Školsko takmičenje iz matematike, 30.11.2019.

I razred

1. Date su inverzne funkcije $f^{-1}(x) = 3x - a$ i $g^{-1}(x) = \frac{a-x}{2}$, $a \in R$. Ako je $f(2) = g(2)$, naći a i izračunati $f\big(g(x)\big)$ i $g\big(f(x)\big)$.

2. Odrediti sve parove (m, n) celih brojeva za koje važi: $mn + 3m + 2n = 65$.

3. Neka je ABC trougao u kojem je $\measuredangle CAB = 20^\circ$ i D središte stranice AB. Ako je $\measuredangle CDB = 40^\circ$, naći $\measuredangle ABC$.

4. Koliko delilaca (prirodnih brojeva) ima broj 2019^2 i koliko iznosi njihov proizvod?

5. Dat je skup $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Koliko postoji petočlanih podskupova ovog skupa koji sadrže broj 5?

Školsko takmičenje iz matematike, 30.11.2019.

II razred

1. U kvadrat stranice a upisan je novi kvadrat stranice $\frac{a\sqrt{10}}{4}$, tako da mu temena leže na stranicama početnog. Naći razliku kateta jednog od četiri dobijena pravougla trougla, koji se dobijaju isecanjem manjeg kvadrata iz većeg.

2. Sastaviti (barem jednu) kvadratnu jednačinu čija su rešenja $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ i $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

3. Odrediti sve prirodne brojeve n, za koje je razlomak $\frac{3n}{3n-2019}$ ceo broj.

4. Ako je $a = \sqrt{2019}, b = 1 \; i \; c = 2$, izračunati vrednost izraza: $\frac{a^{-1}-(b+c)^{-1}}{a^{-1}+(b+c)^{-1}} \cdot \left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) : \left(\frac{abc}{a-b-c}\right)^{-2}$.

5. Kupovinom preko interneta, vežbanka je 9 dinara jeftinija nego u knjižari. U septembru je jedna škola za 1440 dinara kupila 8 vežbanki više preko interneta, nego što bi se dobilo u knjižari. Kolika je cena vežbanke preko interneta?

Školsko takmičenje iz matematike, 30.11.2019.

III razred

1. U kupatilu dimenzija 6m x 6m u jednom uglu je kada dimenzija 2m x 1,5m (naslonjena svojim stranicama na zidove). Koliki je poluprečnik najvećeg kružnog tepiha koji se može postaviti na pod kupatila?

2. Izračunati: $\frac{tg192°+tg48°}{1+tg168°\cdot tg408°}$.

3. U pravilnu jednakoivičnu četvorostranu piramidu ivice $a = 2\sqrt{2}$ upisana je lopta. Naći njen poluprečnik.

4. Marko bira svoj četvorocifreni PIN. Nule na početku su dozvoljene, ali postoje neka ograničenja: jedna cifra se ne može ponavljati tri ili više puta u nizu (npr. ne sme 0006, 6666 ali može 0030); ne može se ponoviti par cifara (npr. ne sme 1616, ali može 1661). Koliko Marko ima načima za odabir PIN-a?

5. Dat je kvadrat površine $P = 7 - log_2 x$ i kocka zapremine $V = log_2 x - 2$. Naći x ako je dužina stranice kvadrata za 1 veća od dužine ivice kocke.

Školsko takmičenje iz matematike, 30.11.2019.

IV razred

1. Rotacijom za 90° (ili proizvoljan broj puta po 90°) kvadratna tabla dimenzija 5x5, čija su polja obojena sa dve boje (crnom i belom, u nekom rasporedu) ne menja svoj izgled. Koliko postoji takvih tabli (tj bojenja)?

