

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

19. јануар 2019.

Први разред – А категорија

1. Нека су  $AA_0$ ,  $BB_0$  и  $CC_0$  висине  $\triangle ABC$ , а  $H$  његов ортоцентар. Ако су  $M$  и  $N$  средишта дужи  $AA_0$  и  $CC_0$ , доказати да тачке  $M$ ,  $N$ ,  $B_0$  и  $H$  леже на истој кружници.
2. Наћи све парове реалних бројева  $a$  и  $b$  такве да за све реалне бројеве  $x$  и  $y$  важи једнакост
$$\lfloor ax + by \rfloor + \lfloor bx + ay \rfloor = (a + b)\lfloor x + y \rfloor.$$
(За реалан број  $t$ , са  $\lfloor t \rfloor$  означавамо највећи цео број који није већи од  $t$ .)
3. Доказати да се у правилном осмоуглу  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$  дијагонале  $A_1A_6$ ,  $A_3A_7$  и  $A_5A_8$  секу у једној тачки.
4. Наћи све природне бројеве  $n$  такве да су  $n - 4$ ,  $2n + 2$  и  $4n + 1$  потпуни кубови.
5. У популарној игри „Миноговац“ на неким пољима табле  $a \times b$  ( $a, b \in \mathbb{N}$ ) налазе се мине, а на сваком преосталом пољу је уписан број њему суседних поља на којима су мине (под суседним пољима подразумевамо поља која имају бар једно заједничко теме). Испитати да ли постоје бројеви  $a$  и  $b$  и распоред мина на табли  $a \times b$  такви да тачно 2019 поља немају мину и да је на свима њима уписан број:
  - а) 3;
  - б) 4;
  - в) 7.

Време за рад 180 минута.  
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

19. јануар 2019.

Други разред – А категорија

1. Одредити максималну вредност израза

$$|8x^2 - 2x - 3|$$

на интервалу  $x \in [0, 1]$ .

2. Постоји ли бесконачан низ природних бројева који су сви потпуни квадрати, и сваки члан тог низа почев од трећег је једнак збиру претходна два?
3. Кружница је уписана у једнакокраки трапез  $ABCD$  и додирује основицу  $CD$  у тачки  $L$ , а краке  $BC$  и  $AD$  у тачкама  $K$  и  $M$ , редом. У којој размери права  $AL$  дели дуж  $MK$ ?
4. Одредити све комплексне бројеве  $z$  и  $w$  такве да важи

$$|z|^2 + zw + \bar{w} = 2 + 6i \quad \text{и} \quad |w|^2 + \bar{z}w + z = 2 - 4i.$$

5. Назовимо *крстом* таблу сачињену од уније једне табле  $a \times 1$  и једне табле  $1 \times b$  које имају тачно једно заједничко поље ( $a, b \in \mathbb{N}$ ). Скуп неких поља такве табле називамо *повезана област* ако се из сваког поља у том скупу може доћи до сваког другог поља крећући се само по суседним пољима унутар уоченог скупа (под суседним пољима подразумевамо поља која имају заједничку страну). За задат природан број  $n$ , одредити број начина на које се бројеви  $1, 2, \dots, n$  могу уписати у неки крст са  $n$  поља (крст није унапред фиксиран), сваки број у тачно једном пољу, уз услов да за свако  $k$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , поља у којима су уписани бројеви  $1, 2, \dots, k$  чине повезану област.

Време за рад 180 минута.  
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

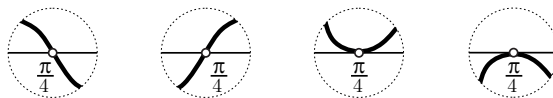
19. јануар 2019.

Трећи разред – А категорија

1. На једном од исечака доле приказан је део  $x$ -осе и графика функције

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x - 2}{4x^2 - 7x + 3}.$$

Који је то исечак?



2. У  $\triangle ABC$  тачка  $D$  је средиште странице  $BC$ . Тачка  $P$  на дужи  $AD$  је таква да важи  $CP = AB$ . Права  $CP$  сече дуж  $AB$  у тачки  $Q$ . Доказати:  $AQ = PQ$ .
3. Нека су  $k$ ,  $n$  и  $d$  природни бројеви. Означимо са  $A_d$  број  $k$ -торки  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  целих бројева таквих да важи

$$n \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k \geq 0 \quad \text{и} \quad a_1 + a_2 + \dots + a_k = d.$$

Означимо са  $B_d$  број  $k$ -торки  $(b_1, b_2, \dots, b_k)$  ненегативних целих бројева таквих да важи

$$b_1 + b_2 + \dots + b_k \leq n \quad \text{и} \quad b_1 + 2b_2 + \dots + kb_k = d.$$

Доказати:

$$A_d = B_d = B_{kn-d}.$$

4. Лати су различити природни бројеви  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ . За  $i = 1, 2, \dots, 100$ , број  $b_i$  је добијен додавањем броју  $a_i$  највећег заједничког делиоца осталих 99 бројева. Колико најмање међу бројевима  $b_i$  може бити различитих?
5. а) Доказати да постоји бесконачно много природних бројева који се не могу представити у облику

$$p^q + q^r$$

за неке просте бројеве  $p$ ,  $q$  и  $r$ .

- б) Доказати да постоји само коначно много природних бројева који се не могу представити у облику

$$p_1^{p_2} + p_2^{p_3} + \dots + p_{i-1}^{p_i}$$

за неки природан број  $i$ ,  $i > 1$ , и неке просте бројеве  $p_1, p_2, \dots, p_i$ .

Време за рад 180 минута.  
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

19. јануар 2019.

Четврти разред – А категорија

1. У тетраедру  $ABCD$  висина из темена  $D$  пада у унутрашњост  $\triangle ABC$ , а пљосни  $\triangle DAB$ ,  $\triangle DAC$  и  $\triangle DBC$  заклапају с пљосни  $\triangle ABC$  међусобно подударне диједарске углове. Ако важи  $P(\triangle ABC) = 21$ ,  $P(\triangle DAB) = 15$ ,  $P(\triangle DAC) = 13$  и  $P(\triangle DBC) = 14$ , израчунати запремину тетраедра  $ABCD$ .
2. Означимо број цифара броја  $n$  у декадном запису са  $\text{brc}(n)$ . Да ли постоји реална константа  $c$  таква да за сваки природан број  $n$  важи:

$$\text{brc}(1) + \text{brc}(2) + \dots + \text{brc}(n) < cn \quad ?$$

3. У некој земљи постоји 101 град. Свака два града су повезана највише једном аутобуском линијом, при чему су све аутобуске линије једносмерне. Из сваког града излази тачно 25 линија и у сваки улази тачно 25. Доказати да се из сваког града може стићи (уз преседања ако је потребно) у сваки други.
4. Дат је петоугао  $ABCDE$  у ком важи  $CD = AB + AE$ . Нека симетрала  $\angle BAE$  сече  $BE$  у тачки  $P$ , нека је  $Q$  тачка на  $CD$  таква да важи  $CQ = AB$ , и нека су  $X$  и  $Y$  средишта дужи  $BC$  и  $DE$ , респективно. Нека је  $T$  тежиште у  $\triangle APQ$  и нека  $YT$  сече  $AX$  у тачки  $Z$ . Наћи  $\frac{AZ}{ZX}$  у функцији од  $AB$  и  $AE$ .
5. Нека су  $a, b, c, d$  ненегативни реални бројеви за које важи  $a + b + c + d = 1$ . Означимо

$$M = \frac{b^2 + c^2 + d^2 - bc - cd - db}{3}.$$

Доказати неједнакост

$$\sqrt{a + M} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} \leq 2.$$

Време за рад 180 минута.  
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

19. јануар 2019.

Први разред – Б категорија

1. Од цифара 1, 9, 0, 1, 2, 0, 1, 9 треба саставити четвороцифрен број дељив са 3 (сваку цифру смемо користити онолико пута колико пута је наведена). Који је:
  - а) највећи такав број;
  - б) четврти највећи такав број?
2. У месту Горње Зуце приликом пописа 3019. је било  $\frac{5}{8}$  мушкараца, а од њих је 90% било млађих од 75 година, док је код женског становништва 96% било млађих од 75 година. На следећем попису 3029. установљено је да се укупан број становника повећао за 300, док је број особа са 75 и више година био исти као на претходном попису, али сада представља 7% укупног становништва. Колико је укупно становника имало Горње Зуце на претходном попису 3019?
3. Да ли постоји троугао са страницама  $a$ ,  $b$  и  $c$  за које важи
$$a, b, c > 2019 \quad \text{и} \quad [a] + [b] < [c] \quad ?$$
(За реалан број  $t$ , са  $[t]$  означавамо највећи цео број који није већи од  $t$ .)
4. Ако једна бела и две црне краве попасу сву траву на ливади за 5 недеља, а три беле и четири црне краве попасу сву траву на ливади за 2 недеље, за колико недеља ће сву траву на ливади попати једна црна крава? Сматрати да краве исте боје пасу траву истом брзином, да је почетна количина траве на ливади увек иста, и да трава на ливади расте фиксном брзином све до тренутка кад је скроз поједена.
5. За правоугаоним столом је постављено осам столица, четири с једне стране и четири наспрам њих с друге стране. На колико начина је могуће распоредити осморо пријатеља за овим столом, а да притом Ана и Бане *не* седе једно наспрам другог, а Весна и Горан седе једно поред другог? (Познато је да сви пријатељи имају међусобно различита имена.)

