Školsko takmičenje iz matematike, 27.11.2021.

I razred

1. Ako je $f(x) = ax + b$ i $f\left(f\left(f(x)\right)\right) = 216x - 86$, naći $f(x)$, $f^{-1}(x)$ i $f^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)$.

2. Rešiti jednačinu u skupu N: $xy + 3x - 5y + 3 = 0$.

3. Dati su skupovi: $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{4, 5, 6\}$, $A_3 = \{7, 8, 9\}$, ... (po tri uzastopna prirodna broja). Naći zbir elemenata skupa A_{2021} .

4. Ispitati da li je u pitanju pravougli trougao, ako su njegove stranice: $2xy$, $x^2 - y^2$, $x^2 + y^2$. Naći njegovu površinu.

5. U koordinatnom sistemu je dat kvadrat sa temenima: $A(50,0)$, $B(0,50)$, $C(-50,0)$, $D(0,-50)$. Koliko se tačaka sa celobrojnim koordinatama nalazi u tom kvadratu (ne računajući njegove ivice)?

Školsko takmičenje iz matematike, 27.11.2021.

II razred

1. Izračunati: $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2021} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2021}$, gde je i imaginarna jedinica ($i^2 = -1$).

2. Odrediti sve prirodne brojeve n i proste brojeve p, takve da je $6n^2 - (2p + 9)n + p + 3 = 0$.

3. Izračunati: $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1023}+\sqrt{1024}}$.

4. Nad krakom BC jednakokrakog trougla ABC konstruisan je kvadrat BCDE (D je bliže temenu C). Naći ugao BAD.

5. Neka je: $A_m = \frac{a^m + a^{-m}}{2}$, $B_m = \frac{a^m - a^{-m}}{2}$. Dokazati: a) $(A_m)^2 - (B_m)^2 = 1$; b) $A_m A_n + B_m B_n = A_{m+n}$.

Školsko takmičenje iz matematike, 27.11.2021.

III razred

1. Površina prailne trostrane piramide je $648\sqrt{3}$. Naći zapreminu te piramide, ako je $H = 2a$.

2. Ako se od zbira 10 uzastopnih neparnih prirodnih brojeva oduzme jedan od njih, dobija se broj 2021. Koji su to brojevi i koji smo broj oduzeli?

3. Rešiti sistem: $x^3 + y^3 = 65$, $2^{x+y} + 2^{x+y+1} + 2^{x+y+2} = 224$.

4. U jednakokrakom trapezu ABCD dijagonale su uzajamno normalne, a visina trapeza je h. Dokazati da je četvorougao MNPQ , čija su temena središta stranica trapeza ABCD, kvadrat i naći odnos površina trapeza i kvadrata.

5. Ako je: $2sinx - 3cosy = 1$, $2cosx + 3siny = 2$, koliko je $\sin(x - y)$?

Školsko takmičenje iz matematike, 27.11.2021.

IV razred

1. Niz $a_1, a_2, \ldots$ zadat je sa: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$. Naći a_{2021}.

2. Odrediti sve prirodne brojeve n za koje je $n! + 8$ stepen nekog prostog broja.

3. Ako je $f\left(\frac{3x-1}{x+3}\right) = x - 3$, $x \neq -3$, naći $f(x)$ i $f^{-1}(x)$.

4. U pravouglom trouglu ABC je CD visina iz temena pravog ugla. Dokazati da je zbir poluprečnika kružnica upisanih u trouglove ABC, ACD, BCD jednak CD.

5. Ako za uglove trougla važi: $\frac{sin\alpha}{sin\beta} = 2cos\gamma$, dokazati da je trougao jednakokraki.

I razred, rešenja

I-1. Ako je $f(x) = ax + b$, tada je $f(f(x)) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b$, pa je $f\left(f(f(x))\right) = f(a^2x + ab + b) = a(a^2x + ab + b) + b = a^3x + a^2b + ab + b$. Iz toga je $a^3 = 216$, pa je $a = 6$, a dalje je $36b + 6b + b = -86$, pa je $b = -2$. Tada je $f(x) = 6x - 2$, a iz $y = 6x - 2$ je $x = \frac{y+2}{6}$, pa je $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{6}$. Dalje je $f^{-1}(f^{-1}(x)) = f^{-1}\left(\frac{x+2}{6}\right) = \frac{\frac{x+2}{6}+2}{6} = \frac{x+14}{36}$.

