Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. фебруар 2019.

Први разред – Б категорија

1. Одредити скупове A и B за које важи следећих пет особина:

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
- $2 \in A \setminus B$;
- $3 \in B \setminus A$;
- $A \cap \{4, 5, 6\} = \varnothing$;
- $B \cap \{1\} = \varnothing$.

2. Бетмен хоће да провали шифру Едварда Нигме. Њему је познато да шифра представља неку пермутацију слова у изразу `TRICKORTREAT`, и да су притом прво и последње слово шифре једнаки. Колико укупно постоји могућности за такву шифру?

3. У тетивном четвороуглу $ABCD$ важи $\measuredangle ADB = 50^\circ$ и $\measuredangle CDB = 60^\circ$. На правој AC је одабрана тачка M за коју важи $\measuredangle AMB = 70^\circ$. Да ли се тачка M налази између тачака A и C, или је изван дужи AC?

4. Доказати да је број $10^{2019} - 9991$ дељив са 81.

5. Из једног темена оштроуглог троугла повучена је висина, из другог тежишна дуж, а из трећег симетрала унутрашњег угла. Те три праве имају три пресечне тачке. Доказати да троугао коме су те тачке темена не може бити једнакостраничан.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. фебруар 2019.

Други разред – Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину:

$$\frac{5x}{x^2+3x+6}+\frac{7x}{x^2+7x+6}=1.$$

2. У конвексном четвороуглу $ABCD$ важи $AB = BC = CD$, а његове дијагонале се секу у тачки O. Ако важи $2\measuredangle AOD = \measuredangle BAD + \measuredangle CDA$, доказати да је $ABCD$ ромб.

3. Три домаћице Зока, Јока и Цока су на пијаци добиле 9 затворених боца с млеком, и у њима је, редом: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23 и 26 децилитара млека. На колико начина оне могу поделити ове боце између себе (без отварања боца), а да при томе свака добије исти број боца и исту количину млека?

4. У скупу реалних бројева решити једначину:

$$\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-3}.$$

5. Нека је a природан број који има 2019 цифара и дељив је са 9. Нека је b збир цифара броја a, нека је c збир цифара броја b, и нека је d збир цифара броја c. Одредити број d.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. фебруар 2019.

Трећи разред – Б категорија

1. Израчунати:

$$\operatorname{arcctg} 5 + \operatorname{arctg} \frac{2}{3}.$$

(Решење приказати у облику експлицитне бројевне вредности изражене у степенима или радијанима.)

2. Наћи све тројке (p, q, r) простих бројева за које важи

$$p^2 - qr = 2500.$$

3. Решити неједначину:

$$x^2 - 2x + 3 \leqslant \sqrt{4 - x^2}.$$

4. У конвексном четвороуглу $ABCD$ дужи које спајају средишта наспрамних ивица имају дужине 2 и 3 и међусобно заклапају угао од $45°$. Израчунати површину четвороугла $ABCD$.

5. У сваком темену правилног n-тоугла је уписан број 1 или -1, при чему нису свих n бројева једнаки. Производ бројева уписаних у ма која 3 узастопна темена износи -1. Одредити збир свих уписаних бројева за:

a) $n = 6$;

b) $n = 2019$.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. фебруар 2019.

Четврти разред – Б категорија

1. У оштроуглом $\triangle ABC$ углови код темена A, B и C означени су са α, β и γ, редом. Ако важи
$$4\sin\alpha + 5\cos\beta = 6$$
и
$$5\sin\beta + 4\cos\alpha = 5,$$
одредити γ.

2. Нека је D скуп свих реалних бројева за које је израз
$$\sqrt{\log_2\left(\cos\frac{\pi x}{\sqrt{2}}\right)}.$$
дефинисан. Означимо
$$A = \min_{x\in D}|2019 - x^2|.$$
Доказати да је A природан број и да је прост.