Време за рад 180 минута.  
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

19. јануар 2019.

Други разред – Б категорија

1. Доказати да је број

$$2013 \cdot 2015 \cdot 2017 \cdot 2019 + 16$$

потпун квадрат.

2. Одредити све вредности реалног параметра  $k$  такве да важи:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(kx^2 - 4kx + k^2 + 2k - 3 > 0).$$

3. Два дрвета висине 5 и 10 метара су на једнаком растојању од бандере са уличном расветом. Ова два дрвета праве сенке дужине 5 и 15 метара. Колико је висока бандера?

4. Одредити све вредности реалног параметра  $a$  за које систем једначина

$$\begin{aligned}(x + y)^2 &= 12; \\ x^2 + y^2 &= 2(a + 1)\end{aligned}$$

има тачно два решења.

5. У популарној игри „Миноговац“ на неким пољима табле  $a \times b$  ( $a, b \in \mathbb{N}$ ) налазе се мине, а на сваком преосталом пољу је уписан број њему суседних поља на којима су мине (под суседним пољима подразумевамо поља која имају бар једно заједничко теме). Испитати да ли постоје бројеви  $a$  и  $b$  и распоред мина на табли  $a \times b$  такви да тачно 2019 поља немају мину и да је на свима њима уписан број:

- а) 8;
- б) 7;
- в) 6.

Време за рад 180 минута.  
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

19. јануар 2019.

Трећи разред – Б категорија

1. Наћи све целе бројеве  $n$  за које важи  $0 \leq n \leq 90$  и

$$\sin 80^\circ + \sin 50^\circ - \sin 20^\circ = \sqrt{2} \sin n^\circ.$$

2. На краку  $AD$  трапеца  $ABCD$  изабрана је тачка  $M$ . Доказати да друга заједничка тачка  $N$  кружница описаних око  $\triangle ABM$  и  $\triangle CDM$  припада краку  $BC$ .

3. Нека су  $a$  и  $b$  природни бројеви за које важи  $\text{НЗД}(a, b) = 10$  и  $\text{НЗД}(a, b + 2) = 12$ . Израчунати

$$\text{НЗД}(a, 2b) + \text{НЗД}(a, 3b).$$

4. За правоугаоним столом је постављено осам столица, четири с једне стране и четири наспрам њих с друге стране. На колико начина је могуће распоредити осморо пријатеља за овим столом, а да притом Ана и Бане седе једно наспрам другог, а Весна и Горан једно поред другог? (Познато је да сви пријатељи имају међусобно различита имена.)

5. Нека су  $a$ ,  $b$  и  $c$  позитивни реални бројеви,  $a, b, c \neq 1$ . Ако важи

$$\log_a 2018 + \log_c 2018 = 2 \log_b 2018,$$

доказати:

а)  $\log_a 2019 + \log_c 2019 = 2 \log_b 2019$ ;

б)  $a^2 = (ac)^{\log_c b}$ .

Време за рад 180 минута.  
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

19. јануар 2019.

Четврти разред – Б категорија

1. Колико има бројева са бар четири цифре који су дељиви са 9 и могу се саставити од цифара 1, 9, 0, 1, 2, 0, 1, 9 (сваку цифру смемо користити онолико пута колико пута је наведена)?

2. Одредити све вредности реалног параметра  $m$  за које једначина

$$(m+1)x^2 - 3mx + 4m = 0$$

има два различита реална решења која су притом оба већа од  $-1$ .

3. Четвороугао  $ABCD$  је истовремено и тетиван и тангентан, и притом за његове странице важи  $AB - CD = BC - AD$ . Доказати да је дијагонала  $BD$  пречник кружнице описане око четвороугла  $ABCD$ .

4. Одредити све вредности реалног параметра  $a$  за које једначина

$$x^3 - 3ax^2 + (2a^2 + 5)x - 2a^2 + 3 = 0$$

има 3 реална решења која чине аритметичку прогресију.

5. Означимо број цифара броја  $n$  у декадном запису са  $\text{brc}(n)$ . Показати:

$$\text{brc}(1) + \text{brc}(2) + \dots + \text{brc}(\underbrace{99 \dots 99}_{2019 \text{ пута}}) = 2019 \cdot \underbrace{99 \dots 99}_{2019 \text{ пута}} - \underbrace{11 \dots 11}_{2019 \text{ пута}} + 2019.$$

Време за рад 180 минута.  
Решења задатака детаљно образложити.



ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Решења задатака

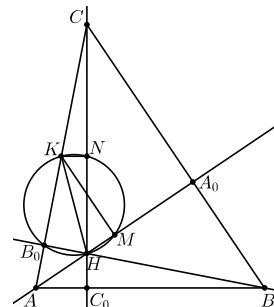
Први разред – А категорија

1. Нека је  $K$  средиште странице  $AC$ . Тада је  $KN$  средња линија у  $\triangle AC_0C$ , па важи  $KN \parallel AC_0$ , тј.  $\angle KNH = 90^\circ$ . Аналогно добијамо  $\angle KMH = 90^\circ$ , а знамо и  $\angle KB_0H = 90^\circ$ . Дакле, кружница над пречником  $KN$  пролази кроз тачке  $N$ ,  $M$  и  $B_0$ , чиме је тврђење доказано.

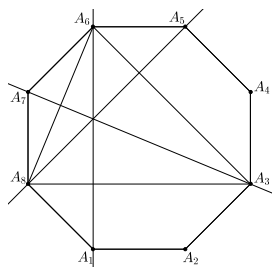
2. За  $y = -x$ , постављени услов се своди на  $\lfloor (a-b)x \rfloor + \lfloor (b-a)x \rfloor = 0$ . Уколико би бројеви  $a$  и  $b$  били различити, ово не би било испуњено нпр. за  $x = \frac{1}{2(a-b)}$  (тада би важило  $\lfloor (a-b)x \rfloor + \lfloor (b-a)x \rfloor = \lfloor \frac{1}{2} \rfloor + \lfloor -\frac{1}{2} \rfloor = 0 + (-1) = -1 \neq 0$ ). Дакле, мора важити  $a = b$ , па услов задатка постаје  $\lfloor a(x+y) \rfloor = a \lfloor x+y \rfloor$ . Бирајући  $0 \leq x+y < 1$  добијамо  $\lfloor a(x+y) \rfloor = a \cdot 0 = 0$ , одакле следи  $0 \leq a(x+y) < 1$ , дакле  $a \geq 0$ .

За  $a = 0$  захтев задатка очигледно важи. Претпоставимо сада  $a > 0$ . Како за  $0 \leq x+y < 1$  мора важити  $\lfloor a(x+y) \rfloor = a \lfloor x+y \rfloor = 0$ , тј.  $0 \leq a(x+y) < 1$ , следи  $x+y < \frac{1}{a}$ ; обратно, уколико одаберемо  $0 \leq x+y < \frac{1}{a}$ , постављени услов се своди на  $a \lfloor x+y \rfloor = \lfloor a(x+y) \rfloor = 0$ , одакле следи  $x+y < 1$ . Другим речима, услови  $0 \leq x+y < 1$  и  $0 \leq x+y < \frac{1}{a}$  су еквивалентни, одакле следи  $a = 1$ .

Дакле, једина решења су парови  $(a, b) = (0, 0)$  и  $(a, b) = (1, 1)$ .



Оп 2019 1А 1



Оп 2019 1А 3

3. *Прво решење.* Права  $A_3A_7$  је оса симетрије посматраног осмоугла, па се у односу на њу дијагонала  $A_1A_6$  пресликава у дијагоналу  $A_5A_8$ . Одатле следи да се ове две дијагонале секу баш на оси симетрије, тј. на дијагонали  $A_3A_7$ , што је и требало доказати.

*Друго решење.* Како су четвороуглови  $A_1A_2A_3A_8$  и  $A_1A_6A_7A_8$  једнакокраки трапези, важи  $A_1A_2 \parallel A_3A_8$  и  $A_7A_8 \parallel A_6A_1$ , одакле следи  $A_6A_1 \perp A_3A_8$ , тј.  $A_6A_1$  је висина у  $\triangle A_3A_6A_8$ . Аналогно је  $A_8A_5$  висина тог истог троугла. Коначно, како је тај троугао једнакокрак (са основицом  $A_6A_8$ ) а  $A_3A_7$  је његова симетрала угла (што следи нпр. из подударности  $\triangle A_3A_7A_8 \cong \triangle A_3A_7A_6$ , коју добијамо по ставу ССУ), закључујемо да је  $A_3A_7$  такође висина у  $\triangle A_3A_6A_8$ . Дакле, посматране три дијагонале се секу у ортоцентру  $\triangle A_3A_6A_8$ .

