Školsko takmičenje iz matematike, 18.11.2023.

I razred

1. Naći sve parove prirodnih brojeva čija je razlika kvadrata 2023.

2. Ako je zbir obima dva kvadrata 8, a razlika njihovih površina 3, odrediti dužine stranica tih kvadrata.

3. Ako je $n = 9 + 99 + 999 + \cdots + 999\ldots999$, gde poslednji sabirak ima 99 cifara, odrediti broj cifara i zbir svih cifara broja n.

4. Na koliko načina možemo izabrati dva različita broja iz skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 123\}$ tako da njihov zbir bude deljiv sa 5?

5. Na stranicama BC i CD pravougaonika $ABCD$ date su redom tačke G i E, tako da je $DE = BG$, $DE = \frac{1}{2}EC$. Tačka F je unutar pravougaonika $ABCD$, takva da je $CEFG$ takođe pravougaonik, čija je površina jednaka polovini površine pravougaonika $ABCD$. Koliko puta je stranica BC duža od DE?

(Radi se 120 minuta. Zadatke možete zadržati. Rešenja i liste već danas na: mirkomatematika.weebly.com)

Školsko takmičenje iz matematike, 18.11.2023.

II razred

1. Izračunati: $\frac{(1+i)^{2023}}{(1-i)^{2021}} + \frac{(1+i)^{2021}}{(1-i)^{2023}}$, gde je i imaginarna jedinica ($i^2 = -1$).

2. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 100000 koji imaju tačno 5 delilaca?

3. Izračunati: $\frac{\left(\sqrt{666}+\sqrt{888}\right)^2-\sqrt{666^2+888^2}}{444}$.

4. Neka je ABC jednakokrako-pravougli trougao. Kružnica sa središtem na jednoj od kateta prolazi kroz teme pravog ugla u tački C i dodiruje hipotenuzu trougla ABC. Odrediti dužinu hipotenuze trougla ABC ako je poluprečnik date kružnice jednak 1.

5. Odredi četiri najmanja uzastopna prirodna broja takva da je prvi deljiv s 2, drugi s 3, treći sa 7, a četvrti s 5.

(Radi se 120 minuta. Zadatke možete zadržati. Rešenja i liste već danas na: mirkomatematika.weebly.com)

Školsko takmičenje iz matematike, 18.11.2023.

III razred

1. Odrediti sve uređene parove (a, b) celih brojeva za koje je $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{5}$.

2. Trapez $ABCD$ ima paralelne stranice AB i CD i važi: $AB = 25$, $CD = 11$, $BC = 15$ i $AD = 13$ (BC i AD su kraci). Dokazati da je $\sphericalangle ACB = 90°$.

3. Koliko ima delitelja broja 30^{30} koji završavaju s tačno 15 nula?

4. Skratiti razlomak $\frac{(x+1)^4 - 4(x+x^2)^2 + 4x^2 - (1+x)^2}{3x^2+x}$, ako je $x \neq 0$, $x \neq -\frac{1}{3}$.

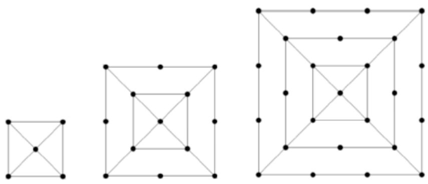
5. Data je kocka ivice a, i pravilna četvorostrana piramida visine $2a$ čija se baza poklapa sa jednom stranom kocke, a prodire naspramnu stranu. Naći odnos zapremina delova piramide unutar i van te kocke.

(Radi se 120 minuta. Zadatke možete zadržati. Rešenja i liste već danas na: mirkomatematika.weebly.com)

Školsko takmičenje iz matematike, 18.11.2023.

IV razred

1. Na slici je prikazan niz likova. Svaki lik ima nekoliko istaknutih tačaka, npr. prvi lik ima 5 istaknutih tačaka, drugi lik ima 13 istaknutih tačaka, itd. Ako bi se niz takvih likova nastavio, koliko bi istaknutih tačaka imao 23. lik?