2. Odrediti poslednjih 2019 cifara broja: $2^{2019}\cdot 5^{2018}\cdot 9^{2017}$.

3. Dokazati da je broj: $\underbrace{222\ldots2}_{2019} - 3^{2019} + 1$ deljiv sa 7 .

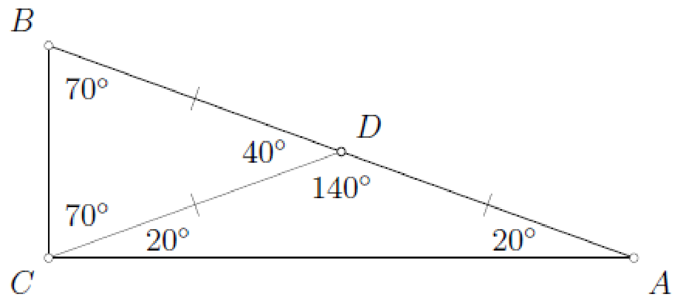
4. Sva tri temena ΔABC leže na paraboli $y = x^2 + 125$, tako da je tačka A teme te parabole, a prava BC je paralelna x-osi. Ako je $P_{\Delta ABC} = 125$ naći koordinate sva tri temena trougla.

5. Odrediti najveći prirodan broj n takav da je $\frac{500!}{7^n}$ prirodan broj.

I-razred rešenja

I-1. Pošto je $f(x) = f^{-1}(f^{-1}(x))$, potrebno je naći inverzne funkcije za date funkcije. Za prvu je: $y = 3x - a$, iz čega je $x = \frac{y+a}{3}$, pa je $f(x) = \frac{x+a}{3}$; a za drugu: $y = \frac{a-x}{2}$, $x = a - 2y$, $g(x) = a - 2x$. Iz uslova $f(2) = g(2)$ imamo jednačinu: $\frac{2+a}{3} = a - 4$ čije je rešenje $a = 7$. Tada su tražene funkcije $f(x) = \frac{x+7}{3}$ i $g(x) = 7 - 2x$, pa je $f(g(x)) = f(7-2x) = \frac{7-2x+7}{3} = \frac{14-2x}{3}$; $g(f(x)) = g\left(\frac{x+7}{3}\right) = 7 - 2\frac{x+7}{3} = \frac{21-2x-14}{3} = \frac{7-2x}{3}$.

I-2. Ako obema stranama dodamo po 6, dobijamo $mn + 3m + 2n + 6 = 71$, pa je dalje $m(n+3) + 2(n+3) = 71$, tj. $(n+3)(m+2) = 71$, a pošto je 71 prost broj, imamo četiri slučaja:
1) $n+3 = 1, m+2 = 71$, što daje $n = -2, m = 69$; 2) $n+3 = 71, m+2 = 1$, što daje $n = 68, m = -1$. 3) $n+3 = -1, m+2 = -71$, što daje $n = -4, m = -73$; 4) $n+3 = -71, m+2 = -1$, što daje $n = -74, m = -3$. Znači, rešenje je $(m,n) \in \{(69,-2)(-1,68)(-73,-4)(-3,-74)\}$. (Može se i pristupiti na drugi način, npr. izraziti $m = \frac{65-2n}{n+3} = \frac{-6-2n}{n+3} + \frac{71}{n+3} = -2 + \frac{71}{n+3}$, itd.)

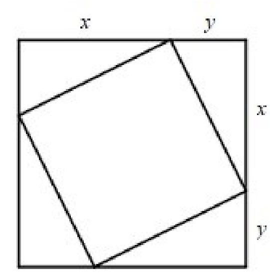


I-3. Iz uslova zadatka se lako vidi da je $\measuredangle ADC = 140°$, pa je $\measuredangle DCA = 20°$, što znači da je ΔCAD jednakokraki, tj. $AD = CD$, pa je tačka D centar opisane kružnice trougla ABC $(AD = DB = DC = R)$. Tada je $\measuredangle ACB = 90°$ (ugao nad prečnikom), pa je $\measuredangle ABC = 70°$. (Ili iz činjenice da je i trougao BDC takođe jednakokraki.)

I-4. Pošto je $2019^2 = 2019 \cdot 2019 = 3 \cdot 673 \cdot 3 \cdot 673 = 3^2 \cdot 673^2$, postoji 9 delilaca: 1, 3, 3^2, 673, $3 \cdot 673$, $3^2 \cdot 673$, 673^2, $3 \cdot 673^2$, $3^2 \cdot 673^2$. Njihov prizvod je $3^9 \cdot 673^9 = 2019^9$.