4. Означимо  $F = (n-4)(2n+2)(4n+1) = 8n^3 - 22n^2 - 38n - 8$ . По услови задатка, и  $F$  мора бити потпун куб. Како је  $F$  паран број и очигледно важи  $F < (2n)^3$ , следи  $F \leq (2n-2)^3 = 8n^3 - 24n^2 + 24n - 8$ , што се своди на  $2n^2 - 62n \leq 0$ , а одакле добијамо  $n \leq 31$ . Одмах видимо да је  $n = 31$  једно решење ( $31-4 = 27 = 3^3$ ,  $2 \cdot 31 + n = 64 = 4^3$  и  $4 \cdot 31 + 1 = 125 = 5^3$ ), а директно се испробава да мањих решења нема.

5. а) Одговор: да. Одаберимо  $a = 2$  и  $b = 2020$ , и распоредимо mine као на цртежу горе.



б) Одговор: да. Одаберимо  $a = 3$  и  $b = 3026$ , и распоредимо mine као на цртежу доле. (Објашњење: у првих 5 колона имамо укупно 5 поља без мина. Преосталих 2014 поља без мина су груписана у парове и распоређена у наредној 3021 колони према приказаном обрасцу.)



Оп 2019 1А 5

с) Одговор: не. Према услови задатка, у овом случају би свако поље које нема мину морало имати тачно једног суседа који нема мину. Дакле, сва поља која немају мину на тај начин би се могла груписати у парове, па следи да их укупно не може бити 2019, што је непаран број.

*Напомена.* Испоставља се да за све бројеве од 1 до 8, са изузетком броја 7, постоји тражени распоред. Доле приказујемо (неке могуће) конструкције за преостале случајеве.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline * & 1 & 1 & * & 1 & 1 & * & 1 \\ \hline \end{array} \dots \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline * & 1 & 1 & * & 1 & 1 & * & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$a = 1, b = 3 \cdot 1009 + 2 = 3029$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline * & 2 & * & 2 & * & 2 & * & 2 \\ \hline \end{array} \dots \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline * & 2 & * & 2 & * & 2 & * & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$a = 1, b = 2 \cdot 2019 + 1 = 4039$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline * & * & * & * & * & * & * & * \\ \hline \end{array} \dots \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline * & * & * & * & * & * & * & * \\ \hline \end{array}$$

$$a = 2, b = 2 \cdot 2019 + 1 = 4039$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline * & 6 & * & 6 & * & 6 & * & 6 \\ \hline \end{array} \dots \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline * & 6 & * & 6 & * & 6 & * & 6 \\ \hline \end{array}$$

$$a = 4, b = 2020$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline * & 8 & * & 8 & * & 8 & * & 8 \\ \hline \end{array} \dots \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline * & 8 & * & 8 & * & 8 & * & 8 \\ \hline \end{array}$$

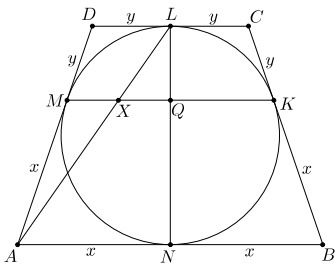
$$a = 3, b = 2 \cdot 2019 + 1 = 4039$$

1. Посматрајмо функцију  $f(x) = 8x^2 - 2x - 3$ . Њене нуле су у тачкама  $x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+96}}{16} = \frac{2 \pm 10}{16}$ , тј.  $x_1 = -\frac{1}{2}$  и  $x_2 = \frac{3}{4}$ , што значи да је функција  $f(x)$  на сегменту  $[0, 1]$  најпре негативна за  $x \in [0, \frac{3}{4})$ , а потом позитивна за  $x \in (\frac{3}{4}, 1]$ . Из особина квадратне функције знамо да се њен минимум достиже у тачки  $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8}$ , и тај минимум износи  $8 \cdot \frac{1}{64} - 2 \cdot \frac{1}{8} - 3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 3 = -\frac{1}{8} - 3$ ; дакле, максимум израза  $|f(x)|$  за  $x \in [0, \frac{3}{4})$  износи  $3 + \frac{1}{8}$ . За  $x \in (\frac{3}{4}, 1]$  функција  $f(x)$  је позитивна и растућа, па достиже максимум за  $x = 1$ , и тај максимум износи  $8 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = 3$ ; ово је уједно и максимум израза  $|f(x)|$  за  $x \in (\frac{3}{4}, 1]$ . Дакле, максимална вредност израза из поставке на интервалу  $x \in [0, 1]$  износи  $3 + \frac{1}{8}$  и достиже се за  $x = \frac{1}{8}$ .

2. Не постоји. Претпоставимо супротно, да такав низ постоји. Можемо претпоставити, без умањења општости, да у том низу постоји непаран број: заиста, ако би сви чланови били парни, тада би они сви били дељиви са 4 (јер су потпуни квадрати), па бисмо дељењем свих чланова тог низа са 4 добили нов низ који такође испуњава постављене услове; понављањем поступка по потреби добијамо низ у ком се појављује бар један непаран број.

Подсетимо се, сви непарни квадрати дају остатак 1 при дељењу са 4. Нека је  $a$  један непаран члан посматраног низа, и нека су  $b, c$  и  $d$  наредна три члана. Ако би и  $b$  био непаран, тада би  $c$  (подсетимо се,  $c = a + b$ ) давао остатак 2 при дељењу са 4 па не би могао бити потпун квадрат, контрадикција. Дакле,  $b$  је паран број, а тада је  $c$  непаран број, те је и  $d$  непаран број. Но, сада из  $c, d \equiv 1 \pmod{4}$  следи да би наредни члан низа морао давати остатак 2 при дељењу са 4, контрадикција.

3. Нека уписана кружница додирује основицу  $AB$  у тачки  $N$ . Означимо  $x = AM = AN = BN = BK$  и  $y = CK = CL = DL = DM$ . Нека  $AL$  и  $NL$  секу  $MK$  у тачкама  $X$  и  $Q$ , редом. Како важи  $\triangle AXM \sim \triangle ALD$ , имамо  $\frac{MX}{y} = \frac{ML}{DL} = \frac{AM}{AD} = \frac{x}{x+y}$ , тј.  $MX = \frac{xy}{x+y}$ ; како важи  $\triangle LXQ \sim \triangle LAN$ , уз примену Талесове теореме имамо  $\frac{XQ}{x} = \frac{XQ}{AN} = \frac{XL}{AL} = \frac{MD}{AD} = \frac{y}{x+y}$ , тј.  $XQ = \frac{xy}{x+y} = MX$ . Следи  $MX = \frac{1}{2}MQ = \frac{1}{4}MK$ , тј.  $MX : XK = 1 : 3$ .



Оп 2019 2А 3

4. Како важи  $|z|^2 = z\bar{z}$  и  $|w|^2 = w\bar{w}$ , сабирањем датих једнакости добијамо

$$\begin{aligned} 4 + 2i &= z\bar{z} + zw + w\bar{w} + \bar{z}\bar{w} + z + \bar{w} = z(\bar{z} + w) + \bar{w}(\bar{z} + w) + z + \bar{w} \\ &= (z + \bar{w})(\bar{z} + w) + z + \bar{w} = |z + \bar{w}|^2 + z + \bar{w}. \end{aligned}$$

Означимо  $z + \bar{w} = a + bi$ , где  $a, b \in \mathbb{R}$ . Тада из последње једнакости добијамо  $a^2 + b^2 + a + bi = 4 + 2i$ , одакле следи  $b = 2$  и затим  $a^2 + a = 0$ . Дакле,  $a = 0$  или  $a = -1$ .

Размотримо прво случај  $a = 0$ . Тада имамо  $z + \bar{w} = 2i$ , па заменом  $\bar{w} = 2i - z$  и  $w = \overline{2i - z} = -2i - \bar{z}$  у прву једначину добијамо

$$2 + 6i = |z|^2 + z(-2i - \bar{z}) + 2i - z = 2i - z(1 + 2i).$$

Одавде следи  $z = \frac{2+4i}{-(1+2i)} = -2$  и  $w = 2 - 2i$ .

Нека сада важи  $a = -1$ . Тада имамо  $z + \bar{w} = -1 + 2i$ , па заменом  $\bar{w} = -1 + 2i - z$  и  $w = \overline{-1 + 2i - z} = -1 - 2i - \bar{z}$  у прву једначину добијамо

$$2 + 6i = |z|^2 + z(-1 - 2i - \bar{z}) - 1 + 2i - z = -1 + 2i - z(2 + 2i).$$

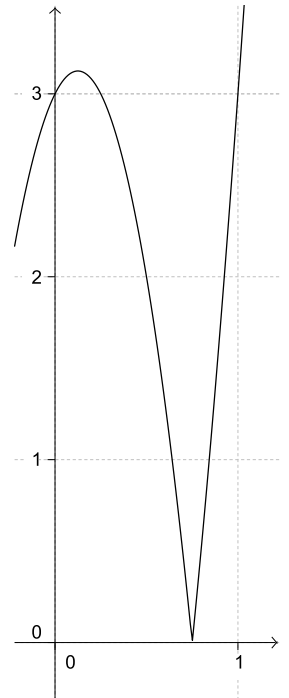
Одавде следи  $z = \frac{3+4i}{-(2+2i)} = \frac{(3+4i)(2-2i)}{-8} = \frac{6-6i+8i+8}{-8} = -\frac{7+i}{4}$  и  $w = \frac{3-9i}{4}$ .