2. Zadat je pravougaonik $ABCD$. Za kvadrat $DEFG$ važi da je tačka D teme pravougaonika, tačka E pripada duži AB, tačka F pripada duži BC i $\sphericalangle BEF = 30°$. Ako površina kvadrata $DEFG$ iznosi 36 , izračunati obim i površinu preseka pravougaonika $ABCD$ i kvadrata $DEFG$.

3. Zbir nekih 50 uzastopnih prirodnih brojeva je potpuni kvadrat. Kolika su dva najmanja moguća zbira takvih 50 uzastopnih brojeva?

4. Ako je $ctgx = \frac{1}{2}$, koliko je $\frac{(cosx-1+sinx)(cosx+1-sinx)}{cosx-cosxsinx}$?

5. Data je funkcija f : R → R, $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$, pri čemu je a pozitivan realan broj različit od 1. Koliko je $f(p+t) + f(p-t)$ ako je $f(t) = 20$ i $f(p) = 25$?

(Radi se 120 minuta. Zadatke možete zadržati. Rešenja i liste već danas na: mirkomatematika.weebly.com)

I razred, rešenja

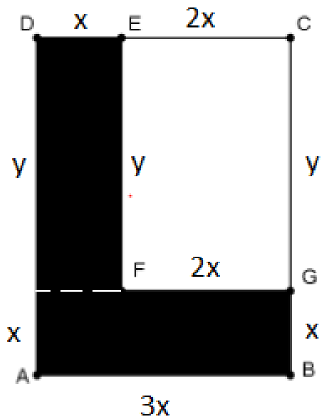
I-1. Ako su a i b prirodni brojevi, onda važi $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = 2023 = 7 \cdot 17 \cdot 17$. S obzirom da je $a + b > a - b$, imamo 3 rešenja:
I. $(a + b)(a - b) = 2023 \cdot 1$, pa je $a + b = 2023$, $a - b = 1$. Tada je $a = 1012$ i $b = 1011$.
II. $(a + b)(a - b) = 289 \cdot 7$, pa je $a + b = 289$, $a - b = 7$. Tada je $a = 148$ i $b = 141$.
III. $(a + b)(a - b) = 119 \cdot 17$, pa je $a + b = 119$, $a - b = 17$. Tada je $a = 68$ i $b = 51$.
$(a,b)\epsilon\{(1012,1011),(148,141),(68,51)\}$.

I-2. Označimo dužinu stranice većeg kvadrata sa x, a dužinu stranice manjeg kvadrata sa y. Tada je, prema uslovima zadatka, $4x + 4y = 8$, $x^2 - y^2 = 3$. Iz prve jednačine zaključujemo da je $x + y = 2$. S obzirom da je $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 3$, dobijamo da je $2(x-y) = 3$ ili $x - y = \frac{3}{2}$. Rešavanjem sistema dobijamo rešenja $x = \frac{7}{4}$, $y = \frac{1}{4}$.

I-3. Ako je u pojedinom sabirku m devetki, tada je $99 \ldots 99 = 10^m - 1$, a to važi redom za $m = 1$ do $m = 99$. Zato je $n = 9 + 99 + 999 + \cdots + 999 \ldots 999 = 10 - 1 + 100 - 1 + 1000 - 1 + \cdots + 100 \ldots 000 - 1$. Dalje je $n = 111 \ldots 1110 - 99 \cdot 1$ (jer ima 99 jedinica koje se oduzimaju), a broj $111 \ldots 1110$ ima u svom zapisu 99 jedinica i jednu nulu na kraju. Posle oduzimanja, rezultat je $111 \ldots 1011$, sa ukupno 100 cifara, dok je zbir svih cifara 99.

