Školsko takmičenje iz matematike, 5.11.2022.

I razred

1. Odrediti zbir cifara broja: $(10^{2022}+2022)^2$.

2. Ako je $x+y=16$ i $x^2+y^2=140$, naći xy i $(x-y)^2$.

3. Za prirodni broj $n \geq 2$ neka je $d(n)$ najveći prirodni delilac broja n različit od n. Na primer, $d(12)=6$, $d(13)=1$. Naći najveći prirodni broj takav da je $d(n)=35$.

4. Dat je skup $A=\{0,1,\sqrt{2},\sqrt{3},-\sqrt{2}\}$ i na njemu relacija zadata sa: $x\rho y \Leftrightarrow xy\epsilon Q$. Ispitati osobine relacije i naći klase (ako postoje).

5. Unutar kvadrata $ABCD$ su date tačke E,F,G i H takve da su trouglovi ABE, BCF, CDG i DAH jednakostranični. Naći površinu četvorougla $EFGH$.

(Radi se 120 minuta. Zadatke možete zadržati. Rešenja i liste već danas na: mirkomatematika.weebly.com)

Školsko takmičenje iz matematike, 5.11.2022.

II razred

1. Izračunati: $\left(\frac{i+1}{i-1}\right)^{2022}$, gde je i imaginarna jedinica ($i^2=-1$).

2. Neka je $ABCDE$ pravilan petougao i neka je F tačka tako da je ABF jednakostraničan trougao. Odrediti uglove trougla DEF.

3. Svaki od 4 zida sobe potrebno je obojiti jednom bojom tako da susedni zidovi ne budu iste boje. Ako na raspolaganju imamo tri različite boje, na koliko načina je moguće obojiti sobu?(Ne moraju se upotrebiti sve boje.)

4. Skratiti razlomak (tako da se više ne može dalje skratiti): $\frac{x^4-16}{x^4-4x^3+8x^2-16x+16}$.

5. U skupu celih brojeva rešiti jednačinu: $a^2+b^2+50=8a+12b$.

(Radi se 120 minuta. Zadatke možete zadržati. Rešenja i liste već danas na: mirkomatematika.weebly.com)

Školsko takmičenje iz matematike, 5.11.2022.

III razred

1. U kružnici k poluprečnika 20 i centra S nalazi se kružnica k_1 poluprečnika 5 i kvadrat $ABCD$. Pritom se kružnice k i k_1 dodiruju u tački P, a tačke A i B leže na k i CD je tangenta kružnice k_1 (PS je normalno na AB). Naći dužinu stranice kvadrata.

2. Odrediti najveći prirodni broj n takav da $n + 10$ deli $n^3 + 100$.

3. Koliko ima četvorocifrenih prirodnih brojeva u čijem su zapisu tačno dve različite cifre, od kojih se svaka pojavljuje dvaput?

4. Data je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ivice a i neka su tačke P, Q i R , redom središta ivica AB, AD i AA_1. Naći odnos zapremina piramide $PQRA$ i preostalog dela kocke.

5. Rešiti jednačinu: $log_{3x}\left(\frac{3}{x}\right) + log^2{}_3x = log_2 3 \cdot log_3 5 \cdot log_5 2$.

(Radi se 120 minuta. Zadatke možete zadržati. Rešenja i liste već danas na: mirkomatematika.weebly.com)

Školsko takmičenje iz matematike, 5.11.2022.

IV razred

1. Dužine kateta pravouglog trougla su a i b, a hipotenuze c. Ako su sve tri dužine prirodni brojevi, a dužina a je neparan prost broj, dokazati da je izraz $2(a + b + 1)$ kvadrat prirodnog broja.

2. Upisati u prazna polja tablice brojeve tako da u svakoj vrsti, koloni i dijagonali broj u sredini bude aritmetička sredina druga dva broja. Obrazložiti!

	8	
11		
		29

3. U trapez sa kracima 4 i 5 se može upisati krug, a zbir uglova na osnovici je 120°. Naći površinu trapeza.

4. Naći domen funkcije: $f(x) = log_x(9 - x^2) + arcsin\frac{1}{x-1}$.

5. Dat je niz a_n tako da je $a_0 = 1$, $a_1 = 4$, $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$, $n \geq 2$. Dokazati da je $a_n = 2^{2n}, n \geq 0$.