Дакле, постоје два решења:  $(z, w) = (-2, 2 - 2i)$  и  $(z, w) = (-\frac{7+i}{4}, \frac{3-9i}{4})$ .

5. Приметимо, табле  $a \times 1$  и  $1 \times b$  представљају специјалне случајеве крстова; такве крстове ћемо звати *штрафте* (вертикалне, респективно хоризонталне). Код осталих крстова пресек двеју табли које га сачињавају називаћемо *центар крста*, и такве крстове ћемо (након уписивања бројева према услову задатка) делити на *хоризонталне*, *вертикалне* или *централне*, у зависности од тога да ли је број 1 уписан, респективно, негде у хоризонталној компоненти али ван центра, негде у вертикалној компоненти али ван центра, или баш у центру.

За задат број  $n$ , посматрајмо све крстове попуњене бројевима према услову задатка, и нека је  $A$  број хоризонталних штрафти међу њима,  $B$  број централних крстова, а  $C$  број хоризонталних крстова. Због симетрије, укупан број тражен у поставци износи  $2A + B + 2C$ .

Одредимо најпре број  $A$ . Приметимо да је сваки број од 2 надаље уписан у поље или непосредно лево или непосредно десно од блока који чине бројеви пре њега. На тај начин можемо свакој хоризонталној штрафти попуњеној бројевима придружити низ слова  $L$  и  $R$  дужине  $n - 1$ , а притом је јасно и да из сваког таквог низа можемо једнозначно реконструисати полазну штрафту. Дакле,  $A = 2^{n-1}$ .



Оп 2019 2А 1

Слично рачунамо и број  $B$ . Број 1 је уписан у центар, а сваки следећи број је уписан или у горњем, или у десном, или у доњем, или у левом „краку“ (у једнозначно одређеном пољу). Притом, од свих ових могућности треба одузети оне које резултирају хоризонталном или вертикалном штрафтом. Све заједно, добијамо  $B = 4^{n-1} - 2A = 4^{n-1} - 2^n$ .

Коначно, посматрајмо сада хоризонталне крстове. Нека је у центру број  $k$ ,  $k \neq 1$ . Тада су бројеви од 1 до  $k$  сви на хоризонтали, па на већ виђен начин израчунавамо да за њих постоји  $2^{k-1}$  могућности; за наредних  $n - k$  бројева слично као раније видимо да постоји  $4^{n-k}$  могућности од којих треба одузети оне када су сви ови бројеви поређани на хоризонтали, што је  $2^{n-k}$  распореда. Све заједно, ако је у центру број  $k$ , укупан број могућности тада износи  $2^{k-1}(4^{n-k} - 2^{n-k})$ .

Сада имамо све што је неопходно да приведемо рачун крају:

$$\begin{aligned} 2A + B + 2C &= 2^n + (4^{n-1} - 2^n) + 2 \left( \sum_{k=2}^n 2^{k-1}(4^{n-k} - 2^{n-k}) \right) = 4^{n-1} + 2^n \left( \sum_{k=2}^n (2^{n-k} - 1) \right) \\ &= 4^{n-1} + 2^n \left( \sum_{i=0}^{n-2} 2^i - (n-1) \right) = 4^{n-1} + 2^n(2^{n-1} - 1 - n + 1) = 4^{n-1} + 2^n(2^{n-1} - n). \end{aligned}$$

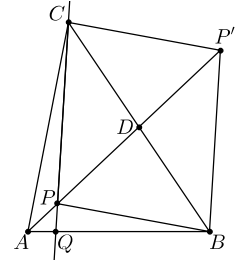
### Трећи разред – А категорија

1. Приметимо:

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x - 2}{4x^2 - 7x + 3} = \frac{\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} - 2}{4x^2 - 7x + 3} = \frac{\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x + 1}{(4x^2 - 7x + 3) \operatorname{tg} x} = \frac{(\operatorname{tg} x - 1)^2}{(4x - 3)(x - 1) \operatorname{tg} x}.$$

Како важи  $3 < \pi < 4$ , тј.  $\frac{3}{4} < \frac{\pi}{4} < 1$ , израз  $(4x - 3)(x - 1)$ , тј.  $4(x - \frac{3}{4})(x - 1)$ , има негативну вредност за  $x$  из околине тачке  $\frac{\pi}{4}$ . С друге стране,  $(\operatorname{tg} x - 1)^2$  и  $\operatorname{tg} x$  су ненегативни за  $x$  из околине тачке  $\frac{\pi}{4}$ . Према томе, функција  $f(x)$  је негативна за  $x$  из околине  $\frac{\pi}{4}$  и  $x \neq \frac{\pi}{4}$ . Одговарајући исечак је онај који је дат на слици скроз десно.

2. Посматрајмо тачку  $P'$  централносиметричну тачки  $P$  у односу на тачку  $D$ . Четвороугао  $BPCP'$  је паралелограм, па важи  $BP' \parallel PQ$ . Како је  $\triangle ABP'$  једнаокрак (због  $BP' = CP = AB$ ), следи  $\angle APQ = \angle AP'B = \angle P'AB = \angle PAQ$ , тј.  $AQ = PQ$ .



3. Докажимо најпре  $A_d = B_d$ . Довољно је доказати да је придруживање

$$(b_1, b_2, \dots, b_k) \mapsto (b_1 + b_2 + \dots + b_k, b_2 + \dots + b_k, \dots, b_{k-1} + b_k, b_k)$$

бијекција између скупа  $k$ -торки које урачунавамо у  $B_d$  и скупа  $k$ -торки које урачунавамо у  $A_d$ . И заиста, ово лако следи из  $n \geq b_1 + b_2 + \dots + b_k \geq b_2 + \dots + b_k \geq \dots \geq b_{k-1} + b_k \geq b_k \geq 0$  и

Оп 2019 3А 2

$$(b_1 + b_2 + \dots + b_k) + (b_2 + \dots + b_k) + \dots + (b_{k-1} + b_k) + b_k = b_1 + 2b_2 + \dots + kb_k = d.$$

Докажимо сада и  $B_d = B_{kn-d}$ . Показаћемо да је придруживање

$$(b_1, b_2, \dots, b_k) \mapsto (b_{k-1}, b_{k-2}, \dots, b_2, b_1, n - b_1 - \dots - b_k)$$

бијекција између скупова  $k$ -торки које бројимо с леве, односно десне стране. И заиста, ово лако следи из чињенице да сума свих координата у  $k$ -торки с десне стране износи  $n - b_k$ , што јесте не веће од  $n$ , и

$$b_{k-1} + 2b_{k-2} + \dots + (k-1)b_1 + k(n - b_1 - \dots - b_k) = kn - b_1 - 2b_2 - \dots - (k-2)b_{k-2} - (k-1)b_{k-1} - kb_k = kn - d.$$

4. Може 99, нпр. за  $a_1 = 1$  и  $a_i = 2i - 2$  за  $i = 2, \dots, 100$ . Тада имамо  $b_1 = b_2 = 3$  и  $b_i = a_i + 1 = 2i - 1$  за  $i \geq 3$ .

Докажимо сада да међу бројевима  $b_i$  увек мора бити бар 99 различитих. Узмимо, без умањења општости,  $a_1 < a_2 < \dots < a_{100}$ . Означимо

$$d_i = \text{НЗД}(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{100}).$$

Нека је  $d_k$  највећи међу бројевима  $d_i$ . Сви бројеви осим можда  $a_k$  су дељиви са  $d_k$ , па за  $j > i$  и  $i, j \neq k$  важи  $a_j - a_i \geq d_k \geq d_i$ , тј.  $b_j > a_j \geq b_i$ . Дакле, свих 99 бројева  $b_i$  за  $i \neq k$  су различити.

5. а) *Прво решење.* Нека је  $n$  непаран природан број. Уколико би се он могао представити у облику  $p^q + q^r$ , тада би морало важити  $p = 2$  или  $q = 2$ . У првом случају имамо  $n = 2^q + q^r \equiv 2^q \equiv 2 \pmod{q}$ , па ако за  $n$  одаберемо број облика  $3^k + 2$ , за њега би морало важити  $q = 3$ ; одатле би следило  $3^k + 2 = 2^3 + 3^r = 8 + 3^r$ , тј.  $3^{k-1} = 2 + 3^{r-1}$ ,

а одавде имамо  $r = 1$ , што је немогуће ( $r$  мора бити прост број). Дакле, ниједан број облика  $3^k + 2$  се не може представити у облику  $2^q + q^r$ . Размотримо сада случај  $q = 2$ , тј.  $n = p^2 + 2^r$ . Тада, због  $r \geq 2$ , важи  $n \equiv p^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$ . Дакле, ниједан број који даје остатак 2 или 3 при дељењу са 4 се не може представити у облику  $p^2 + 2^r$ .

