел	III -5	20	20	20	20	20	100
2.	Грујичић Теодора	III -7	20	20	10	0	20	70
3.	Станковић Огњен	III -5	20	20	0	20	0	60
4.	Петров Анђела	III -8	8	20	0	20	5	53
5.	Гојсовић Ивана	III -6	20	15	2	10	0	47
6.	Ковач Даниел	III -7	20	0	5	20	0	45
6.	Вукасовић Сергеј	III -7	0	20	5	20	0	45
8.	Јукић Марко	III -8	20	2	0	20	0	42
8.	Секуловић Милош	III -5	0	20	2	20	0	42
8.	Арбутина Огњен	III -6	20	20	2	0	0	42
11.	Бакурски Аранђел	III -6	20	20	0	0	0	40
12.	Ристић Лаура	III -7	20	5	5	0	0	30
13.	Ђурђевић Марко	III -6	20	2	2	0	0	24
14.	Крстић Владимир	III -5	20	0	2	0	0	22
15.	Марковић Владимир	III -8	5	10	0	0	0	15
16.	Ђукић Тијана	III -6	8	0	5	0	0	13
17.	Углишин Коста	III -6	2	0	0	0	0	2

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

Место	Презиме и име	Одељење	1.з.	2.з.	3.з.	4.з.	5.з.	Укупно
1.	Миловановић Игор	IV -7	20	20	0	10	20	70
2.	Пешић Иван	IV –7	20	20	10	0	5	55
3.	Черницин Александар	IV -8	15	20	0	5	3	43
4.	Тршек Лазар	IV -6	20	20	0	0	0	40
5.	Зечевић Данило	IV -5	5	20	0	0	0	25
6.	Лукић Тијана	IV -6	20	0	2	0	2	24
7.	Врховац Катарина	IV -6	20	0	0	0	2	22
8.	ЈакшићТијана	IV -5	0	0	0	0	0	0
9.	Цвијетић Душан	IV -6	0	0	0	0	0	0
10.	Вари Јован	IV -7	0	0	0	0	0	0
11.	Станковић Николија	IV -6	0	0	0	0	0	0
12.	Зарев Доротеја	IV -8	0	0	0	0	0	0
13.	Марјановић Михаило	IV -8	0	0	0	0	0	0