3. Да ли постоји природан број n за који важи
$$361 \mid n^2 + 4n - 15 \quad ?$$

4. У месту Доње Зуце сваки телефонски број има пет цифара које су поређане у строго растућем или строго опадајућем поретку, и притом прва цифра није 0. Колико максимално телефонских бројева може постојати у том месту?

5. Дат је паралелограм $ABCD$ са оштрим углом код темена A. На правима AB и BC су уочене, редом, тачке L и K различите од тачке B, такве да важи $KA = AB$ и $LC = CB$. Доказати да је петоугао $AKLCD$ тетиван.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

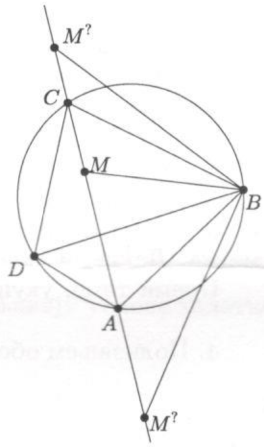
контрадикција с горњом једнакошћу јер $10 \nmid aA$. Најзад, претпоставимо да се n завршава цифром различитом од 0 и a. Тада имамо $10 \mid A, B$ и $10 \nmid x$, и поново контрадикција. Следи да не постоје решења за $k = 8$.

Према свему, једине вредности израза $\frac{n}{f(n)}$ у скупу природних бројева су: 1, 6, 7, 9 и 10.

Први разред – Б категорија

1. Из четвртог услова (уз први) добијамо да у скупу A могу бити само бројеви 1, 2 и 3. Из трећег услова имамо $3 \notin A$, а из другог $2 \in A$. Даље, из последњег услова имамо $1 \notin B$, а како $1 \in A \cup B$, следи $1 \in A$. Тиме смо једнозначно идентификовали скуп A: $A = \{1, 2\}$. У скупу B морају бити сви бројеви 3, 4, 5 и 6, како би био испуњен први услов. Из другог услова још имамо $2 \notin B$, а из последњег $1 \notin B$. Остаје, дакле, једино могуће $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

2. Приметимо, слова T и R у траженој шифри се јављају по три пута, а сва преостала слова по једном. Дакле, како прво и последње слово морају бити исто, по услову задатка то мора бити једно од слова T или R. Претпоставимо да шифра почиње и завршава се словом T. Тада унутар шифре преостаје укупно 10 слова, међу којима се R јавља три пута а преостала слова по једном; дакле, они се могу испермутовати на $\frac{10!}{3!}$ начина, што је и укупан број могућих шифара које почињу и завршавају се са T. Уколико шифра почиње словом R, рачун је потпуно аналоган, те у том случају добијамо још исто толико могућности. Дакле, укупно постоји $2 \cdot \frac{10!}{3!} = \frac{10!}{3}$ могућности које Бетмен треба да испроба.



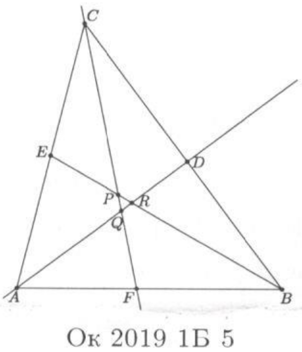
Ок 2019 1Б 3

3. Из тетивности четвороугла $ABCD$ добијамо $\measuredangle ACB = \measuredangle ADB = 50^\circ$ и $\measuredangle CAB = \measuredangle CDB = 60^\circ$. Претпоставимо да је тачка M изван дужи AC. Ако би важио распоред $A - C - M$, тада би $\measuredangle ACB$ био спољашњи за $\triangle BCM$, па би морало важити $\measuredangle ACB > \measuredangle AMB$, што је немогуће (та два угла износе 50° и 70°, редом). Слично, ако би важио распоред $C - A - M$, следило би $\measuredangle CAB > \measuredangle AMB$, опет немогуће. Дакле, преостаје једино могућност да је тачка M на дужи AC.