Приметимо да уколико за  $n$  узмемо број облика  $9^l + 2$  за произвољан ненегативан цео број  $l$ , важи  $n = 3^{2l} + 2$  и  $n \equiv 1 + 2 = 3 \pmod{4}$ , па се он не може представити ни у облику  $2^q + q^r$ , ни у облику  $p^2 + 2^r$ . Како постоји бесконачно много бројева овог облика, овим је тврђење доказано.

*Друго решење.* Нека је  $n$  природан број облика  $6k + 5$ . Уколико би се он могао представити у облику  $p^q + q^r$ , тада би морало важити  $p = 2$  или  $q = 2$  (али не оба). У првом случају имамо  $2^q \equiv 2 \pmod{6}$  и одатле  $5 \equiv n = 2^q + q^r \equiv 2 + q^r \pmod{6}$ , те сада из  $q^r \equiv 3 \pmod{6}$  добијамо да је једина могућност  $q = 3$ . У другом случају имамо  $p^2 + 2^r = n \equiv 5 \pmod{6}$ ; једна могућност је  $r = 2$ , а ако је  $r$  непаран прост број, имамо  $2^r \equiv 2 \pmod{6}$  и онда  $5 \equiv p^2 + 2^r \equiv p^2 + 2 \pmod{6}$ , те у овом случају мора важити  $p^2 \equiv 3 \pmod{6}$ , тј.  $p = 3$ .

Дакле, сумирајмо: ако се број  $n$  облика  $6k + 5$  може представити у траженом облику, тада мора важити једно од:  $n = 2^3 + 3^r = 3^r + 8$ ,  $n = p^2 + 2^2 = p^2 + 4$  или  $n = 3^2 + 2^r = 2^r + 9$  (и  $r \neq 2$ ). Приметимо, ако би додатно важило  $n \equiv 7 \pmod{8}$ , тада су сва ова три случаја немогућа (први се своди  $3^r \equiv 7 \pmod{8}$ , али лева страна је увек 3 или 1 по модулу 8; други се своди на  $p^2 \equiv 3 \pmod{8}$ , али потпуни квадрати никада не дају остатак 3 при дељењу са 8; трећи се своди на  $7 \equiv 9 \pmod{8}$ , где смо користили  $2^r \equiv 0 \pmod{8}$  због  $r \neq 2$ ). Дакле, довољно је утврдити да постоји бесконачно много бројева облика  $6k + 5$  који дају остатак 7 при дељењу са 8, а такви су сви бројеви облика  $24l + 23$ .

б) Сваки природан број облика  $4k$  се може представити у облику  $2^2 + 2^2 + \dots + 2^2$ ; сваки природан број облика  $4k + 1$  за  $k \geq 4$  може се представити у облику  $2^2 + 2^2 + \dots + 2^2 + 2^3 + 3^2$ ; сваки природан број облика  $4k + 2$  за  $k \geq 8$  може се представити у облику  $2^2 + 2^2 + \dots + 2^2 + 2^3 + 3^2 + 2^3 + 3^2$ ; сваки природан број облика  $4k + 3$  за  $k \geq 12$  може се представити у облику  $2^2 + 2^2 + \dots + 2^2 + 2^3 + 3^2 + 2^3 + 3^2 + 2^3 + 3^2$ . Дакле, постоји само коначно много природних бројева који се не могу представити у облику траженом у поставци задатка.

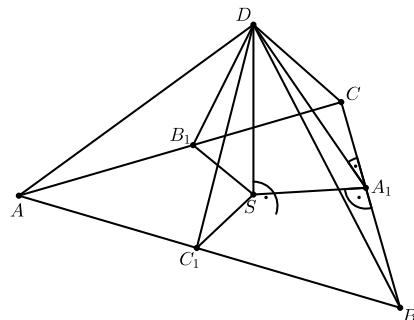
#### Четврти разред – А категорија

1. Нека је  $S$  подножје висине из  $D$ . Нека су  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  подножја нормала из  $S$  редом на  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$ . На основу теореме о три нормале, и  $DA_1$ ,  $DB_1$  и  $DC_1$  су нормалне, редом, на  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$ . Одатле,  $\angle DA_1S$ ,  $\angle DB_1S$  и  $\angle DC_1S$  су диједарски углови с ивицама  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$ , па су они, по услову задатка, међусобно подударни; означимо их са  $\theta$ . Сада по ставу УСУ имамо  $\triangle DSA_1 \cong \triangle DSB_1 \cong \triangle DSC_1$  (сви имају заједничку страну  $DS$ , један прав угао, и један угао  $\theta$ ). Одатле следи  $SA_1 = SB_1 = SC_1 = r$  (тј.  $S$  је центар кружнице уписане у  $\triangle ABC$ , јер је  $S$  унутар  $\triangle ABC$ ) и  $DA_1 = DB_1 = DC_1 = h$ , а такође и  $\frac{r}{h} = \cos \theta$ . Сада имамо  $\frac{P(\triangle SAB)}{P(\triangle DAB)} = \frac{P(\triangle SAC)}{P(\triangle DAC)} = \frac{P(\triangle SBC)}{P(\triangle DBC)} = \frac{r}{h} = \cos \theta$  (јер су  $r$  и  $h$ , респективно, висине у одговарајућим троугловима на  $AB$ ,  $AC$  и  $BC$ ), па следи  $P(\triangle SAB) = 15 \cos \theta$ ,  $P(\triangle SAC) = 13 \cos \theta$  и  $P(\triangle SBC) = 14 \cos \theta$ , а одатле  $21 = P(\triangle ABC) = P(\triangle SAB) + P(\triangle SAC) + P(\triangle SBC) = 15 \cos \theta + 13 \cos \theta + 14 \cos \theta = 42 \cos \theta$ . Добијамо  $\cos \theta = \frac{1}{2}$ , тј.  $\theta = 60^\circ$ , и  $P(\triangle SAB) = \frac{15}{2}$ ,  $P(\triangle SAC) = \frac{13}{2}$  и  $P(\triangle SBC) = 7$ .

Из горњих односа следи и  $AB : AC : BC = 15 : 13 : 14$  (јер  $\triangle SAB$ ,  $\triangle SAC$  и  $\triangle SBC$  сви имају висину  $r$ , а површине су им у наведеној пропорцији). Означимо  $AB = 15x$ ,  $AC = 13x$  и  $BC = 14x$ . Из Хероновог обрасца имамо  $21 = P(\triangle ABC) = \sqrt{21x \cdot 7x \cdot 8x \cdot 6x} = 84x^2$ , одакле следи  $x = \frac{1}{2}$ , тј. нпр.  $AB = \frac{15}{2}$ . Сада имамо  $h = \frac{2P(\triangle DAB)}{AB} = \frac{30}{\frac{15}{2}} = 4$ , и онда из  $\triangle DSC_1$  добијамо  $DS = h \sin \theta = 4 \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$ . Коначно, запремина тетраедра износи:  $V = \frac{DS \cdot P(\triangle ABC)}{3} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 21}{3} = 14\sqrt{3}$ .

2. Таква константа не постоји. Претпоставимо супротно: нека је  $c$  једна таква константа, и означимо  $x_n = cn - (\text{brc}(1) + \text{brc}(2) + \dots + \text{brc}(n))$ . По претпоставци, сваки члан низа  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  је позитиван. Означимо  $y_n = x_{n+1} - x_n = c - \text{brc}(n+1)$ . Почевши од неког индекса  $n$  важи  $y_n < 0$ , па је од тог индекса низ  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  опадајући, самим тим, овај низ је ограничен одозго. Како важи  $y_n \rightarrow -\infty$ , а низ  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  је ограничен одозго, важиће и  $y_n + x_n \rightarrow -\infty$  за  $n \rightarrow \infty$ , али  $y_n + x_n = x_{n+1}$ , што је контрадикција.

3. Посматрајмо два града, Апатин и Босилеград. Означимо са  $\mathcal{A}$  скуп свих градова у које се може стићи из Апатина (не обавезно директно), укључујући и Апатин; нека њих има  $n$ . Из сваког града излази 25 линија, али све остају унутар скупа  $\mathcal{A}$ , тј. ниједна не иде напоље (јер би се у супротном и до тог града ван скупа  $\mathcal{A}$  могло стићи из Апатина, па би, по дефиницији скупа  $\mathcal{A}$ , и тај град био у њему). Дакле, унутар  $\mathcal{A}$  укупно има тачно  $25n$  линија, али јасно је да их укупно не може бити више од  $\binom{n}{2}$ , па следи  $25n \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ , тј.  $n \geq 51$ . Аналогно, скуп  $\mathcal{B}$  градова из којих се може доћи до Босилеграда, укључујући и сам Босилеград, има бар 51 елемент. Према томе, скупови  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  имају заједнички елемент, и преко њега се може доћи из Апатина у Босилеград.