I-5. Pošto u skupu mora biti broj 5, to možemo predstaviti na sledeći način: $\{5,\_,\_,\_,\_\}$ gde su preostala 4 mesta za brojeve 1,2,3,4,6,7,8 (bez ponavljanja!). To znači da imamo $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ mogućnosti za odabir tih brojeva. Ali, pošto i njihov redosled nije bitan, svaka mogućnost se pojavljuje $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ puta (npr. 1234,1243,1324, 1342, ... , 4321), tako da je ukupan broj takvih podskupova $\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 35$.

II-razred rešenja



II-1. Neka je duža kateta x, a kraća $y = a - x$. Tada je $x^2 + (a-x)^2 = \left(\frac{a\sqrt{10}}{4}\right)^2$. Posle sređivanja te jednačine, dobija se $16x^2 - 16ax + 3a^2 = 0$, čija su rešenja $x_1 = \frac{3a}{4}$ i $x_2 = \frac{a}{4}$, a pošto je x duža kateta, $x = \frac{3a}{4}$, a $y = \frac{a}{4}$, pa je razlika kateta $x - y = \frac{a}{2}$.

II-2. Pošto je $x_1 + x_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{3-\sqrt{6}+3+\sqrt{6}}{3-2} = 6$, a $x_1 x_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{3}{3-2} = 3$, možemo uzeti npr. da je $a = 1$, pa je onda $b = -6$ i $c = 3$, a tražena jednačina je: $x^2 - 6x + 3 = 0$.

II-3. Sređivanjem datog izraza je: $\frac{3n}{3n-2019} = \frac{3n-2019+2019}{3n-2019} = 1 + \frac{2019}{3n-2019}$, pa zaključujemo da je $3n - 2019$ delilac broja $2019 = 3 \cdot 673$. Tada imamo 8 slučajeva: 1) $3n - 2019 = 1$, gde n nije ceo; 2) $3n - 2019 = -1$, gde n nije ceo; 3) $3n - 2019 = 3$, gde je $n = 674$; 4) $3n - 2019 = -3$, gde je $n = 672$; 5) $3n - 2019 = 673$, gde n nije ceo; 6) $3n - 2019 = -673$, gde n nije ceo; 7) $3n - 2019 = 2019$, gde je $n = 1346$; 8) $3n - 2019 =$

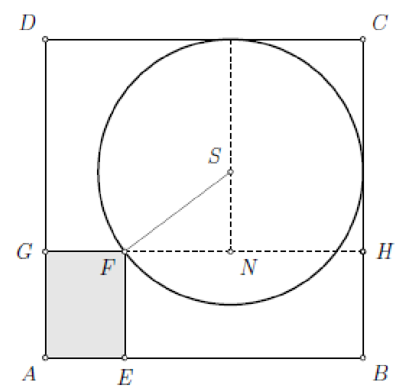
-2019, gde n nije prirodan. Rešenja su: $n \in \{672,674,1346\}$. (Primetimo da je početna jednakost mogla da se pokrati sa 3, pa se tada ispituje izraz $\frac{n}{n-673}$.)

II-4. Dati izraz se može srediti: $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}} \cdot \left(\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) \cdot \left(\frac{abc}{a-b-c}\right)^2 = \frac{b+c-a}{b+c+a} \cdot \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc} \cdot \frac{a^2b^2c^2}{(a-b-c)^2}$, i posle skraćivanja dobija se: $\frac{a^2bc}{2}$, pa je vrednost tog izraza, za date vrednosti, 2019.

II-5. Ako je cena vežbanke na internetu x , tada je broj vežbanki kupljenih preko interneta $\frac{1440}{x}$, a u knjižari $\frac{1440}{x+9}$. Po uslovu zadatka je $\frac{1440}{x} - \frac{1440}{x+9} = 8$, pa se sređivanjem dobija jednačina $x^2 + 9x - 1620 = 0$, čija su rešenja $x_1 = 36$ i $x_2 = -45$, pa je cena vežbanke 36 dinara.