I-2. Ako obema stranama dodamo -18, dobija se: $xy + 3x - 5y - 15 = -18$, pa je $(x - 5)(y + 3) = -18$. Razmatrajući sve mogućnosti proizvoda: $-1 \cdot 18, 1 \cdot (-18), -2 \cdot 9, \ldots$ dolazimo do tri rešenja: $(x, y) \in \{(2,3), (3,6), (4,15)\}$.

I-3. Poslednji element u svakom od skupova A_n je $3n$, a to znači da je poslednji element u skupu A_{2021} broj $3 \cdot 2021 = 6063$. Tada je traženi zbir: $6061 + 6062 + 6063 = 18186$.

I-4. Trebalo bi samo proveriti Pitagorinu teoremu: $(2xy)^2 + (x^2 - y^2)^2 = (x^2 + y^2)^2$, a sređivanjem je $4x^2y^2 + x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$, što je očigledno tačno. Površina je: $P = \frac{2xy\cdot(x^2-y^2)}{2} = xy(x^2 - y^2) = x^3y - xy^3$.

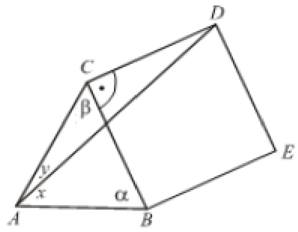
I-5. Na x-osi se nalazi 99 tačaka, a „penjući“ se za po jedan red imamo 97, 95, 93,...,1 tačku. Na isti način imamo i „ispod“ x-ose 97, 95, 93,...,1 tačku. Ukupan broj tačaka je $99 + 2(97 + 95 + 93 + \cdots + 1) = 4901$.

II razred, rešenja

II-1. Prvo sredimo dati izraz na sledeći način: $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2021} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2021} = \left(\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{1010} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} + \left(\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{1010} \cdot \frac{1-i}{\sqrt{2}}$.
Dalje je: $i^{1010} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} + (-i)^{1010} \cdot \frac{1-i}{\sqrt{2}} = -\frac{1+i}{\sqrt{2}} - \frac{1-i}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$.

II-2. Rešimo kvadratnu jednačinu: $n_{1,2} = \frac{2p+9\pm\sqrt{(2p+9)^2-4\cdot6\cdot(p+3)}}{12} = \frac{2p+9\pm\sqrt{(2p+3)^2}}{12} = \frac{2p+9\pm(2p+3)}{12}$. Tada je $n_1 = \frac{p}{3} + 1$, a $n_2 = \frac{1}{2}$. S obzirom da je n pririodan, odbacujemo n_2, a pošto je p prost, jedino rešenje je $p = 3$, a tada je $n = 2$.

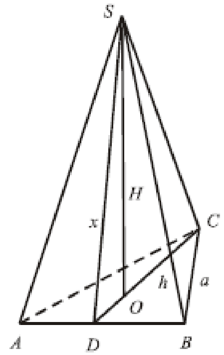
II-3. Racionališimo svaki sabirak pojedinačno: $\frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = -(1 - \sqrt{2})$, $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = -(\sqrt{2} - \sqrt{3})$, itd. Tada je traženi zbir: $-(1 - \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{1023} - \sqrt{1024}) = -(1 - \sqrt{1024}) = 31$.



II-4. Trougao ADC je jednakokraki (vidi sliku), pa je $2y + \beta + 90° = 180°$ iz čega je: $y = \frac{90°-\beta}{2}$. Tada je $x = \alpha - y = \alpha - \frac{90°-\beta}{2} = \frac{2\alpha+\beta-90°}{2}$. A pošto je $2\alpha + \beta = 180°$, dobija se $x = 45°$.