Оп 2019 4А 1

4. *Прво решење.* Означимо  $AB = CQ = b$  и  $AE = DQ = e$ . Из познате особине симетрале угла имамо  $\frac{PB}{PE} = \frac{AB}{AE} = \frac{b}{e} = \frac{QC}{QD}$ . Нека се  $XY$  и  $PQ$  секу у тачки  $R$ . Тада имамо:

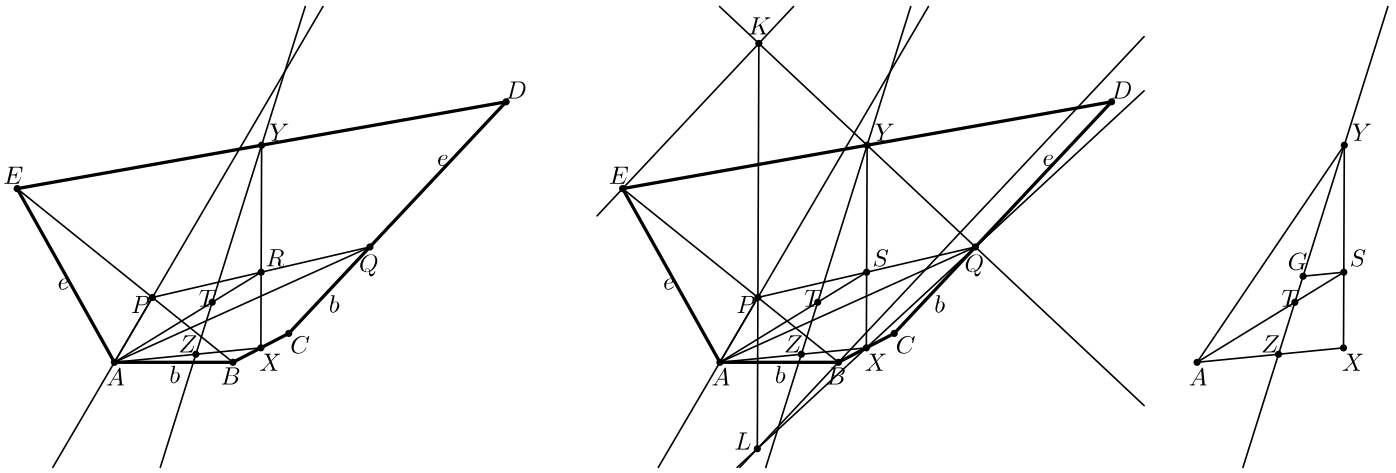
$$\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{RQ} = \frac{e\overrightarrow{RB} + b\overrightarrow{RE}}{b+e} + \frac{e\overrightarrow{RC} + b\overrightarrow{RD}}{b+e} = \frac{e(\overrightarrow{RB} + \overrightarrow{RC}) + b(\overrightarrow{RE} + \overrightarrow{RD})}{b+e} = \frac{2e\overrightarrow{RX} + 2b\overrightarrow{RY}}{b+e},$$

па како вектор с леве стране лежи на правој  $PQ$ , а вектор с десне стране лежи на правој  $XY$ , следи да оба та вектора морају бити  $\vec{0}$ ; другим речима,  $\overrightarrow{RP} = -\overrightarrow{RQ}$  и  $e\overrightarrow{RX} = -b\overrightarrow{RY}$ , одакле следи да је  $R$  средиште дужи  $PQ$ , као и да важи пропорција  $\frac{RX}{RY} = \frac{b}{e}$ . Сада примећујемо и да су тачке  $A$ ,  $T$  и  $R$  колинеарне и да важи  $\frac{RT}{TA} = \frac{1}{2}$ . Применом Менелајеве теореме на  $\triangle AXR$  и праву  $YZ$  добијамо:

$$-1 = \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZX}} \cdot \frac{\overrightarrow{XY}}{\overrightarrow{YR}} \cdot \frac{\overrightarrow{RT}}{\overrightarrow{TA}} = \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZX}} \cdot \left(-\frac{b+e}{e}\right) \cdot \frac{1}{2},$$

одакле следи

$$\frac{AZ}{ZX} = \frac{2e}{b+e} = \frac{2AE}{AB+AE}.$$



Оп 2019 4А 4

*Друго решење.* Означимо  $AB = CQ = b$  и  $AE = DQ = e$ , и нека је  $S$  средиште дужи  $PQ$ . Даље, нека права кроз  $E$  паралелна са  $CD$  сече праву  $QY$  у тачки  $K$ , а права кроз  $B$  паралелна са  $CD$  сече праву  $QX$  у тачки  $L$ . Очигледно важи  $\triangle YQD \cong \triangle YKE$  и  $\triangle XQC \cong \triangle XLB$ , одакле следи  $KY = YQ$ ,  $LX = XQ$ ,  $KE = QD = e$  и  $LB = QC = b$ . Како је  $AP$  симетрала  $\angle BAE$ , следи  $\frac{EP}{PB} = \frac{e}{b} = \frac{KE}{LB}$ . Из овога и  $KE \parallel CD \parallel LB$  следи  $\triangle PEK \sim \triangle PBL$ , одакле добијамо  $\angle KPE = \angle LPB$ , тј. тачке  $K$ ,  $P$  и  $L$  су колинеарне. Даље,  $XY$  је средња линија  $\triangle LQK$ , па како је  $S$  средиште дужи  $PQ$ , следи да  $S$  припада правој  $XY$  (тј.  $PQ$  и  $XY$  се секу у тачки  $S$ ). Уз то, из  $XY \parallel LK$  имамо  $\frac{SX}{SY} = \frac{PL}{PK} = \frac{LB}{KE} = \frac{b}{e}$ . Посматрајмо сада  $\triangle AYX$ . Нека паралела из  $S$  сече  $YZ$  у  $G$ . Из  $\triangle SGT \sim \triangle AZT$  следи  $\frac{GS}{ZA} = \frac{ST}{AT} = \frac{1}{2}$ , тј.  $GS = \frac{ZA}{2}$ . Даље, из  $\triangle YGS \sim \triangle YZX$  добијамо  $\frac{ZX}{GS} = \frac{XY}{SY} = \frac{XS+SY}{SY} = \frac{XS}{SY} + 1 = \frac{b}{e} + 1 = \frac{b+e}{e}$ , тј.  $\frac{ZX}{ZA} = \frac{b+e}{e}$ . Дакле,

$$\frac{AZ}{ZX} = \frac{2e}{b+e} = \frac{2AE}{AB+AE}.$$

5. Означимо  $S = \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}$ . Важи  $S^2 = b+c+d+2\sqrt{bc}+2\sqrt{bd}+2\sqrt{cd} \leq b+c+d+(b+c)+(b+d)+(c+d) = 3(b+c+d) \leq 3$ , те имамо  $S \leq \sqrt{3}$ .

Приметимо,  $6M = (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-b)^2$ . Притом важи

$$(b-c)^2 = (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 = (b+c+2\sqrt{bc})(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \leq 2(b+c)(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \leq 2(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 = 2b+2c-4\sqrt{bc}$$

и, аналогно,  $(c-d)^2 \leq 2c+2d-4\sqrt{cd}$  и  $(d-b)^2 \leq 2d+2b-4\sqrt{db}$ , па сабирањем следи

$$a+M \leq (1-b-c-d) + \frac{2}{3}(b+c+d-\sqrt{bc}-\sqrt{cd}-\sqrt{db}) \leq 1 - \frac{1}{3}(b+c+d+2\sqrt{bc}+2\sqrt{cd}+\sqrt{db}) = 1 - \frac{1}{3}S^2.$$

Остаје доказати неједнакост  $\sqrt{1 - \frac{1}{3}S^2} + S \leq 2$ , тј.  $\sqrt{1 - \frac{1}{3}S^2} \leq 2 - S$ . Након квадрирања остаје  $1 - \frac{1}{3}S^2 \leq 4 - 4S + S^2$ , тј.  $4S^2 - 12S + 9 \geq 0$ , а ово јесте задовољено због  $4S^2 - 12S + 9 = (2S - 3)^2 \geq 0$ .

## Први разред – Б категорија

1. а) Највећи број који се може саставити од ове четири цифре је 9921; како је он дељив са 3, то је управо тражени одговор.

б) Уколико на прве две позиције слева ставимо две највеће цифре, тј. 99, како  $3 \mid 9 + 9$ , закључујемо да на преостале две позиције морају доћи две цифре чији је збир дељив са 3 (како би цео број био дељив са 3), а што оставља могућности 21, 12 и 00. Дакле, 9921, 9912 и 9900 су највећа три четвороцифрена броја дељива са 3 која се могу саставити од понуђених цифара, па следи да четврти највећи број има на другој позицији цифру различиту од 9. Следећа највећа цифра коју можемо ставити на другу позицију је 2, па уколико на трећу позицију ставимо цифру 9 (с циљем да број буде што већи), на четврту позицију онда мора доћи цифра 1 (због дељивости са 3). Дакле, одговор је 9291.