I-4. U skupu brojeva {1, 2, ..., 122, 123} nalazi se: 25 brojeva koji pri deljenju s 5 daju ostatak 1, 25 brojeva koji pri deljenju s 5 daju ostatak 2, 25 brojeva koji pri deljenju s 5 daju ostatak 3, 24 broja koji pri deljenju s 5 daju ostatak 4 i 24 broja deljiva brojem 5. Zbir dvaju odabranih brojeva biće deljiv s 5 u tri slučaja:
1. slučaj: oba broja su deljiva brojem 5. Prvi broj možemo izabrati na 24 načina, a drugi na 23 načina jer brojevi moraju biti različiti. Postoji $\frac{24 \cdot 23}{2} = 276$ načina (delimo s 2 jer smo svaki par brojeva brojali dvaput).
2. slučaj: jedan broj daje ostatak 1, a drugi broj ostatak 4 pri deljenju brojem 5. Postoji 25 · 24 = 600 načina na koje možemo odabrati takva dva broja.
3. slučaj: jedan broj daje ostatak 2, a drugi broj ostatak 3 pri deljenju brojem 5. Postoji 25 · 25 = 625 načina na koje možemo odabrati takva dva broja.
Ukupno postoji 276 + 600 + 625 = 1501 način na koji to možemo učiniti.

I-5. Ako označimo da je $DE = x$, tada je $CE = 2x$ i neka je $GC = EF = y$. (vidi sliku!)



Neka je tačka H takva da su $EDHF$ i $ABGH$ pravougaonici. Označimo njihove površine redom $P1$ i $P2$, a površinu pravougaonika $CEFG$ označimo s $P3$. Važi $P1 = x \cdot y$, $P2 = 3x \cdot x$, $P3 = 2x \cdot y$. Iz uslova znamo da je $P1 + P2 = P3$ (jer je $P3$ polovina cele površine!), iz čega sledi jednakost: $x \cdot y + 3x \cdot x = 2x \cdot y$. Dalje, možemo podeliti obe strane jednakosti sa x , jer nije nula. Dobija se $y + 3x = 2y$, pa je $y = 3x$. Znači, $BC = 4DE$.

II razred, rešenja

II-1. Prvi način: $\frac{(1+i)^{2023}}{(1-i)^{2021}}+\frac{(1+i)^{2021}}{(1-i)^{2023}}=\frac{(1+i)^{2022}(1+i)}{(1-i)^{2020}(1-i)}+\frac{(1+i)^{2020}(1+i)}{(1-i)^{2022}(1-i)}=\frac{(2i)^{1011}(1+i)}{(-2i)^{1010}(1-i)}+\frac{(2i)^{1010}(1+i)}{(-2i)^{1011}(1+i)}=-2-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$.

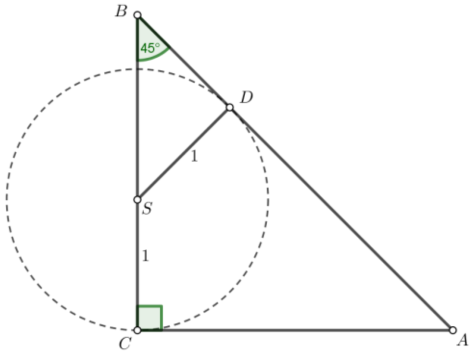
Drugi način: $\frac{(1+i)^{2023}}{(1-i)^{2021}}+\frac{(1+i)^{2021}}{(1-i)^{2023}}=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2021}\cdot(1+i)^2+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2021}\cdot\frac{1}{(1-i)^2}=i^{2021}\cdot 2i+i^{2021}\cdot\frac{1}{-2i}=-2-\frac{1}{2}$

Treći način: $\frac{(1+i)^{2023}}{(1-i)^{2021}}+\frac{(1+i)^{2021}}{(1-i)^{2023}}=\frac{(1+i)^{2023}}{(1-i)^{2021}}\cdot\frac{(1+i)^{2021}}{(1+i)^{2021}}+\frac{(1+i)^{2021}}{(1-i)^{2023}}\cdot\frac{(1+i)^{2021}}{(1+i)^{2021}}=\frac{(1+i)^{4044}}{2^{2021}}+\frac{(1+i)^{4042}}{2^{2023}}=\cdots$