II-5. a) $(A_m)^2 - (B_m)^2 = \left(\frac{a^m+a^{-m}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^m+a^{-m}}{2}\right)^2 = \frac{a^{2m}+2+a^{-2m}}{4} - \frac{a^{2m}-2+a^{-2m}}{4} = \frac{4}{4} = 1$
b)
$A_mA_n + B_mB_n = \frac{a^m+a^{-m}}{2} \cdot \frac{a^n+a^{-n}}{2} + \frac{a^m-a^{-m}}{2} \cdot \frac{a^n-a^{-n}}{2} = \frac{a^{m+n}+a^{m-n}+a^{-m+n}+a^{-m-n}}{4} + \frac{a^{m+n}-a^{m-n}-a^{-m+n}+a^{-m-n}}{4}$,
pa je rezultat: $\frac{2(a^{m+n}+a^{-m-n})}{4} = \frac{a^{m+n}+a^{-m-n}}{2} = A_{m+n}$.

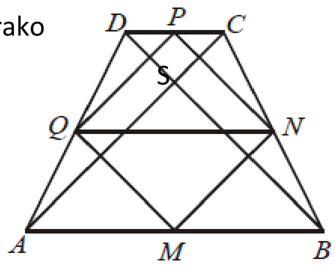
III razred, rešenja



III-1. $P = B + 3 \cdot \frac{a \cdot x}{2}$ (vidi sliku). Iz trougla DOS, Pitagorinom teoremom imamo:
$x^2 = H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = 4a^2 + \frac{3a^2}{36} = \frac{147a^2}{36}$, iz čega je $x = \frac{7a\sqrt{3}}{6}$. Dalje je $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{7a^2\sqrt{3}}{4} =$ $648\sqrt{3}$, iz čega je $a^2 = 324$, pa je $a = 18$ i $H = 36$. Tada je $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H =$ $972\sqrt{3}$.

III-2. Iz uslova zadatka je: $(2x + 1) + (2x + 3) + \cdots + (2x + 19) = 2021 + (2x + a)$, gde je $a \in \{1,3,5, \dots ,19\}$. Sređivanjem je $20x + 100 = 2021 + 2x + a$, pa je $x = \frac{1921+a}{18} = 106 + \frac{13+a}{18}$, a poslednji razlomak je ceo jedino za $a = 5$, pa je tad $x = 107$. Traženi brojevi su: 215, 217, 219,..., 233, a oduzeli smo 219.

III-3. Iz druge jednačine je $2^{x+y}(1 + 2 + 4) = 224$, pa je $2^{x+y} = 32$, što daje $x + y = 5$. Prva jednačina je $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 65$, pa je $x^2 - xy + y^2 = 13$. Pošto je $y = 5 - x$, ubacivanjem u poslednju jednačinu dobija se $x^2 - 5x + 4 = 0$, pa je $x = 1$ i $y = 4$, ili $x = 4$ i $y = 1$.



III-4. Neka je presek dijagonala S (vidi sliku). Tada su trouglovi SPC i SMB jednakokrako pravougli, pa je $SP = \frac{b}{2}$, i $SM = \frac{a}{2}$, a to znači da je visina trapeza $h = SM + SP$ ili $h = \frac{a+b}{2}$. Tada je površina trapeza $P_T = h^2$.
U trouglu BCD je NP srednja linija, pa je $NP = \frac{d}{2}$, slično su i ostale stranice četvorougla MNPQ paralelne dijagonalama i jednake njihovim polovinama, a pošto se one seku pod pravim uglom, MNPQ je kvadrat. Površina kvadrata se može izračunati preko njegove dijagonale $MP = h$, $P_K = \frac{h^2}{2}$. Tada je odnos $P_T : P_K = 2 : 1$.