2. Означимо са  $x$  укупан број становника на претходном попису 3019. Мушкараца је било  $\frac{5}{8}$ , а од њих је 10% имало 75 или више година, што чини  $\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{10} x = \frac{x}{16}$ . Жена је било укупно  $\frac{3}{8}$ , а од њих је 4% имало 75 или више година, што чини  $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{100} x = \frac{3x}{200}$ . Дакле, укупно је било  $\frac{x}{16} + \frac{3x}{200} = \frac{31x}{400}$  особа са 75 или више година. Како овај број представља 7% нове популације, која је за 300 већа од старе, имамо једначину  $\frac{31x}{400} = \frac{7}{100}(x + 300)$ , што се своди на  $3x = 8400$ , тј.  $x = 2800$ . Дакле, Горње Зуце је на попису 3019. имало 2800 становника.

3. Постоји. Узмимо нпр.  $a = b = 2019,9$  и  $c = 4039$ . Како важи  $a + b = 4039,8 > c$ , постоји троугао са страницама  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Међутим, имамо  $[a] + [b] = 2019 + 2019 = 4038 < 4039 = [c]$ , те овако одабрани бројеви  $a$ ,  $b$  и  $c$  испуњавају услове задатка.

4. Одговор: 20 недеља. Нека је  $a$  почетна количина траве на ливади, а  $b$  количина траве која израсте у току једне недеље. Означимо са  $p$  и  $q$ , редом, количину траве коју у току једне недеље попасе једна бела, односно црна крава. Услове задатка сада можемо превести у једначине  $a + 5b = 5(p + 2q)$  и  $a + 2b = 2(3p + 4q)$ . Из прве једначине следи  $p = \frac{a+5b-10q}{5}$ , па уврштавањем овога у другу добијамо  $a + 2b = 6 \cdot \frac{a+5b-10q}{5} + 8q$ , што се своди на  $5a + 10b = 6a + 30b - 20q$ , тј.  $a + 20b = 20q$ . Међутим, ово значи управо да је количина траве обезбеђена на ливади током 20 недеља тачно довољна да једна црна крава пасе 20 недеља, чиме је задатак решен.

5. Страну за Весну и Горана можемо изабрати на 2 начина, позицију њих као пара на 3 начина и њихов међусобни распоред на 2 начина, тј. њих можемо распоредити на 12 начина. Ако Ана и Бане седе са супротне стране у односу на Весну и Горана, можемо их распоредити на  $12(= 4 \cdot 3)$  начина; ако Ана и Бане седе са исте стране као Весна и Горан, можемо их распоредити на 2 начина; ако Ана и Бане седе са различитих страна, тада позицију на страни где су Весна и Горан можемо одабрати на 2 начина, затим ко ће од њих двоје бити на тој позицији на 2 начина, и коначно позицију за другу особу на 3 начина. Дакле, Ану и Банета можемо распоредити на  $12 + 2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 26$  начина. За остала 4 госта постоје 4 слободна места, тако да њих можемо распоредити на  $4!$  начина. Коначно, укупан број распореда је  $12 \cdot 26 \cdot 4! = 7488$ .

## Други разред – Б категорија

1. Посматрани израз можемо записати у облику  $(2016 - 3)(2016 - 1)(2016 + 1)(2016 + 3) + 16$ . Множећи 1. заграду са 4. а 2. са 3. добијамо да је тај израз даље једнак:

$$(2016^2 - 3^2)(2016^2 - 1^2) + 16 = 2016^4 - 10 \cdot 2016^2 + 9 + 16 = 2016^4 - 10 \cdot 2016^2 + 25 = (2016^2 - 5)^2,$$

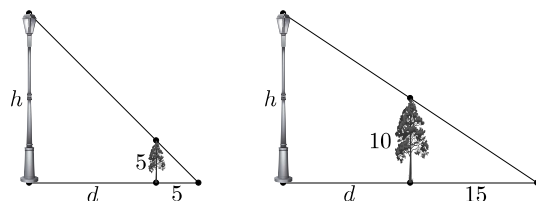
што је и требало доказати.

2. Да би посматрани израз био позитиван за сваки реалан број  $x$ , коефицијент уз водећи члан мора бити позитиван, тј.  $k > 0$ , и дискриминанта мора бити негативна, тј.

$$0 > (4k)^2 - 4k(k^2 + 2k - 3) = -4k^3 + 8k^2 + 12k = -4k(k^2 - 2k - 3) = -4k(k + 1)(k - 3).$$

Имајући у виду ранији услов  $k > 0$ , ово се своди на  $(k + 1)(k - 3) > 0$ , тј.  $k \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ . Будући да нас занимају само позитивне вредности  $k$ , коначно решење задатка је  $k \in (3, \infty)$ .

3. Нека је  $d$  растојање од дрвета до бандере, а  $h$  висина бандере. Имамо  $h : (d + 5) = 5 : 5$  и  $h : (d + 15) = 10 : 15$ . Одатле следи  $d + 5 = h$  и  $d + 15 = \frac{3}{2}h$ , па добијамо  $h + 10 = \frac{3}{2}h$  и  $h = 20$ . Дакле, бандера је висока 20 метара.

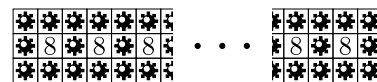


Оп 2019 2Б 3

4. *Прво решење.* Приметимо, ако је  $(x, y)$  једно решење посматраног система, онда су решења и парови  $(-x, -y)$ ,  $(y, x)$  и  $(-y, -x)$ . Како систем мора имати тачно два решења, неки од ових парова морају бити једнаки. У случају  $(x, y) = (-x, -y)$  добијамо  $x = y = 0$ , што очигледно није решење. У случају  $(x, y) = (-y, -x)$  добијамо  $x = -y$ , тј.  $x + y = 0$ , па очигледно ни ово није решење. Дакле, остаје  $(x, y) = (y, x)$ , тј.  $x = y$ . Тада се прва једначина своди на  $(2x)^2 = 12$ , тј.  $x = \pm\sqrt{3}(=y)$ , а из друге онда добијамо  $2(a + 1) = 2x^2 = 6$ , тј.  $a = 2$ . Дакле, једина таква вредност параметра  $a$  јесте  $a = 2$ , и тада систем има решења  $(x, y) \in \{(\sqrt{3}, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3})\}$ .

*Друго решење.* Одузимањем друге једначине од прве добијамо  $2xy = 10 - 2a$ . У случају  $a = 5$  следило би  $x = 0$  или  $y = 0$ , те бисмо уврштавањем овога у прву једначину добили 4 решења:  $(x, y) \in \{(0, 2\sqrt{3}), (0, -2\sqrt{3}), (2\sqrt{3}, 0), (-2\sqrt{3}, 0)\}$ . Дакле, вредност  $a = 5$  нам не одговара. Надаље претпостављамо  $a \neq 5$ . Тада можемо изразити  $y = \frac{5-a}{x}$ . Уврштавањем овога у другу једначину добијамо  $x^2 + (\frac{5-a}{x})^2 = 2(a+1)$ , тј.  $x^4 - 2(a+1)x^2 + 25 - 10a + a^2 = 0$ . Уведимо смену  $x^2 = t$ . Да би претходна једначина имала тачно два решења за  $x$ , једначина након смене:  $t^2 - 2(a+1)t + 25 - 10a + a^2 = 0$  мора имати тачно једно решење  $t$ , што значи да њена дискриминанта мора бити 0. Дискриминанта износи  $4(a+1)^2 - 100 + 40a - 4a^2 = 48a - 96$ , па је она једнака нули једино за  $a = 2$ . Тада имамо  $t = \frac{2(a+1)}{2} = 3$  и одатле  $x = \pm\sqrt{t} = \pm\sqrt{3}$ , а потом и  $y = \frac{3}{x} = \pm\sqrt{3}$ . Дакле, једина таква вредност параметра  $a$  јесте  $a = 2$ , и тада систем има решења  $(x, y) \in \{(\sqrt{3}, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3})\}$ .

5. а) Одговор: да. Одаберимо  $a = 3$  и  $b = 2 \cdot 2019 + 1 = 4039$ , и распоредимо mine као на цртежу горе. (Заправо, могуће је на било каквој табли  $a \times b$ , где су  $a$  и  $b$  довољно велики бројеви, одабрати произвољних 2019 поља која нису на ивици и међу којима никоја два нису суседна, и на сва преостала поља поставити mine.)



Слично, из  $\text{НЗД}(a, b) = 10$  следи да  $a$  и  $b$  нису истовремено дељиви са 3, а из  $\text{НЗД}(a, b + 2) = 12$  следи да је  $a$  дељив са 3, онда  $b$  није дељив са 3. Дакле,  $a$  и  $3b$  су дељиви са 3, али  $3b$  није дељив са 9, па из тога и  $\text{НЗД}(a, b) = 10$  добијемо  $\text{НЗД}(a, 3b) = 30$ .

Дакле,  $\text{НЗД}(a, 2b) + \text{НЗД}(a, 3b) = 20 + 30 = 50$ .