4. Приметимо,

$$10^{2019} - 9991 = 1\underbrace{00\ldots00}_{2019} - 9991 = \underbrace{99\ldots9}_{2015}0009 = 9 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{2015}0001.$$

Дакле, да би посматрани број био дељив са 81, довољно је још показати да је број $\underbrace{11\ldots1}_{2015}0001$ дељив са 9. Како његов збир цифара износи $2015 \cdot 1 + 1 = 2016$, што јесте дељиво са 9, следи да је и тај број дељив са 9, чиме је задатак решен.



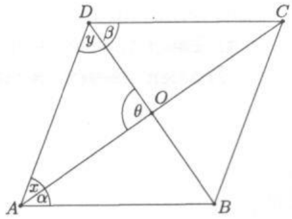
Ок 2019 1Б 5

5. Нека је AD висина, BE тежишна дуж, а CF симетрала угла у оштроуглом $\triangle ABC$. Нека се AD и BE секу у тачки R, AD и CF у тачки Q, а BE и CF у тачки P. Претпоставимо супротно тврђењу задатка, тј. да је $\triangle PQR$ једнакостраничан. Како важи $\measuredangle CQD = 60^\circ$ и $\measuredangle QDC = 90^\circ$, следи $\measuredangle QCD = 30^\circ$. Како је CF симетрала угла, одатле добијамо $\measuredangle QCE = 30^\circ$, а како важи и $\measuredangle CPE = 60^\circ$, следи $\measuredangle PEC = 90^\circ$. Сада уочавамо $\triangle ABE \cong \triangle CBE$ (због $BE \cong BE$, $AE \cong CE$ и $\measuredangle AEB = \measuredangle CEB = 90^\circ$), па је $\triangle ABC$ једнакокрак, а како већ знамо да његов угао код темена C износи 60°, закључујемо да $\triangle ABC$ мора бити једнакостраничан. Међутим, тада се праве AD, BE и CF секу у једној тачки, контрадикција с претпоставком задатка.

Други разред – Б категорија

1. Уведимо смену $x^2 + 3x + 6 = t$. Једначина се своди на $\frac{5x}{t} + \frac{7x}{t+4x} = 1$, тј. $5xt + 20x^2 + 7xt = t^2 + 4tx$ (уз услове $t \neq 0$ и $t + 4x \neq 0$), што је еквивалентно са $t^2 - 8tx - 20x^2 = 0$. Дељењем обе стране са x^2 (уз постављање услова $x^2 \neq 0$) једначина се даље своди на $(\frac{t}{x})^2 - 8\frac{t}{x} - 20 = 0$, па увођењем нове смене $k = \frac{t}{x}$ добијамо $k^2 - 8k - 20 = 0$. Решења ове квадратне једначине су $k_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-20)}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{8 \pm 12}{2}$, тј. $k_1 = \frac{8+12}{2} = 10$ и $k_2 = \frac{8-12}{2} = -2$. За $k = 10$ после враћања смене имамо $x^2 + 3x + 6 = t = kx = 10x$, тј. $x^2 - 7x + 6 = 0$, чијим решавањем добијамо $x_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2}$, тј. $x_1 = 6$ и $x_2 = 1$. За $k = -2$ после враћања смене имамо $x^2 + 3x + 6 = t = kx = -2x$, тј. $x^2 + 5x + 6 = 0$, чијим решавањем добијамо $x_{3/4} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$, тј. $x_3 = -2$ и $x_4 = -3$. Сва четири добијена решења испуњавају услове дефинисаности, па они заиста јесу решења полазне једначине.