III-5. Kvadriranjem i sabiranjem datih jednakosti dobija se:
$4(sin^2x + cos^2x) - 12(sinxcosy - cosxsiny) + 9(cos^2y + sin^2y) = 5$,
$4 - 12sin(x - y) + 9 = 5$, iz čega je $sin(x - y) = \frac{2}{3}$.

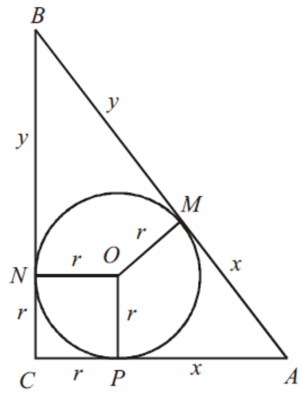
IV razred, rešenja

IV-1. Ispišimo nekoliko članova: $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = \frac{3}{2}, a_4 = \frac{1}{2}, a_5 = \frac{1}{3}, a_6 = \frac{2}{3}, a_7 = 2, a_8 = 3, \dots$
Očigledno je da je period ponavljanja rezultata 6, a 2021 pri deljenju sa 6 ima ostatak 5, tako da je $a_{2021} = \frac{1}{3}$.

IV-2. Ako je $n = 1$, tada je $n! + 8 = 3^2$, pa je to jedno rešenje. Ako je $n \geq 2$, tada je $n! + 8$ paran broj, pa može biti samo stepen dvojke, tj. može se pisati $n! + 8 = 2^k$, $k > 3$. Za $n = 2$ i $n = 3$ se ne dobijaju stepeni dvojke, a za $n = 4$ je desna strana 2^5, pa je i to rešenje, kao i za $n = 5$ (dobije se 2^7). Za $n \geq 6$ je $n!$ Deljiv sa 16, ali tada nije $n! + 8$ deljiv sa 16, ali je desna strana deljiva (jer je veća od 8). Znači, rešenja su $n \in \{1, 4, 5\}$.

IV-3. Ako se uvede smena $t = \frac{3x-1}{x+3}$ iz nje je $x = \frac{3t+1}{3-t}$, pa ubacivanjem u datu vezu dobija se $f(t) = \frac{3t+1}{3-t} - 3$, pa je $f(t) = \frac{6t-8}{3-t}$ ili $f(x) = \frac{6x-8}{3-x}$. Ako označimo $y = \frac{6x-8}{3-x}$ i izrazimo $x = \frac{3y+8}{y+6}$, time smo dobili inverznu funkciju $f^{-1}(x) = \frac{3x+8}{x+6}$.

IV-4. U pravouglom trouglu je $r = \frac{a+b-c}{2}$ (osnovna škola!), a lako se može dokazati gledajući sliku: $r = \frac{(r+x)+(r+y)-(x+y)}{2}$.



Neka je $CD = h$, $AD = p$, $BD = q$, r_1 i r_2 redom, poluprečnici upisanih kružnica u trouglove ACD i BCD. Tada je $r_1 = \frac{p+h-b}{2}$ i $r_2 = \frac{q+h-a}{2}$. Dalje je $r + r_1 + r_2 = \frac{a+b-c}{2} + \frac{p+h-b}{2} + \frac{q+h-a}{2} = \frac{2h+(p+q)-c}{2} = h$, jer je $p + q = c$.

IV-5. Koristeći sinusnu i kosinusnu teoremu je $\frac{sin\alpha}{sin\beta} = \frac{a}{b}$ i $cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, pa data jednakost postaje $\frac{a}{b} = \frac{a^2+b^2-c^2}{ab}$ ili , množenjem sa ab, $a^2 = a^2 + b^2 - c^2$. Iz čega je $b^2 = c^2$, tj. $b = c$.

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ, Гимназија „Урош Предић“, 27.11.2021.