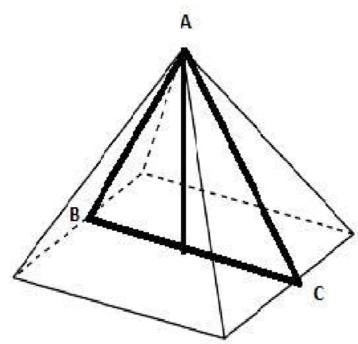
III-razred rešenja

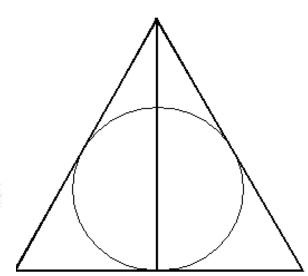
III-1. Označimo poluprečnik tepiha sa $r = SF$. Tada je $FN = FH - NH = 4{,}5 - r$, a slično je i $SN = 4 - r$. Tada je $r^2 = (4{,}5 - r)^2 + (4 - r)^2$, pa se sređivanjem dobija $r^2 - 17r + 36{,}25 = 0$ čija su rešenja $r_1 = 2{,}5$ i $r_2 = 14{,}5$ (što je nemoguće). Poluprečnik tepiha je 2,5 metara.



III-2. Svođenjem na prvi kvadrant (oštar ugao) je $\frac{tg192° + tg48°}{1 + tg168° \cdot tg408°} = \frac{tg12° + tg48°}{1 - tg12° tg48°} = tg(12° + 48°) = tg60° = \sqrt{3}$.

III-3. Primetimo da je poluprečnik upisane lopte u datu piramidu, ustvari poluprečnik kružnice u trougao ABC na slici, koji je jednakokrak, sa osnovicom $a = 2\sqrt{2}$ i kracima $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$. Poluprečnik te kružnice se može naći preko površine trougla $P_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot H}{2}$, gde je H visina piramide: $H^2 = h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$, $H = 2$, pa je $P_{\Delta ABC} = 2\sqrt{2}$. S druge strane, $P_{\Delta ABC} = r \cdot s$, gde je s poluobim ΔABC. Tada je $s = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, pa je $r = \frac{P_{\Delta ABC}}{s} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \sqrt{3} - 1$.

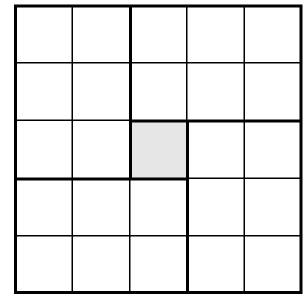




III-4. Ukupno ima 10000 mogućnosti. Od toga treba oduzeti broj PIN-ova oblika $aaab$ i $abbb$, $(a \neq b)$, što je $2 \cdot 10 \cdot 9 = 180$ mogućnosti; zatim PIN-ove oblika $aaaa$, kojih ima 10; i na kraju PIN-ove oblika $abab$, kojih je $10 \cdot 9 = 90$. Ukupan broj PIN-ova je: $10000 - 180 - 10 - 90 = 9720$.

III-5. Ako je $V = a^3$, tada je $a = \sqrt[3]{log_2 x - 2}$, a $P = b^2$, tada je $b = \sqrt{7 - log_2 x}$, i važe uslovi: $log_2 x - 2 > 0$ i $7 - log_2 x > 0$, pa je $x \in (4,128)$. Tada, uz smenu $log_2 x = t$, dobijamo jednačinu $\sqrt{7-t} - \sqrt[3]{t-2} = 1$, iz čega je $\sqrt{7-t} - 1 = \sqrt[3]{t-2}$. Posle stepenovanja na treći stepen, dobijamo (posle sređivanja) $(10-t)\sqrt{7-t} = 20 - 2t$. Dalje je $(10-t)\left(\sqrt{7-t} - 2\right) = 0$, pa je $t = 10$ ili $t = 3$. Prvo rešenje nije moguće zbog uslova, dok drugo rešenje daje $x = 8$.