II-2. Označimo sa $D(n)$ skup svih delilaca prirodnog broja n. Ako je a prost broj i ako je $n=a\cdot a$, tada je $D(n)=\{1, a, n\}$, pa n ima 3 delioca. Ako je $n=a\cdot a\cdot a$, tada je $D(n)=\{1, a, a\cdot a, n\}$, pa n ima 4 delioca. Ako je $n=a\cdot a\cdot a\cdot a$, tada je $D(n)=\{1, a, a\cdot a, a\cdot a\cdot a, n\}$, pa n ima 5 delilaca. Ako su a i b prosti brojevi i ako je $n=a\cdot b$, tada je $D(n)=\{1, a, b, n\}$, pa n ima 4 delioca. Ako je $n=a\cdot a\cdot b$, tada je $D(n)=\{1, a, b, a\cdot a, a\cdot b, n\}$, pa n ima 6 delilaca, i tako dalje, n će imati sve više delilaca. Zaključujemo da n mora biti jednak umnošku $a\cdot a\cdot a\cdot a$, gdje je a neki prost broj. Budući da je 17·17·17·17= 83 521<100 000, a 19·19·19·19=130 321>100 000, zaključujemo da a može biti 2, 3, 5, 7, 11, 13 ili 17. Dakle, traženih brojeva ima 7.

II-3. Prvo izračunamo: $\left(\sqrt{666}+\sqrt{888}\right)^2=\left(\sqrt{111}\cdot\sqrt{6}+\sqrt{111}\cdot\sqrt{8}\right)^2=111\left(14+8\sqrt{3}\right)$, a zatim $\sqrt{666^2+888^2}=111\sqrt{6^2+8^2}=1110$. Dalje je $\frac{\left(\sqrt{666}+\sqrt{888}\right)^2-\sqrt{666^2+888^2}}{444}=\frac{111\left(14+8\sqrt{3}-10\right)}{444}=1+2\sqrt{3}$.

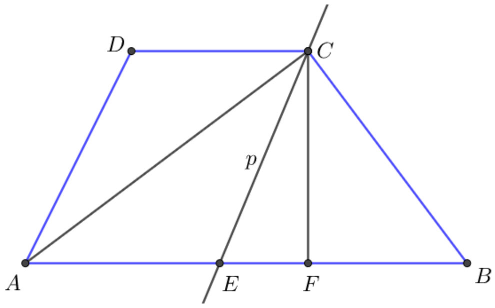
II-4. Budući da kružnica dodiruje hipotenuzu pravouglog trougla, hipotenuza je tangenta te kružnice i poluprečnik u tački dodira *D* normalan je na hipotenuzu.
Kako je trougao *ABC* jednakokrako-pravougli, ugao u temenu *B* iznosi 45° pa je trougao *BSD* takođe jednakokrako-pravougli trougao. Tada je $BD=1$, $BS=\sqrt{2}$, $AC=BC=1+\sqrt{2}$, a hipotenuza $AB=2+\sqrt{2}$.



II-5. Prvi broj je paran jer je deljiv sa 2, a kako su brojevi uzastopni, onda je drugi neparan, treći paran, a četvrti neparan. Četvrti broj je deljiv s 5 i neparan je pa mu je zadnja cifra 5. To znači da je poslednja cifra trećeg broja 4, a kako je deljiv sa 7, onda to mogu biti brojevi $2\cdot 7=14$, $12\cdot 7=84$, $22\cdot 7=154$,... U tom slučaju drugi broj može biti 13, 83, 153, … a najmanji deljiv sa 3 je 153. Zato su traženi brojevi 152, 153, 154 i 155.

III razred, rešenja

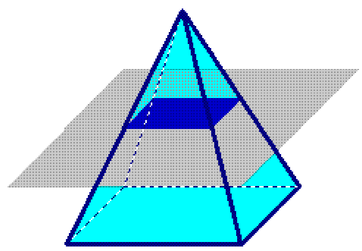
III-1. Prvi način: Iz početne jednakosti je $\frac{b-a}{ab}=\frac{1}{5}$, dalje je $5b-5a=ab$, iz čega je $a=\frac{5b}{b+5}$ ili $a=\frac{5b+25-25}{b+5}=5-\frac{25}{b+5}$, a pošto je b+5 delilac broja 25, tada $b+5\in\{-1,1,-5,5,-25,25\}$ ili $b\in\{-6,-4,-10,0,-30,20\}$, a važi $a\neq 0$, $b\neq 0$, pa sutraženi uređeni parovi: (30,−6), (−20,−4), (10,−10), (6,−30) i (4,20).
Drugi način: Početna jednakost se može transformisati u oblik $(5-a)(5+b)=25=-1\cdot(-25)=(-25)\cdot(-1)=1\cdot 25=25\cdot 1=(-5)\cdot(-5)=5\cdot 5$, tako da imamo 6 mogućnosti, od kojih je 5 ispravno.