2. Означимо $\measuredangle BAC = \alpha$, $\measuredangle BDC = \beta$, $\measuredangle AOD = \theta$, $\measuredangle OAD = x$ и $\measuredangle ODA = y$. Тада имамо и $\measuredangle BCA = \alpha$ (јер је $\triangle ABC$ једнакокрак), а и $\measuredangle DBC = \beta$ (јер је $\triangle BCD$ једнакокрак), као и $\measuredangle BOC = \theta$ (унакрсан са $\measuredangle AOD$). Из $\triangle BOC$ имамо $\theta = 180° - \alpha - \beta$, а из $\triangle AOD$ имамо $\theta = 180° - x - y$, одакле следи $\alpha + \beta = x + y$. Даље, услов задатка се преводи у $2\theta = \alpha + x + \beta + y$, што уз закључак из претходне реченице даје $2\theta = 2(\alpha + \beta)$, тј. $\theta = \alpha + \beta$; сада поново из $\triangle BOC$ добијамо $\theta = 180° - \theta$, тј. $\theta = 90°$. Дакле, дијагонале BD и AC су међусобно нормалне, тј. BO и CO су висине у $\triangle ABC$ и $\triangle BCD$, редом. Како су ови троуглови једнакокраки, њихове висине и тежишне дужи се поклапају, па следи да је O средиште дужи AC и BD. Према томе, у четвороуглу $ABCD$ дијагонале се полове, па је он паралелограм, а како су дијагонале још и међусобно нормалне, тај паралелограм је ромб.



Ок 2019 2Б 2

3. У посматраних 9 боца укупно има 126 децилитара млека, па следи да свака домаћица треба да добије по 3 боце са укупно 42 децилитра млека.

Посматрајмо домаћицу која је добила боцу са 26 децилитара млека. У преостале две боце она има укупно још 16 децилитара, што је могуће само на следећа два начина: $2 + 14$ или $5 + 11$. Претпоставимо најпре да важи први случај. Тада она домаћица која је добила боцу са 23 децилитра у преосталим двема боцама има укупно 19 децилитара млека, што је (од неподељених боца) могуће добити само као $8 + 11$; тада трећој домаћици остају боце са 5, 17 и 20 децилитара млека. Дакле, у овом случају, у зависности од тога која је „прва“, која „друга“, а која „трећа“ домаћица, имамо 6 начина поделе (колико има и пермутација ове три домаћице). Слично, уколико претпоставимо да је прва домаћица добила боце са 5, 11 и 26 децилитара млека, тада видимо да она која је добила боцу са 23 децилитра мора добити још боце са 2 и 17 децилитара, а трећој онда остају боце са 8, 14 и 20 децилитара млека. Дакле, и овде имамо 6 начина поделе (опет у зависности од пермутације домаћица).

Према томе, укупно постоји 12 начина да поделе боце у складу с условима задатка.

4. Подизањем обе стране једначине на трећи степен (користећи идентитет $(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$), добијамо

$$x + 2 + 3\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{3x+1}(\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{3x+1}) + 3x + 1 = x - 3,$$

тј.

$$3\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{3x+1}(\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{3x+1}) = -3x - 6.$$

Израз у загради представља поново леву страну полазне једначине, па он мора бити једнак $\sqrt[3]{x-3}$; уврштавањем овога (и дељењем обе стране са 3) долазимо до

$$\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{3x+1}\sqrt[3]{x-3} = -(x+2).$$

Напоменимо, последња једначина није *еквивалентна* с полазном (само је њена последица); то значи да за свако нађено решење те последње једначине морамо проверити да ли оно заиста задовољава и полазну једначину.

Подизањем обе стране последње једначине на трећи степен добијамо

$$(x+2)(3x+1)(x-3) = -(x+2)^3.$$

Једно решење је очигледно $x = -2$. Директно се проверава да је то заиста решење и полазне једначине (обе стране износе $\sqrt[3]{-5}$). Под претпоставком $x \neq -2$, скраћивањем $x + 2$ са обе стране остаје $(3x+1)(x-3) = -(x+2)^2$, тј. $3x^2 - 9x + x - 3 = -(x^2 + 4x + 4)$, што је еквивалентно са $4x^2 - 4x + 1 = 0$. Решавањем ове квадратне једначине добијамо $x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4}}{8} = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2}$. Проверимо да ли и ово решење испуњава полазну једначину. На левој страни добијамо $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + 2} + \sqrt[3]{3 \cdot \frac{1}{2} + 1} = 2\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$, а на десној страни $\sqrt[3]{\frac{1}{2} - 3} = \sqrt[3]{-\frac{5}{2}}$, па $x = \frac{1}{2}$ *није* решење полазне једначине.