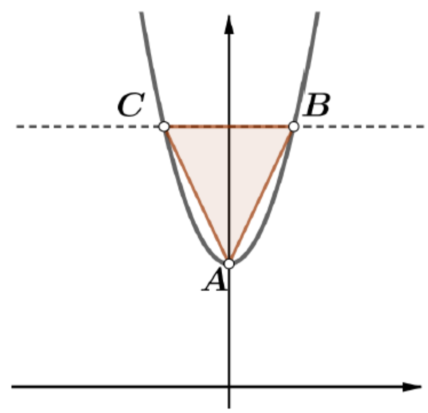
IV-razred rešenja



IV-1. Očigledno je da se središnje polje rotacijom ne menja, pa se može obojiti proizvoljno (tj. na dva načina). Ostala polja se mogu podeliti u četiri grupe po 6 polja, npr. kao na slici. Tada se i svako polje u grupi može obojiti na proizvoljan način. To znači da se 7 polja može obojiti proizvoljno, a ukupan broj bojenja (tabli) je $2^7 = 128$.

IV-2. Dati broj se može napisati u obliku: $(2 \cdot 5)^{2018} \cdot 2 \cdot 9^{2017}$, što znači da se završava sa 2018 nula. Pošto je $9 \equiv -1(mod10)$, tada je i $9^{2017} \equiv -1(mod10)$, što znači da je poslednja cifra tog broja 9, a posle množenja sa 2, biće 8. Znači, poslednjih 2019 cifara su cifra 8 i 2018 nula.

IV-3. Posmatrajmo prvo broj $\underbrace{222 \ldots 2}_{2019}$. Primetimo periodičnost: $2 \equiv 2(mod7)$, $22 \equiv 1(mod7)$, $222 \equiv 5(mod7)$, $2222 \equiv 3(mod7)$, $22222 \equiv 4(mod7)$, $222222 \equiv 0(mod7)$, $2222222 \equiv 2(mod7)$, itd. Tada je broj sa 2016 dvojki deljiv sa 7, a sa 2019 ima ostatak 5. Dalje je $3^3 \equiv 27 \equiv -1(mod7)$, pa je i $3^{2019} \equiv (3^3)^{673} \equiv -1(mod7)$. Tada je: $\underbrace{222 \ldots 2}_{2019} - 3^{2019} + 1 \equiv 5 - (-1) + 1 \equiv 7 \equiv 0(mod7)$.



IV-4. Teme parabole je $A(0,125)$. Neka je $B(x,y)$, a pošto je $y = x^2 + 125$, $B(x, x^2 + 125)$. Iz uslova da je prava BC paralelna x-osi, imamo da je $C(-x, x^2 + 125)$. Dužina visine trougla iz temena A je $h = y - 125 = x^2$, a osnovica $BC = 2x$, pa je $P_{\Delta ABC} = \frac{2x \cdot x^2}{2} = x^3$, a iz uslova zadatka je $x^3 = 125$, pa je $x = 5$. Tada je $B(5,150)$, $C(-5,150)$.

IV-5. Potrebno je prebrojati koliko se puta broj 7 pojavljuje u proizvodu $500! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 499 \cdot 500$. Pošto je $\left[\frac{500}{7}\right] = 71$, toliko ima brojeva deljivih sa 7. Treba uzeti u obzir i brojeve koji su deljivi i sa 7^2, a njih je $\left[\frac{500}{49}\right] = 10$, i još brojeve deljive sa 7^3 , kojih je $\left[\frac{500}{343}\right] = 1$. Najveći broj n je $71 + 10 + 1 = 82$.

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ, Гимназија „Урош Предић“, 30.11.2019.