(Radi se 120 minuta. Zadatke možete zadržati. Rešenja i liste već danas na: mirkomatematika.weebly.com)

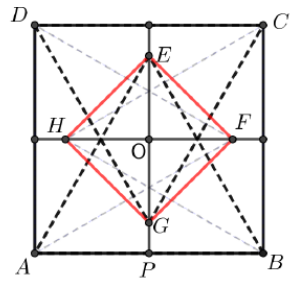
I razred, rešenja

I-1. $(10^{2022}+2022)^2 = 10^{4044} + 2\cdot 2022\cdot 10^{2022} + 4088484 = 1000 \ldots 004044000 \ldots 004088484$. Zbir cifara je: $1+4+4+4+4+8+8+4+8+4 = 49$.

I-2. $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$, a zamenom podataka dobija se $256 = 2xy + 140$, pa je $xy = 58$. Slično je $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = 140 - 116 = 24$.

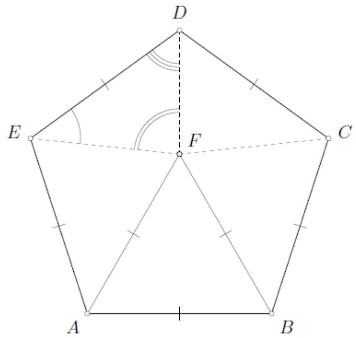
I-3. Ako je 35 najveći delilac, tada je $n = k\cdot 35$, gde je k najmanji (prost) delilac veći od 1. Pošto je 5 jedan od delilaca broja 35 (a samim tim i n), k može biti prost broj manji ili jednak od 5, pa je najveći traženi broj 175.

I-4. Skicirati graf! Očigledno je da važi refleksivnost i simetričnost, jer $x^2 \in Q$ i $xy = yx$. Antisimetričnost ne važi (jer postoji npr. $1\rho 0$ i $0\rho 1$), kao ni tranzitivnost, jer postoji $1\rho 0$, $0\rho\sqrt{2}$, a ne postoji $1\rho\sqrt{2}$. Pošto nije u pitanju relacija ekvivalencije, ne postoje klase.



I-5. Visina trougla ABE je $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, pa je rastojanje tačke E do stranice CD: $a - \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a-a\sqrt{3}}{2} = a\frac{2-\sqrt{3}}{2}$, a time je dijagonala kvadrata $EFGH$: $EG = a - 2\cdot a\frac{2-\sqrt{3}}{2} = a(\sqrt{3}-1)$. Površina kvadrata je $P = \frac{d^2}{2} = a^2(2-\sqrt{3})$.

II razred, rešenja



II-1. $\left(\frac{i+1}{i-1}\right)^{2022} = \left(\frac{i+1}{i-1}\cdot\frac{i+1}{i+1}\right)^{2022} = \left(\frac{2i}{-2}\right)^{2022} = (-i)^{2022} = i^2 = -1$.

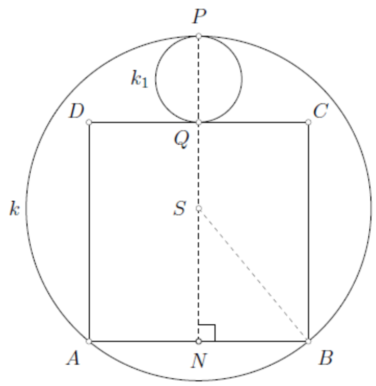
II-2. Ugao petougla je 108°. Tada je $\sphericalangle EAF = 48°$, a pošto je AEF jednakokraki trougao, tada je $\sphericalangle AEF = 66°$, pa je $\sphericalangle DEF = 42°$. Dalje je $\sphericalangle EDF = 54°$, i na kraju, $\sphericalangle EFD = 84°$.

II-3. Označimo zidove sa A, B, C i D (kružno). Ako koristimo dve boje, imamo na raspolaganju za zid A tri mogućnosti, a zatim za B još dve mogućnosti, dok za C i D već znamo boje. To je $3\cdot 2 = 6$ mogućnosti. Ako koristimo tri boje, na isti način biramo za A i B, dok za C imamo mogućnost da je iste boje kao A, a treća boja je za D, ili je C treće boje, a D je iste boje kao B. Dakle, imamo $3\cdot 2\cdot 2 = 12$ mogućnosti. Ukupno je 18 mogućnosti.

II-4. $\frac{x^4-16}{x^4-4x^3+8x^2-16x+16} = \frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x^4-4x^3+4x^2+4x^2-16x+16} = \cdots = \frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{(x^2+4)(x-2)^2} = \frac{x+2}{x-2}$.

II-5. Formiranjem kvadrata binoma, dobija se: $(a-4)^2 + (b-6)^2 = 2$, a to je moguće samo ako je $a-4 = \pm 1$ i $b-6 = \pm 1$. Rešenja su: $(a,b) \in \{(3,5),(3,7),(5,5),(5,7)\}$.