ПРВИ РАЗРЕД

Место	Презиме и име	Одељење	1.з.	2.з.	3.з.	4.з.	5.з.	Укупно
1.	Станојковић Александра	I-9	15	20	20	20	2	77
2.	Миленовић Марија	I-9	2	15	20	20	0	57
3.	Ратковић Ивона	I-7	10	0	20	20	0	50
3.	Жежељ Данило	I-7	10	0	20	18	2	50
5.	Бучалина Хелена	I-7	5	20	15	5	0	45
6.	Јанковић Алекса	I-5	2	0	20	0	18	40
6.	Павлов Јована	I-6	0	0	20	20	0	40
8.	Јелкић Урош	I-9	0	0	20	18	0	38
9.	Ковач Немања	I-7	5	5	20	5	0	35
9.	Драгичевић Милица	I-7	15	0	20	0	0	35
11.	Јовановић Давид	I-9	5	5	20	2	2	34
12.	Милошевић Огњен	I-6	10	0	20	0	0	30
13.	Гавриловић Бранка	I-8	0	0	20	2	5	27
14.	Цветковић Дамјан	I-5	0	5	20	0	0	25
14.	Проле Милица	I-6	0	0	10	15	0	25
16.	Глишић Филип	I-7	0	0	20	0	2	22
16.	Јакимовски Ђорђе	I-5	0	0	20	0	2	22
16.	Николић Сташа	I-5	0	0	20	0	2	22
19.	Виг Катарина	I-8	5	0	15	0	0	20
19.	Јанковић Душан	I-7	0	0	20	0	0	20
19.	Ракић Мина	I-8	0	5	15	0	0	20
19.	Саватић Јана	I-5	0	0	20	0	0	20
23.	Ђуркић Катарина	I-5	0	0	15	0	0	15
24.	Гајић Ана Александра	I-8	5	0	0	2	0	7
25.	Ненадовић Предраг	I-9	0	5	0	0	0	5

ДРУГИ РАЗРЕД

Место	Презиме и име	Одељење	1.з.	2.з.	3.з.	4.з.	5.з.	Укупно
1.	Васић Вељко	II -6	20	20	20	20	20	100
2.	Гагић Милица	II -9	19	20	0	20	20	79
3.	Јовановић Милош	II -8	20	5	20	0	20	65
3.	Самарџић Неда	II -8	20	5	20	0	20	65
5.	Јованов Јован	II -7	20	0	20	0	20	60
6.	Радмиловић Љубодраг	II -9	15	10	0	0	20	45
7.	Милтеновић Немања	II -5	20	2	0	0	20	42
8.	Топић Андреја	II -7	15	2	0	0	10	27
9.	Стан Вукашин	II -7	10	2	0	0	10	22
10.	Дабић Михајло	II -5	5	0	0	0	10	15

ТРЕЋИ РАЗРЕД

Место	Презиме и име	Одељење	1.з.	2.з.	3.з.	4.з.	5.з.	Укупно
1.	Катић Александар	III -9	20	20	20	20	0	80
1.	Минић Дамјан	III -9	20	20	20	20	0	80
3.	Мучибабић Дамјан	III -9	20	20	18	20	0	78
4.	Слијепчевић Михајло	III -9	20	20	18	15	0	73
5.	Стефановић Јована	III -9	20	20	20	10	0	70
6.	Серафимовић Илија	III -9	0	20	20	20	0	60
7.	Ђерић Лана	III -8	20	0	20	15	0	55
7.	Јанкулов Димитрије	III -9	20	5	20	10	0	55
9.	Стојшић Огњен	III -9	20	0	20	10	0	50

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

Место	Презиме и име	Одељење	1.з.	2.з.	3.з.	4.з.	5.з.	Укупно
1.	Ранковић Филип	IV -8	20	20	20	20	0	80
1.	Нешковић Наташа	IV -8	20	10	20	20	10	80
3.	Тршек Мина	IV -8	20	5	20	20	0	65
4.	Пешко Јана	IV -6	20	5	20	0	0	45
4.	Гајић Реља	IV -8	20	15	10	0	0	45
4.	Томановић Ања	IV -6	20	5	10	0	10	45
7.	Ђордан Михаило	IV -8	20	10	0	0	0	30
8.	Узелац Маша	IV -7	20	0	5	0	0	25