Дакле, једино решење је $x = -2$.

5. Како је број a дељив са 9, и збир његових цифара мора бити дељив са 9, тј. број b је дељив са 9. Одатле, из истог разлога, и број c је дељив са 9, а потом закључујемо да је и број d дељив са 9. Даље, како број a има 2019 цифара, а свака његова цифра може бити највише 9, следи да број b износи највише $2019 \cdot 9 = 18171$. Број c, дакле, износи највише $1 + 8 + 9 + 9 + 9 = 36$ (јер цифре у броју b на четвртој и петој позицији здесна, ако уопште постоје, износе највише 8 и 1, тим редом, док су остале цифре највише 9), а онда број d може бити највише $2 + 9$, тј. највише 11. Дакле, обједињавањем добијених закључака констатујемо да је d број који није већи од 11 а који је дељив са 9; према томе, једина могућност је $d = 9$.

Трећи разред – Б категорија

1. Израчунавамо:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg} 5+\operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right)=\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} 5)+\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{2}{3})}{1-\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} 5)\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{2}{3})}=\frac{\frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 5)}+\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 5)}\cdot\frac{2}{3}}=\frac{\frac{1}{5}+\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}}=\frac{\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}}=1.$$

Дакле, како тангенс израза у поставци износи 1, вредност тог израза је $\frac{\pi}{4}$ (тј. реч је о углу од $45°$).

2. Очигледно, $p > 3$ (јер би у супротном лева страна била мања од десне), па како је p прост број, следи $p \equiv \pm 1 \pmod 3$. Одатле имамо $p^2 \equiv 1 \pmod 3$. Такође имамо и $2500 \equiv 1 \pmod 3$, те уколико постављену једначину трансформишемо у облик

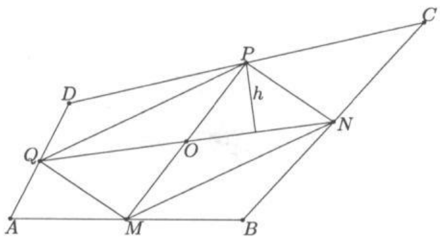
$$p^2 - 2500 = qr,$$

лева стране је дељива са 3, па то мора бити и десна. Како су q и r прости бројеви, један од њих мора бити 3. Претпоставимо, без умањења општости, да је то q. Приметимо $2500 = 50^2$, па се лева страна може факторисати као разлика квадрата, после чега преостаје $(p-50)(p+50) = qr = 3r$. Како је r прост број, имамо само следеће две могућности.

- $p - 50 = 3$, $p + 50 = r$: Следи $p = 53$ и $r = 103$, што јесу прости бројеви па имамо једно решење.
- $p - 50 = 1$, $p + 50 = 3r$: Следи $p = 51$, што није прост број, те овде немамо решења.

Узимајући у обзир и то да q и r могу заменити улоге, постоје укупно две тројке које задовољавају услове задатка: $(p, q, r) \in \{(53, 3, 103), (53, 103, 3)\}$.

3. За леву страну постављене неједначине имамо $x^2 - 2x + 3 = (x^2 - 2x + 1) + 2 = (x-1)^2 + 2 \geqslant 2$, а за десну имамо $\sqrt{4-x^2} \leqslant \sqrt{4} = 2$. Дакле, једина могућност је да и лева и десна страна буду једнаке 2. Међутим, из извођења малопре примећујемо да је лева страна једнака 2 само за $x = 1$, а десна је једнака 2 само за $x = 0$. Дакле, никада не могу обе стране истовремено бити једнаке 2, па постављена неједначина нема решења.