III razred, rešenja



III-1. Neka je a stranica kvadrata. Tada je u trouglu BSN:

$SN^2 + NB^2 = SB^2$, tj. $(a-10)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 20^2$, što daje

$a^2 - 16a - 240 = 0$, iz čega je $a = 8 + 4\sqrt{19}$.

(Drugo rešenje je negativno.)

III-2. $\frac{n^3+100}{n+10} = \frac{n^3+1000-900}{n+10} = \frac{(n+10)(n^2-10n+10)-900}{n+10} = n^2 - 10n + 100 - \frac{900}{n+10}$. Korišćena je formula za zbir kubova, a najveće n, za koje je poslednji razlomak ceo, je 890.

III-3. Prva cifra je bilo koja, osim nule, a ta cifra se može pojaviti na jednom od preostala tri mesta. Na preostala dva mesta biramo sledeću cifru na devet načina (sve osim prve), tako da je ukupan broj mogućnosti $9 \cdot 3 \cdot 9 = 243$.

III-4. Baza te piramide je pravougli trougao PAQ, kateta $\frac{a}{2}$, a visina piramide je $AR = \frac{a}{2}$, pa je zapremina $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{8} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{48}$, dok je zapremina preostalog dela $V_2 = a^3 - V_1 = \frac{47}{48}a^3$, pa je odnos tih zapremina 1:47.

III-5. Prvo je $log_2 3 \cdot log_3 5 \cdot log_5 2 = \frac{log3}{log2} \cdot \frac{log5}{log3} \cdot \frac{log2}{log5} = 1$. Uslovi su: $x > 0, x \neq \frac{1}{3}$. U jednačinu treba uvesti osnovu 3: $\frac{log_3\left(\frac{3}{x}\right)}{log_3 3x} + log^2{}_3 x = 1$, a sređivanjem se dobija: $\frac{1-log_3 x}{1+log_3 x} + log^2{}_3 x = 1$. Posle uvođenja smene $t = log_3 x$, dobija se $\frac{1-t}{1+t} + t^2 = 1$, a množenjem sa $1+t$, $t^3 + t^2 - 2t = 0$. Rešenja su $t \in \{0,1,-2\}$, a vraćanjem smene $x \in \left\{1, 3, \frac{1}{9}\right\}$.

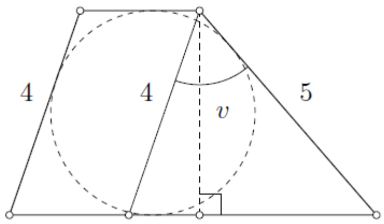
IV razred, rešenja

IV-1. $a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b)$, a pošto je a prost, mora biti $c + b = a^2$, a $c - b = 1$. Oduzimanjem tih jednakosti je $2b = a^2 - 1$, i dodavanjem obema stranama po $2a + 2$, dobija se $2(a+b+1) = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2$.

a	8	b
11		
c		29

IV-2. Označimo vrednosti polja kao u tabeli. Tada je $a + b = 16$ i $a + c = 22$, a važi i $a + 29 = b + c$ (dijagonale!). Rešavanjem ovog sistema je $a = 3$, $b = 13$ i $c = 19$. Ostale vrednosti se lako pronalaze, pa tabela izgleda ovako:

3	8	13
11	16	21
19	24	29



IV-3. S obzirom da je u pitanju tangentni četvorougao, važi $a + b = 9$. Ako povučemo paralelu sa kraćim krakom iz gornjeg desnog temena dobijamo trougao sa uglom pri vrhu od 60°, a osnovica tog trougla je $a - b$. Koristeći kosinusnu teoremu je $(a-b)^2 = 16 + 25 - 40cos60° = 21$, pa je $a - b = \sqrt{21}$. Dalje je površina trougla $P_\Delta = \frac{4 \cdot 5 \cdot sin60°}{2} = \frac{(a-b)h}{2}$, pa je $h = \frac{10\sqrt{7}}{7}$. $P_{tr} = \frac{a+b}{2}h = \frac{45\sqrt{7}}{7}$.

IV-4. Uslovi su: $x > 0, x \neq 1$, $9 - x^2 > 0$ (ekvivalentno sa $x \in [-3,3]$) i $-1 \leq \frac{1}{x-1} \leq 1$ (ekvivalentno sa x$\in (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$), pa je domen presek svih uslova, D: $x \in [2, 3)$.