ПРВИ РАЗРЕД

Место	Презиме и име	Одељење	1.з.	2.з.	3.з.	4.з.	5.з.	Укупно
1.	Мучибабић Дамјан	I-9	20	15	20	20	20	95
2.	Илиевски Бојан	I-9	20	0	20	20	10	70
3.	Серафимовић Илија	I-9	20	8	0	20	20	68
4.	Катић Александар	I-9	18	5	0	20	20	63
4.	Ђерић Лана	I-8	8	0	20	20	15	63
6.	Миленовић Павле	I-9	20	0	20	0	20	60
7.	Слијепчевић Михајло	I-9	18	0	20	18	2	58
8.	Јочић Милутин	I-8	2	15	5	15	20	57
9.	Станојковић Александар	I-9	19	2	5	15	15	56
10.	Стефановић Јована	I-9	18	0	20	0	15	53
11.	Мајкић Јана	I-9	0	0	15	20	15	50
12.	Илић Стефан	I-9	0	0	20	10	15	45
12.	Рођан Александра	I-6	5	0	20	18	2	45
14.	Петров Софија	I-6	15	0	5	0	15	35
15.	Вранић Ива	I-9	0	0	2	2	20	24
16.	Драгнић Милош	I-6	2	0	0	2	0	4
17.	Савковић Александар	I-6	2	0	0	0	0	2
17.	Матић Вања	I-8	0	0	0	0	2	2

ДРУГИ РАЗРЕД

Место	Презиме и име	Одељење	1.з.	2.з.	3.з.	4.з.	5.з.	Укупно
1.	Ранковић Филип	II -8	20	20	15	20	20	95
1.	Нешковић Наташа	II -8	20	20	15	20	20	95
3.	Томановић Ања	II -6	0	15	15	20	20	70
4.	Тршек Мина	II -8	0	18	10	20	20	68
5.	Гвозденовић Селена	II -7	10	20	0	20	15	65
6.	Пешко Јана	II -6	10	20	2	18	0	50
7.	Ђордан Михаило	II -8	5	20	5	18	0	48
8.	Зечевић Марко	II -7	10	0	10	20	0	40
9.	Карличић Лука	II -5	0	20	0	0	5	25
9.	Симић Бојан	II -6	0	10	10	5	0	25
9.	Чевизовић Алекса	II -7	0	0	0	20	5	25
12.	Биговић Милош	II -5	0	20	0	0	0	20

ТРЕЋИ РАЗРЕД

Место	Презиме и име	Одељење	1.з.	2.з.	3.з.	4.з.	5.з.	Укупно
1.	Чакован Наталија	III -6	0	20	20	20	18	78
2.	Јанковић Даница	III -7	0	20	20	15	15	70
3.	Ђуретановић Давид	III -5	0	20	0	20	20	60
4.	Алексић Андреа	III -8	0	20	20	5	10	52
5.	Ракић Светлана	III -8	0	20	10	5	15	50
6.	Јоковић Матеја	III -6	0	20	5	0	10	35
7.	Цвејић Тамара	III -6	0	2	0	10	20	32
8.	Милтеновић Филип	III -6	0	2	10	10	0	22
8.	Станковић Филип	III -6	0	5	0	5	12	22
10.	Вујић Немања	III -6	0	0	0	18	2	20
11.	Косановић Маша	III -6	0	2	5	0	5	12

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

Место	Презиме и име	Одељење	1.з.	2.з.	3.з.	4.з.	5.з.	Укупно
1.	Бакурски Аранђел	IV -6	20	20	20	20	20	100
2.	Етински Едвард Габријел	IV -5	18	20	20	20	10	88
3.	Секуловић Милош	IV -5	20	20	10	5	20	75
4.	Котур Софија	IV -6	18	20	0	20	15	73
5.	Вукасовић Сергеј	IV -7	5	10	10	20	10	55
6.	Грујичић Теодора	IV -7	5	15	20	0	10	50
7.	Лукић Марко	IV -8	2	0	0	20	10	32
8.	Гојсовић Ивана	IV -6	0	5	15	0	8	28
9.	Ковач Даниел	IV -7	5	10	5	0	0	20
10.	Углишин Коста	IV -6	0	5	2	0	0	7