Ок 2019 3Б 4

4. Означимо средишта страница AB, BC, CD, DA са M, N, P, Q, редом, и нека се дужи MP (дужине 2) и NQ (дужине 3) секу у тачки O. Тада су MN, NP, PQ, QM средње линије у $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$ и $\triangle DAB$, редом, па важи $P(\triangle MBN) = \frac{1}{4}P(\triangle ABC)$, $P(\triangle NCP) = \frac{1}{4}P(\triangle BCD)$, $P(\triangle PDQ) = \frac{1}{4}P(\triangle CDA)$ и $P(\triangle QAM) = \frac{1}{4}P(\triangle DAB)$. Сабирањем ове четири једнакости добијамо

$$\begin{aligned}P(\triangle MBN) + P(\triangle NCP) + P(\triangle PDQ) + P(\triangle QAM) &= \frac{1}{4}(P(\triangle ABC) + P(\triangle CDA) + P(\triangle BCD) + P(\triangle DAB))\\ &= \frac{1}{4}\cdot 2P(ABCD) = \frac{1}{2}P(ABCD).\end{aligned}$$

Одатле следи и $P(MNPQ) = \frac{1}{2}P(ABCD)$. Такође због уочених средњих линија имамо $MN \parallel AC \parallel QP$ и $NP \parallel BD \parallel MQ$, па је $MNPQ$ паралелограм. Нека је h висина повучена из тачке P на дијагоналу NQ. Тада због угла од $45°$ имамо $h = \frac{PO}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{MP}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (средњу једнакост добијамо на основу чињенице да се дијагонале паралелограма полове). Одатле израчунавамо $P(MNPQ) = 2P(\triangle NPQ) = 2\cdot\frac{QN\cdot h}{2} = 3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, па коначно и $P(ABCD) = 2P(MNPQ) = 3\sqrt{2}$.

5. а) Посматрајмо шестоугао са уписаним бројевима који испуњавају услове задатка. Како нису сви бројеви исти, постоје два суседна темена таква да је у једном од њих уписан број -1 а у другом 1; нека су то A и B, редом, и нека су наредна темена C, D, E и F. Тада у C мора бити 1 (да би производ бројева у A, B и C био -1), па затим у D мора бити -1 (због B, C и D), потом у E мора бити 1 (због C, D и E), и коначно и у F мора бити 1. Према томе, збир износи $-1 + 1 + 1 + (-1) + 1 + 1 = 2$.

b) Као у делу под а) налазимо темена A_1 и A_2 у којима су уписани бројеви -1 и 1, редом. Тада у темену A_3 мора бити број 1, па онда у темену A_4 број -1, па у темену A_5 број 1, у A_6 број 1, у A_7 број -1 итд. Примећујемо да се образац понавља, тј. да је у теменима чији индекс даје остатак 1 при дељењу са 3 увек уписан број -1 (другим речима, на сваком трећем темену), а у свим осталим теменима број 1. Према томе, у $\frac{2019}{3}$, тј. 673 темена је уписан број -1, а у преосталих 1346 темена број 1, па збир свих уписаних бројева износи: $673\cdot(-1) + 1346\cdot 1 = 673$.

Четврти разред – Б категорија

1. Квадрирајмо обе једнакости дате у поставци и потом их саберимо. Добијамо:

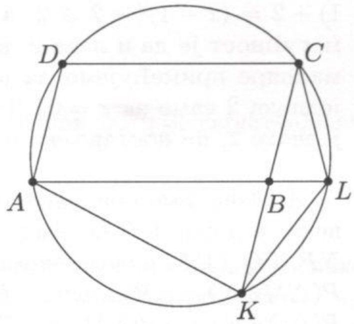
$$\begin{aligned}61 &= (16\sin^2\alpha + 40\sin\alpha\cos\beta + 25\cos^2\beta) + (25\sin^2\beta + 40\sin\beta\cos\alpha + 16\cos^2\alpha)\\ &= 16(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) + 25(\sin^2\beta+\cos^2\beta) + 40(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)\\ &= 16+25+40\sin(\alpha+\beta) = 41+40\sin(180^\circ-\gamma) = 41+40\sin\gamma.\end{aligned}$$