IV-5. Dokaz indukcijom. Lako se proverava da je tačno za $n = 0$ i $n = 1$. Ako pretpostavimo da važi za sve manje od nekog k, dokažimo da važi i za k: $a_k = 3a_{k-1} + 4a_{k-2} = 3 \cdot 2^{2k-2} + 4 \cdot 2^{2k-4} = \frac{3}{4}2^{2k} + \frac{4}{16}2^{2k} = 2^{2k}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = 2^{2k}$, što je i trebalo dokazati.

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ, Гимназија „Урош Предић“, 5.11.2022.

ПРВИ РАЗРЕД

Место	Презиме и име	Одељење	1.з.	2.з.	3.з.	4.з.	5.з.	Укупно
1.	Стефан Анђелковић	I-9	10	20	20	20	20	90
2.	Ђоровић Теодора	I-9	5	20	0	5	20	50
3.	Чучковић Милица	I-7	15	0	15	0	15	45
4.	Нишевић Петра	I-7	15	0	20	0	0	35
4.	Гавриловић Ленка	I-8	20	0	15	0	0	35
4.	Јанковић Страхиња	I-6	0	20	5	10	0	35
7.	Милтеновић Стефан	I-9	0	0	15	18	0	33
8.	Златановић Предраг	I-9	0	10	5	10	5	30
9.	Мицевски Алекса	I-6	5	5	0	10	0	20
10.	Регодић Александра	I-8	10	0	5	0	0	15
10.	Милановић Марко	I-8	0	0	15	0	0	15
12.	Хајдуков Лука	I-6	0	0	0	0	0	0

ДРУГИ РАЗРЕД

Место	Презиме и име	Одељење	1.з.	2.з.	3.з.	4.з.	5.з.	Укупно
1.	Станојковић Александра	II -9	20	20	20	20	15	95
2.	Миленовић Марија	II -9	20	20	5	15	20	80
3.	Павлов Јована	II -6	20	20	5	20	10	75
4.	Бучалина Хелена	II -7	20	5	20	20	0	65
5.	Јовановић Давид	II -9	20	0	20	20	0	60
6.	Милошевић Симона	II -5	20	0	15	20	0	55
7.	Милошевић Огњен	II -6	20	0	15	5	12	52
8.	Жежељ Данило	II -7	20	5	0	20	5	50
8.	Тутић Мартина	II -7	20	0	5	20	5	50
10.	Глишић Филип	II -7	20	0	15	5	0	40
11.	Ратковић Ивона	II -7	20	5	10	0	0	35
12.	Додић Дана	II -7	5	0	20	5	0	30
12.	Проле Милица	II -6	20	0	5	5	0	30
14.	Рашић Марко	II -7	20	0	0	5	0	25
15.	Конатар Ивана	II -7	20	0	0	0	0	20
15.	Ристић Реља	II -9	20	0	0	0	0	20
17.	Вујко Петра	II -7	0	0	5	5	0	10

ТРЕЋИ РАЗРЕД

Место	Презиме и име	Одељење	1.з.	2.з.	3.з.	4.з.	5.з.	Укупно
1.	Гагић Милица	III -9	5	15	20	20	20	80
2.	Радмиловић Љубодраг	III -9	0	0	20	20	10	50
2.	Живковић Михајло	III -9	0	5	20	20	5	50
2.	Самарџић Неда	III -8	0	0	20	20	10	50
2.	Милтеновић Немања	III -5	0	5	20	20	5	50
6.	Васић Вељко	III -6	0	0	20	15	10	45
7.	Стошић Лука	III -9	0	5	5	5	15	30
7.	Остојић Матеја	III -9	0	0	20	10	0	30
9.	Ђурђевић Алекса	III -7	0	0	20	5	0	25
10.	Стевановић Вукашин	III -8	0	0	5	15	0	20
11.	Омчикус Жарко	III -7	0	0	5	5	0	10

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

Место	Презиме и име	Одељење	1.з.	2.з.	3.з.	4.з.	5.з.	Укупно
1.	Мучибабић Дамјан	IV -9	0	20	15	20	20	75
1.	Илић Стефан	IV -9	0	20	20	20	15	75
3.	Серафимовић Илија	IV -9	0	20	20	20	0	60
3.	Стефановић Јована	IV -9	5	20	5	10	20	60
3.	Катић Александар	IV -9	0	20	5	20	15	60
6.	Војводић Коста	IV -9	0	0	5	20	20	45
6.	Минић Дамјан	IV -9	0	20	0	20	5	45
8.	Стојшић Огњен	IV -9	0	20	0	20	0	40
9.	Докић Сергеј	IV -9	0	10	0	20	5	35
10.	Ђерић Лана	IV -8	0	0	0	0	0	0