III-2. Docrtamo pravu $p \| AD$ kroz tačku C, a presek sa stranicom AB označimo sa E i podnožje visine iz C sa F. Tada je $AE = CD = 11$, $AD = CE = 13$ i $EB = 14$. Neka je $EF = x$ i $CF = h$, a tada je $FB = 14 - x$. Primenom pitagorine teoreme na trouglove EFC i BFC, imamo: $h^2 = 13^2 - x^2$ $h^2 = 15^2 - (14 - x)^2$. Izjednačavanjem desnih strana jednakosti dobija se $x = 5$, a tada je $h = 12$. Primenom Pitagorine teoreme na trougao AFC, lako se dobija da je $AC = 20$. Na kraju, proverimo Pitagorinu teoremu za trougao ABC : $AB^2 = AC^2 + BC^2$, tj. $25^2 = 20^2 + 15^2$, što je tačno (625=625). Zaključujemo da je taj trougao pravougli, a to znači da je $\sphericalangle ACB$ = 90°.

III-3. Delioci broja 30^{30} su oblika $2^a 3^b 5^c$ pri čemu je $a, b, c \in \{0,1,2, \dots ,30\}$. Da bi takav delitelj završavao sa tačno 15 nula, oba broja a i c moraju biti jednaki 15 ili jedan od njih mora biti jednak 15, a drugi mora biti veći od 15. U slučaju kada su oba broja jednaki 15, takvih delitelja ima 31 (za $b \in \{0,1,2, \dots 30\}$). U slučaju kada je $a = 15$ i $c > 15$, takvih delitelja ima $31 \cdot 15$, a isto toliko ih ima ako je $a > 15$ i $c = 15$. Ukupan broj delilaca sa traženom osobinom je $31 + 31 \cdot 15 + 31 \cdot 15 = 31(1 + 15 + 15) = 31^2 = 961$.

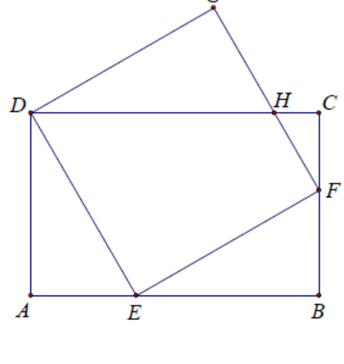
III-4. Rastavimo brojilac i imenilac datog izraza, grupisanjem članova (prvi i četvrti i dva srednja u brojiocu): $\frac{(x+1)^4 - 4\left(x+x^2\right)^2 + 4x^2 - (1+x)^2}{3x^2+x} = \frac{(x+1)^4 - (1+x)^2 - 4x^2(1+x)^2 + 4x^2}{x(3x+1)} = \frac{(x+1)^2\left((x+1)^2-1\right) - 4x^2\left((x+1)^2-1\right)}{x(3x+1)}$. Dalje je (uz korišćenje razlike kvadrata): $\frac{\left((x+1)^2-1\right)\left((x+1)^2-4x^2\right)}{x(3x+1)} = \frac{(x+1-1)(x+1+1)(x+1-2x)(x+1+2x)}{x(3x+1)} = \frac{x(x+2)(1-x)(3x+1)}{x(3x+1)}$. Posle skraćivanja, rezultat je $(x + 2)(1 - x)$.



III-5. Presek gornje strane kocke i piramide je kvadrat čija je stranica $\frac{a}{2}$, jer je manja piramida („iznad" kocke) slična (proporcionalna) celoj piramidi, a pošto je i visina veće piramide dva puta veća od visine manje, tako se odnose i osnovne ivice. Odnos zapremina te dve piramide je $V : V_1 = 2^3 : 1^3 = 8$, pa je $V_1 = \frac{1}{8}V$. Tada, deo unutar kocke, ima zapreminu $\frac{7}{8}V$, a traženi odnos je 7:1.