Одатле имамо $\sin\gamma = \frac{61-41}{40} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$, тј. $\gamma = 30^\circ$ или $\gamma = 150^\circ$. Друга могућност отпада због услова да је $\triangle ABC$ оштроугли, па остаје $\gamma = 30^\circ$.

2. Да би израз у поставци био дефинисан, мора важити $\log_2(\cos\frac{\pi x}{\sqrt{2}}) \geqslant 0$, тј. $\cos\frac{\pi x}{\sqrt{2}} \geqslant 1$. Но како, по дефиницији функције cos, лева страна не може бити већа од 1, остаје $\cos\frac{\pi x}{\sqrt{2}} = 1$, тј. $\frac{\pi x}{\sqrt{2}} = 2k\pi$ за неко $k \in \mathbb{Z}$, те остаје $D = \{2\sqrt{2}k : k \in \mathbb{Z}\}$. Према томе, за $x \in D$, број x^2 може бити $8\cdot 0^2$, $8\cdot 1^2$, $8\cdot 2^2$... Како имамо $8\cdot 15^2 = 1800 < 2019 < 8\cdot 16^2 = 2048$, најмања вредност израза $|2019 - x^2|$ постиже се за $x = 2\sqrt{2}\cdot 16$ и износи $2048 - 2019 = 29$, што јесте прост број.

3. Важи $n^2+4n-15 = n^2+4n+4-19 = (n+2)^2-19$, па пошто овај број треба да буде дељив са 361 а имамо $361 = 19^2$, следи да је посматрани број дељив и са 19. Онда $19 \mid (n+2)^2$, па пошто је 19 прост број, добијамо и $19^2 \mid (n+2)^2$. Но, тада из овога и $361 \mid (n+2)^2 - 19$ следи $361 \mid 19$, што је очигледна контрадикција. Дакле, такав број не постоји.

4. Пребројмо прво колико максимално може бити таквих бројева чије су цифре у опадајућем поретку. Сваки такав број је једнозначно одређен одабиром пет (различитих) цифара које га сачињавају (након што су цифре одабране, број добијамо њиховим сортирањем у опадајућем поретку), па пошто имамо 10 цифара на располагању, таквих бројева има $\binom{10}{5}$. Пребројмо сада оне бројеве чије су цифре у растућем поретку. Слично као малопре, и сваки такав број је једнозначно одређени одабиром цифара које га сачињавају; притом сада на располагању имамо само 9 цифара од којих можемо бирати 5, јер међу одабраним цифрама не сме бити 0 (ако би била, онда би она, због растућег поретка, морала ићи на почетак телефонског броја, што је забрањено условом задатка). Дакле, у овом случају имамо $\binom{9}{5}$ бројева. Укупан резултат је: $\binom{10}{5} + \binom{9}{5} = 252 + 126 = 378$ телефонских бројева.



Ок 2019 4Б 5

5. Из $CL = CB$ добијамо $\measuredangle CLB = \measuredangle CBL = 180^\circ - \measuredangle ABC = 180^\circ - \measuredangle ADC$, па тачке A, L, C и D леже на истој кружници (због суплементности периферијских углова над истом тетивом с различитих страна). На сличан начин, из $AK = AB$ добијамо $\measuredangle AKB = \measuredangle ABK = 180^\circ - \measuredangle ABC = 180^\circ - \measuredangle ADC$, па и тачке A, K, C и D леже на истој кружници. Дакле, свих пет тачака A, K, L, C и D леже на истој кружници, што је и требало доказати.