4. Страну за Весну и Горана можемо изабрати на 2 начина, позицију њих као пара на 3 начина и њихов међусобни распоред на 2 начина, тј. њих можемо распоредити на 12 начина. Распоредимо сада Ану и Банета. На страни где су Весна и Горан постоје два слободна места, па позицију Ане и Банета можемо одабрати на два начина, а затим и ко ће седети с које стране на два начина. Дакле, њих можемо распоредити на 4 начина. За остала 4 госта постоје 4 слободна места, тако да њих можемо распоредити на  $4!$  начина. Коначно, укупан број распореда је  $12 \cdot 4 \cdot 4! = 1152$ .

5. а) Помножимо обе стране почетне једнакости са  $\log_{2018} 2019$ . Користећи формулу  $\log_a 2018 \cdot \log_{2018} 2019 = \log_a 2019$  (и слично за  $\log_b 2018$  и  $\log_c 2018$ ) одмах добијемо тражену једнакост.

б) Из почетне једнакости следи

$$b^{\log_a 2018 + \log_c 2018} = b^{2 \log_b 2018} = (b^{\log_b 2018})^2 = 2018^2.$$

Сада одатле добијемо

$$\begin{aligned} a^2 &= (2018^{\log_{2018} a})^2 = (2018^2)^{\log_{2018} a} = (b^{\log_a 2018 + \log_c 2018})^{\log_{2018} a} = b^{\log_a 2018 \cdot \log_{2018} a + \log_c 2018 \cdot \log_{2018} a} \\ &= b^{1 + \log_c a} = (b^{\log_b c + \log_b a})^{\log_c b} = (b^{\log_b c} \cdot b^{\log_b a})^{\log_c b} = (ca)^{\log_c b}, \end{aligned}$$

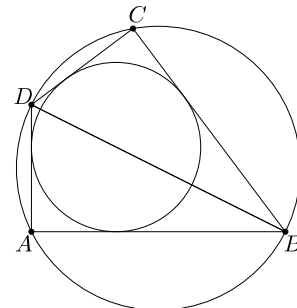
што је и требало показати.

#### Четврти разред – Б категорија

1. Приметимо,  $1 + 9 + 0 + 1 + 2 + 0 + 1 + 9 = 23$ . Да би састављени број био дељив са 9, и његов збир цифара мора бити дељив са 9. Дакле, збир цифара бројева које посматрамо мора износити 9 или 18, тј. неискоришћене цифре у збиру морају давати 14 или 5. Неискоришћених цифара, по услову задатка, може бити највише 4. Приметимо да никоје 4 нити мање од ових цифара не могу давати збир 14 (заиста, у том случају би међу њима морала бити цифра 9, и још највише три цифре које у збиру дају 5, али број 5 се не може добити као збир три од ових цифара). Даље, број 5 се као збир највише четири од ових цифара може добити на једнозначан начин:  $2 + 1 + 1 + 1$ . Одатле, једини начин да од ових цифара саставимо бар четвороцифрен број дељив са 9 јесте да одбацимо цифре 2, 1, 1, 1 и број саставимо од преосталих цифара: 9, 9, 0, 0. На првој позицији слева мора бити цифра 9, а за наредне три позиције имамо 3 могућности (у зависности од тога на којој од њих је преостала цифра 9). Дакле, постоје укупно 3 таква броја: 9900, 9090 и 9009.

2. Пошто решења треба да буду реална и различита, дискриминанта мора бити позитивна, тј.  $0 < (3m)^2 - 16(m + 1)m = -7m^2 - 16m = -m(7m + 16)$ , одакле добијемо  $m \in (-\frac{16}{7}, 0)$ . Нека су  $x_1$  и  $x_2$  решења посматране једначине. Из Вијетових формула имамо  $x_1 + x_2 = \frac{3m}{m+1}$  и  $x_1 x_2 = \frac{4m}{m+1}$ . Како оба решења треба да буду већа од  $-1$ , бројеви  $x_1 + 1$  и  $x_2 + 1$  морају бити позитивни, што значи  $(x_1 + 1) + (x_2 + 1) > 0$  и  $(x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$ . Одатле имамо  $0 < x_1 + x_2 + 2 = \frac{3m}{m+1} + 2 = \frac{5m+2}{m+1}$  и  $0 < x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 = \frac{4m}{m+1} + \frac{3m}{m+1} + 1 = \frac{8m+1}{m+1}$ . Прва неједнакост се своди на  $m \in (-\infty, -1) \cup (-\frac{2}{5}, \infty)$ , а друга на  $m \in (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{8}, \infty)$ . Дакле, узимајући пресек сва три добијена скупа за  $m$ , добијемо да је коначно решење задатка:  $m \in (-\frac{16}{7}, -1) \cup (-\frac{1}{8}, 0)$ .

3. У сваком тангентном четвороуглу важи  $AB + CD = AD + BC$ , па сабирањем ове једнакости с оном датом у поставци добијемо  $2AB = 2BC$ , тј.  $AB = BC$ . Аналогно,  $AD = DC$ . Сада из става ССС добијемо  $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ , одакле закључујемо  $\angle DAB = \angle DCB$ . Но, како је четвороугао  $ABCD$  такође тетиван а  $\angle DAB$  и  $\angle DCB$  су два његова наспрамна угла, њихов збир износи  $180^\circ$ , па следи да су  $\angle DAB$  и  $\angle DCB$  прави углови. Дакле, тачке  $A$  и  $C$  леже на кружници над пречником  $BD$ , што је и требало доказати.



Оп 2019 4Б 3

4. Нека су  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  решења постављене једначине,  $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ . Из Вијетових формула имамо  $x_1 + x_2 + x_3 = 3a$ ,  $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 2a^2 + 5$  и  $x_1 x_2 x_3 = 2a^2 - 3$ . Како решења треба да чине аритметичку прогресију, можемо записати  $x_1 = x_2 - d$  и  $x_3 = x_2 + d$  за неки реалан број  $d$ ,  $d \geq 0$ . Тада се претходне три формуле свде на

$$3x_2 = 3a, \quad 3x_2^2 - d^2 = 2a^2 + 5 \quad \text{и} \quad x_2^3 - x_2 d^2 = 2a^2 - 3.$$



Из прве од њих одмах добијамо  $x_2 = a$ . Друге две се онда свODE на

$$d^2 = 3x_2^2 - 2a^2 - 5 = 3a^2 - 2a^2 - 5 = a^2 - 5 \quad \text{и} \quad d^2 = \frac{x_2^3 - 2a^2 + 3}{x_2} = \frac{a^3 - 2a^2 + 3}{a}.$$

Даље, уврштавањем  $x_2 = a$  у једначину из поставке задатка добијамо

$$0 = a^3 - 3a^3 + (2a^2 + 5)a - 2a^2 + 3 = 5a - 2a^2 + 3,$$

одакле следи  $a = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{-4} = \frac{-5 \pm 7}{-4}$ , тј.  $a = -\frac{1}{2}$  или  $a = 3$ . У случају  $a = -\frac{1}{2}$  следило би  $d^2 = (-\frac{1}{2})^2 - 5 = -\frac{19}{4} < 0$ , па постављена једначина не би имала сва реална решења. У случају  $a = 3$  имамо  $d^2 = 3^2 - 5 = 4$  (и  $d^2 = \frac{3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3}{3} = 4$ , што је исто), тј.  $d = 2$ ; постављена једначина тада гласи  $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$ , и њена решења су  $x_1 = x_2 - d = 3 - 2 = 1$ ,  $x_2 = 3$  и  $x_3 = x_2 + d = 3 + 2 = 5$ .

Дакле, једина таква вредност параметра  $a$  јесте  $a = 3$ .

**5.** Бројеви који у декадном запису имају тачно  $k$  цифара су управо сви природни бројеви од  $\underbrace{10 \dots 0}_{k-1 \text{ пута}}$  до  $\underbrace{99 \dots 9}_k$ , тј. од  $10^{k-1}$  до  $10^k - 1$ , и њих има  $(10^k - 1) - 10^{k-1} + 1 = 10^k - 10^{k-1}$ . Према томе, групишући једнаке сабирке добијамо:

$$\begin{aligned} \text{brc}(1) + \text{brc}(2) + \dots + \text{brc}(\underbrace{99 \dots 99}_{2019 \text{ пута}}) &= \sum_{k=1}^{2019} k(10^k - 10^{k-1}) = \sum_{k=1}^{2019} k10^k - \sum_{k=1}^{2019} k10^{k-1} = \sum_{k=0}^{2019} k10^k - \sum_{k=0}^{2018} (k+1)10^k \\ &= 2019 \cdot 10^{2019} + \sum_{k=0}^{2018} (k - (k+1))10^k = 2019 \cdot 10^{2019} - \sum_{k=0}^{2018} 10^k \\ &= 2019 \cdot (10^{2019} - 1) + 2019 - \frac{10^{2019} - 1}{9} = 2019 \cdot \underbrace{99 \dots 99}_{2019 \text{ пута}} + 2019 - \underbrace{11 \dots 11}_{2019 \text{ пута}}, \end{aligned}$$

што је и требало показати.