IV razred, rešenja

IV-1. Uočimo da svaki novi lik nastaje od prethodnog tako što dodamo neki broj istaknutih tačaka koje formiraju spoljni kvadrat novog lika. Na tačku u središtu dodajemo 4 tačke i dobijamo prvi lik, pa nakon toga dodajemo 8 tačaka i dobijamo drugi lik, pa dodajemo 12 tačaka i dobijamo treći lik. U svakom koraku smo dodali 4 tačke više jer se broj tačaka na stranici spoljnog kvadrata povećava za jedan. Tada je broj istaknutih tačaka 23. lika u nizu: $1 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + \cdots + 4 \cdot 23 = 1 + 4(1 + 2 + 3 + \cdots + 23) = 1 + 4 \cdot 276 = 1105$.



IV-2. Neka je H presek duži DC i FG. Trouglovi ADE i BEF su podudarni, sa uglovima 30°, 60° i 90°. Tada je $DE = EF = 6$, $AE = BF = 3$ i $DA = EB = 3\sqrt{3}$. Trougao HFC ima, takođe, uglove 30°, 60° i 90° i važi $FC = BC - BF = 3\sqrt{3} - 3$. Ako označimo $HC = x$, tada je $HF = 2x$, pa je $4x^2 = x^2 + \left(3\sqrt{3} - 3\right)^2$, a dalje je $3x^2 = \left(3\sqrt{3} - 3\right)^2$, $x = 3 - \sqrt{3}$. Tada je $HF = 2x = 6 - 2\sqrt{3}$, a $DH = DC - HC = 3 + 3\sqrt{3} - \left(3 - \sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}$. Presek pravougaonika i kvadrata je trapez $DEFH$, pa obim iznosi: $DE + EF + FH + HD = 6 + 6 + \left(6 - 2\sqrt{3}\right) + 4\sqrt{3} = 18 + 2\sqrt{3}$, dok je površina: $P = \frac{DE+FH}{2} \cdot EF = \frac{6+6-2\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 36 - 6\sqrt{3}$.

IV-3. Označimo te brojeve sa: $n-24, n-23, \dots, n-1, n, n+1, \dots, n+24, n+25$ za $n \geq 25$. Tada je njihov zbir $50n+25=25(2n+1)$, a pošto je 25 potpun kvadrat, to mora biti i izraz $2n+1$, a važi $2n+1 \geq 51$. Prvi neparan broj, koji je i potpun kvadrat, je 81, a tada je zbir $25 \cdot 81 = 2025$, a drugi je 121, pa je tada zbir $25 \cdot 121 = 3025$. (Ako se uzme da su ti brojevi: $n, n+1, \dots, n+48, n+49$, tada je njihov zbir $25(2n+49)$, a dalje je vrlo slično.)

IV-4. Ako u brojiocu izmnožimo zagrade (razlika kvadrata!), dobićemo sledeći izraz: $\frac{(cosx-(1-sinx))(cosx+(1-sinx))}{cosx(1-sinx)} = \frac{cos^2x-(1-sinx)^2}{cosx(1-sinx)} = \frac{cos^2x-1+2sinx-sin^2x}{cosx(1-sinx)} = \frac{2sinx-2sin^2x}{cosx(1-sinx)} = \frac{2sinx(1-sinx)}{cosx(1-sinx)} = \frac{2sinx}{cosx} = 2tgx = \frac{2}{ctgx} = 4$. (Može i da se na početku ubaci da je $sinx = 2cosx$ u dati izraz...)

IV-5. Direktnim izračunavanjem je: $f(p+t)+f(p-t) = \frac{1}{2}(a^{p+t}+a^{-p-t}) + \frac{1}{2}(a^{p-t}+a^{-p+t}) = \frac{1}{2}(a^{p+t} + a^{-p-t} + a^{p-t} + a^{-p+t}) = \frac{1}{2}\left(a^p(a^t+a^{-t}) + a^{-p}(a^{-t}+a^t)\right) = \frac{1}{2}(a^t+a^{-t})(a^p+a^{-p}) = 2\frac{1}{2}(a^t+a^{-t}) \cdot \frac{1}{2}(a^p+a^{-p}) = 2 \cdot f(t) \cdot f(p) = 2 \cdot 20 \cdot 25 = 1000$.